



Ekonomická  
fakulta  
Faculty  
of Economics

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Ekonomická fakulta  
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Diplomová práce

# Praktická aplikace modelů hromadné obsluhy

Vypracovala: Bc. Eliška Váňová  
Vedoucí práce: RNDr. Jana Klicnarová, Ph.D.

České Budějovice 2016

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Eliška VÁŇOVÁ**  
Osobní číslo: **E14724**  
Studijní program: **N6208 Ekonomika a management**  
Studijní obor: **Účetnictví a finanční řízení podniku**  
Název tématu: **Praktická aplikace modelů hromadné obsluhy**  
Zadávací katedra: **Katedra aplikované matematiky a informatiky**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem práce je, aby student aplikoval některý z modelů teorie front na reálný problém (optimalizace objednání návštěv, optimální počet rezervovaných parkovacích míst, počet pokladen apod.). Úkolem studenta bude seznámit se detailně s vybraným reálným problémem, na který lze aplikovat některou z metod hromadné obsluhy. Dále nastudovat si teorii hromadné obsluhy s důrazem na aplikaci. Poté aplikovat vhodný model na praktický problém a najít optimální řešení. Závěrem student vyhodnotí přínos optimalizace.

### Metodický postup:

1. Student si zvolí praktický problém, který lze optimalizovat s využitím teorie hromadné obsluhy a zajistí si potřebná data.
2. Student se seznámí s teorií hromadné obsluhy s důrazem na praktickou aplikaci.
3. Zvolený problém analyzuje a s využitím teorie hromadné obsluhy nalezne optimální plán.
4. Závěrem student vyhodnotí přínos své optimalizace.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Rozsah pracovní zprávy: **50 - 60 stran**  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**  
Seznam odborné literatury:


1. Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research*. (10th ed.) New York: McGraw-Hill.
2. Lukáš, L. (2009). *Pravděpodobnostní modely v managementu: Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy*. Praha: Academia.
3. Prášková, Z., & Lachout, P. (2012). *Základy náhodných procesů I*. Praha: Matfyzpress.
4. Prášková, Z. (2007). *Základy náhodných procesů II*. Praha: Karolinum.

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Jana Klicnarová, Ph.D.**  
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání diplomové práce: **9. ledna 2015**  
Termín odevzdání diplomové práce: **15. dubna 2016**

  
doc. Ing. Ladislav Rolínek, Ph.D.  
děkan

JIHOČESKÁ UNIVERZITA  
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH  
EKONOMICKÁ FAKULTA  
Studentská 13 (1)  
370 05 České Budějovice

  
prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.  
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 11. března 2015

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Analýza účetních a daňových nákladů a výnosů zpracovala samostatně, pouze s využitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47 zákona č. 111/1198 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 14. dubna 2016

.....  
Eliška Váňová

## **Poděkování**

Touto cestou bych chtěla poděkovat vedoucí mé diplomové práce RNDr. Janě Klicnarové, PhD. za odborné vedení, pomoc, připomínky a cenné rady, které mi pomohly při zpracování této diplomové práce.

## Obsah

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Náhodnost</b> .....	<b>5</b>
2.1	Stochastické procesy.....	7
2.2	Poissonův proces .....	8
2.2.1	Poissonovo rozdělení.....	9
2.3	Markovovy řetězce.....	10
2.4	Markovovy procesy se spojitým časem .....	12
<b>3</b>	<b>Teorie hromadné obsluhy</b> .....	<b>14</b>
3.1	Základní charakteristiky a parametry modelů hromadné obsluhy .....	16
3.1.1	Zdroj požadavků .....	17
3.1.2	Příchod požadavků do systému.....	18
3.1.3	Doba trvání obsluhy.....	19
3.1.4	Síť obslužných linek .....	20
3.1.5	Pravidla pro přechod z fronty do bloku obsluhy.....	22
3.1.6	Speciální rysy SHO.....	24
3.2	Analýza systémů hromadné obsluhy.....	25
3.3	Klasifikace systémů hromadné obsluhy .....	27
3.4	Procesy zrodu a zániku ( <i>birth-and-death process</i> ).....	29
3.5	Modely hromadné obsluhy založené na procesu zrodu a zániku.....	30
3.5.1	Exponenciální model jednoduché obsluhy $M/M/1$ .....	30
3.5.2	Exponenciální model vícenásobné obsluhy $M/M/s$ .....	33
3.6	Optimalizace systémů hromadné obsluhy .....	36
3.7	Statistická analýza.....	37
<b>4</b>	<b>Metodika a cíl práce</b> .....	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Praktická aplikace modelu SHO</b> .....	<b>40</b>
5.1	Stručná charakteristika vybrané společnosti.....	40
5.2	Základní informace .....	40
5.3	Parametry systému hromadné obsluhy .....	44
5.3.1	Zdroj požadavků .....	45
5.3.2	Příchod požadavků do systému.....	45

5.3.3	Doba trvání obsluhy.....	51
5.3.4	Síť obslužných linek .....	52
5.3.5	Pravidla pro přechod z fronty k obslužné lince.....	52
5.3.6	Speciální rysy systému hromadné obsluhy .....	53
<b>5.4</b>	<b>Klasifikace systému hromadné obsluhy .....</b>	<b>54</b>
<b>5.5</b>	<b>Analýza systému hromadné obsluhy.....</b>	<b>54</b>
<b>5.6</b>	<b>Optimalizace systému hromadné obsluhy .....</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b><i>Závěr.....</i></b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b><i>Summary .....</i></b>	<b>63</b>
<b>8</b>	<b><i>Seznam literatury .....</i></b>	<b>64</b>

# 1 ÚVOD

Nutnost dojít nakoupit ať už základní potraviny, oblečení, natankovat benzín či naftu do auta, zajít si ke kadeřnici nebo se dojít naobědvat do menzy – všechny tyto činnosti spojuje, mimo jiné, jedno slovo: fronta. Každý člověk, který vstoupí do obchodu, nebo student, který si zajde v mezičase na oběd do menzy, už mezi dveřmi začíná přemýšlet, jak dlouhý čas na daném místě stráví. A cíl je z jejich pohledu jednoznačný – přijít, koupit, co je třeba a zase jít, tedy dobu strávenou v obchodě zkrátit na minimum. Mezi priority poskytovatelů těchto služeb patří jak uspokojení potřeb svých zákazníků, tak zároveň dosažení vlastního cíle, za který je většinou pokládána maximalizace zisku. Toho lze dosáhnout dvěma způsoby, buď minimalizací nákladů, nebo maximalizací příjmů. Aby bylo dosaženo spokojenosti zákazníků a zároveň poskytovatelů služeb, je zapotřebí nalézt rovnováhu mezi cenou služby a hodnotou čekání.

Tento problém řeší takzvané modely teorie hromadné obsluhy, často nazývané také teorie front (Queueing Theory), či systémy hromadné obsluhy (SHO). Základy této teorie položil na počátku 20. století dánský vědec a matematik Agner Krarup Erlang, který pracoval v telefonní společnosti v Kodani, kdy jeho cílem bylo zkrátit dobu čekání volajících na spojení hovoru. Na dalším rozvoji se následně podíleli ruský matematik A. N. Kolmogorov nebo také D. G. Kendall, který klasifikoval teorie hromadné obsluhy tak, jak jsou používány dnes.

Cílem teorie hromadné obsluhy bývá popis fungování daného systému hromadné obsluhy a nalezení takového počtu obsluhujících linek, při jejichž zapojení by nedocházelo k vytváření front nebo dokonce opouštění systému (odchod zákazníka). Tyto teorie jsou proto velmi užitečné z hlediska nalezení efektivního způsobu řízení systému hromadné obsluhy. Příliš velké množství obsluhových zařízení by vedlo nadměrným nákladům a naopak příliš malé množství zařízení zase k nespokojenosti zákazníků.

A právě na aplikaci teorie hromadné obsluhy je zaměřena tato diplomová práce. Cílem je na základě údajů získaných od společnosti provozující sítě hypermarketů, supermarketů a obchodních domů, optimalizovat počet pokladen na prodejně a zefektivnit tak řízení systému hromadné obsluhy prodejny.



Společnost si nepřeje být jmenována, a proto bude pro účely této práce nazývána společností PZV.

## 2 Náhodnost

Ještě před zaměřením se na samotné systémy hromadné obsluhy, je nutné se nejdříve pozastavit také nad vysvětlením některých pojmů z oblasti teorie pravděpodobnosti, na nichž jsou stochastické modely založeny, jako jsou například náhodný pokus, náhodný jev či náhodná veličina.

V závislosti na výše uvedených příkladech systémů hromadné obsluhy (benzinka, obchody) je zřejmé, že požadavky vstupují do daného systému náhodně, tedy do systému vstoupit mohou, ale nemusí. A právě objekty, které jsou ve stochastice matematizovány, představují experimenty, jejichž průběh a výsledek závisí na náhodě. Experimenty mající tyto vlastnosti jsou označovány jako náhodné (stochastické) pokusy.

Náhodný pokus je možné definovat jako pokus, kdy při zachování stejných experimentálních podmínek nedojde k dosažení stejných výsledků. Jak uvádí Hendl ve své knize Přehled statistických metod zpracování, lze mluvit o náhodném pokusu, jestliže při pokusu lze dostat různé možné výsledky a přitom:

- nelze předem určit, který z těchto výsledků získáme;
- pokus lze libovolně často opakovat, aniž se jednotlivá opakování vzájemně ovlivňují.

Jako klasický případ náhodného pokusu je uváděn hod kostkou či házení mincí, neboť právě hod kostkou je uváděn v literatuře jako první úloha pravděpodobnosti na světě, která byla řešena.

Reálný svět je plný náhodných pokusů - hod mincí, točení kolem štěstí, pohlaví dítěte při narození, házení střevíce směrem ke dveřím o Vánocích, ruleta nebo krevní skupina náhodně zvoleného člověka. Ovšem v počtu pravděpodobnosti jako matematické teorii se mluví o hodu symetrickou mincí, o hodu kostkou, která je krychlí (ve skutečnosti neexistuje taková mince ani taková kostka), o losování sektoru pomocí ruletky, jejíž terč je kruhem, sektory jsou kruhové výseče a šipka je úsečkou. Takové náhodné pokusy si můžeme znázornit a mluvit o nich jen v teorii. Tyto zidealizované experimenty nazýváme stochastické pokusy. Provádějí se pomocí ideálních losovacích nástrojů, které již jsou geometrickými objekty. Hod symetrickou mincí tak odpovídá hodu korunou, analogicky koule

(jako geometrický útvar) odpovídá např. pingpongovému míčku. (Plocki & Tlustý, 2007)

Vedle pokusů náhodných existují ještě tzv. deterministické pokusy, kdy je při zachování stejných experimentálních podmínek, dosaženo pokaždé stejného výsledku. Kupříkladu učitel chemie ukazuje studentům stále stejný pokus, jež má pokaždé totožný výsledek. Tato charakteristika ovšem modelům hromadné obsluhy neodpovídá, proto v této práci nebudou deterministické pokusy dále řešeny.

Každému výše definovanému náhodnému pokusu lze přiřadit množinu všech jeho možných výsledků. Tato množina je označována jako množina všech náhodných jevů a pro její označení se vžil symbol  $\Omega$ . Takovouto množinou uvedeného příkladu hodů kostkou je  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ . Náhodný jev může mít podobu

- buď elementárního jevu tvořeného pouze z jednoho výsledku,
- nebo jevu složeného, jenž se skládá z více možných výsledků.

Další členění náhodného jevu je spojeno s jeho pravděpodobností označované  $p$ . Jestliže je náhodný jev  $J$  dostatečně často opakován provedením  $n$  pokusů, při nichž jev  $J$  nastal v  $m$  případech, je pravděpodobnost tohoto jevu vyjádřena jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = p(J) \quad 2.1$$

Pravděpodobnost náhodného jevu může nabývat hodnot mezi 0 a 1, přičemž jev jistý nastává, pokud se jeho pravděpodobnost rovná 1 a jev nemožný představuje situaci, kdy jeho pravděpodobnost je rovna 0.

Každá nezáporná funkce  $p$  na množině  $\Omega$  taková, že

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots + p(\omega_n) = 1, \quad 2.2$$

kde  $\omega_1, \dots, \omega_n$  vyjadřuje úplnou korelaci nezávislých jevů, je nazývána rozdělení pravděpodobnosti na množině  $\Omega$ .

Náhodná proměnná, označována někdy také jako náhodná či stochastická veličina, představuje předpis, jenž přiřazuje každému jednotlivému výsledku náhodného pokusu určité číslo. V literatuře bývá označena velkými písmeny abecedy a její jednotlivé realizace jsou určeny buď konkrétními čísly, nebo obecně malými písmeny abecedy. Důležitou roli hraje také fakt, zda se jedná o náhodnou veličinu diskrétní či spojitou. Diskrétní proměnná ( $X$ ) nabývá konečného počtu hodnot ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) za určitých pravděpodobností ( $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ),

přičemž se suma těchto pravděpodobností rovná jedné. Naopak veličina spojitá, která se v praxi nachází velmi často, může nabývat teoreticky libovolných hodnot z určitého intervalu reálných čísel.

Chování, přesněji pravděpodobnost chování, náhodné veličiny popisuje zákon rozdělení. Nejdůležitějšími parametry rozdělení jsou většinou uváděny

- očekávaná hodnota,
- rozptyl a
- směrodatná odchylka.

Očekávaná hodnota bývá označena buď jako  $E(X)$ , nebo  $\mu$  a počítá se jako součin jednotlivých hodnot  $x_i$  a příslušných pravděpodobností  $p_i$ , jedná-li se o diskrétní náhodnou veličinu. Na očekávanou hodnotu navazuje rozptyl, značený  $Var(X)$  nebo  $\sigma^2$ , který vyjadřuje očekávanou hodnotu čtverce odchylek náhodné veličiny od očekávané hodnoty. Jinak řečeno tedy rozptyl popisuje stupeň rozptýlenosti hodnot náhodné proměnné od její očekávané hodnoty. Poslední uvedený parametr, směrodatná odchylka, je používán také pro určení rozptýlenosti náhodné proměnné. Je nejčastěji označován řeckým písmenem  $\sigma$  a počítá se jako druhá odmocnina z rozptylu.

Trojice množina všech možných výsledků náhodného pokusu  $\Omega$ , náhodná proměnná ( $X$ ) a pravděpodobnost ( $p$ ) tvoří dohromady tzv. pravděpodobnostní prostor.

Všechny uvedené charakteristiky lze závěrem vysvětlit na příkladu hodu kostkou. Házení hrací kostkou bude mít za výsledek jednu ze šesti stran, tedy množina všech náhodných výsledků je 1,2,3,4,5 a 6, přičemž tato čísla vyjadřují hodnoty diskrétní náhodné proměnné. Elementární jev může být například jev, že padne číslo 2, přičemž počet všech elementárních jevů je šest. Situace, kdy padne liché číslo, označená jako jev  $J$ , představuje jev složený tvořený 3 elementárními jevy (kostka má na třech stranách ze šesti liché číslo). Pravděpodobnost, že padne liché číslo je tedy snadno spočitatelná dle vzorce 2.2, resp.  $3/6 = 0,5$ .

## 2.1 Stochastické procesy

Nechť  $(\Omega, A, P)$  je pravděpodobnostní prostor, nechť  $T \subset R$ . Rodina reálných náhodných veličin  $\{X_t, t \in T\}$  definovaných na  $(\Omega, A, P)$  se nazývá

náhodný proces. V případě, že  $T = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  nebo  $T = N_0 = \{0, 1, \dots\}$ , mluvíme o procesu s diskrétním časem nebo o časové řadě. Pokud  $T = [a, b]$ , kde  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , říkáme, že  $\{X_t, t \in T\}$  je proces se spojitým časem. (Prášková & Lachout, 2001) Jinak řečeno pro každé  $t$  z indexové množiny  $T$  představuje  $X_t$  náhodnou veličinu, kdy je  $t$  většinou považováno za označení času, a  $X_t$ , tedy vyjadřuje stav procesu v čase  $t$ . Jako praktický příklad realizace náhodného (stochastického) procesu lze uvést měření teploty vzduchu během osmi hodin v jeden den. Přístroj umožňuje měření teploty neustále, čili se jedná o realizaci procesu ve spojitém čase. Pokud by byl tentýž úkol zadán člověku, mohl by měřit čas pouze například každou hodinu a tato realizace procesu by byla v čase diskrétním.

Kromě předchozího dělení stochastických procesů na procesy s diskrétním (pokud je  $T$  konečná nebo spočetná množina) či spojitým (jestliže je  $T$  interval) časem, existuje také členění dle toho, jakých hodnot nabývají veličiny  $X_t$ , na

- stochastický proces se spojitými hodnotami a
- stochastický proces s diskrétními hodnotami.

Příklady kombinující uvedené druhy stochastických procesů demonstruje následující tabulka

**Tabulka 2.1 Příklady stochastických procesů**

Čas	Hodnoty	Příklad
Diskrétní	Diskrétní	v 17 hodin bylo v parku 15 dětí
Diskrétní	Spojité	v třetím roce manželství se rozvede průměrně 2-5 párů
Spojitý	Diskrétní	teplota vzduchu měřená přístrojem během celého dne
Spojitý	Spojité	mezi 18-22 hodinou přišlo mezi 350-800 zákazníky

*Zdroj: (Rálek, Novák, & Chudoba, 2014)*

## 2.2 Poissonův proces

Speciálním typem stochastických procesů je Poissonův proces, který je považován za „nejvíce náhodný“ a má tři charakteristické vlastnosti

- 1) *regulárnost* – nazývaná také jako ordinárnost, říká, že pravděpodobnost výskytu více než jednoho jevu v dostatečně malém intervalu délky  $\Delta t$  je tak malá, že je zanedbatelná. Tedy v intervalu  $(t, t+\Delta t)$  se vyskytne buď právě jeden jev s pravděpodobností  $\lambda \Delta t$  anebo se v tomto intervalu

nevyskytne žádný jev, a to s pravděpodobností  $1 - \lambda\Delta t$  – je tedy možný přechod pouze do nejbližšího vyššího stavu nebo dojde k setrvání ve stavu současném,

- 2) *homogenita v čase* či stacionárnost – tato vlastnost znamená, že počet jevů je ve stejně dlouhých intervalech konstantní (týká se i jevů v malých oblastech prostoru),
- 3) *nezávislost přírůstků* – vyjadřuje skutečnost, že to, kolik se vyskytne jevů v jednom časovém intervalu, není závislé na tom, kolik se vyskytne jevů v jiných intervalech. Jinak řečeno například to, kolik bude zákazníků v obchodě v pondělí mezi 10-12 hodinou není závislé na tom, kolik zákazníků se vyskytne v tentýž den mezi 16-18 hodinou.

### 2.2.1 Poissonovo rozdělení

Toto rozdělení, popisující velké množství náhodných procesů diskrétní náhodné veličiny, je pojmenováno po francouzském matematikovi S. D. Poissonovi. Příkladem náhodných procesů mající Poissonovo rozdělení může být

- počet pacientů přijímaných na pohotovosti,
- počet telefonních hovorů za den,
- počet prodaného určitého druhu zboží za den či
- počet zákazníků, kteří přijdou do obchodu za den.

Střední hodnota počtu jevů  $N$  za danou časovou jednotku (či v prostorové jednotce) je označována  $E(N) = \lambda$ . Co se týče rozdělení četnostní Poissonova rozdělení, je dáno pravděpodobnostní funkcí

$$P(N=n)=p(n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad 2.3$$

kde  $n$  představuje četnost jevů (tedy  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Rozptyl náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením je stejný jako její střední hodnota, tedy

$$Var(N) = \sigma^2 = \lambda. \quad 2.4$$

Protože se Poissonovo rozdělení, spolu s exponenciálním, které bude stručně definováno přímo v kapitole Teorie hromadné obsluhy, vyskytuje nejčastěji, je zde uveden následující příklad vlastní tvorby. Do obchodu průměrně přijde 397 zákazníků za den. Jestliže se rozdělení četností se řídí podle Poissonova rozdělení, jaká je pravděpodobnost, že přijde do obchodu více než 400 zákazníků?

**Tabulka 2.2 Výpočet příkladu pravděpodobnosti  $n$  zákazníků v obchodě**

Počet zákazníků	-	Pravděpodobnost $n$ -zákazníků v obchodě
0	$p(0)$	1,5271E-170
1	$p(1)$	3,0314E-168
2	$p(2)$	4,0115E-166
.	.	
.	.	
.	.	
399	$p(399)$	0,01986775
400	$p(400)$	0,019718742
Celkem	-	0,572898263

Tabulka ukazuje pravděpodobnosti, že se v obchodě vyskytne právě  $n$ -zákazníků. Hledaná pravděpodobnost má tedy hodnotu  $1 - 0,573 = 0,427$ , tj. 42,7%.

## 2.3 Markovovy řetězce

Podobně jako Poissonův proces, jsou i Markovovy (či Markovského) řetězce, pojmenované po ruském matematikovi A. A. Markovovi, jedním ze speciálních typů stochastických procesů.

Důležitou charakteristikou těchto řetězců je tzv. Markovská vlastnost, která říká, že stav v okamžiku  $n+1$  je závislý pouze na stavu v okamžiku  $n$ . Jinak řečeno stav v současném okamžiku závisí pouze na stavu bezprostředně přecházejícím, přičemž se jinak celá historie daného systému zanedbává, proto jsou Markovské řetězce označovány jako bezpaměťové. Příkladem může být prodejna s elektronikou, kde jsou prodávány speciální videokamery k natáčení podvodního světa, jsou tudíž velmi drahé, a tak jich mají na prodejně jenom několik. Kamery se objednávají vždy v sobotu dopoledne (mají zavřeno) dle toho, kolik jich mají právě na skladě. Počet objednaných kusů tedy nezávisí na tom, kolik jich bylo na skladě ve středu nebo v pondělí, ale pouze na stavu kamer v pátek večer.

V souvislosti s Markovského řetězci je dále nutné definovat podmíněnou pravděpodobnost přechodu značenou obvykle jako  $p_{ij}$  vyjadřující pravděpodobnost, že se daný systém dostane ze stavu  $i$  v okamžiku  $n$ , do stavu  $j$  v okamžiku  $n+1$ .

$$p_{ij} = (X_{n+1} = j / X_n = i), \quad 2.5$$

kdy platí podmínky

$$p_{ij} \geq 0 \quad i, j \geq 0 \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto definici lze vysvětlit na předcházejícím příkladu s porouchaným automobilem, přičemž mohou nastat dvě situace. Buď majitel s poruchou nic neudělá, a v tom případě zůstane automobil rozbitý i dnes, nebo ho odveze do autoservisu, a za předpokladu ne příliš velké poruchy a rychlosti automechaniků, bude automobil dnes opět pojízdný. Pravděpodobnosti těchto dvou situací vyjadřuje právě podmíněná pravděpodobnost přechodu. Markovského řetězce lze dělit podle skutečnosti, zda  $p_{ij}$  v čase  $t$  je závislá na čase, či nikoliv. Jestliže je pravděpodobnost přechodu závislá na čase, jedná se o nehomogenní Markovského řetězec, v opačném případě se hovoří o homogenním Markovského řetězci.

Chování systému popisuje, a zároveň důležitou pomůckou pro výpočty, je matice pravděpodobnosti přechodu po  $n$  krocích. Ta má vždy čtvercový tvar, pokud se jedná o konečné Markovského řetězce, a za předpokladu platnosti uvedených podmínek pravděpodobnosti přechodu, je součet každého řádku roven 1 (v případě konečně mnoha stavů) a jednotlivé pravděpodobnosti jsou nezáporné.

Pokud je matice pravděpodobnosti přechodu označena  $P$ , vypadají všechny pravděpodobnosti přechodu po prvním kroku (vnímán většinou jako časové určení – den, týden) následovně

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad 2.6$$

Prvek  $p_{12}$  v matici vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost přechodu systému ze stavu 1 do stavu 2, kdy by stavy mohly být vymezeny například jako stavy počtu zmíněných speciálních videokamer na skladě v pátek večer. Na diagonále matice jsou vymezeny pravděpodobnosti návratu systému do jednoho a též stavu.

Vedle pravděpodobností podmíněných popisují chování systému také absolutní pravděpodobnosti, které jsou vyjádřeny vektorem v určitém okamžiku. Vektor absolutních (nepodmíněných) pravděpodobností v okamžiku  $n$  (celkem  $N$  stavů) je dán

$$p(n) = [p_1(n), p_2(n), \dots, p_N(n)], \quad 2.7$$



kde  $n = 0, 1, 2, \dots$

Za předpokladu znalosti podmíněných a absolutních pravděpodobností, lze definovat přechod systému ve dvou po sobě následujících okamžicích dle vzorce

$$p(n + 1) = p(n) * P = p(0) * P^{n+1}, \quad 2.8$$

tedy pro přechod ze stavu 1 do stavu 2

$$p(2) = p(1) * P^1, \quad 2.9$$

kde  $P^l$  stanovuje matici pravděpodobnosti přechodu 1. řádu.

Závěrem lze tedy říci, že chování homogenních Markovových řetězců po  $n$  okamžicích času je vyjádřeno prostřednictvím vektoru výchozích absolutních pravděpodobností a mocniny matice pravděpodobnosti přechodu.

## 2.4 Markovovy procesy se spojitým časem

Markovovy procesy a řetězce patří skupiny modelů pojmenované po již zmíněném A. A. Markovovi. Markovského proces je modelem, který předpokládá, že přechody mezi jednotlivými stavy jsou uskutečnitelné v blízkých časových okamžicích, tedy změny lze vystihnout v čase spojitým. Zároveň jsou velmi důležité také doby vyjadřující čas, za jaký ke změně stavu dochází. Typickým uváděným příkladem je model sledující dobu poruchy určitého zařízení.

Stejně jako u Markovových řetězců nabývají náhodné proměnné  $X(t)$  hodnoty, jež jsou přiřazené určitým stavům. Tedy v okamžiku  $t_i$  může nastat jeden ze stavů  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , přičemž okamžiky  $t_i, t_{i+1}, \dots$ , se liší o veličinu  $\Delta t$ , která se blíží k nule.

Intenzitu pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  je možné vyjádřit pomocí limity

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{ij}(t) \geq 0. \quad 2.10$$

Intenzita výstupu ze stavu  $j$  představuje doplněk pravděpodobnosti setrvání  $p_{ij}(t, t + \Delta t)$ , jelikož limitně v malé době by se pravděpodobnost setrvání blížila jedné, je dána

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{jj}(t) \geq 0. \quad 2.11$$

Za uvedených podmínek lze matici pravděpodobnosti přechodu, která zachycuje pravděpodobnosti výskytu určitých stavů v době  $t + \Delta t$  podmíněné výskytem určitých stavů v době  $t$ , zapsat následovně

$$p(t) = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}(t)\Delta t & a_{12}(t)\Delta t & \cdots & a_{1n}(t)\Delta t \\ a_{21}(t)\Delta t & 1 - a_{22}(t)\Delta t & \cdots & a_{2n}(t)\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t)\Delta t & a_{n2}(t)\Delta t & \cdots & 1 - a_{nn}(t)\Delta t \end{pmatrix}. \quad 2.12$$

Zároveň tvar matice intenzit pravděpodobnosti přechodu je

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad 2.13$$

Za předpokladu, že celý proces závisí pouze na době vyjádřené veličinou  $\Delta t$ , která uplynula od počátku procesu (tedy nezávisí na době  $t$ ), jedná se o proces homogenní.

### 3 Teorie hromadné obsluhy

Procesy hromadné obsluhy představují postup uspokojování potřeb většinou náhodně, ale i hromadně se vyskytujících. Systémy, které realizují tyto požadavky, se nazývají systémy hromadné obsluhy a jejich popisům a zkoumání se věnují jednotlivé modely teorie hromadné obsluhy.

Systémy hromadné obsluhy jsou v reálném životě velmi častým jevem, ovšem v řadě z nich se teoretické přístupy nepoužívají (například hypermarket analyzovaný v praktické části práce).

Příklady systémů hromadné obsluhy vyskytujících se v každodenním životě uvádí následující tabulka.

**Tabulka 3.1** Příklady systémů hromadné obsluhy

Systém	Vystupy nesoucí požadavky	Obslužné zařízení
Obchod	Zákazníci	Pokladna
Menza	Studenti/strávníci	Výdejna obědů
Čerpací stanice	Řidiči	Čerpací stojan
Výrobní linka	Výrobky	Stanoviště na lince
Přeprava	Cestující	Autobus
Lyžařský areál	Lyžaři	Lyžařský vlek

*Zdroj: vlastní tvorba*

Základní princip fungování hromadné obsluhy je u většiny modelů stejný. Do daného systému obsluhy, jež se může skládat z jedné i více linek poskytující službu, přicházejí vstupy nesoucí požadavky, ty dále postupují do fronty pro čekání na obsluhu, pak do bloku obsluhy požadavků a následně ze systému vystupují. V závislosti na intenzitě vstupujících jednotek a množství bloků obsluhy požadavků může v systému vznikat hromadění čekajících požadavků (to může v krajním případě vést až k odmítnutí požadavku označované jako ztráta) - tato skupina požadavků je nazývána frontou, a právě proto bývají modely hromadné obsluhy také někdy označovány jako modely teorie front. Pro charakteristiku SHO je nutné znát tyto 4 základní prvky:

- vstupní proud,
- fronta,
- bloky obsluhy a

- výstupní proud.

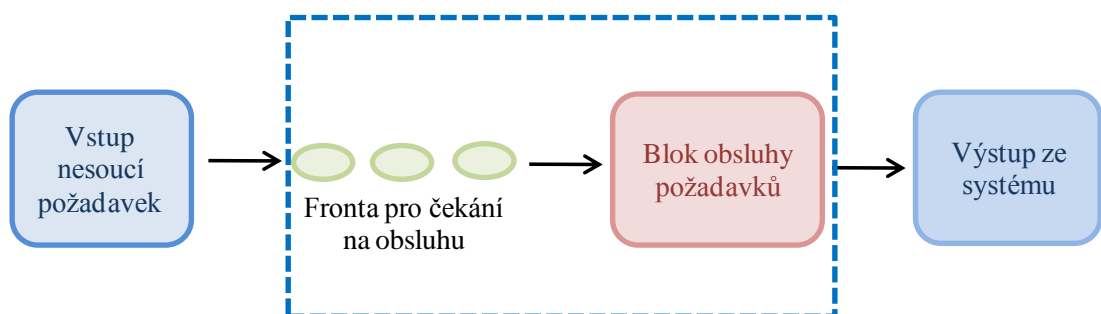
Například zákazník (vstupující jednotka) přijde do obchodu se záměrem nakoupit zboží (požadavek), vloží do nákupního košíku všechno potřebné, po skončení jde k pokladnám, kde si stoupne do fronty (fronta pro čekání na obsluhu), až se na něj přijde řada, dostane se k pokladně (blok obsluhy požadavků) a po obslužení z obchodu odchází, tedy vystupuje ze systému.

Příklad také ukazuje, že modely hromadné obsluhy jsou založené většinou na prvcích náhody – počet zákazníků (vstupujících jednotek), kteří přijdou do obchodů je náhodný, stejně jako doba trvání obsluhy.

Úkolem teorie hromadné obsluhy je analýza těchto systémů. Modely teorie zkoumají vztahy mezi základními ukazateli představující efektivitu a kvalitu systému hromadné obsluhy a snaží se nalézt efektivní proces. Jinak řečeno hledají způsob, kterým by došlo k optimalizaci systému tak, aby se snížila pravděpodobnost vzniku front nebo pokud vznikají ztráty z důvodu čekání, snížit i jejich celkovou hodnotu. Tato optimalizace ale většinou vyžaduje navýšení počtu bloků obsluhy požadavků a to je spojeno s dodatečnými náklady na systém. Cílem je tedy dosáhnout optimální rovnováhy mezi danou mírou kvality služeb poskytovanými systémem a náklady potřebné na dosažení této kvality.

Příkladem systému hromadné obsluhy s jedním blokem obsluhy a jednou frontou je následující obrázek.

**Schéma 3.1 SHO s jedním blokem obsluhy a jednou frontou**



*Zdroj: (Jablonský, 1998), vlastní zpracování*

Přerušovaný obdélník na obrázku ukazuje, co tvoří systém hromadné obsluhy – fronta, příp. fronty, pro čekání na obsluhu a blok obsluhy požadavků, tedy všechno, co je mezi vstupem a výstupem ze systému.

Jak již bylo řečeno výše, většina modelů teorie hromadné obsluhy používá prvky náhody, modely mají tedy tzv. stochastický charakter, a proto jsou možná dvě řešení:

- simulační – využívá vhodně zvoleného softwaru, jehož pomocí lze nasimulovat, na základě známých parametrů, určitou situaci a tyto simulace jsou poté podkladem pro odhadnutí parametrů modelu, kvůli nimž byla simulace provedena. Výhodou simulačního řešení je jeho časová (ne)náročnost – během několika sekund či minut napodobit chod systému a získat tak charakteristiky, které uživatele zajímají. Jako další výhodu lze označit schopnost analyzovat i velmi složité SHO, například výrobní linky ve fázi jejich navrhování ani jiným způsobem analyzovat nejde,
- analytické – prostřednictvím nástrojů pravděpodobnosti nebo jiných matematických odvětví jsou na základě známých parametrů (například intenzita obsluhy, intenzita příchodů či počet obslužných linek) vypočteny či odhadnuty ty parametry modelu, které chce poskytovatel služby znát. Pokud je tedy analytik schopen odvodit pro jednotlivé charakteristiky systému vzorce (vztahy) nebo vzorce zná, stačí následně do těchto vzorců parametry dosadit a výsledky představující požadované charakteristiky jsou ihned k dispozici. Je nutné ovšem zdůraznit, že analytické řešení nelze použít u složitějších modelů, jako jsou například sériově řazené obslužné linky či modely se specifickými rysy (omezená trpělivost požadavků apod.).

Podle D. G. Kendalla jsou výsledky získané na základě použití určitého modelu teorie hromadné obsluhy použitelné pouze tehdy, jestliže aplikovaný model dostatečně věrně odráží základní rysy reálného systému.

### **3.1 Základní charakteristiky a parametry modelů hromadné obsluhy**

Při popisu systémů hromadné obsluhy matematickým modelem je nutné vyjít z analýzy jeho chování. V první fázi se zkoumají příčinné oboustranné vazby základních prvků systému – tj. specifikace vstupního proudu požadavků, způsob a mechanismus přijímání a předzpracování (režim fronty) a charakter doby trvání

obsluhy. Na základě logické analýzy a klasifikace zkoumaného systému hromadné obsluhy je následně možné formulovat odpovídající model.

Další fází modelování systému hromadné obsluhy je statistická analýza jeho jednotlivých prvků zahrnující i statistické testování výchozí hypotézy o charakteru rozdělení odpovídajících veličin i předpoklady o režimu fungování zkoumaného systému.

Po získání potřebných statistických dat lze chování SHO popsat matematickým modelem. Výsledkem jeho řešení jsou hodnoty základních, zpravidla průměrných charakteristik, jejichž znalost umožňuje udělat si představu o kvalitě a efektivitě provozu modelovaného systému. Z hlediska provozovatele systému hromadné obsluhy jsou důležitými průměrnými charakteristikami například vytížení a prostoje jednotlivých zařízení obsluhy či počet nebo podíl požadavků čekajících na obsluhu. (Kořenář, 2010)

Aby mohl být matematický model hromadné obsluhy vytvořen, je nutné specifikovat následující parametry:

- zdroj požadavků,
- příchod požadavků do systému,
- doba trvání obsluhy,
- síť obslužných linek,
- pravidla pro přechod z fronty do bloku obsluhy a
- specifické rysy systému.

### **3.1.1 Zdroj požadavků**

Zdroj požadavků je vyjadřován kvantitou požadavků a lze jej dělit na konečný a nekonečný.

Konečný zdroj znamená, že požadavků existuje omezené množství a tento systém se označuje jako uzavřený systém hromadné obsluhy. Co se týče nekonečného zdroje požadavků, lze sice říci, že je zdroj konečný (například počet studentů přihlášených k odběru obědu v menze nebo počet výrobků vyrobených výrobní linkou), ale jelikož se jedná o velké množství požadavků (stovky či tisíce), může být tento zdroj považován za nekonečný a systém s nekonečným zdrojem požadavků je nazýván otevřeným systémem hromadné obsluhy.

### 3.1.2 Příchod požadavků do systému

Příchod požadavků do systému lze charakterizovat dvěma ukazateli, a sice intervaly mezi příchody, které představují dobu mezi dvěma za sebou následujícími příchody, a intenzitou příchodů, jež je vyjádřena počtem požadavků přicházejících do systému za danou jednotku času. Jestliže vstoupí za hodinu do systému průměrně 10 požadavků, je tedy průměrný interval mezi příchody požadavků 6 minut (1/10 hodiny), což dokazuje, že je mezi těmito ukazateli velmi úzký vztah.

Oba ukazatele mohou být v zásadě dvojího druhu:

- 1) deterministické – v případě, že jsou intervaly mezi příchody fixní, tedy stále stejné. Typickým případem je automatická výrobní linka, u které je skutečně možné fixní intervaly mezi příchody požadavků zajistit,
- 2) náhodné (pravděpodobnostní) – situace, kdy jsou intervaly mezi příchody proměnlivé. V tomto případě jsou intervaly mezi příchody popisovány pomocí některého z pravděpodobnostních rozdělení, viz následující odstavec.

Požadavky většinou do systému přicházejí náhodně, lze tedy vstupní požadavky charakterizovat jako stochastické. Čas odpovídající délce mezi bezprostředně po sobě následujícími příchody odpovídá hodnotám spojitých náhodných veličin a údaje získané ze systému hromadné obsluhy často vyhovují podmínkám Poissonova rozdělení počtu vstupujících jednotek za daný interval. To říká, že jestliže daný jev v určitém intervalu nastane nebo nenastane, nezávisí na tom, co se stalo v jiném intervalu. Pro každý časový okamžik je pravděpodobnost jevu v malém časovém intervalu stejná a není možné, aby nastaly dva jevy v přesně stejném časovém okamžiku – tomu odpovídá exponenciální rozdělení intervalů, a proto jsou systémy hromadné obsluhy s Poissonovým vstupním proudem požadavků označovány jako exponenciální systémy.

Exponenciální rozdělení má, stejně jako Poissonovo rozdělení, jediný parametr, parametr  $\lambda$ . Ten je využíván v systémech hromadné obsluhy buď pro určení průměrné doby mezi příchody jednotlivých požadavků ve tvaru  $1/\lambda$ , nebo představuje intenzitu příchodů v základním tvaru  $\lambda$ .

Na základě znalosti parametru  $\lambda$  lze již odvodit pravděpodobnost, že interval mezi příchody bude kratší než  $t$ , což je hodnota distribuční funkce exponenciálního rozdělení v bodě  $t$

$$P(X \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad 3.1$$

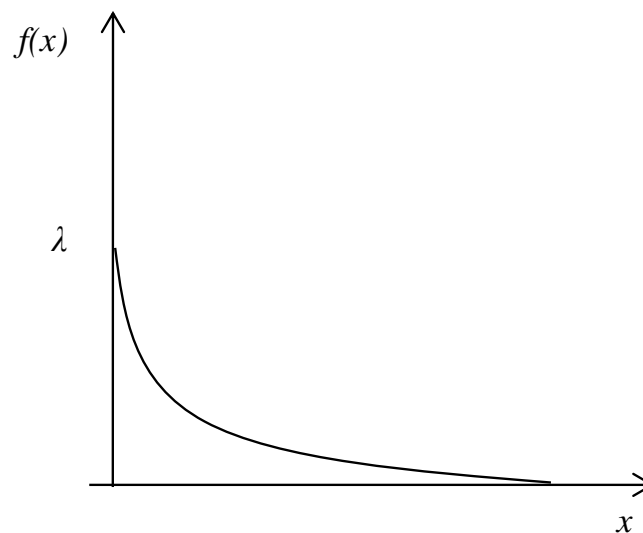
kde  $e$  je Eulerovo číslo  $e = 2,71828$ .

Například, jestliže se  $\lambda$  rovná 10, je pravděpodobnost, že interval mezi dvěma příchody bude kratší než 2 minuty (1/30 hodiny), rovna

$$P\left(X \leq \frac{1}{30}\right) = 1 - e^{-10 \cdot (1/30)} = 0,2835 \quad 3.2$$

Střední hodnota ( $E(X)$ ) je výsledkem vzorce  $1/\lambda$ , rozptyl se rovná  $1/\lambda^2$ . Graf představující hustotu exponenciálního rozdělení vypadá následovně:

**Graf 3.1 Graf exponenciálního rozdělení**



*Zdroj: (Tošenovský, 2012), vlastní zpracování*

V praxi je možné samozřejmě nalézt i jiná rozdělení, například obecné rozdělení či Erlangovo rozdělení, ovšem řešení modelů systémů hromadné obsluhy s požadavky s těmito rozděleními je mnohem náročnější.

### 3.1.3 Doba trvání obsluhy

Stejně jako u předchozího parametru je nutné znát jeho rozdělení. U modelů SHO pro výpočet hodnoty doby obsluhy bývá nejčastěji používáno opět exponenciální rozdělení, protože doba trvání obsluhy je náhodná veličina. V případě



označení parametru exponenciálním rozdělením, lze stanovit střední dobu trvání obsluhy podle vzorce

$$E(X) = \frac{1}{\mu}, \quad 3.3$$

kde  $\mu$  vyjadřuje průměrný počet obslužených požadavků za jednotku času a je označován jako intenzita obsluhy. Vztah  $1/\mu$  tedy umožňuje výpočet průměrné doby trvání obsluhy jednoho požadavku.

### 3.1.4 Síť obslužných linek

Aby bylo možné modely SHO použít, je také nutné znát počet bloků obsluhy (linek) a to, jakým způsobem fungují – zda obsluhují sériově, paralelně či jiným způsobem. Cílem modelů SHO je především optimální počet linek v závislosti na době čekání ve frontě na požadavek.

Způsoby fungování linek:

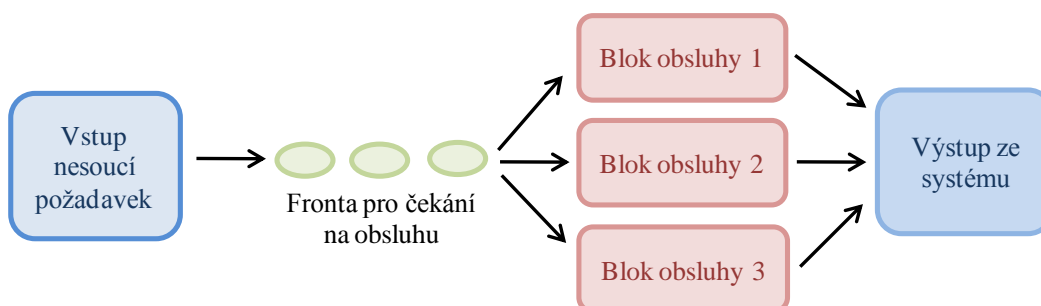
#### a) Paralelní uspořádání bloků obsluhy

Tento způsob uspořádání bloků obsluhy znamená, že linky jsou uspořádány vedle sebe, požadavek je obslužen u jakékoliv linky a každá linka nabízí stejnou obsluhu. Jako příklad lze uvést například přepážky v bance či na poště, nebo poklady v obchodě.

U tohoto způsobu uspořádání bloků obsluhy dochází ke 2 možnostem uspořádání front:

- buď je v systému jenom jedna fronta, z níž dojde k obsluze požadavku po uvolnění jakéhokoliv bloku obsluhy (například tzv. samoobslužné pokladny v hypermarketech),

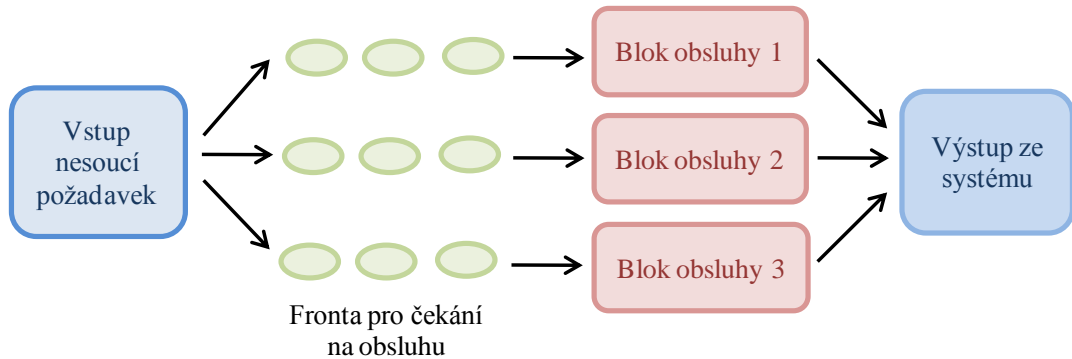
Schéma 3.2 SHO s paralelním uspořádáním bloků obsluhy 1



Zdroj: (Jablonský, 1998), vlastní zpracování

- nebo se před každým blokem obsluhy tvoří samostatná fronta (klasické pokladny v obchodech).

Schéma 3.3 SHO s paralelním uspořádáním bloků obsluhy 2

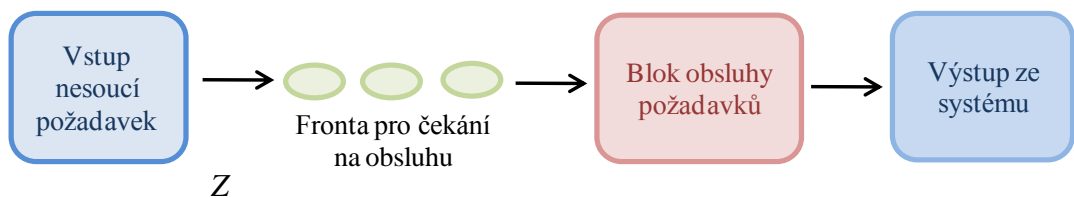


Zdroj: (Jablonský, 1998) ,vlastní zpracování

b) Jeden blok obsluhy

V tomto případě se v systému nachází pouze jeden blok obsluhy, který vyřizuje požadavky, a pokud je obsazený, musí se požadavky řadit do fronty a vyčkat. Tento způsob sítě linek lze vidět například na studijním oddělení ve škole, kdy požadavky pro každý oboru vyřizuje jedna studijní referentka.

Schéma 3.4 SHO s jedním blokem obsluhy

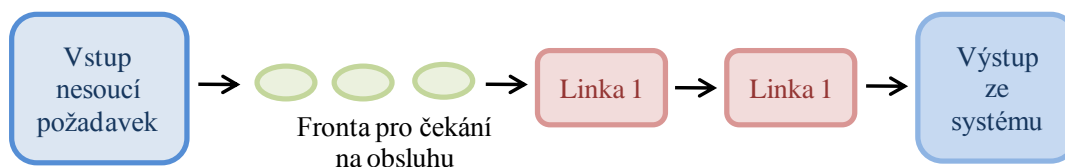


Zdroj: (Jablonský, 1998) ,vlastní zpracování

c) Sériové uspořádání bloků obsluhy

Tento systém uspořádání představuje jednotlivé bloky obsluhy situované jedna za druhou, přičemž požadavek musí projít každou z nich. Jako příklad lze uvést výrobky procházející všemi výrobními linkami.

Schéma 3.5 SHO se sériově uspořádanými bloky obsluhy



Zdroj: (Jablonský, 1998), vlastní zpracování

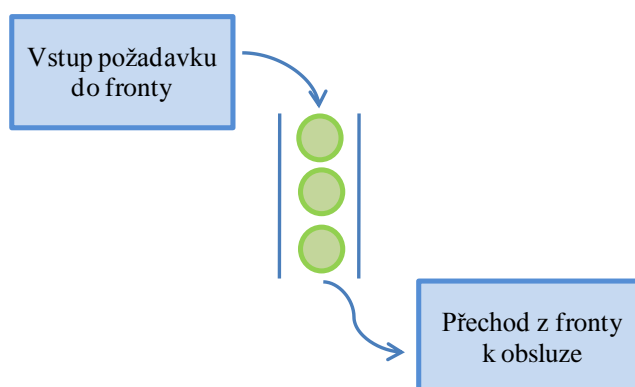
### 3.1.5 Pravidla pro přechod z fronty do bloku obsluhy

Aby bylo možné spočítat dobu, kterou stráví požadavek ve frontě či v celém systému, je nutné znát řád, podle kterého přechází požadavky z fronty k blokům obsluhy. Těchto druhů přechodů se rozlišují 4 základní druhy, pro něž se vžila následující označení:

a) FIFO (*first-in, first-out*)

Způsob odchodu z fronty do systému obsluhy FIFO, jež lze považovat v běžném životě za nejspravedlivější, je nejčastějším způsobem přechodu v systému hromadné obsluhy. Znamená, že kdo první přišel, ten také bude první obsloužen (FCFS – *first come, first served*). Požadavky jsou tedy vyřizovány přesně v tomtéž pořadí, v jakém se dostala do fronty.

Schéma 3.6 SHO s režimem obsluhy FIFO

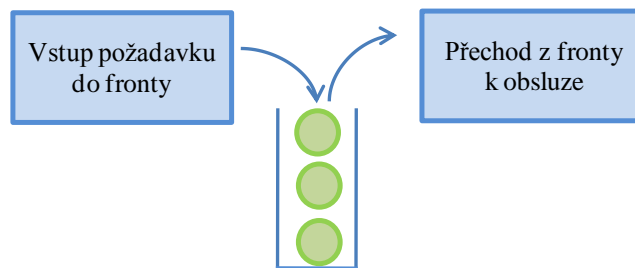


Zdroj: vlastní tvorba

b) LIFO (*last in, first out*)

Tento způsob přechodu požadavku z fronty do bloku obsluhy je přesným opakem FIFO - požadavek, který přijde do fronty poslední, bude obsloužen jako první. Reálným příkladem mohou být sklady, kde jsou při spotřebě materiálu či zboží brány palety položené nejvýše, tedy palety naskladněné jako poslední.

Schéma 3.7 SHO s režimem obsluhy LIFO

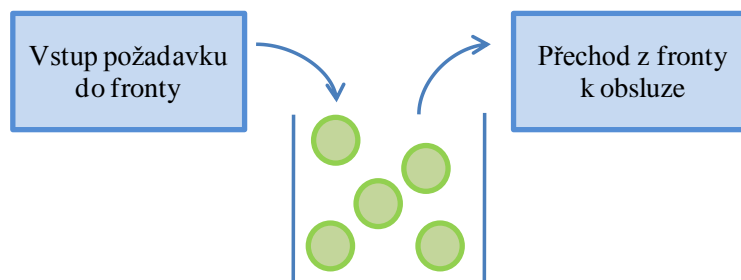


*Zdroj: vlastní tvorba*

c) SIRO (*selection in random order*)

Toto pravidlo pro přechod požadavku z fronty k lince v podstatě žádný řád nemá. Požadavky přechází k bloku obsluhy v náhodném pořadí, jejich příchod do fronty nemá na přechod absolutně žádný vliv.

Schéma 3.8 SHO s režimem obsluhy SIRO



*Zdroj: vlastní tvorba*

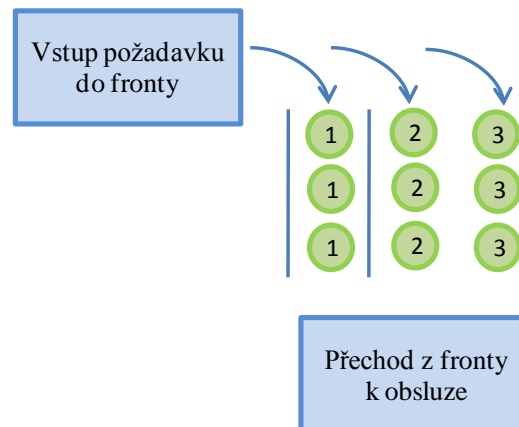
d) PRI (*priority*)

Při použití tohoto způsobu pro přechod požadavků z fronty do bloku obsluhy probíhá přechod podle daných priorit. Priority mohou být známé již před vstupem do systému, jedná se o tzv. apriorní priority, nebo je systém přiděluje sám, v tomto případě jde o aposteriorní priority. Dále mohou být priority rozlišovány ze dvou hledisek:

- relativní (nepreemptivní) - tento druh priorit znamená, že priority s vyšším stupněm důležitosti jsou obslouženy dříve, než požadavky se stupněm nižším,
- absolutní (preemptivní) – absolutní priorita představuje požadavek, který v případě příchodu do systému bude obsloužen i za cenu přerušení již jiné probíhající obsluhy požadavku, pokud má tento požadavek prioritu nižší.

Jestliže dojde k hromadění požadavků a vytvoří se fronta, jsou požadavky vyřizovány podle dalšího pravidla (např. FIFO).

**Schéma 3.9 SHO s režimem obsluhy PRI**



*Zdroj: vlastní tvorba*

### 3.1.6 Speciální rysy SHO

Fronta v systému hromadné obsluhy představuje problém, který se modely SHO snaží vyřešit, resp. zoptimalizovat. Proto jsou systémy dále členěny dle čekání ve frontě podle trpělivosti vstupního proudu na obslužení svých požadavků na systémy bez čekání a systémy s čekáním.

Jedná-li se o systém bez čekání, požadavky mají velmi omezenou trpělivost, resp. trpělivost je nulová. Znamená to, že pokud chce požadavek vstoupit do systému, ale všechny bloky obsluhy jsou plné, do systému se rozhodne nevstoupit. Klasickým případem jsou fronty v hypermarketech, kdy netrpěliví zákazníci, kteří si chtějí koupit jenom pár věcí, přijdou k pokladnám, kde ale zjistí, že jsou všechny obsazené a tím pádem došlo k vytvoření front. Nechají tedy nákup tam, kde zrovna stojí a z obchodu odcházejí.

System s čekáním vyjadřuje, že trpělivost požadavků je buď neomezená, nebo je téměř identická s trpělivostí předešlého typu systému, resp. trpělivost požadavků je omezená. Požadavek tedy buď do systému vstoupí a bude čekat tak dlouho, dokud není požadavek vyřízen (neomezená trpělivost), nebo bude stát ve frontě na vyřízení jenom určitou dobu, a pokud za tuto dobu nebude obslužen, ze systému odejde (omezená trpělivost).

S prvním typem systému je spojen ještě jeden typ SHO, a sice systém se ztrátami. K opuštění systému bez vyřízení požadavku může dojít v případě:

- systému bez čekání,
- systémy s čekáním mající buď omezenou kapacitu bloků obsluhy, nebo mají omezenou trpělivost požadavků.

### 3.2 Analýza systémů hromadné obsluhy

Důvodem zkoumání systémů hromadné obsluhy jsou především charakteristiky, které popisují fungování daného systému, ty uživatele zajímají. Podrobněji lze tyto charakteristiky rozdělit na několik skupin.

#### 1) Charakteristiky týkající se počtu požadavků

Do této skupiny patří především průměrná doba čekání požadavků ve frontě před tím, než budou obsluženy (dále bude označována jako  $T_f$ ) a průměrná doba strávená v celém systému ( $T$ ), tedy doba čekání ve frontě plus doba obsluhy.

#### 2) Charakteristiky týkající se počtu požadavků

Tato skupina se týká především průměrných počtů požadavků v systému (značený dále jako  $N$ ) a průměrné délky fronty (označovanou jako  $N_f$ ).

#### 3) Pravděpodobnostní charakteristiky

Při zkoumání SHO jsou z hlediska pravděpodobnostních analýz velmi důležité následující 4 otázky:

- jaká je pravděpodobnost, že obslužná linka pracuje či jaká je pravděpodobnost opačné situace - linka nepracuje,
- jaká je pravděpodobnost situace, že je v systému konkrétní počet požadavků ( $n$ ),
- jaká je pravděpodobnost, že požadavek, který přijde do systému, bude muset ve frontě čekat a

- jaká je pravděpodobnost, že se kvůli naplnění nebude moci požadavek připojit k systému (týká se systémů s omezenou kapacitou míst ve frontě) a být tedy obslužen?

#### 4) Nákladové charakteristiky

Tyto charakteristiky se vztahují k situaci, kdy je uživatel schopen nákladově ohodnotit čekání požadavků, provoz obslužných linek či prostoj. Pokud ano, je možné systém optimalizovat a to s ohledem na jeho efektivnost z hlediska nákladů. Lze například určit optimální počet linek v provozu vedoucí k minimálním nákladům nebo určit nejnižší náklady, které se vztahují k fungování celého systému za danou časovou jednotku.

Uvedené charakteristiky pomáhají odpovědět na velmi důležité otázky například při budování nových SHO – kolik obslužných linek je moudré zahrnout do projektu tak, aby nedocházelo ke tvorbě příliš velkých front (ty by mohly vést ke ztrátám zákazníků a tím následně k ztrátám na zisku) nebo aby naopak obslužné linky neměly zbytečné prostoje?

V závislosti na uvedených charakteristikách je potřeba vysvětlit i bezprostřední vazby, které mezi nimi panují. Za předpokladu dodržení zavedeného značení, neomezeného počtu míst ve frontě a neomezeného zdroje požadavků, lze vyjádřit průměrnou dobu, kterou požadavek stráví v systému jako součet průměrné doby trvání obsluhy a průměrné doby čekání požadavků ve frontě

$$T = 1/\mu + T_f \quad 3.4$$

Přímý vztah rovněž existuje v jednodušších modelech i mezi časovými charakteristikami a charakteristikami týkajícími se počtu požadavků. Tento vztah udává, že průměrný počet požadavků v systému lze vypočítat jako součin průměrného času, jež stráví požadavek v systému, a intenzity obsluhy

$$N_o = \lambda * T_o \quad 3.5$$

Tabulky uvedené níže vyjadřují některé jednotlivé charakteristiky systémů hromadné obsluhy spolu se vztahy mezi nimi.

**Tabulka 3.2 Vzorce pro výpočet charakteristik SHO 1**

Průměrný čas strávený požadavkem	Vzorec
v systému	$T_s = T_0 + T_f$
ve frontě	$T_f$
v obsluze	$T_0 = 1/\mu$

*Zdroj: vlastní tvorba***Tabulka 3.3 Vzorce pro výpočet charakteristik SHO 2**

Průměrný počet požadavků	Vzorec
v systému	$N_s = \lambda T_s = N_0 + N_f$
ve frontě	$N_f = \lambda T_f$
v obsluze	$N_0 = \lambda T_0$

*Zdroj: vlastní tvorba*

Pravděpodobnost, že se v systému nachází právě  $n$  požadavků, je označena jako  $p_n$ , tedy  $p_0$  vyjadřuje pravděpodobnost, že se v systému nenachází požadavek žádný.

Poslední důležitou charakteristikou je podmínka stabilizace systému, která znamená, že systém není zahlcený čekajícími požadavky a nevznikají tedy fronty, přičemž pro výpočet se liší podle toho, o jaký systém hromadné obsluhy se jedná.

### 3.3 Klasifikace systémů hromadné obsluhy

Na základě jednotlivých charakteristik systémů hromadné obsluhy se v současnosti většinou používá rozšířené členění navržené D. G. Kendalllem v roce 1951. Kendall navrhl klasifikaci, která se řídila podle tří hlavních hledisek ve tvaru A/B/C, kde

- A** charakterizuje typ pravděpodobnostního rozdělení intervalů mezi vstupy, tedy intervaly mezi příchody požadavků do systému,
- B** charakterizuje typ pravděpodobnostního rozdělení doby trvání obsluhy,
- C** vyjadřuje počet paralelně uspořádaných obslužných míst (linek, počet kanálů obsluhy), přičemž se jedná o přirozené číslo, kdy se



v případě velkého počtu obslužných míst (neomezeného) většinou tento parametr vyjadřuje  $\infty$ .

Jak již bylo řečeno, tento základní model byl rozšířen o další parametry, které se k systémům hromadné obsluhy vztahují, výsledná klasifikace je obvykle značena A/B/C/D/E/F.

Parametr A může nabývat následujících hodnot

- M** vyjadřuje, že intervaly mezi příchody požadavků jsou navzájem stochasticky nezávislé a zároveň mají exponenciální rozdělení, tedy jedná se o Poissonův proces vstupu,
- E<sub>k</sub>** zastupuje Erlangovo rozdělení mezi vstupy požadavků,
- D** znamená, že intervaly mezi příchody požadavků jsou konstantní, neboli vstupy požadavků jsou pravidelné,
- N** vyjadřuje normální (Gaussovo) rozdělení,
- U** značí rovnoměrné rozdělení a
- G** zastupuje obecné rozdělení, tedy doba mezi příchody je stanovena svou distribuční funkcí.

Parametr B může nabývat v podstatě stejných hodnot jako parametr předcházející, akorát se vztahují na dobu trvání obsluhy

- M** značí exponenciální rozdělení doby trvání obsluhy,
- E<sub>k</sub>** vyjadřuje Erlangovo rozdělení doby trvání obsluhy,
- D** znamená, že doba obsluhy je konstantní,
- N** vyjadřuje normální rozdělení,
- U** zastupuje rovnoměrné rozdělení a
- G** je používáno pro jakékoliv rozdělení doby trvání obsluhy.

Zbývající parametry klasifikace se týkají počtu paralelně uspořádaných obslužných míst označované písmenem **C**, kdy tento parametr nabývá hodnot  $m = 1, 2, 3, \dots$  (celé kladné číslo); pod písmenem **D** se skrývá kapacita daného systému hromadné obsluhy, tedy celkový počet míst ve frontě a obsluze, přičemž není-li stanoveno jinak, předpokládá se, že má tento parametr hodnotu  $\infty$ , tedy kapacita systému je neomezená; **E** označuje početnost zdroje požadavků, jinak řečeno je to přirozené číslo vyjadřující maximální počet požadavků ve vstupním proudu (či ve zdroji požadavků), přičemž opět pokud není dáno jinak, předpokládá se hodnota  $\infty$ ; poslední písmeno **F** popisuje typ fronty (FIFO, LIFO, PRI či SIRO).

S hodnotou, kterou nabývá parametr  $E$ , je spojeno rozdělení SHO na tzv. otevřený systém (v případě, že je hodnota  $\infty$ ), a uzavřený či cyklický systém (hodnota parametru je dána konečným číslem).

V literatuře jsou systémy hromadné obsluhy označeny většinou pouze třemi symboly (A/B/C), ale to neznamená, že by ostatní symboly neexistovaly. Jestliže je označení SHO třísymbolové pak se předpokládá, že D a E jsou neomezené a F znamená režim fronty FIFO.

Například systém  $M/N/3$  je systém, kde se doba mezi vstupy jednotlivých požadavků do systému řídí dle exponenciálního rozdělení, doba obsluhy jedné jednotky má normální rozdělení a v systému jsou tři paralelně uspořádané obslužné linky.

### 3.4 Procesy zrodu a zániku (*birth-and-death process*)

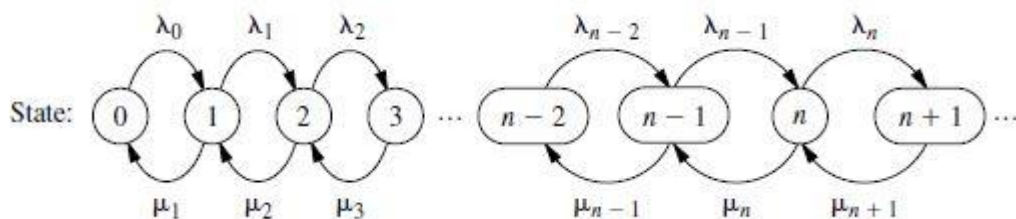
Většina základních modelů hromadné obsluhy předpokládá, že se vstupy (přicházející zákazníci) a výstupy (zákazníci opouštějící systém) řídí dle tzv. procesu zrodu a zániku. Tento důležitý proces nachází v teorii pravděpodobnosti široké uplatnění.

V kontextu s teorií hromadné obsluhy znamená termín „zrod“ příchod nového vstupu (zákazníka) do systému hromadné obsluhy a termín „zánik“ vyjadřuje odchod obslouženého zákazníka ze systému.

Stav systému v čase  $t$  ( $t \geq 0$ ), označován  $N(t)$ , je počet zákazníků v čase  $t$ . Procesy zrodu a zániku popisují pravděpodobnostně, jak se  $N(t)$  změní v případě, že  $t$  roste. Obecně řečeno tyto procesy říkají, že jednotlivé zrody a zániky nastávají náhodně, kde jejich četnosti výskytu závisí pouze na současném stavu systému. Díky tomuto předpokladu jsou procesy zrodu a zániku speciálním typem nepřetržitého Markovského řetězce.

Procesy zrodu a zániku lze také vyjádřit graficky, kde *state* znamená stav systému,  $n$  počet požadavků (zákazníků) v systému,  $\lambda_n$  vyjadřuje intenzitu příchodu požadavku do systému a  $\mu$  popisuje intenzitu obsluhy systému (parametry  $\lambda$  a  $\mu$  mají exponenciální rozdělení). Příklad takového grafického znázornění je uveden na následující stránce

Obrázek 3.1 Graf procesu zrodu a zániku



Zdroj: (Hillier & Lieberman, 2001)

A právě modely hromadné obsluhy, které mají vlastnosti Markovského řetězce, budou řešený v následujícím textu.

### 3.5 Modely hromadné obsluhy založené na procesu zrodu a zániku

Nyní již lze přistoupit k charakteristice vybraných konkrétních modelů hromadné obsluhy založené na procesu zrodu a zániku, mezi něž se řadí

- Exponenciální model jednoduché obsluhy s neomezenou ( $M/M/1$ ) a omezenou kapacitou ( $M/M/1/k$ ),
- Exponenciální model vícenásobné obsluhy s neomezenou ( $M/M/s$ ) a omezenou kapacitou ( $M/M/s/k$ ),
- Uzavřený exponenciální model jednoduché a vícenásobné obsluhy,
- Modely systémů hromadné obsluhy s netrpělivostí a prioritami požadavků.

Pro cíle této práce budou podrobněji rozebrány modely z prvních dvou skupin, konkrétně modely  $M/M/1$  a  $M/M/s$ .

#### 3.5.1 Exponenciální model jednoduché obsluhy $M/M/1$

Model  $M/M/1$  bývá označován za základní, nejjednodušší model SHO, kdy se doba obsluhy a doba mezi příchody požadavků řídí dle exponenciální pravděpodobnostního rozdělení.

Základními předpoklady tohoto modelu jsou

- velikost fronty není omezená,
- v SHO je pouze jedna obslužná linka,
- zdroj požadavků je neomezený, tedy jedná se o otevřený systém,

- režim fronty je FIFO a
- požadavky přicházející do systému čekají ve frontě na obsluhu, a i v případě, že je kapacita obslužné linky nedostatečná (fronta je tedy trpělivá).

Exponenciální model jednoduché obsluhy pracuje v podstatě se dvěma ukazateli, a sice s

$\lambda$  vyjadřující intenzitu příchodů, tj. průměrný počet požadavků, které vstupují do systému za daný časový interval,

$\mu$  popisující intenzitu obsluhy, tedy průměrný počet obslužených požadavků za časový interval.

Za předpokladu, že se počet vstupujících požadavků řídí Poissonovým rozdělením, je pravděpodobnost vstupu  $n$  jednotek do systému v intervalu  $T = (0, t)$  dána vzorcem

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots \quad 3.6$$

kdy speciálně pro  $k = 0$  je

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad 3.7$$

Dalším předpokladem modelu je skutečnost, že stav systému  $n$  v libovolném okamžiku  $t$  závisí pouze na stavu bezprostředně předcházejícím, přičemž všechny předešlé stavy jsou opomíjeny, proces hromadné obsluhy má tedy charakter Markovova procesu. Tento předpoklad platí pro všechny modely uvedené v této kapitole.

Jestliže je stav  $S_n$  označen za stav, kdy se v systému nachází právě  $n$  požadavků, pak v intervalu  $(t, t+\Delta t)$  mohou nastat pouze tyto přechody

$$S_0 \rightarrow S_0, S_0 \rightarrow S_1, S_1 \rightarrow S_0 \quad 3.8$$

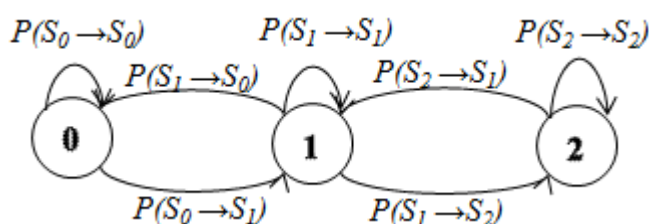
pro stav výchozí a

$$S_n \rightarrow S_n, S_n \rightarrow S_{n+1}, S_n \rightarrow S_{n-1} \quad 3.9$$

pro všechna  $n \geq 1$ .

Pro lepší pochopení vyjadřuje tyto vztahy graf přechodů systému na následující stránce.

Schéma 3.10 Graf přechodů systému M/M/1



Zdroj: (Hillier & Lieberman, 2001), vlastní zpracování

Pravděpodobnost situace, kdy se v systému nenachází žádný požadavek (nebude muset čekat), tedy pravděpodobnost toho, že obslužná linka není využita, je dána vzorcem

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad 3.10$$

přičemž z tohoto vztahu vyplývá, že pravděpodobnost, že je v systému alespoň jeden požadavek (bude čekat), tzn., že obslužná linka je využita je

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad 3.11$$

Aby byl systém stabilní, musí být splněna podmínka vyjádřena vztahem

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \quad 3.12$$

kde  $\rho$  představuje intenzitu provozu systému hromadné obsluhy. Z uvedeného vzorce vyplývá, že intenzita příchoďů požadavků do systému musí být nižší, než intenzita obsluhy.

Pravděpodobnosti přechodů mezi stavy umožňují určit pravděpodobnost, že v systému je právě  $n$  požadavků, tedy jeden je obsluhován a  $(n-1)$  čeká ve frontě vztahem

$$p_n = p_0 \rho^n = (1 - \rho)\rho^n \quad 3.13$$

### Základní charakteristiky systému M/M/1

Na základě výše uvedených obecných vztahů a za předpokladu, že je známo rozdělení stacionárních rozdělení pravděpodobností  $p_n$  vyjadřující pravděpodobnost počtu požadavků nacházejících se v daném systému hromadné obsluhy, zde budou uvedeny vzorce pro výpočty základních charakteristik systému.

Tyto charakteristiky se používají k posouzení efektivnosti daného systému, a to jak z hlediska využití obslužných zařízení, tak z hlediska obsluhovaných požadavků.

Průměrný čas strávený požadavkem v systému je dán

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad 3.14$$

Střední hodnota doby, kterou stráví požadavek ve frontě je vyjádřen

$$T_f = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad 3.15$$

Z předcházejících časových charakteristik lze snadno odvodit střední hodnotu počtu požadavků v systému

$$N = \lambda T = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad 3.16$$

a současně střední hodnota počtu požadavků ve frontě je

$$N_f = \lambda T_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad 3.17$$

Pravděpodobnost vzniku fronty

$$P(N \geq 1) = \rho^2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2. \quad 3.18$$

### 3.5.2 Exponenciální model vícenásobné obsluhy $M/M/s$

Tento model systému hromadné obsluhy bývá v praxi zastoupen nejčastěji. Typickým příkladem, který bude řešen v praktické části této práce, je počet pokladen v obchodě, kde zákazníci (požadavky) přistupují k zaplacení (obslužná linka).

V úvodu je zapotřebí opět vymezit vlastnosti modelu  $M/M/s$ , které jsou

- intervaly mezi příchody požadavků ( $\lambda$ ) a doba obsluhy na každé obslužné lince ( $\mu$ ) mají exponenciální rozdělení,
- v modelu se nachází  $s$  paralelně uspořádaných identických obslužných linek, kdy každá linka má intenzitu obsluhy  $\mu$ , tedy pokud se nachází v systému pět zařízení obsluhy, bude intenzita obsluhy celého systému  $5\mu$  apod., přičemž logicky nejvyšší hodnota může být  $s\mu$ ,
- zdroj požadavků není omezený, jedná se tedy stejně jako u modelu jednoduché obsluhy o otevřený systém,

- velikost front také není omezená,
- požadavky vstupující do systému mají neomezenou trpělivost, tzn., že čekají ve frontě, dokud nebudou obslouženy, přestože kapacita systému není dostatečná,
- čekající požadavky jsou obsluhovány v pořadí, v jakém do systému přišly (FIFO).

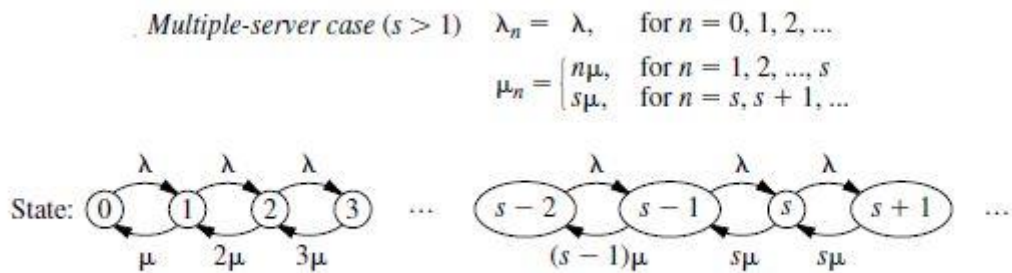
Obdobně jako u modelu  $M/M/1$ , je i zde stanovena podmínka stabilizace celého systému tak, aby nedocházelo k neomezenému narůstání front. Aby byl tedy systém stabilní, musí být intenzita obsluhy celého systému větší, než interval mezi příchody požadavků do systému, neboli

$$\frac{\lambda}{s\mu} = \frac{\rho}{s} < 1, \quad 3.19$$

kde výpočet parametru  $\rho$  je uveden v rovnici 3.11.

Pro stanovení pravděpodobnosti, že se v systému nenachází žádný požadavek (žádná z obslužných linek nepracuje) danou parametru  $p_0$  se bude vycházet z grafu přechodu systému  $M/M/s$  uvedeného níže

**Graf 3.2 Graf přechodů v systému  $M/M/s$**



*Zdroj: (Hillier & Lieberman, 2001)*

Platí tedy

$$p_0 = \left( \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{s}} \right)^{-1}. \quad 3.20$$

Pravděpodobnost, že se v systému nachází  $n$  požadavků, kde  $n$  je menší nebo rovno počtu obslužných linek (tedy  $n \leq s$ ), vyjadřující situaci, kdy jsou všechny přítomné požadavky obsluhovány, resp. fronta je prázdná je dána

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad 3.21$$

Opačný případ, kdy je  $n$  větší než počet obslužných linek, tj.  $n > s$ , a tedy všechny obslužné linky jsou v provozu, obsluhují  $s$  požadavků a zbývajících počet  $(n-s)$  požadavků čeká na obsluhu ve frontě, je dán pravděpodobností

$$p_n = \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0. \quad 3.22$$

### **Základní charakteristiky systému $M/M/s$**

Kromě výše uvedených vzorců pro určité pravděpodobnosti a za předpokladu platnosti výše uvedených vztahů se pro posouzení efektivnosti daného systému používají základní charakteristiky, jejichž výpočty jsou uvedené níže.

Efektivnost systému se hodnotí (stejně jako u modelu  $M/M/1$ ) z dvou hledisek, a to jak z hlediska využití obslužných linek, tak z hlediska obsluhovaných požadavků.

Průměrný počet požadavků v systému je dán

$$N = \lambda T. \quad 3.23$$

Průměrný čas strávený požadavkem v systému

$$T = T_f + \frac{1}{\mu}. \quad 3.24$$

Střední hodnota doby strávené požadavkem ve frontě

$$T_f = \frac{\rho^s \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} p_0. \quad 3.25$$

Průměrný počet požadavků ve frontě

$$N_f = \lambda T_f. \quad 3.26$$

Pravděpodobnost, že požadavek přicházející do systému, bude muset čekat ve frontě na obsluhu, tedy v systému je  $s$  a více požadavků je rovna

$$p_f = \frac{\rho^s s}{s!(s-\rho)} p_0. \quad 3.27$$



### 3.6 Optimalizace systémů hromadné obsluhy

Vedle základního cíle SHO popsat celý systém, mají tyto modely navíc za úkol sloužit jako nástroj pro optimalizaci systému, a to především v analýze toho, kolik paralelně řazených obslužných linek je s ohledem na minimalizaci nákladů souvisejících s daným systémem efektivní provozovat.

Tato optimalizace se tedy týká modelů  $M/M/s$ , a jedná se přitom o určení diskrétní hodnoty  $s$  tak, aby náklady na provoz systému byly minimální. Realizace optimalizačních propočtů předpokládá, že je uživatel schopen nějakým způsobem ohodnotit náklady provozu obslužných linek a případně náklady související s pobytem požadavků v systému. (Jablonský, 1998)

Za předpokladu, že je zkoumaný SHO stabilizovaný, je možné nákladovou funkci definovat jako

$$NS(s) = k_1N + k_2s, \quad 3.28$$

kde

- $k_1$  zachycuje náklady související s pobytem jednoho požadavku v SHO za časovou jednotku,
- $k_2$  vyjadřuje náklady na provoz jedné obslužné linky za jednotku času,
- $N$  udává průměrný počet jednotek v systému a
- $s$  označuje počet paralelně uspořádaných obslužných linek.

Jak je z funkce vidět, skládá se ze dvou částí, kdy první část ( $k_1N$ ) značí celkové náklady související s pobytem požadavků v systému za časovou jednotku a druhá část ( $k_2s$ ) je vyjádřením celkových nákladů na provoz všech obslužných linek za jednotku času.

Ze vztahu 3.28 je zřejmé, že výsledná hodnota funkce  $NS(s)$  je (za předpokladu považování intenzity příchodů a intenzity obsluhy každé z linek  $s$ ), závislá pouze hodnotě parametru  $s$ . Pokud by došlo ke snížení počtu obslužných linek nebo ke snížení průměrného počtu požadavků (zákazníků) v systému, snížila by se i hodnota nákladové funkce. Naopak zvýšení hodnot parametrů  $N$  nebo  $s$  by vyvolalo zvýšení  $NS(s)$ .

### 3.7 Statistická analýza

V praktické části práce bude řešen reálný problém SHO a v souvislosti s tím dojde k testování doby mezi příchody požadavků do daného systému na rozdělení, kterému tento parametr odpovídá. Z tohoto důvodu zde bude stručně charakterizována statistická analýza, s jejíž pomocí lze zpracovat velký soubor existujících, resp. možných výsledků náhodného pokusu, pro který bude přijatý nějaký pravděpodobnostní model. Výpočty budou prováděny jen v poměrně malé části souboru výsledků (výběrový soubor) a tímto způsobem získaná informace bude zobecněna na soubor původní.

#### Testování hypotéz

Statistické hypotézy slouží ke srovnání získaných dat s určenými předpoklady, kdy je vžitý postup

- 1) stanovení hypotéz – nulové a alternativní,
- 2) provedení náhodného výběru,
- 3) zvolení hladin významnosti  $\alpha$  vyjadřující pravděpodobnost, že dojde k nesprávnému zamítnutí nulové hypotézy,
- 4) výběr testovacího kritéria,
- 5) následný výpočet zvoleného testovacího kritéria a
- 6) konečné rozhodnutí, zda bude nulová hypotéza zamítnuta či nikoliv.

#### Kolmogorovův-Smirnovův test

Jak již bylo řečeno, intervaly mezi příchody požadavků do systému budou v praktické části práce testovány na Poissonovo rozdělení, k čemuž bude využit právě Kolmogorovův-Smirnovův test (K-S test). K-S test lze použít pro soubory jak malého, tak velkého rozsahu a jeho výsledky jsou přesnější, než například Chí-kvadrát test, jenž patří také mezi testy shody, jelikož vychází z přímo naměřených dat.

Tuto metodu, jež má svou jednovýběrovou i dvouvýběrovou variantu, vytvořili ruští matematici Andrej Nikolajevič Kolmogorov a Vladimír Ivanovič Smirnov. K-S test je založen na maximální vzdálenosti empirické a teoretické distribuční funkce a jeho následném porovnání s kritickou hodnotou Kolmogorova-Smirnovova testu  $D_n(\alpha)$ . Pro účely této práce bude použit jednovýbě-

rový K-S test, jehož výpočet bude stručně charakterizován v následujících odstavcích.

V prvním kroku testu jsou stanoveny nulová a alternativní hypotéza:

$H_0$ : náhodný výběr pochází z předpokládaného pravděpodobnostního rozdělení,

$H_A$ : náhodný výběr nepochází z předpokládaného pravděpodobnostního rozdělení.

Jako testové kritérium bude použita statistika  $D_n = \max(D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*)$ , kde  $D_i^* = \max \left\{ \left| F_0(x_i) - \frac{i-1}{n} \right|, \left| \frac{i}{n} - F_0(x_i) \right| \right\}$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $F_0(x_i)$  vyjadřuje hodnotu distribuční funkce.

Nulová hypotéza bude zamítnuta na hladině významnosti  $\alpha$ , jestliže hodnota testové statistiky  $D_n$  bude větší než kritická hodnota  $D(\alpha)$ .

Pro  $n \geq 50$  je možné  $D_n(\alpha)$  aproximovat dle výrazu  $\sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\alpha}}$ . V případě, že je  $n \leq 50$  lze najít kritické hodnoty ve statistických tabulkách, například (Linda & Kubanová, 2004)

## 4 Metodika a cíl práce

### Zkoumaný objekt

Jak již bylo řečeno v úvodu, společnost, která je v této práci analyzována, si nepřeje být jmenována, a proto bude pro v praktické části práce označována jako společnost PZV (Pro zákazníky vše).

Předmětem podnikání společnosti PZV je prodej potravinářského a nepotravinářského zboží a pronájem prodejní plochy prodejcům, obecně řečeno provozuje síť supermarketů, hypermarketů a obchodních domů.

### Hlavní cíl

Na základě informací uvedených v teoretické části práce, bude hlavním cílem v praktické části aplikovat některý z modelů teorie hromadné obsluhy na uvedenou společnost, získané výsledky zanalyzovat a najít optimální řešení.

### Použité metody

- klasifikace systému hromadné obsluhy,
- charakteristika jednotlivých parametrů systému hromadné obsluhy.
- výpočet a analýza výsledků parametrů,
- nalezení optimálního řešení a
- zhodnocení přínosu optimalizace.

### Použité zdroje informací

- odborná literatura,
- interní dokumentace společnost PZV.

## 5 Praktická aplikace modelu SHO

V teoretické části této diplomové práce byly uvedeny všechny důležité informace, které jsou potřebné k použití modelů SHO na vybraný problém z praktického života, jenž bude řešen v této kapitole.

### 5.1 Stručná charakteristika vybrané společnosti

Společnost PZV byla založena v roce 1992 za účelem prodeje jak potravinářského, tak nepotravinářského zboží. Provozuje po celém území České republiky síť obchodní domů, hypermarketů, supermarketů, obchodů s oděvy své vlastní značky a čerpací stanice.

Cílem společnosti PZV je pozorně vnímat potřeby svých zákazníků a vytvořit takové místo k nakupování, kam se budou rádi vracet. Používá proto multikanálový přístup k podnikání, jenž umožňuje zákazníkovi nakoupit takovým způsobem, který je pro něj nejpříjemnější.

Aby byl cíl společnosti naplněn, musí všechna oddělení pracovníků v každém obchodním domě, hypermarketu či supermarketu spolupracovat co nejefektivněji, ale také co nejkvalitněji. Je důležité, aby byl chod celého systému plynulý. Jedním z oddělení systému je tzv. pokladní zóna, která představuje z pohledu celého systému obchodu konečný uzel, a proto lze tvrdit, že pokladní zóna má na celkový dojem na zákazníka největší vliv. Pokud by například došlo k situaci, že bude zákazník s jiným oddělením obchodu nespokojený, může jeho dojem z obchodu jenom zhoršit, pokud po příchodu k pokladnám zjistí, že bude ještě muset čekat ve frontě. Nemluvě o případném špatném rozpoložení obsluhy pokladny, ale tento problém teorie hromadné obsluhy vyřešit nedokáže a patří spíše do oblasti psychologie.

Co ale může být prostřednictvím teorie hromadné obsluhy vylepšeno, jsou případné fronty u pokladen. A právě tento problém byl vybrán pro praktickou aplikaci SHO.

### 5.2 Základní informace

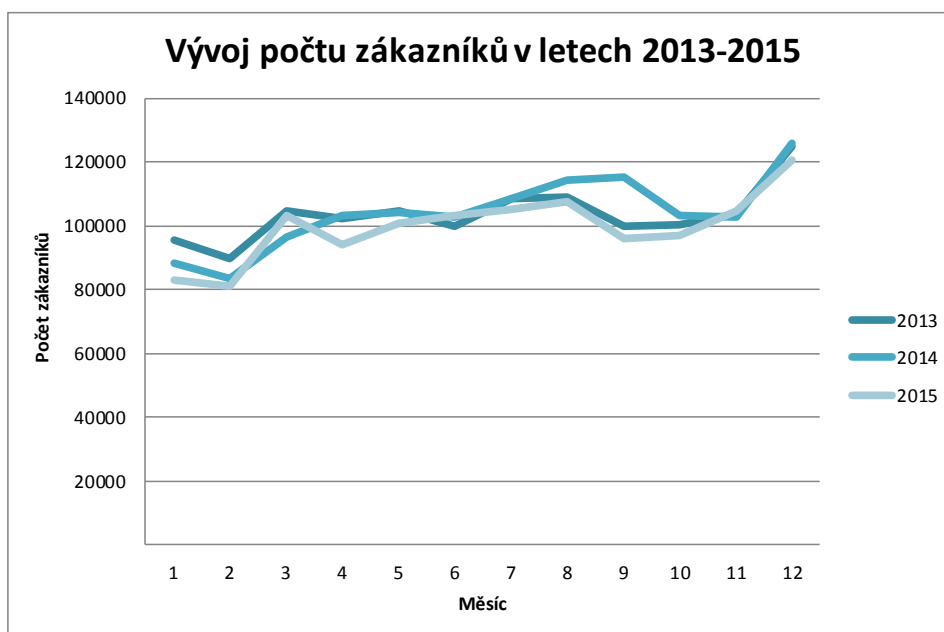
Společnost PZV se uvolila poskytnout nashromážděné informace o hodnotách průměrného nákupu a o počtu zákazníků každého dne každého měsíce

za poslední tři roky (tj. 2015, 2014, 2013) za pobočku v Příbrami. Jelikož se jedná o velmi obsáhlá data, budou doložena v příloze na konci práce.

Poskytnutá data uvádějí hodnoty průměrného nákupu a počet zákazníků pouze za celý den, resp. za celou otevírací dobu hypermarketu, tj. od 6:00 do 22:00. Výjimku tvoří období Vánoc, kdy se otevírací doba prodlužuje o další dvě hodiny, a to v termínu od 17.12. – 26.12., kdy v roce 2013 platila tato otevírací doba již od 11. prosince. Na Štědrý den je otevřeno pouze do 14:00, tedy 8 hodin, a klasicky na 1. svátek vánoční (26.12.) a na Nový rok (1.1.) není hypermarket otevřený vůbec.

Ještě před popisem a řešením samotného modelu systému hromadné obsluhy, zde budou uvedeny grafy seznamující čtenáře s vývojem hodnot poskytnutých dat.

**Graf 5.1 Vývoj počtu zákazníků v letech 2013 – 2015**



*Zdroj: data poskytnutá společností PZV*

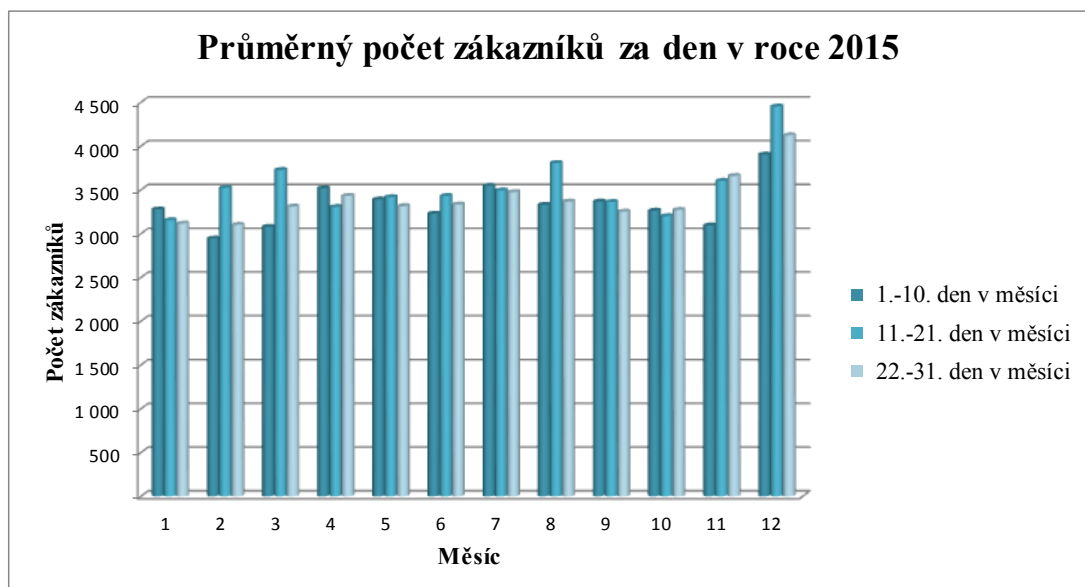
Z grafu je patrné, že začátkem roku je počet zákazníků, kteří systémem projdou, nejnižší. Je to především z toho důvodu, že se jedná o období roku nastávající bezprostředně po Vánocích a Silvestru. V tomto čase totiž většina lidí nakupuje nejvíce, resp. prochází systémem hromadné obsluhy hypermarketu. Vlastní zkušenost s prací ve zmíněném hypermarketu navíc dodává informaci o skutečnosti, že poměrně velké množství zákazníků chodí v tomto čase nakupovat i několikrát do týdne. Následkem takového jednání je často podstatné snížení

finančních prostředků zákazníků. Proto se někteří zákazníci rozhodnout v hypermarketu na počátku každého nového roku buď nakoupit jenom základní zboží a tím eliminovat počet nákupů v krátkém časovém okamžiku, nebo do hypermarketu nepřijdou vůbec. Od března je už možné zaznamenat lehké zvýšení počtu zákazníků procházející SHO, což lze vysvětlit tak, že si během prvních dvou měsíců roku zákazníci částečně doplnili své finanční prostředky a mohou si tak opět dovolit větší počet nákupů. Dalšího výkyvu je možné si všimnout v měsících červen-srpen, kdy začínají letní prázdniny, a tak zákazníci chodí nakupovat vybavení na dovolené, tábory apod. Zároveň se koncem srpna začíná přibližovat začátek školní docházky na základních či středních školách a rodiče proto začínají nakupovat školní pomůcky pro své děti. Absolutně nejvyšší rozdíly v počtu nákupů jsou v prosinci, konkrétně asi tak týden před Štědrým dnem a pár dní před Silvestrem.

Zajímavá je také analýza průměrného počtu zákazníků procházejících systém hromadné obsluhy za den na základě určení intervalů

- 1.-.10.,
- 11.-.21. a
- 22.-31. den v měsíci.

**Graf 5.2 Průměrný počet zákazníků za den v roce 2015**



Z grafu je možné vyčíst, že ze tří vybraných intervalů, je u poloviny měsíců nejvyšší počet zákazníků SHO v druhé třetině měsíce, tj. mezi 11.-.21. dnem v měsíci (totéž platí i pro roky 2014 a 2013). Tuto skutečnost lze vysvětlit faktem,

že výplata chodí většině lidí na účet či složenkou právě v tomto období, tím pádem mají potenciální zákazníci hypermarketu vyšší finance na své nákupy. Druhá polovina měsíců má intervaly víceméně vyrovnané, což je způsobené většinou svátky či faktem, že nejvíce lidí nakupuje v pátek a sobotu.

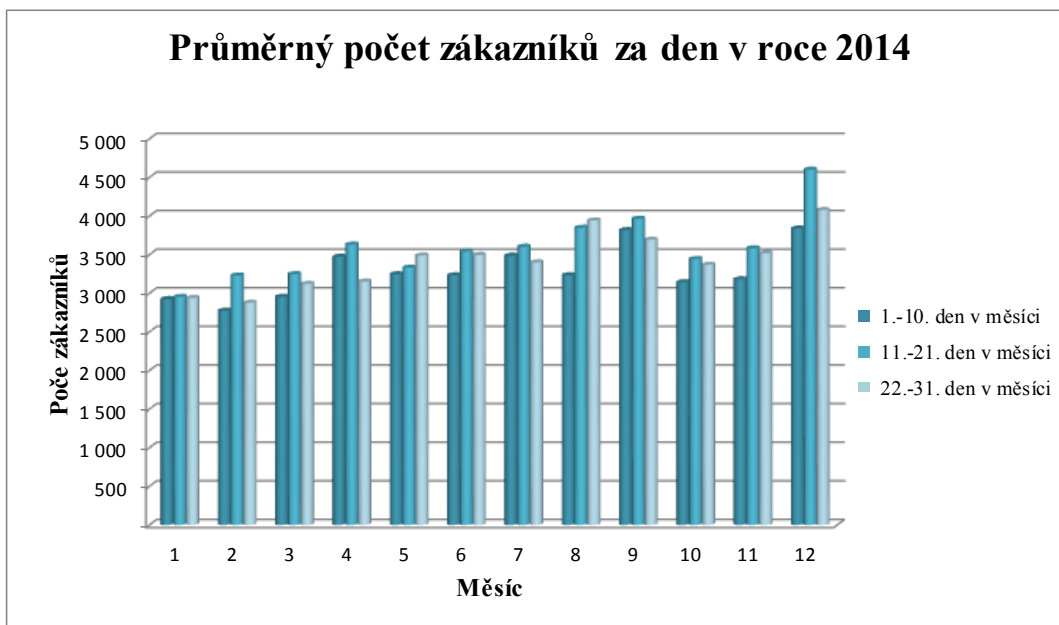
Dále si lze všimnout, že ve všech třech letech se začátkem roku vyskytuje stále stejný jev vysvětlený výše – nízká návštěvnost v lednu postupně se zvyšující v únoru, následně v březnu. Zároveň v období jarních prázdnin, tj. 9.2.-15.2., se denní počet zákazníků zvýšil (především mezi 12. a 15. únorem), což dokládá graf roku 2015. Období hlavních prázdnin základních a středních škol (letní prázdniny) vyvolává, jak již bylo řečeno výše, zvýšenou návštěvnost koncem června, kdy se lidé připravují na dovolené, posílají děti na tábory apod., přičemž následuje zvýšení počtu zákazníků během července a srpna.

Také nástup do základních a středních škol 1.září způsobuje, že v září roku 2015 a 2014 je průměrný počet zákazníků za den v prvních dvou zvolených intervalech vyšší, než v posledním, jelikož na začátek září připadají slevy na školní potřeby. Hypermarket na plánované slevy upozorňuje dopředu, a proto si někteří zákazníci počkají a nakoupí školní pomůcky pro své děti až začátkem září. Výjimkou je rok 2013, kdy se vedení hypermarketu rozhodlo, že slevy na školní pomůcky zavede o měsíc dříve, tudíž je v srpnu zvýšený průměrný počet zákazníků za den vyšší v prvním intervalu a začátkem září již výkyv, jako v následujících dvou letech, nenastal.

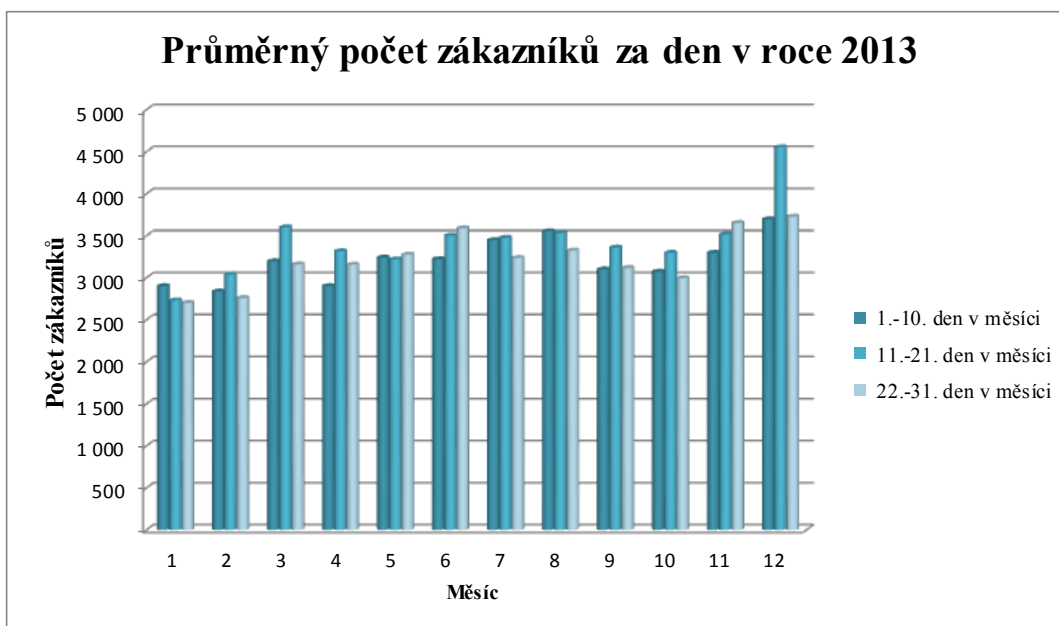
Klasický nejvyšší nárůst vykazuje prosinec, a to hned začátkem měsíce kvůli Mikulášovi, kdy zákazníci nakupují různé cukrovinky. Následně dochází k nejvyššímu nárůstu za celý rok 2015 mezi 11. a 21. dnem v měsíci kvůli přípravám na Vánoce.



Graf 5.3 Průměrný počet zákazníků za den v roce 2014



Graf 5.4 Průměrný počet zákazníků za den v roce 2013



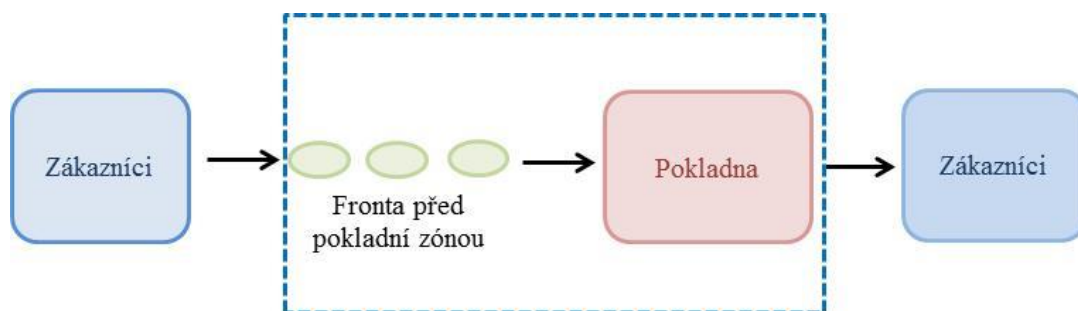
### 5.3 Parametry systému hromadné obsluhy

Nyní budou níže charakterizovány jednotlivé základní parametry SHO, na jejich základě dojde k následnému výběru konkrétního modelu SHO, a pro tento model pak vypočítány všechny parametry uvedené v teoretické části. Na první pohled lze rovnou určit, že se jedná o exponenciální model  $M/M/s$  a charakteristika parametrů SHO by měla tuto hypotézu potvrdit. Zanalyzovat by se mohly

samozřejmě všechny tři roky, ale v této práci bude uveden rok 2015 s tím, že pro další dva roky by analýza měla stejný postup.

Velice jednoduše by se dalo říci, že systém hromadné obsluhy společnosti PZV je dán zákazníky představující vstupní a zároveň výstupní proud, frontami, které se vytvářejí před pokladnami a samotnými pokladnami, resp. blokem obsluhy.

**Schéma 5.1** Systém hromadné obsluhy společnosti PZV



### 5.3.1 Zdroj požadavků

Tato charakteristika udává, zda je zdroj požadavků konečný nebo naopak nekonečný, přičemž za zdroj požadavků jsou považováni zákazníci hypermarketu, kteří projdou přes pokladní zónu, resp. projdou systémem hromadné obsluhy. Teoreticky by se dalo říci, že počet zákazníků by mohl být určen počtem obyvatel města a označit tak SHO za konečný.

Jelikož je ale obyvatel města, v němž se hypermarket nachází, přes 34 tisíc a je třeba vzít v úvahu také zákazníky, kteří městem například jenom projíždějí, bude počet zákazníků (zdroj požadavků) považován za nekonečný. Na základě tohoto určení je zároveň daný systém označen jako otevřený.

### 5.3.2 Příklad požadavků do systému

Popis tohoto parametru je dán intervaly mezi příchody jednotlivých zákazníků do systému a intenzitou příchodů, tedy počtem zákazníků procházejících pokladnami. Vzhledem ke skutečnosti, že zákazníci přicházejí přes pokladní zónu náhodně, se jedná o veličiny pravděpodobnostní, přičemž tento fakt je dokázán grafy 5.1, 5.2, 5.3 i 5.4. Předpokladem je, že počet příchodů zákazníků za určitou dobu sleduje Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ , a tedy doba mezi

příchody odpovídá rozdělení exponenciálnímu. Tento předpoklad bude doložen prostřednictvím Kolmogorovova-Smirnovova testu uvedeného níže.

Předtím, než bude moci být test použit, bude stanoven parametr  $\lambda$ , bez jehož určení se model  $M/M/s$  neobejde. Jak již bylo řečeno, parametr  $\lambda$  vyjadřuje intenzitu příchodů zákazníků do systému hromadné obsluhy, resp. průměrný počet zákazníků za danou časovou jednotku. Výsledky analýzy příchodu zákazníků uvedené výše ukazují, že během roku dochází k poměrně vysokým výkyvům spojených například s letními prázdninami, nebo naopak s obdobím po Vánocích.

Z tohoto důvodu byla data rozdělena, na základně zkušeností získaných při práci na pokladní zóně v daném hypermarketu společnosti PZV, do několika skupin vytvořených podle počtu zákazníků v každém měsíci. Po pečlivém zvážení byly vytvořeny 4 skupiny:

1. nejslabší dny v měsíci – takové dny, kdy počet zákazníků v SHO nepřekročil 3 000 za den,
2. slabé dny v měsíci – tato skupina představuje dny v měsíci, kdy se počet zákazníků hypermarketu pohyboval v intervalu (3000;3300),
3. silné dny v měsíci – situace, kdy počet zákazníků za den nepřesáhl 4 000, ale zároveň nebyl menší než 3 300 a
4. extrémy – takový počet dní v měsíci, kdy počet zákazníků přesáhl 4 000 za den. Tato situace se týká především Vánoc, svátků, prázdnin či pátků a sobot mezi 11.-21. dnem v měsíci (v tu dobu chodí nakupovat zákazníci nejčastěji).

První dvě skupiny je možné označit za druhý extrém spojený naopak s velmi nízkou návštěvností hypermarketu společnosti PZV. Dle vlastní zkušenosti lze tvrdit, že nejčastěji se počet zákazníků během dne pohybuje mezi 3 300 a 4 000, což dokládá i skutečnost, že „silné dny v měsíci“ tvoří přes 40% dnů v roce. Proto byl stanoven pro skupinu „silné dny v měsíci“ vyšší interval než ve skupině předcházející.

Rozdělení dní do jednotlivých skupin prezentuje Tabulka 2.1, kde modré čáry označují období mezi 11. a 21. dnem v měsíci. V tomto intervalu si lze všimnout, že (pokud budou opomenuty jarní prázdniny a Vánoce) se zde vyskytuje velký počet dní s extrémním označením. Většina z extrémních dnů jsou pátky

či soboty, což jsou dny v týdnu, kdy lidé chodí nakupovat nejčastěji. Důvod je jednoduchý - převážná většina lidí je od rána v práci, pak musí vyzvednout děti ze školy, popřípadě je rozvézt na kroužky a uvařit – to už bývají večerní hodiny a na nákupy už nezbývá ani nálada, ani čas. Proto je tradičně nejvyšší počet zákazníků zaznamenáván v pátek a sobotu, a jelikož se jedná navíc o období vyplácení mezd, dostávají se čísla počtu zákazníků za den do vysokých čísel.

Extrémní hodnotu počtu zákazníků za den vykazuje také osmý leden, přičemž tento den nesouvisí ani se svátkem či prázdninami, ani se nejedná o pátek nebo sobotu. Společnost PZV poskytla vysvětlení s tím, že na tento den připadl největší doprodej vánočních dekorací a zároveň odstartoval každoroční povánoční výprodej oděvů, který pokračoval další dva měsíce. Protože šlo ale o první týden výprodejů, měli zákazníci mnohem větší výběr, než v dalších týdnech, a proto se návštěvnost vyšplhala až na 4 304 zákazníků.

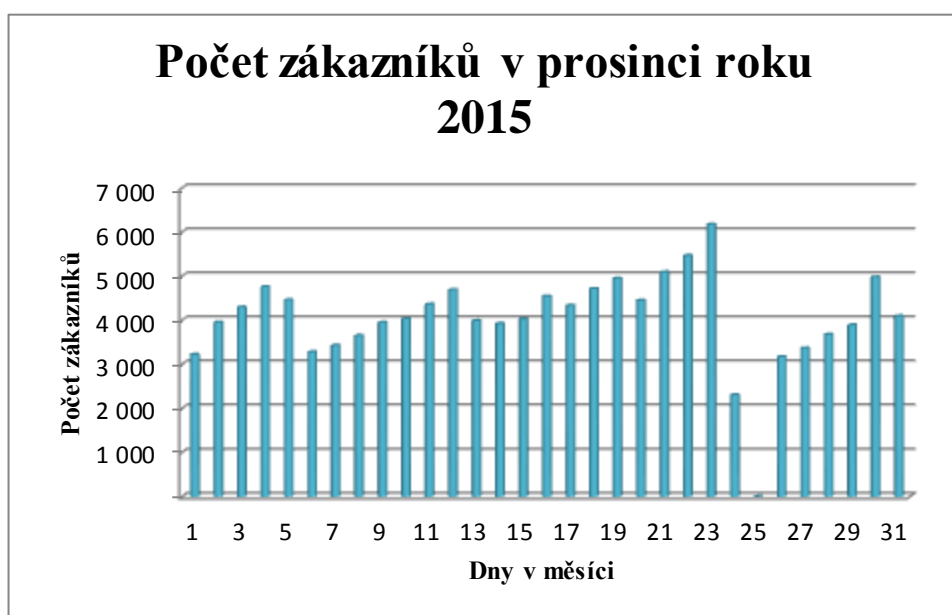
Z dalších extrémů lze krásně vyčíst i „klasické“ výkyvy - jarní prázdniny, Mikuláš, Silvestr či Velikonoce, které v roce 2015 připadly na 3.-5. dubna, a nejtýpčtější – Vánoce. Nejvíce zákazníků chodí nakupovat těsně před nebo přímo v den události - například těsně před Mikulášem, tj. 3., 4., a 5. prosince, nakupují rodiče cukrovinky pro své děti.

Naopak zajímavostí jsou nadměrné hodnoty například 20. a 21. března, kdy bylo týdenní akcí číslo jedna velmi známé české pivo. V drtivé většině takovýchto akcí hned ráno najeli do hypermarketu obchodníci, kteří pivo dále prodávají ve svých krámech. Protože ale právě kvůli nim omezuje hypermarket množství na osobu, vychytralí obchodníci koupí povolené množství, otočí košík a jedou znovu. Jejich jednání poté samozřejmě navyšuje denní počet zákazníků, na druhou stranu ale dochází k rapidnímu snižování zboží na skladě, a proto dosahuje návštěvnost extrémních hodnot nejčastěji pouze první a druhý den akce.

Tabulka 5.1 Rozdělení dnů v měsících do skupin

Den v měsíci	Počet zákazníků 2015											
	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
1		nejslabší den	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	nejslabší den	SLABÝ DEN
2	SLABÝ DEN	nejslabší den	nejslabší den	Silný den	Silný den	nejslabší den	Silný den	nejslabší den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den
3	SLABÝ DEN	nejslabší den	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>	nejslabší den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>
4	nejslabší den	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
5	nejslabší den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
6	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	Silný den	Silný den	nejslabší den	Silný den	SLABÝ DEN	nejslabší den	Silný den	SLABÝ DEN
7	SLABÝ DEN	nejslabší den	Silný den	nejslabší den	Silný den	nejslabší den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den
8	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	Silný den
9	Silný den	nejslabší den	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
10	Silný den	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
11	nejslabší den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	nejslabší den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
12	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	nejslabší den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
13	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	Silný den
14	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den
15	nejslabší den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
16	nejslabší den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
17	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>
18	nejslabší den	Silný den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	nejslabší den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
19	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
20	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	nejslabší den	nejslabší den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
21	Silný den	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
22	nejslabší den	nejslabší den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
23	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
24	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>
25	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	
26	nejslabší den	nejslabší den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	nejslabší den	Silný den	SLABÝ DEN
27	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den
28	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	nejslabší den	<b>EXTRÉM</b>	Silný den
29	SLABÝ DEN		nejslabší den	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	Silný den	nejslabší den	Silný den	Silný den	Silný den
30	Silný den		SLABÝ DEN	<b>EXTRÉM</b>	Silný den	SLABÝ DEN	Silný den	nejslabší den	SLABÝ DEN	Silný den	Silný den	<b>EXTRÉM</b>
31	Silný den		nejslabší den		nejslabší den		Silný den	Silný den	SLABÝ DEN	SLABÝ DEN	Silný den	<b>EXTRÉM</b>

Graf 5.5 Počet zákazníků v prosinci 2015



Výše uvedený graf ukazuje, jak zákazníci reagují na blížící se svátky vánoční – postupně se návštěvnost zvyšuje, kdy nejvyšší bývá každý rok před Štědrým dnem. Přimo na Štědrý den nakupuje také velké množství zákazníků, ovšem otevírací doba je zkrácena, a proto má tento den v grafu tak nízkou hodnotu. Na Boží hod vánoční má hypermarket zavřeno, ale hned 26. prosince je možné zaznamenat zvyšující se návštěvnost značící přípravy na Silvestr.

Počet hodin, po které byl hypermarket společnosti PZV otevřený a počet zákazníků stanovený dle určených skupin již nyní umožňují výpočet hledaného parametru  $\lambda$ .

Tabulka 5.2 Stanovení hodnoty parametru  $\lambda$

Skupina	Počet hodin	Počet zákazníků	$\lambda$
Nejslabší dny	896	157 890	176
Slabé dny	1 696	332 644	196
Silné dny	2 544	570 194	224
Extrémny	678	182 850	270

Z tabulky vyplývá, že pro výpočet parametru lambda bylo nutné zjistit, kolik zákazníků ve všech dnech rozdělených do 4 skupin přišlo do hypermarketu a jaká byla v daných dnech otevírací doba, resp. jak dlouho měl hypermarket ve vymezených dnech otevřeno.

Například v extrémních dnech tedy dle výpočtů přišlo do hypermarketu průměrně 270 zákazníků za hodinu, v nejslabších dnech to bylo naopak pouze 176 zákazníků za hodinu.

### Kolmogorovův-Smirnovův test

V prvním kroku tohoto testu je třeba stanovit hypotézy, které budou vypadat následovně:

$H_0$ : doba mezi příchody zákazníků do SHO se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem  $\lambda$ ,

$H_1$ : doba mezi příchody zákazníků do SHO se neřídí Poissonovým rozdělením s parametrem  $\lambda$ .

Dále je nutné určit náhodný výběr, který bude předmětem testování. Jelikož byla data rozdělena do 4 skupin, budou z důvodu omezeného času a prostoru předmětem testování pouze hodnoty označené jako extrémny.

Zvolené hladiny významnosti byly stanoveny dle tradičních hladin uváděných v literatuře, konkrétně

$$\alpha_0 = 0,10 \quad \alpha_1 = 0,05 \quad \alpha_3 = 0,01.$$

Jelikož je počet hodnot ve skupině extrémů 41, stačí se pro získání kritických hodnot pro vybrané hladiny významnosti podívat do statistických tabulek, tedy pro

- $\alpha_0 = 0,10$  je kritická hodnota rovna 0,187,
- $\alpha_1 = 0,05$  je kritická hodnota rovna 0,208 a pro
- $\alpha_3 = 0,01$  se rovná kritická hodnota 0,249.

Poissonovo rozdělení má pouze jediný parametr, a to parametr lambda. Proto je distribuční funkce dána  $Po(\lambda)$ , kde  $\lambda > 0$ .

Jestli-že  $X$  nabývá hodnot pouze 0, 1, ..., je výpočet pravděpodobnosti  $p_i$  a odhad parametru  $\lambda$  dán

$$E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^k x_i, \quad 5.1$$

$$p_i = P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}. \quad 5.2$$

A protože pro Poissonovo rozdělení platí vztah  $E(X) = \lambda$ , je hodnota parametru  $\lambda$  rovna 4 404.

Výpočet hodnoty testového kritéria zobrazuje tabulka na následující stránce.

**Tabulka 5.3 Výpočet hodnoty testového kritéria**

$i$	$x_{(i)}$	$F(x_{(i)})$	$\left F(x_i) - \frac{i-1}{n}\right $	$\left \frac{i}{n} - F(x_i)\right $
1	4 006	6,22164E-10	6,22164E-10	0,024390243
2	4 019	2,14781E-09	0,024390242	0,048780486
3	4 024	3,42138E-09	0,048780484	0,073170728
4	4 026	4,11477E-09	0,073170728	0,097560971
5	4 029	5,41717E-09	0,09756097	0,121951214
6	4 031	6,49928E-09	0,121951213	0,146341457
7	4 041	1,59232E-08	0,146341447	0,170731691
8	4 060	8,17787E-08	0,170731626	0,195121869
9	4 096	1,43363E-06	0,195120518	0,219510761
10	4 105	2,79628E-06	0,219509399	0,243899643
11	4 110	4,01977E-06	0,243898419	0,268288663
12	4 114	5,35139E-06	0,268287332	0,292677575
13	4 129	1,51364E-05	0,29266779	0,317058034
14	4 154	7,62626E-05	0,316996908	0,341387152
15	4 177	0,00029751	0,341165905	0,365556149
16	4 180	0,000352185	0,365501473	0,389891717
17	4 203	0,001200474	0,389043428	0,413433672
18	4 225	0,003475833	0,411158313	0,435548557
19	4 242	0,007351729	0,431672662	0,456062905
20	4 289	0,04237041	0,421044225	0,445434469
21	4 296	0,052892228	0,43491265	0,459302894
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
41	6 173	1	0,024390244	0

Tabulka uvádí, že maximální hodnota testového kritéria je 0,4692, tudíž hodnota testové statistiky je větší než kritická hodnota, a to na všech vybraných hladinách významnosti.

Výsledkem tedy je, že nulová hypotéza je zamítnuta, tudíž doba mezi příchody zákazníků se skutečně řídí exponenciálním rozdělením.

### 5.3.3 Doba trvání obsluhy

Intenzita příchodů požadavků vyjádřená parametrem  $\lambda$  je spolu s intenzitou obsluhy nejzákladnější hodnoty, které je při analýze systému hromadné obsluhy nutné znát.

Na základě pozorování nepřetržitého provozu jedné z pokladen v uvedeném hypermarketu bylo zjištěno, že za hodinu prošlo přes danou pokladnu 86 zákazníků, tedy za minutu bylo obslouženo v průměru 1,43 zákazníka. Stejně jako u intervalu



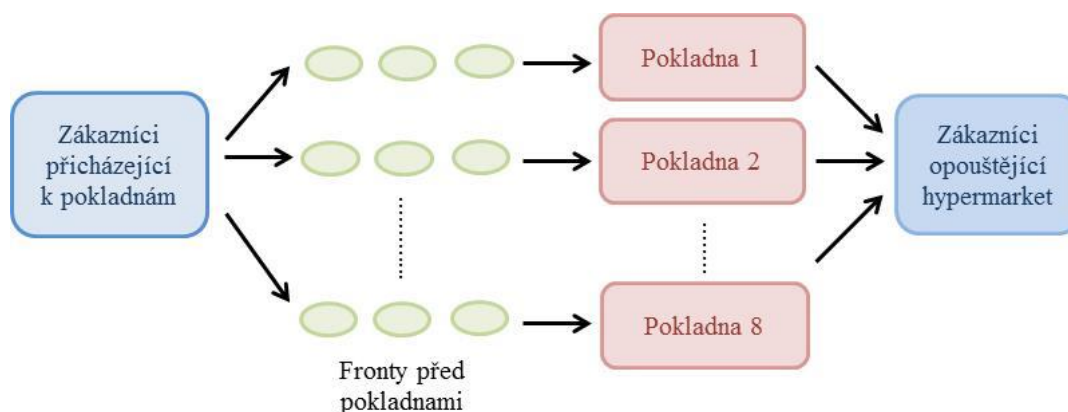
mezi příchody zákazníků do systému se i v tomto případě předpokládá, že se doba trvání obsluhy řídí exponenciálním rozdělením s parametrem  $\mu$ .

### 5.3.4 Síť obslužných linek

Obslužné linky v hypermarketu společnosti PZV tvoří jednotlivé pokladny, jejichž počet je v současné době 8. Jako téměř v každém obchodě jsou pokladny řazeny vedle sebe, jedná se tedy o uspořádání paralelní, přičemž před každou z pokladen se tvoří samostatná fronta.

Všechny vlastnosti systému, které lze z hlediska tohoto parametru specifikovat, znázorňuje Schéma 5.2.

Schéma 5.2 Charakteristika sítě obslužných linek SHO

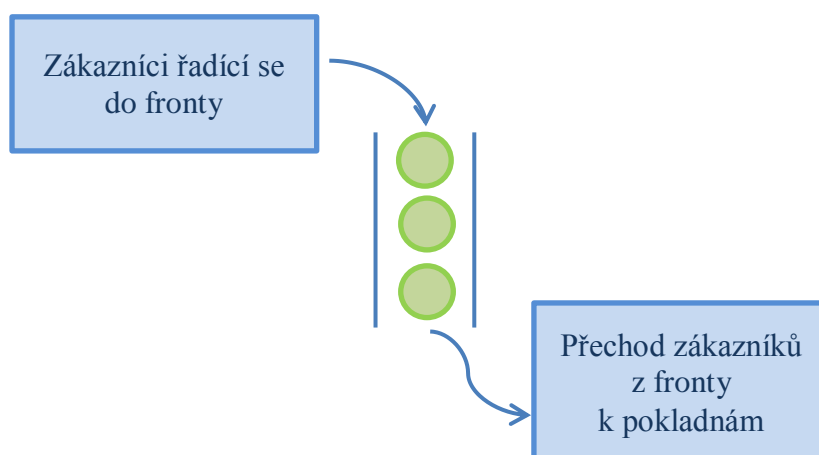


### 5.3.5 Pravidla pro přechod z fronty k obslužné lince

Jak již bylo řečeno, před každou z pokladen v hypermarketu se tvoří samostatná fronta a při tomto procesu platí jednoduché pravidlo – kdo dřív přijde, ten bude také dříve obsloužen (tedy bude-li odhlédnuto od „předbíhání“ ve frontě).

Dle charakteristik systémů hromadné obsluhy odpovídá tento způsob tvorby fronty režimu FIFO (*first-in, first-out*), což je vyjádřeno schématem na straně 53.

Schéma 5.3 Pravidla pro přechod z fronty k obslužné lince



### 5.3.6 Speciální rysy systému hromadné obsluhy

Tato charakteristika SHO poskytuje doplňující informace o systému daného hypermarketu. Jedná se například o specifikaci kapacity systému hromadné obsluhy či o popis trpělivosti zákazníků.

Co se týče kapacity systému v hypermarketu společnosti PZV, je považována za neomezenou. Omezená kapacita je totiž definována pro takový systém hromadné obsluhy, kdy při naplnění systému se k němu nově příchozí požadavek nemůže připojit a odchází. V případě SHO hypermarketu ale toto tvrzení není pravdivé. Když zákazník přijde k pokladnám a vidí, že jsou všechny obsazené (všechny obsluhují jiného zákazníka), stoupne si do fronty a vyčká, než přijde na řadu. Samozřejmě dochází k situacím, kdy zákazník čekat nechce (chce si například koupit jenom jednu věc) při plném obsazení pokladen a skutečně odchází. To už je ale otázkou trpělivosti každého zákazníka, což je dalším příkladem speciálního rysu SHO.

Trpělivost zákazníků hypermarketu společnosti PZV není možné jednoznačně určit. Určitě každý zákazník při návštěvě jakéhokoliv obchodu zažil situace, kdy pospíchal (jeho trpělivost tedy byla omezená) nebo si naopak na nákup vymezil dost času, nikam nechvátal a byl tedy ochotný ve frontě čekat tak dlouho, dokud nebyl obslužen. Zkušenost napovídá, že počet zákazníků, kteří ve frontě vyčkají, neztratí trpělivost a z obchodu neodejdou, je více než netrpělivých, proto bude i trpělivost zákazníků určena jako neomezená.

## 5.4 Klasifikace systému hromadné obsluhy

Nyní je již možné na základě všech výše uvedených charakteristik systému hromadné obsluhy hypermarketu společnosti PZV určit, o jaký konkrétní model se jedná.

První z šesti symbolů daného modelu SHO značí rozdělení, kterému odpovídají intervaly mezi příchody zákazníků do hypermarketu. Z uvedených analýz a výpočtu vyplývá, že se v tomto případě jedná o rozdělení exponenciální, které značí písmeno  $M$ .

Pravděpodobnostní rozdělení intenzity obsluhy se předpokládá, jak již bylo uvedeno, exponenciální, proto bude druhý symbol rovněž  $M$ .

Třetí symbol vyjadřuje počet paralelně uspořádaných pokladen v hypermarketu, a protože je jejich počet roven osmi, bude i symbol zastoupen číslem 8.

Předposlední dva symboly popisující model SHO budou shodné, jelikož jak počet zákazníků, tak kapacita systému daného hypermarketu jsou neomezené. Neomezenost zdroje požadavků a kapacity systému bude vyjádřena znakem  $\infty$ .

Režim fronty je posledním specifickým charakterizujícím modelem SHO. Na základě výše určeného pravidla pro přechod z fronty k pokladnám v hypermarketu společnosti PZV metodou *first-in, first-out* (krátce FIFO), bude i poslední symbol zastoupen touto zkratkou.

Výsledný model systému hromadné obsluhy může být tedy vyjádřen jako model  $M/M/8/\infty/\infty/FIFO$ .

## 5.5 Analýza systému hromadné obsluhy

Stejně jako v teoretické části, budou i zde rozděleny jednotlivé charakteristiky popisující fungování SHO hypermarketu společnosti PZV do jednotlivých skupin a následně spočítány.

Nejdříve však bude otestována podmínka stabilizace daného systému  $M/M/8$ . Pro její výpočet jsou už známé všechny parametry: počet pokladen (8), intenzita příchodů požadavků pro jednotlivé skupiny ( $\lambda$ ) i intenzita obsluhy každé z pokladen ( $\mu$ ). V návaznosti na vzorec 3.19 byla vytvořena Tabulka 5.4 uvedená na straně 55.

**Tabulka 5.4 Stabilizace systému M/M/8 při zapojení všech pokladen**

Skupina	Intenzita provozu celého systému	Systém je stabilní $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$
Nejslabší dny	0,2561	ANO
Slabé dny	0,2851	ANO
Silné dny	0,3258	ANO
Extrémy	0,3920	ANO

Systém  $M/M/8$  je, jak dokazuje tabulka, při zapojení všech pokladen stabilní, a to v každé skupině dnů.

Pokud by ale nebyly zapojeny všechny pokladny, vypadala by stabilita systému úplně odlišně. Kupříkladu v extrémních dnech je systém stabilní až od zapojení čtvrté pokladny, kdežto naopak v nejslabší dny postačí ke stabilizaci systému provoz pouze tři pokladny.

**Tabulka 5.5 Stabilizace systému M/M/8 při zapojení různého počtu pokladen**

Skupina	Intenzita provozu systému při zapojení s-pokladen							
	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6	s = 7	s = 8
Nejslabší dny	2,0465	1,0233	0,6822	0,5116	0,4093	0,3411	0,2924	0,2558
Slabé dny	2,2791	1,1395	0,7597	0,5698	0,4558	0,3798	0,3256	0,2849
Silné dny	2,6047	1,3023	0,8682	0,6512	0,5209	0,4341	0,3721	0,3256
Extrémy	3,1395	1,5698	1,0465	0,7849	0,6279	0,5233	0,4485	0,3924

### Pravděpodobnostní charakteristiky

Vedení hypermarketu společnosti PZV také z hlediska efektivního řízení pokladní zóny zajímá, jaká je

- pravděpodobnost, že v systému není žádný zákazník, resp. žádná z pokladen není v provozu, určená podle rovnice 3.20 ( $p_0$ ),
- pravděpodobnost, že se v systému nachází stejný nebo menší počet zákazníků, než je pokladen v provozu, vyjádřena dle rovnice 3.21 ( $p_{n \leq s}$ ),
- nebo naopak pravděpodobnost, že se u pokladní zóny nachází více zákazníků než je v provozu pokladen (fronty se už začínají vytvářet) počítaná dle rovnice 3.22. ( $p_{n > s}$ ).

Před výpočty všech pravděpodobností je nutné nejdříve znát poměr intenzity příchodů zákazníků a intenzity obsluhy značený  $\rho$ , jelikož tento parametr je potřebný k všem dalším výpočtům. Protože byla data rozdělena 4 do skupin, bude mít každá skupina své vlastní  $\rho$ .

Pro větší přehlednost jsou všechny výsledné pravděpodobnosti prezentovány v tabulce 5.6.

**Tabulka 5.6 Pravděpodobnostní charakteristiky**

Skupina	Pravděpodobnost, že bude u pokladen n-zákazníků										
	$\rho$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$
Nejslabší dny	2,0465	0,1292	0,2644	0,2705	0,1845	0,0944	0,0386	0,0132	0,0039	0,0010	0,0003
Slabé dny	2,2791	0,1024	0,2333	0,2659	0,2020	0,1151	0,0525	0,0199	0,0065	0,0018	0,0005
Silné dny	2,6047	0,0739	0,1925	0,2507	0,2176	0,1417	0,0738	0,0320	0,0119	0,0039	0,0013
Extrémy	3,1395	0,0432	0,1358	0,2131	0,2230	0,1750	0,1099	0,0575	0,0258	0,0101	0,0040

Například pravděpodobnost, že se v systému nenachází žádný zákazník, je v případě slabých dnů 10,24 % a tato situace by znamenala, že zákazník nebude muset počkat na obslužení ve frontě. Naopak pravděpodobnost, že bude u pokladen jenom 5 zákazníků, tudíž bude zákazník obslužen ihned, je ve slabých dnech 5,25 %.

### Časové charakteristiky

Do této skupiny patří především dva ukazatele – průměrná doba čekání zákazníků ve frontě ( $T_f$ ) a průměrná doba strávená zákazníkem v celém systému ( $T$ ). Tyto charakteristiky budou zjišťovány dle vzorců 3.24 a 3.25 opět při zapojení všech pokladen v hypermarketu. Pro lepší vypovídací schopnost výpočtů byly parametry  $\lambda$  a  $\mu$  upraveny na časovou jednotku minut.

**Tabulka 5.7 Časové charakteristiky**

Skupina	Časové charakteristiky	
	$T$	$T_f$
Nejslabší dny	0,6978	0,0002
Slabé dny	0,6980	0,0003
Silné dny	0,6984	0,0007
Extrémy	0,7001	0,0024

Hodnoty v tabulce je ještě možné převést na sekundy.

**Tabulka 5.8 Časové charakteristiky převedené na sekundy**

Skupina	Časové charakteristiky	
	$T$	$T_f$
Nejslabší dny	41,8698	0,0093
Slabé dny	41,8794	0,0189
Silné dny	41,9051	0,0447
Extrémy	42,0040	0,1435

Výsledky založené na průměrných příchodech zákazníků do systému hromadné obsluhy ( $\lambda$ ) vybraného hypermarketu říkají, že v průměru nečeká zákazník na odbavení u pokladny ani sekundu (resp. čeká na odbavení pouze milisekundy), a to i v případě extrémních dnů. Tato čísla jsou ale samozřejmě nereálná, neboť právě v extrémních dnech čekají zákazníci ve frontách i několik minut.

Výsledky jsou nepřesné, protože data byla poskytnuta pouze jako denní průměry, tudíž je bylo nutné přepočítat na průměry hodinové, jak je uvedeno výše. Výsledkem je, že například o Vánocích je průměrný hodinový počet zákazníků 270 a tedy pro splnění podmínky stabilizace systému by stačilo, aby byly v provozu pouze 4 pokladny. Ve skutečnosti je ale v extrémních dnech v nepřetržitém provozu všech osm pokladen. Během dne (především v ranních hodinách pracovních dnů) také dochází k situacím, kdy není u pokladen žádný zákazník, a tudíž stačí, aby byla v provozu jedna pokladna. A právě tyto skutečnosti způsobily zkreslení výše uvedených výsledků.

K dosažení reálnějších výsledků byl tedy stanoven jiný průměrný počet zákazníků přicházejících na pokladní zónu za hodinu a to na takové úrovni, aby byla splněna podmínka stabilizace systému, tj.. 100, 200, 300, 400, 500 a 600.

**Tabulka 5.9 Přepočtené parametry**

Parametr	$\lambda$					
	100	200	300	400	500	600
$\rho$	1,1628	2,3256	3,4884	4,6512	5,8140	6,9767
$p_0$	0,3126	0,0977	0,0305	0,0093	0,0027	0,0006
$T_f$	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0017	0,0071
$T_f*60$	0,0000	0,0004	0,0045	0,0252	0,1005	0,4281
$T$	0,0116	0,0116	0,0117	0,0120	0,0133	0,0188
$T*60$	0,6977	0,6980	0,7022	0,7229	0,7982	1,1257

Výsledky pro  $\lambda$  uvedená v tabulce Tabulka 5.9 již skutečnosti odpovídají více. Například ve dnech, kdy by přišlo do hypermarketu v průměru 600 zákazníků za hodinu, a byly by v provozu všechny pokladny, musel by zákazník vyčkat ve frontě na obsluhu něco málo pod půl minuty, přičemž průměrná doba včetně obsluhy u pokladny by byla 1 minutu a 8 sekund. Naopak ve dnech čítajících průměrný hodinový počet zákazníků 500 by si zákazník počkal ve frontě už jenom 6 sekund a celková doba strávená na pokladní zóně by se protáhla na 48 sekund.

### Charakteristiky týkající se zákazníků

Tato specifikace modelu  $M/M/8$  je poslední, která může daný systém hromadné obsluhy nějakým způsobem popsat. Výpočty vzorců 3.23 a 3.26 napoví, jaký je průměrný počet zákazníků v systému ( $N$ ) a jaký naopak ve frontě ( $N_f$ ). K výsledku dopomohou informace získané z časové charakteristiky.

**Tabulka 5.10 Průměrný počet zákazníků v systému a ve frontě**

Skupina	$N$	$N_f$
Nejslabší dny	2,0470	0,0005
Slabé dny	2,2801	0,0010
Silné dny	2,6074	0,0028
Extrémy	3,1503	0,0108

I tyto výsledky jsou zkrácené, a to ze stejných důvodů, které byly uvedené u časové charakteristiky. Pro získání výsledků, které více odpovídají skutečnosti, byly tedy opět použity jiné hodnoty průměrného příchodu zákazníků do hypermarketu, totožné jako v tabulce Tabulka 5.9.

**Tabulka 5.11 Přepočtené parametry  $N$  a  $N_f$**

Parametr	$\lambda$					
	100	200	300	400	500	600
$+N$	1,1628	2,3268	3,5111	4,8192	6,6518	11,2575
$N_f$	0,0000	0,0012	0,0227	0,1680	0,8379	4,2807

Pro  $\lambda$  uvedená v tabulce tedy vychází, že v systému je vždy průměrně více než jeden zákazník. Jestliže by tedy bylo v hypermarketu průměrně 300 zákazníků za hodinu, znamenalo by to, že je v systému průměrně 3,5 zákazníka. Ovšem při

dvojnásobném průměrném počtu zákazníků za hodinu by bylo v systému už průměrně 11,3 zákazníka.

Průměrný počet zákazníků ve frontě je dle výpočtů více než 1 až v situaci, kdy by se nacházelo v hypermarketu průměrně 600 zákazníků za hodinu. Při průměrném hodinovém počtu zákazníků menším jak 400 by tedy zákazník do fronty vstoupit vůbec nemusel.

## 5.6 Optimalizace systému hromadné obsluhy

V přechozích kapitolách byl systém hromadné obsluhy vybraného hypermarketu popsán z různých úhlů pohledu. Nyní již chybí poslední tečka, a tou je optimalizace SHO.

Rovnice 3.28 předpokládá znalost nákladů souvisejících s pobytem jednoho zákazníka v systému hromadné obsluhy za časovou jednotku. Jelikož hodnota tohoto parametru není známá, bude vyjádřena prostřednictvím průměrného počtu zákazníků ve frontě násobeného konstantou, konkrétně  $k_1 = 10N_f$ . Tím bude vyjádřeno, že čím je delší fronta, tím je trpělivost zákazníků omezenější, což realitě určitě odpovídá.

Náklady na provoz jedné pokladny ( $k_2$ ) budou zastoupeny superhrubou mzdou jedné prodavačky, která vyjadřuje skutečné náklady, které musí společnost PZV vynaložit, a tak bude výpočet co nejvíce zpřesněn. Průměrnou hrubou mzdou v hodnoceném hypermarketu, jež je 14 090 Kč, stačí tedy pouze vynásobit zdravotním a sociálním pojištěním podniku, tj. 34 %. A protože parametry  $\lambda$  a  $\mu$  jsou uváděny v hodinách, musí být i  $k_2$  vyjádřeno v hodinách, tj.  $18\,881/168 = 112,4$  Kč/hod. Od opotřebení pokladen, nákladů na energii apod. bude z důvodu nedostatku informací upuštěno.

Po dosazení do nákladové funkce vzorce 3.28 by byly v případě silných dnů náklady na provoz celého systému na hodinu rovny

$$NS(8) = 10 * 0,0028 * (0,0028) + 112,4(8) = 899,2 \text{ Kč.}$$

Tentýž postup by byl použit pro výpočet nákladů pro ostatní skupiny dnů.

Ted' už nic nebrání ve výpočtu jednotlivých variant celkových nákladů pro různé počty pokladen. Tabulka, v níž jsou uvedeny jak náklady na pobyt zákazníků v systému hromadné obsluhy ( $k_1 * N_f$ ), tak náklady na provoz pokladen ( $k_2 * s$ ) i celkové náklady na provoz systému za hodinu, je vypočítána pro silné dny, jelikož dny s tímto počtem zákazníků mají v roce nejvyšší zastoupení. Výpočet byl



pro veden pro takový počet pokladen, který splňuje kritérium pro stabilizaci systému, tj. 3 – 9 pokladen. Stejný postup výpočtu by byl použit pro získání výše nákladů na provoz systému za hodinu ostatních skupin dnů.

**Tabulka 5.12 Náklady na provoz systému za hodinu v případě silných dnů**

Počet pokladen	Náklady (Kč)		
	$k_1 N_f$	$k_2 s$	$k_1 N + k_2 s$
3	4428,14	337,20	4765,34
4	10,65	449,60	460,25
5	0,37	562,00	562,37
6	0,02	674,40	674,42
7	0,00	786,80	786,80
8	0,00	899,20	899,20
9	0,00	1011,60	1011,60

Z tabulky je zřejmé, že při průměrném počtu zákazníků v hypermarketu ve výši 224, je vzhledem k výše definovaným položkám optimální provozovat v hypermarketu 4 pokladny, jelikož při tomto počtu jsou hodinové náklady na provoz celého systému nejnižší. Je ovšem nutné si uvědomit, že jsou výsledky opět zkreslené kvůli nedostatečnému rozsahu dat, a proto by nebylo příliš reálné se jimi řídit.

Aby byly výsledky analýzy přesnější, muselo by vedení hypermarketu poskytnout podrobnější data.

## 6 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo pochopit problematiku SHO, aby bylo možné následně použít získané znalosti k analýze a optimalizaci systému hromadné obsluhy hypermarketu společnosti PZV.

První část literární rešerše je zaměřena na objasnění základních pojmů, které je potřeba při aplikaci teorie hromadné obsluhy znát. V první kapitole je tedy vysvětleno, co je to náhodná veličina, náhodný jev i náhodné procesy. V této souvislosti dále byla uvedena charakteristika stochastických a Poissonových procesů spolu s Markovského řetězci. Poté již bylo možné se soustředit přímo na teorii hromadné obsluhy – základní charakteristiky, parametry, analýzu, klasifikaci, základní modely a optimalizaci.

V praktické části byly zpočátku na základě dat poskytnutých vedením hypermarketu společnosti PZV provedeny analýzy vývoje počtu zákazníků procházejících pokladní zónou za poslední tři roky. Výsledkem bylo zjištění, že během roku dochází k poměrně velkým výkyvům například v období Vánoc a prázdnin, a proto byla data rozdělena do 4 skupin podle četnosti příchodu zákazníků na dny nejslabší, slabé, silné a extrémní. Pro tyto skupiny byly následně zjištěny jednotlivé parametry systému hromadné obsluhy a v závislosti na nich byl určen konkrétní model SHO, jímž je  $M/M/8/\infty/\infty/FIFO$ . V dalším kroku byla provedena analýza celého systému, kdy stěžejní bylo získání informace, zda je systém stabilní. Po provedení potřebných výpočtů bylo zjištěno, že při zapojení všech pokladen skutečně stabilní je, a to pro všechny určené skupiny. Ovšem kvůli tomu, že reálná data byla poskytnuta pouze v omezeném rozsahu, byly výsledky další analýzy zkrácené. Proto bylo nutné pro dosažení reálnějších výsledků časových a zákazníků se týkajících charakteristik upravit hodnoty průměrných počtů zákazníků za hodinu všech vytvořených skupin. Poslední krok této části práce spočíval v určení počtu pokladen, pro které je optimální systém provozovat. Výsledek, a sice že v případě silných dnů je optimální provozovat 4 pokladny, ovšem není přesný. Aby měly výsledky větší vypovídací schopnost, bylo by zapotřebí mít k dispozici detailnější data.

Systémy hromadné obsluhy jsou, byť si to většina z nás ani neuvědomuje, součástí běžného života. Lidé se s SHO setkávají téměř denně, vstupují do nich a stávají se tak jejich součástí. Může se jednat i o tak rutinní záležitosti jako je

nastupování do ranního autobusu do školy, čekání na oběd v menze či odeslání balíku na poštu. A právě proto, že jsou systémy hromadné obsluhy tak všudypřítomné, bylo velmi zajímavé rozebírat vybraný systém po jednotlivých částech až k jeho základům.

## 7 Summary

The goal of this thesis was to understand Queueing Theory and use it for analysis of queueing system of hypermarket company PZV.

Theoretical part consists of basic informations which is necessary to know for application of queueing theory. First chapter is about random variables, random event, random proces, followed by stochastic and Poisson processes and Markov chains. Then was possible to describe queueing theory – basic characteristics, parameters, analysis, classification, basic models and optimisation.

In the practical part was from the beginning analyze development of customers going through cashier zone. On the base of analysis were customers divided into 4 groups by frequency of customers. For these groups were counted all characteristics and parameters. Next step was analyzed the system, but because data were too inaccurate, it was necessary to use different values for the groups and to count analysis for these values. The last step was to find number of cashiers to make system optimal. The result, it was 4 cashiers in weak days, was unfortunately not accurate. For better results it would be necessary to have more detail data.

Key words

Queueing Theory, queueing systems, random event, analysis

## 8 Seznam literatury

- Anděl, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Praha: MatFyzPress.
- Gros, I. (2003). *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování*. Praha: Grada Publishing, a.s.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to operations research*. New York: McGraw-Hill.
- Jablonský, J. (1998). *Operační výzkum*. Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze.
- Kořenář, V. (2010). *Stochastické procesy*. Praha: VŠE.
- Linda, B., & Kubanová, J. (2004). *Statistické tabulky a vzorce*. Pardubice: Univerzita Pardubice.
- Plocki, A., & Tlustý, P. (2007). *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Praha: Prometheus, spol. s r.o.
- Prášková, Z., & Lachout, P. (2001). *Základy náhodných procesů*. Praha: Nakladatelství Karolinum.
- Rálek, P., Novák, J., & Chudoba, J. (2014). *Metody užívané v logistice*. Liberec: Technická univerzita v Liberci.
- Římánek, J., Zonková, Z., Poštová, E., Moravcová, E., & Hančlová, j. (1997). *Operační výzkum*. Ostrava: VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA.
- Tlustý, P., & Petrášková, V. (1992). *Úvod do počtu pravděpodobnosti*. České Budějovice: Pedagogická fakulta JU Č. Budějovice.
- Tošenovský, J. (2012). *Teorie pravděpodobnosti*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava.

## Seznam tabulek

Tabulka 2.1 Příklady stochastických procesů.....	8
Tabulka 2.2 Výpočet příkladu pravděpodobnosti n zákazníků v obchodě.....	10
Tabulka 3.1 Příklady systémů hromadné obsluhy .....	14
Tabulka 3.2 Vzorce pro výpočet charakteristik SHO 1.....	27
Tabulka 3.3 Vzorce pro výpočet charakteristik SHO 2.....	27
Tabulka 5.1 Rozdělení dnů v měsících do skupin .....	48
Tabulka 5.2 Stanovení hodnoty parametru $\lambda$ .....	49
Tabulka 5.3 Výpočet hodnoty testového kritéria.....	51
Tabulka 5.4 Stabilizace systému M/M/8 při zapojení všech pokladen.....	55
Tabulka 5.5 Stabilizace systému M/M/8 při zapojení různého počtu pokladen.....	55
Tabulka 5.6 Pravděpodobnostní charakteristiky.....	56
Tabulka 5.7 Časové charakteristiky .....	56
Tabulka 5.8 Časové charakteristiky převedené na sekundy.....	57
Tabulka 5.9 Přepočtené parametry.....	57
Tabulka 5.10 Průměrný počet zákazníků v systému a ve frontě.....	58
Tabulka 5.11 Přepočtené parametry N a $N_f$ .....	58
Tabulka 5.12 Náklady na provoz systému za hodinu v případě silných dnů .....	60

## Seznam grafů

Graf 3.1 Graf exponenciálního rozdělení .....	19
Graf 3.2 Graf přechodů v systému M/M/s.....	34
Graf 5.1 Vývoj počtu zákazníků v letech 2013 – 2015.....	41
Graf 5.2 Průměrný počet zákazníků za den v roce 2015.....	42
Graf 5.3 Průměrný počet zákazníků za den v roce 2014.....	44
Graf 5.4 Průměrný počet zákazníků za den v roce 2013.....	44
Graf 5.5 Počet zákazníků v prosinci 2015.....	49

## Seznam schémat

Schéma 3.1 SHO s jedním blokem obsluhy a jednou frontou.....	15
Schéma 3.2 SHO s paralelním uspořádáním bloků obsluhy 1 .....	20
Schéma 3.3 SHO s paralelním uspořádáním bloků obsluhy 2 .....	21
Schéma 3.4 SHO s jedním blokem obsluhy .....	21
Schéma 3.5 SHO se sériově uspořádanými bloky obsluhy .....	22
Schéma 3.6 SHO s režimem obsluhy FIFO .....	22
Schéma 3.7 SHO s režimem obsluhy LIFO .....	23
Schéma 3.8 SHO s režimem obsluhy SIRO .....	23
Schéma 3.9 SHO s režimem obsluhy PRI.....	24
Schéma 3.10 Graf přechodů systému M/M/1 .....	32
Schéma 5.1 Systém hromadné obsluhy společnosti PZV .....	45
Schéma 5.2 Charakteristika sítě obslužných linek SHO.....	52
Schéma 5.3 Pravidla pro přechod z fronty k obslužné lince .....	53

## Seznam příloh

Příloha 1 Počet zákazníků v roce 2015 .....	67
Příloha 2 Počet zákazníků v roce 2014 .....	68
Příloha 3 Počet zákazníků v roce 2013 .....	69

Příloha 1 Počet zákazníků v roce 2015

Den v měsíci	Počet zákazníků 2015											
	Leden	Únor	Březen	Dužben	Květen	Červen	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
1		2 519	2 251	4 041	3 260	3 026	3 341	3 215	3 573	3 015	2 766	3 220
2	3 156	2 771	2 834	3 866	3 423	2 859	3 423	2 904	3 652	3 584	3 058	3 950
3	3 052	2 690	2 821	4 367	2 827	3 125	4 114	3 250	3 324	3 242	2 888	4 296
4	2 397	3 313	3 267	4 129	3 100	3 229	3 527	3 155	3 878	2 917	3 203	4 758
5	2 857	3 022	3 168	3 564	3 021	3 853	3 156	3 075	3 320	2 857	3 084	4 462
6	2 894	3 607	3 826	1 900	3 706	3 315	2 867	3 313	3 055	2 799	3 530	3 280
7	3 098	2 221	3 581	2 968	3 951	2 978	3 317	3 854	3 122	3 166	3 376	3 427
8	4 304	3 514	3 056	3 181	3 476	3 125	3 712	3 720	3 080	3 400	2 731	3 651
9	3 863	2 878	2 961	3 191	3 800	3 137	3 654	3 061	3 122	3 953	3 028	3 951
10	3 863	2 902	3 008	3 975	3 336	3 623	4 352	3 734	3 535	3 683	3 259	4 031
11	2 843	3 614	4 060	3 587	3 198	3 557	3 723	3 448	4 154	2 959	3 335	4 362
12	2 825	4 369	3 583	2 991	3 079	3 446	3 016	3 699	3 503	3 093	3 410	4 689
13	2 898	4 242	4 225	3 090	3 589	4 029	3 700	3 868	3 010	3 122	4 105	3 988
14	3 584	4 525	3 826	3 102	3 611	2 979	3 415	4 180	3 110	3 541	3 851	3 920
15	2 926	3 133	3 264	3 425	3 621	3 428	3 649	3 975	3 161	3 570	3 232	3 933
16	2 949	3 110	3 052	3 306	4 177	3 112	3 451	3 333	3 368	3 410	3 871	4 543
17	3 584	3 044	3 138	4 110	3 304	3 282	4 019	3 832	3 317	3 020	2 999	4 333
18	2 964	3 371	3 853	3 646	3 059	3 464	3 529	3 790	3 909	2 985	3 442	4 713
19	3 506	3 154	3 410	2 989	3 228	3 763	3 082	4 026	3 359	3 030	3 518	4 947
20	3 280	3 626	4 572	3 090	3 434	3 633	3 529	3 869	2 907	2 947	3 955	4 449
21	3 317	2 564	4 006	3 011	3 285	3 042	3 313	3 850	3 176	3 520	3 912	5 088
22	2 964	2 878	3 200	3 224	3 897	3 111	3 303	3 485	3 070	3 164	3 217	5 465
23	3 506	3 052	3 135	3 332	3 544	3 218	3 737	3 019	3 405	3 765	3 121	6 173
24	3 286	3 150	3 014	3 937	3 054	3 445	3 877	3 405	3 366	3 267	3 227	2 304
25	2 683	3 192	3 506	3 397	3 051	3 544	3 633	3 371	3 814	3 062	3 791	
26	2 719	2 913	3 434	3 129	3 157	3 700	3 173	3 377	3 586	2 892	3 838	3 167
27	2 730	3 105	3 963	3 053	3 331	3 490	3 353	3 395	3 180	3 353	4 543	3 366
28	3 262	3 412	3 638	3 122	3 190	2 959	3 193	3 928	2 727	2 919	4 203	3 676
29	3 113		2 996	3 388	3 716	3 457	3 561	3 419	2 993	3 407	3 605	3 889
30	3 534		3 237	4 289	3 419	3 065	3 563	2 792	3 114	3 607	3 380	4 976
31	3 354		2 963		2 780		3 342	3 461		3 270		4 096
<b>Celkem</b>	<b>95 311</b>	<b>89 891</b>	<b>104 848</b>	<b>102 400</b>	<b>104 624</b>	<b>99 994</b>	<b>108 626</b>	<b>108 803</b>	<b>99 890</b>	<b>100 519</b>	<b>103 478</b>	<b>125 103</b>



Příloha 2 Počet zákazníků v roce 2014

Den v měsíci	Počet zákazníků 2014											
	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
1		3 019	3 110	2 734	2 387	2 939	3 192	3 603	3 440	3 088	3 657	3 084
2	3 035	2 309	2 582	3 829	3 702	2 943	3 600	3 199	3 740	3 732	2 657	3 177
3	3 274	2 646	2 624	3 388	3 187	2 954	3 300	2 707	4 109	3 303	2 867	4 083
4	2 909	2 674	2 656	4 040	2 631	3 393	3 881	3 015	3 660	3 083	2 885	3 803
5	2 308	2 841	3 031	3 652	2 863	3 155	3 315	3 217	4 127	2 555	3 253	4 544
6	2 734	2 833	2 799	2 978	3 525	3 907	2 647	2 156	3 646	2 718	3 042	3 347
7	2 659	3 172	3 687	3 026	3 974	3 541	3 212	3 324	3 589	2 756	3 748	3 527
8	3 081	3 044	3 358	3 185	2 968	3 026	3 193	4 194	3 545	3 152	3 631	3 501
9	2 865	2 464	2 755	3 717	3 863	3 287	3 987	3 814	3 614	3 189	2 959	4 943
10	3 469	2 747	2 953	4 193	3 369	3 179	4 537	3 112	4 715	3 866	3 118	4 377
11	3 269	2 974	3 049	4 476	3 174	3 774	4 738	3 616	4 112	3 602	3 541	4 982
12	2 597	3 265	3 049	3 956	3 034	3 744	3 896	3 440	4 817	3 258	3 699	4 944
13	2 860	4 174	3 278	3 349	3 242	4 081	3 208	3 856	4 128	3 187	3 663	4 351
14	2 738	4 154	3 607	3 135	3 583	3 644	3 454	4 411	3 627	3 193	3 972	4 256
15	3 314	3 319	3 969	3 359	3 827	3 242	3 304	3 955	3 846	3 835	3 998	4 192
16	3 011	2 609	2 859	4 312	3 856	3 158	3 772	3 525	3 652	3 463	3 749	4 170
17	3 398	2 725	2 880	3 732	3 584	3 470	3 485	3 708	3 693	4 197	2 706	4 532
18	3 230	2 791	2 916	4 496	3 023	3 542	3 875	3 655	3 799	3 705	3 218	4 638
19	2 598	2 941	3 342	3 804	3 062	3 921	3 539	3 678	4 337	3 247	3 527	4 987
20	2 735	3 110	3 095	3 426	3 065	3 401	3 540	4 329	3 917	3 156	3 445	4 849
21	2 726	3 471	3 695	1 899	3 196	2 996	2 830	4 163	3 696	3 044	3 889	4 720
22	3 142	3 342	3 465	2 839	3 132	3 132	3 446	4 531	3 778	3 493	3 766	5 896
23	2 866	2 728	3 175	2 920	4 019	3 213	3 711	4 021	3 666	3 187	3 152	6 229
24	3 301	2 883	2 886	2 968	3 796	3 829	3 438	3 692	4 037	3 873	3 192	2 376
25	3 058	2 715	2 893	3 597	2 927	3 887	3 825	3 692	3 703	3 566	3 134	
26	2 381	3 138	3 352	3 395	3 176	4 173	3 441	3 814	4 394	3 069	3 741	3 238
27	2 558	3 133	3 762	2 780	3 668	3 454	2 885	4 045	3 821	3 543	3 285	3 721
28	2 671	2 200	3 429	2 979	3 363	3 256	3 276	3 417	3 245	2 653	3 966	3 002
29	3 040		2 688	3 071	3 940	3 156	3 126	3 921	3 365	3 669	3 930	3 945
30	3 016		2 834	3 812	3 542	3 372	3 385	4 412	3 233	3 365	3 500	4 952
31	3 351		2 724		3 335		3 466	3 879		3 268		3 351
<b>Celkem</b>	<b>88194</b>	<b>83421</b>	<b>96502</b>	<b>103047</b>	<b>104013</b>	<b>102769</b>	<b>108504</b>	<b>114101</b>	<b>115051</b>	<b>103015</b>	<b>102890</b>	<b>125717</b>

Příloha 3 Počet zákazníků v roce 2013

Den v měsíci	Počet zákazníků 2013											
	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
1		3 313	3 538	1 648	2 712	3 434	3 221	3 234	3 137	2 836	3 363	3 388
2	3 083	3 054	3 375	2 680	3 128	2 755	3 068	3 769	3 470	3 001	3 525	3 255
3	2 661	2 469	2 571	2 876	3 727	2 905	3 475	3 899	2 856	2 749	2 666	3 224
4	3 891	2 382	2 638	2 860	3 356	2 972	3 975	3 430	3 257	3 628	2 850	4 029
5	3 227	2 510	2 758	4 106	2 697	3 413	3 422	3 358	3 010	3 279	2 960	4 597
6	2 338	2 892	3 551	3 510	3 042	3 263	3 009	3 147	3 483	2 797	3 500	4 088
7	2 544	2 774	3 311	2 675	3 749	3 914	2 777	3 357	3 012	2 930	3 628	4 010
8	2 548	3 338	3 911	2 715	2 890	3 559	3 276	3 452	2 753	2 989	3 699	3 298
9	2 869	3 059	3 457	2 673	3 161	2 821	3 109	4 268	3 068	3 281	3 729	3 401
10	2 956	2 588	2 865	3 267	3 949	3 180	5 141	3 624	2 963	3 242	3 050	3 681
11	3 126	2 680	2 953	3 162	3 585	3 064	4 085	3 110	3 398	3 814	2 759	4 777
12	3 161	2 512	2 713	4 027	3 025	3 528	4 612	3 556	3 248	3 743	3 018	4 420
13	2 239	3 048	5 800	3 552	3 052	3 366	3 560	3 417	3 796	2 875	3 794	4 763
14	2 560	3 484	4 062	2 781	2 926	4 056	3 084	4 111	3 409	2 962	3 527	4 690
15	2 705	3 552	4 156	2 976	3 365	3 011	3 375	3 616	3 055	3 121	4 299	4 039
16	2 869	3 431	3 814	3 005	3 218	3 561	2 989	4 138	3 056	3 389	4 151	4 027
17	2 372	3 616	2 930	3 475	3 807	3 305	3 205	3 457	3 347	3 356	3 253	4 092
18	3 092	2 748	3 029	3 037	3 426	3 027	3 236	3 068	3 478	3 405	3 089	4 610
19	2 972	2 607	2 817	3 894	2 854	3 716	3 722	3 482	3 189	3 060	3 231	4 582
20	2 417	2 997	4 079	3 753	3 108	3 458	3 370	3 219	3 655	3 342	3 822	4 990
21	2 519	2 767	3 257	2 817	3 052	4 422	3 007	3 694	3 322	3 198	3 736	5 107
22	2 370	3 302	3 657	2 961	3 259	3 898	3 362	3 301	2 751	2 974	4 147	5 052
23	2 679	2 499	3 306	2 882	3 259	3 083	3 216	3 751	2 889	2 840	4 069	6 082
24	2 779	2 295	2 733	3 233	3 802	3 376	3 421	3 166	2 840	2 830	3 402	2 418
25	3 254	2 542	2 801	3 105	3 553	3 187	3 260	2 898	2 974	2 756	3 316	2 587
26	2 860	2 828	2 901	3 321	2 943	3 936	3 101	3 440	3 133	2 770	3 117	2 632
27	2 367	2 997	3 703	3 549	2 720	3 728	3 005	3 146	3 697	2 735	3 617	2 502
28	2 500	2 849	3 666	2 920	2 836	4 494	2 925	3 447	3 184	2 863	3 176	2 333
29	2 591		3 230	2 966	3 186	3 539	3 391	3 711	2 703	3 629	3 995	2 145
30	2 768		3 005	3 469	3 368	3 058	3 140	3 436	3 885	3 299	4 026	4 526
31	2 844		2 600		3 829		3 534	2 947	3 262			3 277
Celkem	83181	81133	103187	93895	100584	103029	105073	107649	96018	96955	104514	120622