

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA INFORMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filtrace a rekonstrukce obrazu



2011

Jozef Meričko

Anotace

Filtrovanie obrazu nám pomáha pri spracovaní snímok z rôznych zdrojov. Môžeme ho rozdeliť do metód pracujúcich vo frekvenčnej doméne a metód pracujúcich v priestorovej doméne. Podľa typu filtra potom môžeme dosiahnuť ten ktorý požadovaný efekt úpravy obrazu. Filtrovanie nám slúži nielen na úpravu, ale aj na rekonštrukciu poškodených alebo inak degenerovaných snímok.

Chcel by som poďakovať vedúcemu Ing. Michalovi Dobešovi Ph.D. za trpezlivosť a priestor, ktoré mi poskytol pri písaní tejto práce.

Obsah

1. Uvod	7
2. Teoreticky zaklad	7
2.1. Pojmy	7
2.2. Fourierova transformacia	8
3. Filtracia obrazu	10
3.1. Metody priestorovej domeny	10
3.1.1. Jednoduché transformácie jasu	10
3.1.2. Histogramove úpravy	10
3.1.3. Filtrovanie v priestorovej doméne	11
3.2. Metody frekvencnej domeny	13
3.2.1. Filtre typu Dolnopasmova propust	14
3.2.2. Filtre typu Hornopasmova propust	15
3.3. Vťah medzi frekvenčnou a priestorovou doménou	15
4. Rekonstrukcia obrazu	17
4.1. Princíp modelovania rekonštrukcie obrazu	17
4.2. Šum a jeho klasifikácia	18
4.3. Periodický šum	20
4.4. Metódy odstránenia periodického šumu	20
4.4.1. Filtre typu pásmová zádrž	20
4.4.2. Filtre typu pasmova priepust	21
4.4.3. Filtre typu notch	21
5. Zhodnotenie	23
Závěr	24
Conclusions	25
Reference	26
A. Priloha	27

Seznam obrázků

1.	Postup pri filtrovani vo frekvenčnej doméne	13
2.	Model degradácie a následnej rekonštrukcie obrazu	17
3.	Funkcie hustoty pravdepodobnosti jednotlivých šumov	19
4.	Ideálny dolnopásmový filter	27
5.	Gaussov dolnopásmový filter	27
6.	Butterworth dolnopásmový filter st. 2	28
7.	Ideálny hornopásmový filter	29
8.	Gaussov hornopásmový filter	30
9.	Butterworth hornopásmový filter st. 2	31
10.	Laplaceov filter	32

Seznam tabulek

1.	box filter	12
2.	vážený priemerový filter	12
3.	Laplaceov filter s 90° súmernosťou	12
4.	Laplaceov filter s 45° súmernosťou	13

1. Uvod

Digitálny obraz, fotografia, snímok, grafika charakterizujú isté abstrahovanie reality. Sú nositeľmi obrazovej informácie. V dnešnej dobe získavame nové informácie už nie len z viditeľného spektra ľudského zraku, ale aj z rôznych prístrojov ako napr. Röntgenové lúče, radarové snímky, elektronový mikroskop, infračervené žiarenia a pod. Tieto moderne technológie nám zväčšili obzor vnímania reality, avšak aby sme mohli ich nejak rozumne spracovať, potrebujeme ich pretransformovať, upraviť, zlepšiť do nášho viditeľného spektra. Nato nám slúžia rôzne metódy na úpravu obrázkov, ktoré zlepšujú prípadne upravujú obraz na zachytenie čo najviac dôležitých detailov alebo naopak odstraňujú nepodstatné a nechcené detaily. V tejto práci sa zameriam na tri významne okruhy, t.j. filtrovanie obrazu v priestorovej doméne a transformácia intenzít, filtrácie obrazu vo frekvenčnej doméne, a nakoniec rekonštrukciu degradovaného obrazu a odstránenie šumu.

2. Teoreticky základ

2.1. Pojmy

Základné pojmy k porozumeniu problematiky:

Histogram - predstavuje rozloženie (početnosť) jednotlivých jasových úrovní. Definujeme ho ako diskretnú funkciu $h(f_k) = n_k$, kde f_k je k -ta úroveň jasu a n_k je počet pixelov v obraze s úrovňou jasu k . Pritom platí $\sum_i h(i) = m.n$

LUT tabuľka - vyhľadávacia tabuľka (ang. Look Up Table), v ktorej sú uložené transformované hodnoty jasu pre jednotlivé jasové hodnoty obrázka. Inak povedané je to prevádzacia tabuľka jasových hodnôt pre transformáciu obrazu. Jej použitie je efektívnejšie pretože sa z transformačného vstupu predpočíta iba raz pre všetky hodnoty. Definuje sa ako diskretná funkcia na množine hodnôt zobrazených pixelov.

Spektrum - rozpätie hodnôt veličiny alebo suboru súvisiacich veličín. Nie je limitované žiadnou množinou veličín a môže sa meniť nekonečne v priestore.

biely(čierny) bod - najvyššia (najnižšia) hodnota intenzity v histograme má zmysel o nej hovoriť ak sa neprekrýva s maximálnou (minimálnou) zobraziteľnou hodnotou

2.2. Fourierova transformácia

Pre správne pochopenie niektorých metód budeme potrebovať jeden z hlavných aparátov filtrácií vo frekvenčnej doméne, a to je Fourierova rada resp. Fourierova transformácia. Je pomenovaná po svojom objaviteľovi Jean Baptiste Joseph Fourier, bola zverejnená v jeho práci v roku 1807. Fourierova rada je matematický aparát, ktorý popisuje vlastnosť každej “rozumnej” periodickej funkcie. (myslené splňujúcu niektoré vlastnosti ako monotónna, úplne integrovateľná a pod.) Periodickú funkciu je možné zapísať ako súčet sínusových a/alebo kosínusových funkcií s rôznou amplitúdou a frekvenciou. A naopak pomocou sínusových a kosínusových funkcií, ich vzajomným sčítaním môžeme zložiť ľubovoľnú periodickú funkciu. Ďalej podľa Pomocou Fourierovej transformácie môžeme tú istú metódu aplikovať aj na niektoré neperiodické funkciach. Tieto dve metódy sa stali základom v teorii spracovania signalov a po objavení FFT algoritmu okolo roku 1950 aj významným míľnikom v digitálnom spracovaní signálov či digitálnom spracovaní obrazu. Fourierovu transformáciu pre spojitú funkciu $f(x)$ definujeme ako

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

kde j predstavuje komplexnú jednotku ($j = \sqrt{-1}$).

Inverzná Fourierova transformácia (ďalej len IFT) je definovaná:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$$

Spolu nám tvoria tzv. *Fourierov transformáčny pár*.

Ďalej pre dvojrozmernú funkciu je FT a IFT definovaná:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

Pre dvojrozmernú obrazovú funkciu, kde obraz s rozmermi M a N je diskretná funkcia, definujeme 2D diskretnú FT

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

a 2D diskretnu IFT

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Vo všeobecnosti je výsledok FT v podstate komplexný, preto je občas vhodné ich vyjadriť v tvare komplexného čísla (súčet reálnej a imaginárnej zložky). Energické spektrum je popísané ako

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{\frac{1}{2}}$$

Ďalej pre fázový posun platí

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right] .$$

V niektorých prípadoch je vhodné vyjadriť FT v polárnych súradniciach, t.j.

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j\phi(u, v)} .$$

3. Filtracia obrazu

Základné metódy spracovania obrazu môžeme rozdeliť do metód pracujúcich v priestorovej doméne, ktoré pracujú na obrazovej ploche priamo s pixelmi prípadne skupinami pixlov, a do metód pracujúcich vo frekvenčnej doméne kde metódy nepracujú priamo s pixelmi, ale s jej Fourierovým obrazom. Je však bežné u niektorých metódach kombinovať oba princípy. Výsledok a účinnosť každej metódy je však veľmi subjektívny, pretože iba pozorovateľ môže zhodnotiť kvalitu upravených snímok.

3.1. Metody priestorovej domeny

3.1.1. Jednoduché transformácie jasů

Medzi najjednoduchšie metódy úpravy obrazu, ktoré pracujú iba s jediným pixelom patria: *negatív, prahovanie, zmena svetlosti, zmena kontrastu a γ korekcie*. Na transformáciu hodnôt pixelov sa používa LUT tabuľka. V nej je definovaná diskretná funkcia, ktorá priradzuje každej vstupnej jasovej hodnote výstupnú jasovú hodnotu zo zobraziteľného rozsahu. Konkrétne

- negatív $f(i) = i_{MAX} - i$
- prahovanie $f(i) = \begin{cases} L & \text{pre } i \leq i_T \\ H & \text{pre } i > i_T \end{cases}$
- zmena svetlosti $f(i) = i + q$
- zmena kontrastu $f(i) = k \cdot i + q$
- γ korekcia $f(i) = (i + \epsilon)^\gamma$

3.1.2. Histogramove úpravy

Kedže histogram nám nič nehovorí o konkrétnom rozložení pixelov (je to iba štatistický ukazateľ), nemá vplyv na konkrétny obsah obrazu. Naopak, slúži ako ukazateľ vyváženosti intenzity jasů. Spomeniem 2 často používané metódy na zlepšenie vlastností obrazu pomocou histogramu. T.j. *roztiahnutie histogramu* a *ekvalizácia histogramu*. Prvá metóda sa dá popísať pomocou LUT tabuľky, kde $f(i) = k \cdot i$. Pomocou nej sa snažíme posúvať *biely (príp. čierny) bod* na okraj histogramu. Cieľom je pokryť celkový možný rozsah hodnôt intenzít. Nevýhodou tejto metódy je, že hoci obraz bude ostrejší, vzniknú medzi jednotlivými intenzitami medzery a tak nebude plne využitý rozsah zobrazenia. Druhá metóda je

sofistikovanejšia. Snaží sa histogram obrazu nielen rozťahnúť ale aj vyhladiť a využiť čo najväčší rozsah zobrazovaných hodnôt. Využíva pritom kumulatívnu distribučnú funkciu ($cdf(i)$).

$$cdf(i) = \sum_{j=0}^i p(j),$$

kde $p(i) = \frac{h(i)}{m \cdot n}$ je pravdepodobnosť výskytu pixelu o intenzite i . Potom pre LUT tabuľku platí

$$f(i) = \text{round}\left(\frac{cdf(i) - cdf_{min}}{m \cdot n - cdf_{min}} I_{MAX}\right)$$

Ekvalizácia histogramu nemusí prebiehať na celom obraze, hovoríme potom o *lokálnej ekv. histogramu*. Pre presnejší popis tejto metódy a ďalšie podrobnosti viz. [2]

3.1.3. Filtrovanie v priestorovej doméne

Princípom spracovania obrazu v priestorovej doméne dochádza k posúvaniu tzv. okna masky (malej matice 3×3 , 5×5 alebo iné) po každom bode obrazu. Nová hodnota pixelu ako odpoveď filtra sa získa (podľa typu filtra) podľa vzorca

$$g(x, y) = m(-1, -1)f(x - 1, y - 1) + m(-1, 0)f(x - 1, y) + \dots \\ \dots + m(0, 0)f(x, y) + \dots \\ \dots + m(1, 1)f(x + 1, y + 1),$$

kde m je okno(maska) filtra vycentrovaná tak, aby stred matice $m(0, 0)$ bol na pozícií o súradniciach x, y . Predpokladáme, že maska filtra má rozmery $2a + 1$ a $2b + 1$ (nepárne prirodzené čísla). Všeobecne filtrovanie obrazku o rozmeroch $M \times N$ a s maskou filtra o rozmeroch $m \times n$ splňujúcu predošlé podmienky môžeme vyjadriť ako

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b m(s, t)f(x + s, y + t)$$

Filtrovacia maska sa niekedy nazýva aj konvolučná maska. Pri filtrovaní v priestorovej doméne nás budú zaujímať tzv. *izotopické* filtre. Tie sú nezávislé na smere filtrovania alebo otočenia filtra. Všeobecne môžeme rozdeliť filtre v priestorovej doméne na *vyhladzovacie* a *zaoštrovacie*. V prvej skupine najvýznamnejšiu rolu hrajú *priemerové* filtre. V princípe pracujú tak, že každú hodnotu pixela v obraze nahrádzujú aritmetickým (príp. váženým) priemerom hodnôt susedných pixelov v maske.

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

Tieto filtre slúžia na redukciu šumu v obraze a na odstraňovanie nechcených irelevantných detailov. Nevýhodou týchto filtrov je, že pri filtrovaní dochádza k nežiadúcemu vedľajšiemu efektu rozmazávania hran. Ďalším typom filtrov sú

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1. box filter

$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 2. vážený priemerový filter

zaostrovacie filtre. Tie sa starajú o získavanie detailov z rozmazaných oblastí obrazu a takisto o zvýraznenie alebo vylepšenie pôvodných detailov. Typickým príkladom je napr. *Laplaceov* filter.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

kde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 2f(x, y)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 3. Laplaceov filter s 90° súmernosťou

Samotné filtrovanie bude prebiehať tak, že vypočítaný laplaceov obraz pričítame k pôvodnému obrazu. (v skutočnosti odčítame ho, lebo znamienko operácie závisí na znamienku centra jadra konvolučnej masky)

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

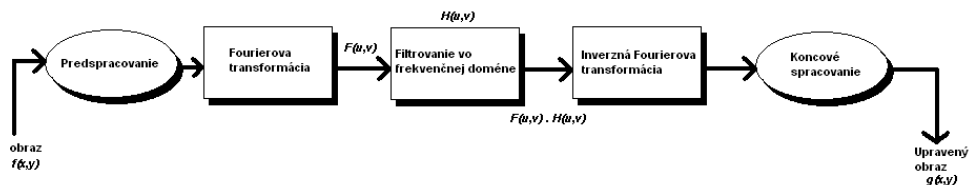
Tabulka 4. Laplaceov filter s 45° súmernosťou

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

3.2. Metody frekvencnej domeny

Filtrovanie obrazu vo frekvencnej doméne prebieha výhradne v aplikovaní filtra nie priamo na obraz ale jeho furrierove spektrum. Týmto sa líši priestorovej domény. Pri spracovaní obrazu uvažujeme obraz ako obrazovu funkciu, kde hodnota každého pixelu predstavuje zastúpenie jednej z funkcií o danej hodnote v obraze. Samotný priebeh filtrovania by sme mohli zhrnúť do týchto niekoľkých krokov(viz. 1.):

1. Predspracovanie obrazu (vynásobenie obrazu $(-1)^{x+y}$ kôli vycentrovaniu a rozšírenie rozmerov obrazka nulami)
2. Vypočítanie DFT z predspracovaného obrazu
3. Aplikovanie filtra na furrierove spectrum(spoločným vynásobením)
4. Vypočítanie inverznej DFT (IDFT) z predošlého kroku.
5. Získanie reálnej zložky z výsledku (odstránenie imaginárnych zložiek fázového posunu)
6. Záverečné spracovanie odfiltrovaného obrazu(spätné vynásobenie $(-1)^{x+y}$)



Obrázek 1. Postup pri filtrovani vo frekvencnej doméne

Medzi jeden z najjednoduchších filtrov patrý tzv. *notch filter*. Je definovaný ako

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } (u, v) = (N/2, M/2) \\ 1 & \text{inak} \end{cases}$$

Je charakteristický tým, že potláča $F(0,0)$ jednosmernú zložku DC (ang. direct current) a ostatné frekvencie ostanú nezmenené. Tento typ filtra sa využíva na odstránenie najčastejšej priemernej sivej hodnoty v obraze a tým aj k zvýrazneniu hlavných hrán. Prakticky sa používa na pozorovanie efektov v priestorovej doméne pri zmenách vo frekvenčnej doméne. Podrobnejšie sa budeme tomuto typu filtrov venovať v kap. 4.

Filter, ktorý tlmí vysoké frekvencie, zatiaľ čo prepúšťa nízke frekvencie nazývame Dolnopasmová priepust (ang. lowpass filter). Filter s opačným efektom nazývame Hornopasmová priepust (ang. highpass filter).

3.2.1. Filtre typu Dolnopasmová priepust

Jeden z najjednoduchších filtrov, ktorý odstráni všetky vysoké frekvencie vzdialené najviac o D_0 od stredu fourierovho spektra, je tzv. *ideálny dolnopásmový filter*. Definovaný je ako

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

kde D_0 je konštantná vzdialenosť a $D(u, v)$ je vzdialenosť bodu (u, v) od stredu frekvenčného štvorca. (viz. obr. 4.)

$$D(u, v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$$

Kalibrovaním hodnoty D_0 môžeme dosiahnuť rozsah a efekt rozmazávania v obraze, pretože vysoké frekvencie vo furierovom spektre zodpovedajú za zobrazenie detailov a hrán. Bod, ktorý je medzi $H(u, v) = 1$ a $H(u, v) = 0$ sa nazýva tzv. *cutoff frekvencia*. Tento ostrý skokovitý prechod medzi hodnotami filtra nie je realizovateľný hardwareovo, preto ho musíme riešiť programovou implementáciou. Pri aplikovaní filtra však dochádza k nechceným javom, kedy na filtrovaných hranách sa vytvárajú kruhové artefakty. Súvisí to s ostrými prechodmi filtra, preto sa prakticky skoro vôbec nepoužíva.

Ďalším typom filtra je Gaussov

$$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

Tento filter má už omnoho lepšie vlastnosti. Pri filtrovaní nedochádza už k vytváraniu kruhových artefaktov.

Rozoberieme ešte jeden typ filtra a to Butterworthov

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2\sigma}}$$

σ určuje stupeň filtra. Najlepšie sa osvedčil filter stupňa 2, pretože pri nižšom stupni nedosahuje až také výsledky a pri vyšších stupňoch sa znovu prejavujú kruhové artefakty.

3.2.2. Filtre typu Hornopasmova propust

Hovoríme im tiež aj zaoštrovacie filtre. Všeobecne by sme mohli definovať hornopasmové filtre ako

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{DP}(u, v).$$

Ideálny hornopásmový filter je definovaný ako

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

ako aj v minulom prípade aj v tomto ideálny filter pri filtrovaní zanecháva kruhové stopy. Gaussov hornopásmový filter

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

Tento filter dosahuje najlepšie výsledky pri zaoštrovaní. Butterworth

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2\sigma}}$$

Podobne ako v priestorovej doméne aj tu sa dá použiť podobným spôsobom Laplaceov filter

$$H(u, v) = -[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]$$

3.3. Vst'ah medzi frekvenčnou a priestorovou doménou

Jeden zo základných a dobre známych vst'ahov medzi priestorovou a frekvenčnou doménou je *konvolučný teorém*. Pre dvojrozmerné diskkrétne funkcie (obraz a filter) je definovaná konvolúcia

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

Ďalej na základe fourierovej transformácie platí vťah

$$f(x, y)h(x, y) \iff F(u, v) * H(u, v)$$

$$f(x, y) * h(x, y) \iff F(u, v)H(u, v)$$

Ak si za $f(x, y)$ zvolíme impulz $A\delta(x - x_0, y - y_0)$ jej furrierov obraz je rovný

$$F(u, v) = \frac{1}{MN}$$

a konvolúcia s filtrom v priestorovej doméne je rovná

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN}h(x, y).$$

Podľa [1]:

$$f(x, y) * h(x, y) \iff F(u, v)H(u, v)$$

$$\delta(x, y) * h(x, y) \iff \mathfrak{F}[\delta(x, y)] H(u, v)$$

$$h(x, y) \iff H(u, v)$$

Z tohto odvodenia môžeme usúdiť, že každý filter priestorovej doméne ma svoj adekvátny filter vo frekvenčnej doméne a naopak. Spolu tvoria tzv. Furrierov transformačný pár. Je zrejmé, že ak máme filter vo frekvenčnej doméne a inverznou Fourierovou transformáciou získame filtery priestorovej doméne rovnakej veľkosti ako je pôvodný obraz, potom to nie je výpočetne výhodné. Sú však niekore typy filtrovania, ktore sú zložité a takmer neriešiteľné v priestorovej doméne, kdež to filtrovaním vo frekvenčnej doméne sa tieto úlohy riešia triviálne.

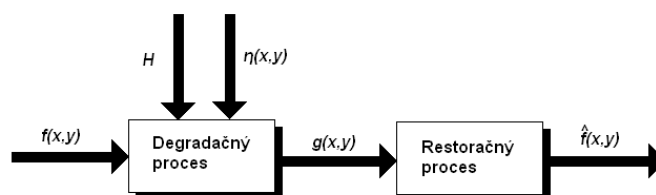
4. Rekonštrukcia obrazu

Rekonštrukcia obrazu sa pokúša o rekonštrukciu alebo obnovenie obrazu, ktorý bol degradovaný nejakým degradačným javom. Restoračné techniky sú orientované na modelovanie degradácií a ich spätné aplikovanie za účelom získania pôvodného obrazu. Tento postup zahŕňa aj formuláciu kritérií kvality, ktoré poukazujú na optimálny odhad požadovaného výsledku.

4.1. Princíp modelovania rekonštrukcie obrazu

V tejto časti práce sa budem zaoberať degradačným procesom, ktorý je modelovaný degradačnou funkciou spolu s pridaným šumom pôsobiacich na povodný obraz $f(x, y)$. (obr.) Takto získam degradovaný obraz $g(x, y)$. Pomocou neho a čiastočných znalostí o degradačnej funkcii H a pridaného šumu $\eta(x, y)$ je účelom restorácie získať odhad $\hat{f}(x, y)$ originalného obrazu. Cieľom je dosiahnúť čo najpresnejší a najlepší odhad. Z toho je možné dedukovať, čím viac budeme vedieť o funkcii H a η , tým viac sa bude $\hat{f}(x, y)$ približovať pôvodnému obrazu $f(x, y)$.

Spomenutý model môžeme charakterizovať v priestorovej doméne ako



Obrázek 2. Model degradácie a následnej rekonštrukcie obrazu

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y),$$

kde $h(x, y)$ je reprezentácia degradačnej funkcie v priestorovej doméne, $\eta(x, y)$ je funkcia šumu, $f(x, y)$ je pôvodný obraz a $g(x, y)$ je degradovaný obraz. Podobne je popísaný vo frekvenčnej doméne ako

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v),$$

kde pracujeme s Fourierovými obrazmi predošlých termov.

4.2. Šum a jeho klasifikácia

Na chvíľu odhliadneme od vplyvu degradačnej funkcie na obraz (resp. budeme ju považovať za funkciu identity) a sústredíme sa na degradovanie obrazu len za pomoci funkcie šumu. Šum je nechcenný jav v obraze, ktorý vzniká pri získavaní alebo prenášaní snímok na média. Môžeme sa prejavovať buď to v priestorovej doméne, kde priamo narušuje a koreluje v obraze alebo vo frekvenčnej doméne, kde sa prejavuje narušením určitých konkrétnych hodnôt frekvencií napr. *biely šum* (furierove spektrum bieleho šumu je konštantné). Šum je náhodná hodnota intenzity v obraze, preto ho môžeme charakterizovať pomocou funkcie hustoty pravdepodobnosti. Podľa tohto kritéria ho môžeme kategorizovať na

Gaussov (normálny) šum

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

z -náhodna veličina, μ - priemerná hodnota, σ - smerodajná odchyľka
Rayleigh-ov šum

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & \text{pre } z \geq a \\ 0 & \text{pre } z < a \end{cases}$$

priemerná hodnota:

$$\mu = a + \sqrt{\pi b/4}$$

rozptyl:

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$

Erlangov (Gama) šum

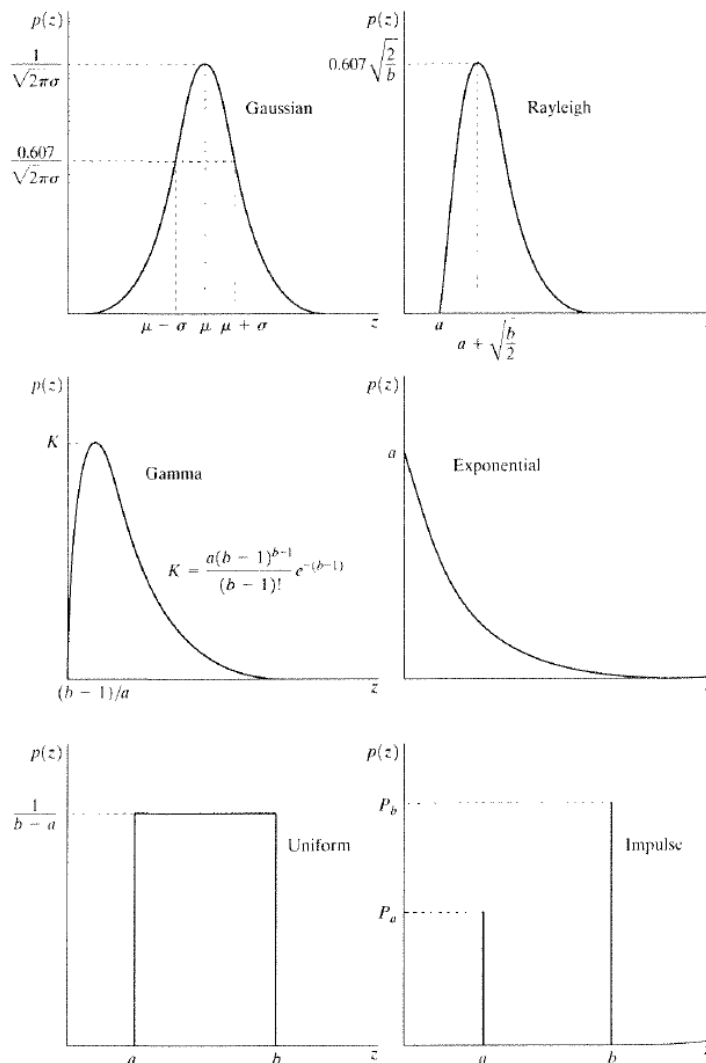
$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{(b-1)}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{pre } z \geq 0 \\ 0 & \text{pre } z < 0 \end{cases}$$

priemerná hodnota:

$$\mu = \frac{b}{a}$$

rozptyl:

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$



Obrázek 3. Funkcie hustoty pravdepodobnosti jednotlivých šumov

Exponenciálny šum

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{pre } z \geq 0 \\ 0 & \text{pre } z < 0 \end{cases}$$

priemerná hodnota:

$$\mu = \frac{1}{a}$$

rozptyl:

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

Jednotvárnny(uniformný) šum

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ak } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

priemerná hodnota:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

rozptyl:

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

Impulzny (sol' a pepr) šum

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{pre } z = a \\ P_b & \text{pre } z = b \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

4.3. Periodický šum

Periodický šum sú obrazové mriežky z elektrického alebo elektromechanického rušenia počas vytvárania snímok. Tetno šum je dobre odstraniteľný pomocou filtrácie vo frekvenčnej doméne.

4.4. Metódy odstránenia periodického šumu

4.4.1. Filtre typu pásmová zádrž

Filtre tohto typu zadržiavajú frekvencie v určitom pásme nad počiatkom fourierovho obrazu. Ideálny filter pasmovej zadrže definujeme ako

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{ak } D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & \text{ak } D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{ak } D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

kde W je šírka pásma. Podobne Butterworthov filter n -tého rádu definujeme

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

a Gaussov pasmová zádrž filter

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$

Pri filtrovaní s pásmovou zádržou dosahujeme dobrých výsledkov a priestorovej doméne neexistuje malý filter, ktorý by dosahoval podobné výsledky.

4.4.2. Filtre typu pasmova priepust

Pásmová priepust má opačný efekt ako pásmová zádrž. Môžeme ju nadefinovať ako

$$H_{pp}(u, v) = 1 - H_{pz}(u, v)$$

Filtrovanie pomocou pásmovej priepuste nie je bezné, pretože pri tomto filtrovaní sa odstráni príliš veľa detailov. Tento filter je použiteľný, ak chceme získať vzor šumu.

4.4.3. Filtre typu notch

Notch filtre prepúšťajú (alebo zadržujú) frekvencie z preddefinovaného okolia jednej frekvencie. Keďže Fourierova transformácia je symetrická podľa stredu, notch filter musí vystupovať v pároch okolo stredu aby dosiahol zmysluplných výsledkov. Jedinou výnimkou je, ak je umiestnený presne v strede Fourierovho obrazu. Ideálny notch filter ktorý zadržuje definujeme ako

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{ak } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ alebo } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{inak} \end{cases}$$

kde

$$D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - u_0)^2]^{1/2}$$

a

$$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + u_0)^2]^{1/2}$$

Ďalej butterworthow notch filter ktorý zadržuje definujeme

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n}$$

a Gaussov notch filter ktorý zadržuje

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v)D_2(u, v)}{D_0^2} \right]}$$

Zaujímavým poznatkom je, že ak zvolíme stred $u_0 = v_0 = 0$, stanú sa z nich hornopásmové filtre. Podobne ako predtým, prepúšťacie filtre charakterizujeme

$$H_{np}(u, v) = 1 - H_{nz}$$

Pri fitrovaní šumu hraje najdôležitejšiu rolu výberu správnej frekvencie šumu, okolo ktorej bude postavený filter. Tá však nemusí byť na prvý pohľad hneď jasná vo Fourierovom spektre. Rieši sa to potom pomocou odhadu a modulačnej funkcie.

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

kde w je modulačná funkcia.

5. Zhodnotenie

V tejto práci som sa snažil zachytiť čo najviac rôznych typických techník filtrovania. Zameral som sa predovšetkým na frekvenčnú doménu. No stále je to iba letný pohľad na problematiku filtrovania a zložitosť niektorých metód a ich používanie je stále ešte výzvou pre moje doterajšie znalosti. Avšak pri testovaní každej z týchto techník filtrovania som získal cenné nové znalosti, ktoré prehĺbili moje poznatky o spracovaní a úprave snímok a obraze. Pri písaní práce som teoretické znalosti čerpal hlavne z knihy [1]. A pridržoval som sa autorovej forme zápisu vzorcov. Obrázky som vypracoval sám, pokiaľ pri nich nie je uvedený referenčný odkaz.

Závěr

Pomocou filtrov či už vo frekvenčnej alebo priestorovej doméne je možné dosiahnuť obdivuhodných výsledkov pri úprave obrazu. Často poškodené, zašumené, prípadne skryté nie viditeľné detaily snímok, ktoré za normálnych okolností by nebolo možné rozlíšiť, vďaka týmto technológiám je možné ich získavať a dôkladnejšie analyzovať. Je zrejmé, že ich použitie v praxi hraje významnú rolu či už v lekárstve, geografii, astronómii a iných rôznych odvetviach. Stále však stojí za zmienku, že aj keď ich zložitosť, náročnosť a ekzaktnosť stojí na dobrom vedeckom základe, správne použitie tej ktorej metódy si vyžaduje určitú dávku citu v odhade, skoro ako v umení.

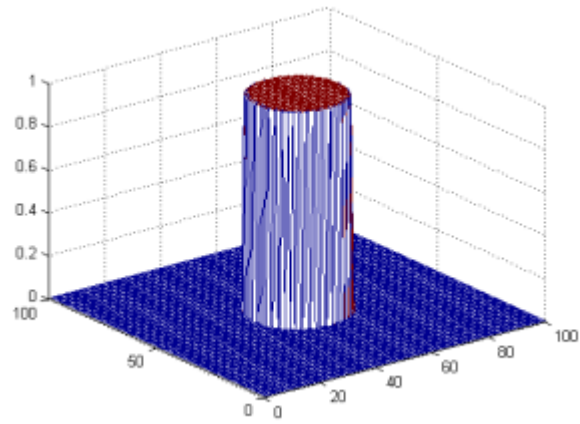
Conclusions

With filters, either in frequency or spatial domain can be achieved impressive results in image enhancement. Often damaged, noisy, or hidden not seen details of images that normally would not be possible to distinguish, thanks to these technologies they can be obtained and thoroughly analyzed. It is obvious that their use in practice plays an important role, whether in medicine, geography, astronomy or other various industries. However it is worth mention that although their complexity, exact and intensity stands on a sound scientific basis, the proper use of specific method requires a certain amount of emotion in the estimate, almost like in art.

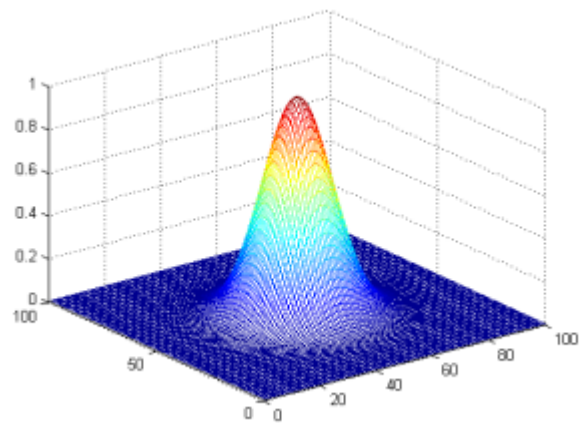
Reference

- [1] Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing*. Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [2] Pratt, William K. *Digital image processing third edition, PIKS*. Willey-Interscience, New York, 2001.
- [3] Sojka, E. *Zpracování obrazu*. VŠB, Ostrava, 2000.
- [4] Odkaz na vlastnosti filtrov www.wikipedia.org
- [5] Stránka pro studenty kursu Signály a systémy <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/ISS/public/>
- [6] INTRODUCTION TO FOURIER TRANSFORMS FOR IMAGE PROCESSING <http://www.cs.unm.edu/brayer/vision/fourier.html>

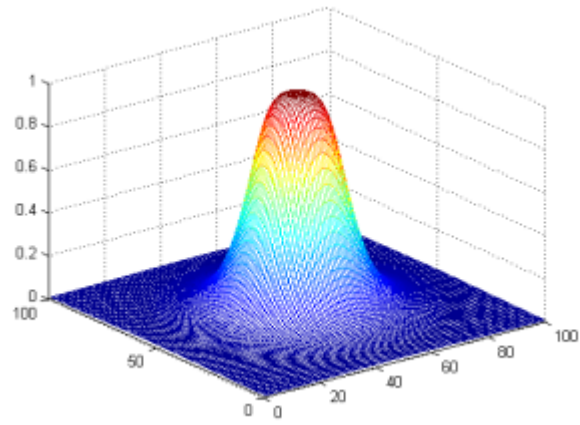
A. Priloha



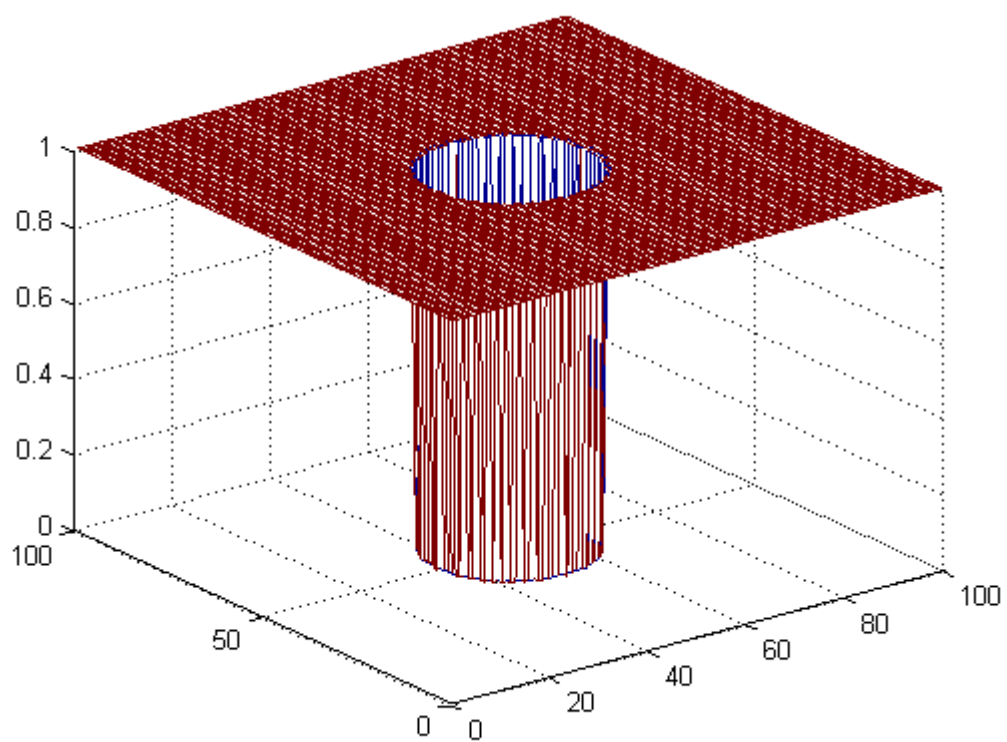
Obrázek 4. Ideální dolnopásmový filter



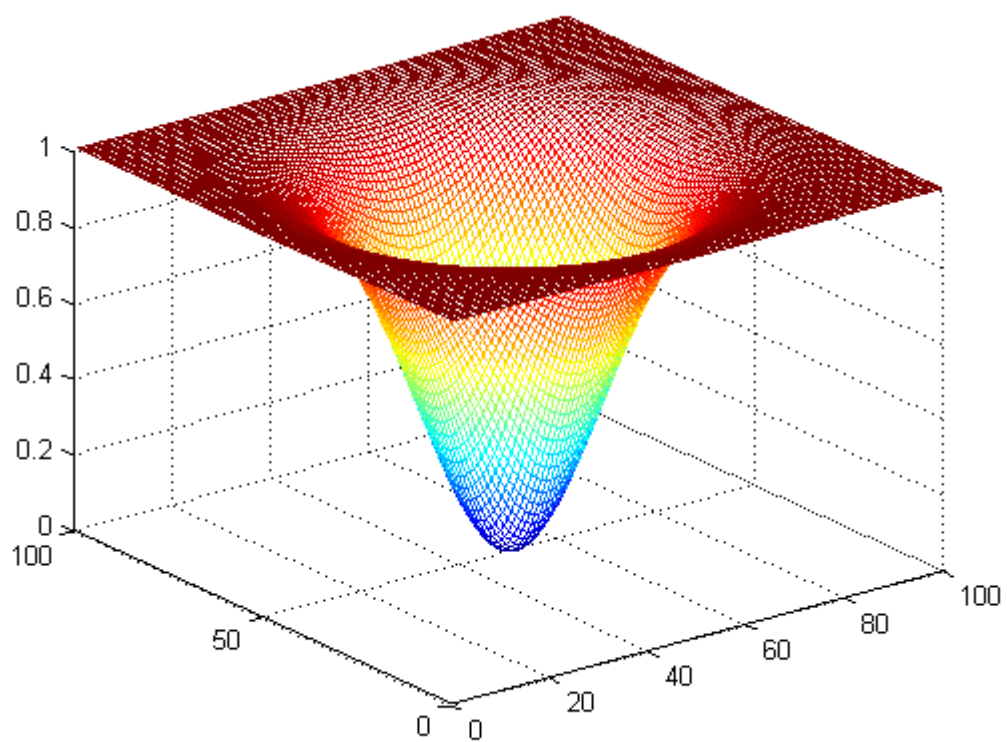
Obrázek 5. Gaussov dolnopásmový filter



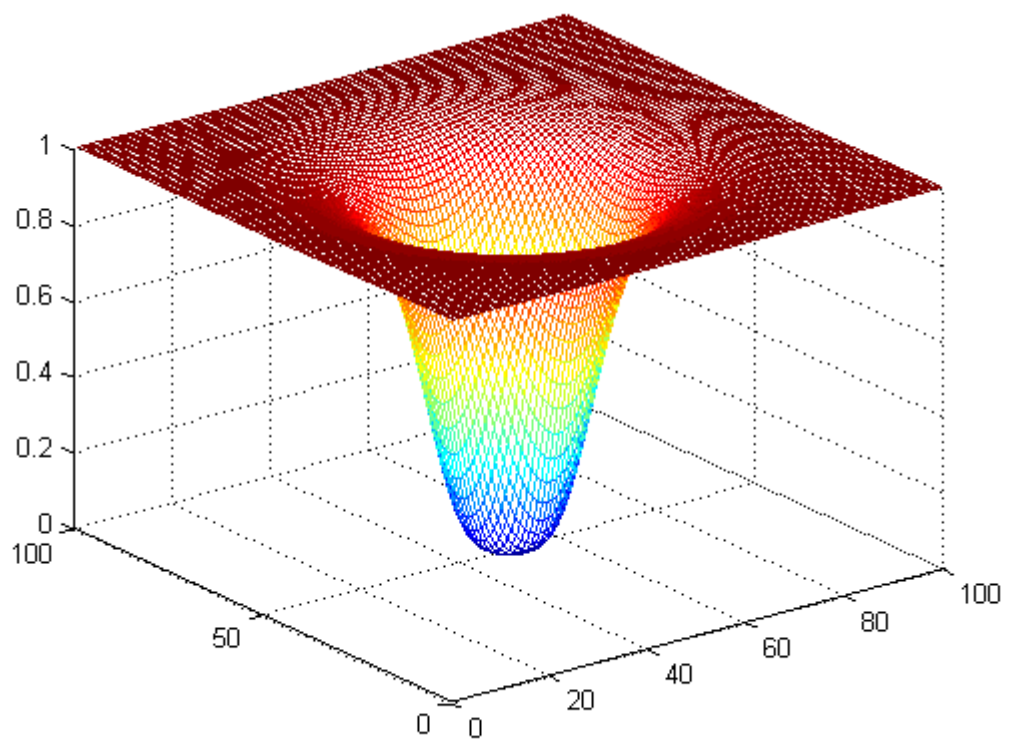
Obrázek 6. Butterworth dolnopásmový filter st. 2



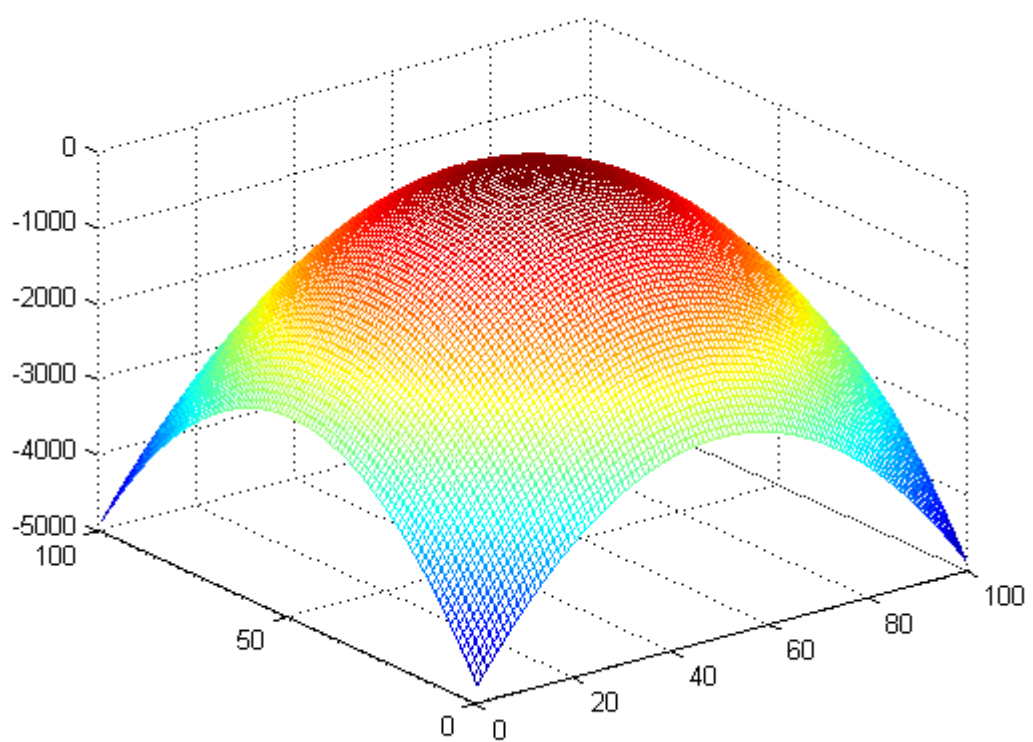
Obrázek 7. Ideální hornopásmový filter



Obrázek 8. Gaussov hornopásmový filter



Obrázek 9. Butterworth hornopásmový filter st. 2



Obrázek 10. Laplaceov filter