

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DISERTAČNÍ PRÁCE

Řešení kontaktních úloh pro nosník s podložím



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí disertační práce: **doc. RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.**

Vypracovala: **Mgr. Jana Radová**

Studijní program: P1104 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Aplikovaná matematika

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2024

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Mgr. Jana Radová

Název práce: Řešení kontaktních úloh pro nosník s podložím

Typ práce: Disertační práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2024

Abstrakt: Tato disertační práce se zabývá úlohami identifikace neznámých materiálových parametrů nelineárního Gaova modelu nosníku nejprve v úloze ohybu a poté v kontaktní úloze, přičemž je uvažováno jak dokonale tuhé podloží, tak i deformovatelné. V případě kontaktní úlohy s elasticky deformovatelným podložím lze navíc zformulovat i úlohu identifikace modulu pružnosti podloží. Úloha identifikace neznámých parametrů spadá do obecnější oblasti inverzních úloh, které mají široké uplatnění nejen v matematice. Obecně inverzní úlohou rozumíme proces, kdy na základě znalosti jistých pozorování, získaných například měřeními, chceme najít odpovídající hodnoty vstupních parametrů uvažovaného modelu. Model nosníku, který je zde uvažován, je statický nelineární Gaův model. V kontaktních úlohách pro zmiňovaný model nosníku jsme se zaměřili na studium tzv. unilaterálních úloh, tj. úloh, kdy uvažujeme model nosníku, který není pevně spjatý s podložím. V práci jsou uvažovány dva typy podloží. Dokonalé tuhé podloží, které je modelováno pomocí Signoriniho podmínek, a elasticky deformovatelné podloží, tzv. Winklerovo podloží, což je nejjednodušší jednoparametrický model podloží. Hlavním úkolem této disertační práce je vytvořit ucelenou teorii zabývající se úlohami identifikace neznámých materiálových parametrů nelineárního Gaova modelu nosníku nejprve v úloze ohybu a poté v kontaktní úloze. Úlohy budou formulovány jako úlohy optimálního řízení, kdy roli řídicích proměnných hrají neznámé materiálové parametry nosníku nebo v případě kontaktní úlohy s deformovatelným podložím moduly pružnosti podloží. K diskretizaci a algebraické formulaci úlohy optimálního řízení použijeme metodu konečných prvků. Teoretické výsledky obsažené v disertační práci jsou prezentovány na několika ilustrativních příkladech.

Klíčová slova: Gaův nelineární nosník, průhyb, kontaktní úloha, identifikace parametru, materiálový parametr, modul pružnosti podloží, úloha optimálního řízení

Počet stran: 113

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Mgr. Jana Radová

Title: Solution of contact problems for beam with foundation

Type of thesis: Dissertation thesis

Department: Department of mathematical analysis and application of mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

The year of presentation: 2024

Abstract: This dissertation thesis deals with the identification problem of unknown material parameters of a nonlinear beam model in a bending problem and then in a contact problem. Data identification problems are an essential class of inverse problems with many practical applications. From a set of measured data, one tries to identify some characteristic quantities which are not known a-priori in corresponding mathematical models. This thesis considers a static nonlinear Gao beam model. We have focused on the study of so-called unilateral contact problems. Recall that the wording unilateral means the beam is not fixed with the foundation. Here, two foundations will be considered: a perfectly rigid foundation, given by so-called Signorini conditions, and an elastic, one parametric Winkler's foundation. The main goal of this dissertation thesis is to develop a comprehensive theory dealing with the identification problem of unknown material parameters for the bending problem of a nonlinear Gao beam and then for a contact problem with two types of foundations. In the case of a contact problem with an elastic deformable foundation, we focus on identifying the modulus that characterizes the foundation. The analyzed problem is formulated as an optimal control problem, and the unknown material parameters of the beam or modulus foundation are the control variables. Discretization and algebraic formulation are based on using the finite element method. Finally, the theoretical results are completed by several numerical examples.

Key words: Gao nonlinear beam, deflection, contact problem, identification of parameter, material parameter, modulus of foundation, optimal control problem

Number of pages: 113

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vytvořila samostatně pod vedením své školitelky doc. RNDr. Jitky Machalové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 2. dubna 2024

.....
podpis

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala své školitelce doc. RNDr. Jitce Machalové, Ph.D. za obětavou spolupráci, cenné rady, vstřícnost a čas věnovaný na konzultacích. Dále bych také ráda poděkovala své rodině za trpělivost a podporu během celého doktorského studia.

Obsah

Úvod	8
1 Nelineární model nosníku	11
1.1 Gaův model nosníku	12
2 Úloha ohybu nelineárního nosníku	15
3 Kontaktní úloha pro nelineární nosník s podlořím	19
3.1 Kontaktní úloha s dokonale tuhým podlořím	19
3.2 Kontaktní úloha s elasticky deformovatelným podlořím	21
4 Identifikace neznámých parametrů	24
4.1 Identifikace neznámých parametrů v úloze ohybu nosníku	24
4.2 Identifikace neznámých parametrů v kontaktní úloze nosníku s dokonale tuhým podlořím	31
4.3 Identifikace neznámých parametrů v kontaktní úloze nosníku s elasticky deformovatelným podlořím	37
5 Diskretizace a konvergenční analýza	41
5.1 Diskretizace úlohy identifikace pro ohyb nosníku	41
5.2 Diskretizace úlohy identifikace v kontaktní úloze s dokonale tuhým podlořím	45
5.3 Diskretizace úlohy identifikace v kontaktní úloze s elasticky deformovatelným podlořím	51
6 Algebraická formulace identifikačních úloh	54
6.1 Algebraická formulace úlohy identifikace pro ohyb	54
6.2 Algebraická formulace úlohy identifikace pro kontakt s dokonale tuhým podlořím	55
6.3 Algebraická formulace úlohy identifikace pro kontakt s elasticky deformovatelným podlořím	57
7 Citlivostní analýza	60
7.1 Citlivostní analýza úlohy identifikace pro ohyb	60
7.2 Citlivostní analýza úlohy identifikace pro kontakt s dokonale tuhým podlořím	62
7.3 Citlivostní analýza úlohy identifikace pro kontakt s elasticky deformovatelným podlořím	63
8 Příklady	66
8.1 Příklad identifikace parametrů v úloze ohybu	66
8.1.1 Úloha ohybu Gaova nosníku	66
8.1.2 Úloha identifikace pro úlohu ohybu Gaova nosníku	69

8.2	Příklady identifikace parametrů nosníku v kontaktní úloze s dokonale tuhým podložím	75
8.2.1	Kontaktní úloha Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím	75
8.2.2	Úloha identifikace pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím	78
8.3	Příklad identifikace parametrů v kontaktní úloze s elasticky deformovatelným podložím	85
8.3.1	Kontaktní úloha Gaova nosníku s deformovatelným podložím	86
8.3.2	Úloha identifikace pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s deformovatelným podložím	88
	Závěr	94
	Literatura	95
9	Dodatek 1	
	Analytické nerovnosti a jejich použití	101
10	Dodatek 2	
	Aproximace nehladkých úloh	108
	10.1 Penalizační metoda	108
	10.2 Regularizační metoda	109
	Seznam použitého značení	111

Úvod

Kontaktní úlohy, v nichž není uvažován vliv tření popisují vzájemnou interakci mezi dvěma tělesy. Z hlediska praxe mají kontaktní úlohy velký význam v mnoha odvětvích strojního a stavebního inženýrství např. při vyztužování tunelů, výkopových pracích, při navrhování kolejnic v železniční dopravě, v lodním stavitelství apod.

V předložené disertační práci se zabýváme kontaktní úlohou nosníku a podloží. Přitom uvažujeme dlouhé a štíhlé nosníky, tedy takové nosníky, jejichž délka výrazně převyšuje zbylé dva rozměry, tj. tloušťku a šířku. Nejčastěji používaným matematickým modelem nosníku je klasický lineární Euler–Bernoulliho model, který byl vytvořen kolem roku 1750. Navzdory své popularitě je využití tohoto modelu omezeno pouze na případy, kdy jeho průhyb není příliš velký. Složitější strojní a stavební konstrukce ovšem vyžadují také modely nosníku, které nejsou limitovány malými průhyby, ale umožňují i středně velké průhyby. Jednou takovou možností je použití nelineární Gaův model nosníku, který definoval D. Y. Gao v roce 1996 v článku [27].

V této disertační práci se zabýváme analýzou tzv. unilaterálních úloh, tedy úloh, kdy uvažujeme nelineární model Gaova nosníku, který není pevně spjatý s podložím. Dokonale tuhé podloží je modelováno pomocí tzv. Signoriniho podmínek. Tyto podmínky popisují vztah mezi průhybem nosníku a kontaktní silou, přičemž nedochází k průniku nosníku do podloží. Nosník tedy po zatížení zůstává nad podložím nebo na podloží leží, a to v závislosti na velikosti působící síly na nosník. Dalším typem podloží, které je v práci uvažováno, je elasticky deformovatelné podloží, tzv. Winklerovo podloží, což je nejjednodušší jednoparametrický model podloží. V tomto případě může při vertikálním zatížení nosníku dojít k průniku nosníku do podloží. Detailnější informace o řešení kontaktních úloh Gaova nosníku s deformovatelným podložím lze najít např. v [46], [47], [48] nebo [49].

Stěžejní část disertační práce se věnuje formulaci, analýze a řešení úlohy identifikace nejprve pro úlohu ohybu nelineárního Gaova nosníku a pak také pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s podložím. Uvažováno je jak dokonale tuhé podloží, tak i podloží deformovatelné. Úlohy identifikace neznámých parametrů jsou součástí širší kategorie inverzních úloh, které nacházejí rozsáhlé využití v různých situacích. Obecně inverzní úlohou rozumíme proces, kdy na základě znalosti jistých pozorování, získaných například měřeními, chceme najít odpovídající hodnoty vstupních parametrů uvažovaného modelu. V případě úlohy ohybu

nosníku a kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím se budeme zabývat identifikací materiálových konstant nelineárního Gaova modelu nosníku. Uvažujeme-li kontaktní úlohy s deformovatelným podložím, pak můžeme formulovat úlohu identifikace jak materiálových parametrů nosníku, tak i modulu pružnosti podloží. Úlohy identifikace lze zformulovat jako úlohy optimálního řízení, viz např. [15], [73], kde roli řídicích proměnných hrají právě materiálové parametry nosníku nebo podloží. Výše zmíněné úlohy identifikace neznámých materiálových parametrů pro úlohu průhybu a kontaktní úlohy nelineárního Gaova nosníku jsou studovány v autorčiných článcích [60] a [62].

Hlavním cílem této disertační práce je vytvořit ucelenou teorii zabývající se úlohami identifikace neznámých materiálových parametrů nelineárního Gaova modelu nosníku nejprve v úloze ohybu a poté v kontaktní úloze, přičemž je uvažováno jak dokonale tuhé podloží, tak i deformovatelné. V případě kontaktní úlohy s elasticky deformovatelným podložím lze navíc zformulovat i úlohu identifikace modulu pružnosti podloží. Dílčími úkoly disertační práce je tedy formulace úloh identifikace včetně důkazu existence alespoň jednoho řešení, nalezení aproximace řešení a důkaz konvergence řešení diskretizované úlohy k řešení spojité úlohy identifikace. Dále bychom se chtěli zabývat algebraickou formulací a citlivostní analýzou, které je důležité pro následné numerické výpočty. Pokud je nám známo, tak jedinou prací zabývající se tímto typem úloh identifikace je [44], kde je ale řešen pouze dynamický model nosníku. Úlohy identifikace pro statický nelineární Gaouv model nosníku nebyly doposud studovány. V literatuře lze nalézt několik prací zabývajících se inverzními úlohami pro statický i dynamický model Euler–Bernoulliova nosníku např. [32], [43], [52] nebo [53]. Úloha identifikace pro lineární nosník s podložím je řešena v článku [36]. Zajímavé jsou také články [13], [25], [31], [59], [74], které se věnují úlohám identifikace parametru.

Disertační práce je rozčleněna do osmi kapitol. První tři kapitoly lze považovat za přípravou část ke stěžejnímu tématu disertační práce. V těchto kapitolách jsou popsány stavové úlohy průhybu a kontaktu Gaova nelineárního modelu nosníku. Čtvrtá kapitola se již zabývá formulací úlohy identifikace neznámých materiálových parametrů. V případě úlohy ohybu a kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím, je řešena úloha identifikace materiálových parametrů nosníku. Pro kontaktní úlohu s deformovatelným podložím uvažujeme pouze úlohu identifikace modulu pružnosti podloží. Diskretizace úloh identifikace a konvergenční analýza je studována v páté kapitole. Následuje kapitola zabývající se alge-

braickou formulací úloh a kapitola věnující se analýze citlivosti. Osmá kapitola je věnována řešeným ilustračním příkladům pro všechny tři studované typy identifikačních úloh. V práci jsou zejména v důkazech některých tvrzení použity nerovnosti, jejichž přehled je uveden v Dodatku 1, a to včetně jejich následného použití v důkazech uvedených lemmat. Dodatek 2 obsahuje základní myšlenky penalizační a regularizační metody.

Hlavní výsledky této disertační práce byly publikovány ve třech prvoautorských článcích [60], [61] a [62].

1. Nelineární model nosníku

Nejjednodušším a nejčastěji používaným modelem nosníku je Euler–Bernoulliho lineární model, který vznikl kolem roku 1750. Tento model je vhodný pro dlouhé a štíhlé nosníky, tedy nosníky, jejichž délka výrazně převyšuje příčné rozměry. Teorie vychází z předpokladu, že příčné řezy nosníku zůstávají rovinné a kolmé na středovou osu nosníku i po deformaci.

V případě úlohy ohybu nosníku, jehož příčné rozměry nejsou zanedbatelně malé vůči podélnému rozměru, je vhodný Timoshenkův model, který byl poprvé publikován začátkem 20. století. V tomto případě se předpokládá, že příčné řezy nosníku, které byly před deformací nosníku kolmé na jeho osu, zůstávají při deformování nosníku rovinné, ale ne nutně kolmé na osu. Tento model navíc umožňuje i smykové deformace. Oba zmíněné lineární modely jsou vhodné pouze pro malé hodnoty průhybu.

Pro větší průhyby nosníků je vhodné použít některý z nelineárních modelů, jejich přehled lze najít například v [55]. Za zmínku jistě stojí Kirchhoff–Loveho model, který také někdy bývá označován jako nelineární Euler–Bernoulliho model nosníku. Vychází z modelu navrženého německým fyzikem G. Kirchhoffem, [37]. Na tuto práci pak navázal britský matematik A. E. H. Love, který zohlednil i vliv osového zatížení, [45]. Tento model je tedy přímým zobecněním klasického lineárního modelu nosníku ve dvou dimenzích za splnění Kirchhoffových předpokladů. Později byl tento nelineární model rozšířen i o smykové deformace, podrobnosti lze nalézt např. v [56] nebo v [68]. Další nelineární model nosníku, který vychází z klasického lineárního Euler–Bernoulliho nosníku, můžeme najít v článku [9]. Jeden z prvních nelineárních modelů pro velké výchylky byl publikován v [66] a [67]. Později na tuto práci navazují články [70] a [54].

Jedním z novějších a nejzajímavějších nelineárních modelů nosníku je model publikovaný D. Y. Gaem roku 1996 v článku [27]. O rok později byl tento model rozšířen i pro dynamické úlohy, viz [28], [29]. Pro statický model Gaova nelineárního nosníku byly studovány a řešeny úlohy ohybu a kontaktní úlohy v člancích [30], [46], [47], [48] a [49]. Numerickým metodám pro řešení úlohy ohybu Gaova modelu je věnována práce [14]. Velmi zajímavá úloha bucklingu Gaova nosníku je pak řešena v práci [58]. Dalšími pracemi zabývajícími se touto tematikou jsou např. [3], [4], [5], [17] nebo [78]. Jedinou nám známou prací zabývající se tvarovou optimalizací tohoto nelineárního modelu nosníku je [16]. Dynamickým úlohám Gaova nosníku je také věnována celá řada prací, například [2], [6], [40], [41], [51]

a [76]. Dynamický model Gaova nosníku pro kontaktní úlohu je studován v [8], [71] a [72]. Inverzní úloha pro dynamický model Gaova nosníku byla řešena v [44], a to konkrétně pro data z článku [7]. V současné době je již publikováno více než 30 prací zabývajících se nelineárním modelem Gaova nosníku, z nichž za zmínku určitě stojí např. [10], [21], [22] nebo [75].

V této práci se omezíme pouze na statický model Gaova nosníku. Konkrétně se budeme zabývat identifikací neznámých parametrů v úloze ohybu nosníku, následně pak i v kontaktních úlohách, a to jak s dokonale tuhým, tak i deformovatelným podložím. Této problematice jsou věnovány autorčiny již publikované články [60], [61] a [62].

1.1. Gaův model nosníku

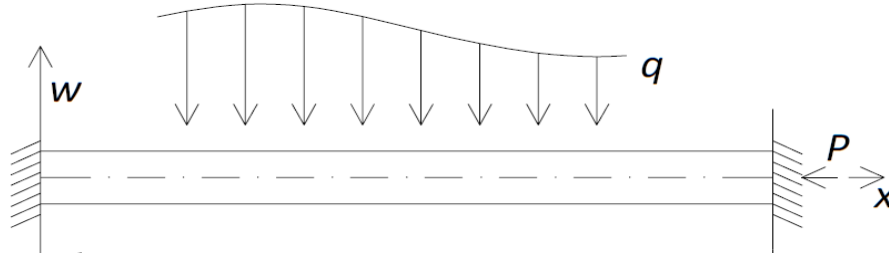
Jak již bylo řečeno, existuje celá řada nelineárních modelů nosníku. V této práci se však omezíme pouze na jeden konkrétní, z našeho pohledu nejzajímavější, nelineární model, který poprvé v roce 1996 publikoval D.Y. Gao. V literatuře se běžně hovoří o Gaově nosníku. Detailní odvození lze najít právě v článku [27], my si zde uvedeme pouze hlavní kroky. Uvažujeme elastický nosník, jehož řez v rovině (x, y) je obdélník

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L, -b \leq y \leq b\},$$

kde L je délka nosníku a $2b$ jeho tloušťka. V rovině (y, z) je příčný řez dán obdélníkem $[-b, b] \times [0, t]$, kde t je šířka nosníku. Ta je v článku [27] bez újmy na obecnosti uvažována jako jednotková. Až později v člancích [50], [60], [61] a [62] je Gaův nosník uvažován s obecnou šířkou t . Gao při odvození modelu nosníku předpokládal, že je zachována Euler–Bernoulliho hypotéza, tedy že průřez, který je rovinný a kolmý na střednici (tj. k vodorovné ose) nosníku před deformací, zůstává rovinný a kolmý ke střednici i po deformaci. Dále předpokládal, že materiál nosníku je izotropní a že osa x prochází středovou osou nosníku. Samotný model Gaova nosníku vychází ze soustavy von Kármánových rovnic v jedné dimenzi. Uvažuje se pole posunutí

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) - y\theta(x) \\ w(x) \end{pmatrix},$$

kde $(x, y) \in \Omega$, w značí vertikální průhyb, u horizontální posunutí bodů osy nosníku x a θ je úhel jejího ohybu. Z teorie deformací dostáváme Green–St Venantův tenzor deformace



Obrázek 1: Oboustranně vetknutý nosník.

ve tvaru $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top + (\nabla \mathbf{u})^\top \cdot \nabla \mathbf{u})$. Odtud pak na základě analýzy z [27], zanedbáním malých členů a po dosazení $\theta = w'$ dostaneme nenulové složky tenzoru napětí ze vztahu pro rovinnou napjatost

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix},$$

kde

$$\epsilon_x = u' - yw'' + \frac{1}{2}(w')^2, \quad \epsilon_y = \frac{1}{2}(w')^2,$$

E značí Youngův modul pružnosti a ν Poissonovu konstantu. Dále se předpokládá, že na nosník působí vertikální zatížení $q(x)$ a v koncovém bodě nosníku $x = L$ pak axiální síla P , viz Obrázek 1. V případě kladné axiální síly dochází ke stlačování nosníku, v opačném případě k jeho natahování. Funkcionál celkové potenciální energie je pak tvaru

$$\Pi(u, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) dx dy - \int_0^L qw dx + Pu(L).$$

Pro stacionární bod tohoto funkcionálu dostaneme pro $x \in (0, L)$ soustavu dvou nelineárních rovnic

$$u'' + (1 + \nu)w'w'' = 0, \quad (1)$$

$$EIw'''' - 2btE [(1 + \nu)(2(w')^2 + u')w'' + \nu w'u''] = f(x), \quad (2)$$

kde

$$f(x) = (1 - \nu^2)q(x) \quad \forall x \in \langle 0, L \rangle$$

a I značí moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose, který je dán vztahem

$$\int_A z^2 dy dz,$$

příčměž A je plocha příčného řezu v rovině (y, z) . V případě Gaova nosníku je tedy

$$I = \frac{2}{3} b^3 t. \quad (3)$$

Zintegrováním rovnice (1) dostaneme dle [69]

$$u' = -\frac{1}{2}(w')^2(1 + \nu) - \frac{(1 - \nu^2)P}{2btE}.$$

Po dosazení do (2) dostaneme finální rovnici pro Gaův nosník, která je tvaru

$$E I w^{IV} - E \alpha (w')^2 w'' + P \mu w'' = f, \quad \text{v } (0, L),$$

kde

$$\alpha = 3tb(1 - \nu^2), \quad \mu = (1 - \nu^2)(1 + \nu), \quad f = (1 - \nu^2)q.$$

Tento model nosníku byl původně navržen pro nekonvexní úlohy, které vedou na tzv. úlohu bucklingu. Pro případ konvexních úloh byla v [50] navržena modifikace konstanty μ ve tvaru

$$\mu = 1 - \nu^2. \quad (4)$$

Protože se v této disertační práci budeme zabývat pouze konvexními úlohami, uvažujeme nadále konstantu μ ve tvaru (4).

2. Úloha ohybu nelineárního nosníku

Nejprve se zaměříme na úlohu ohybu nelineárního Gaova nosníku. Připomeňme, že tento model je dán diferenciální rovnicí čtvrtého řádu tvaru:

$$E I w^{IV} - E \alpha (w')^2 w'' + P \mu w'' = f \quad \text{na } (0, L), \quad (5)$$

kde

$$\alpha = 3tb(1 - \nu^2), \quad \mu = 1 - \nu^2, \quad f = (1 - \nu^2)q.$$

K rovnici (5) budeme uvažovat ještě čtyři okrajové podmínky, přičemž s ohledem na fyzikální realitu lze zvolit jednu z následujících možností:

- (B1) prostě podepřený nosník: $w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0$;
- (B2) oboustranně vetknutý nosník: $w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$;
- (B3) nosník s vetknutím a podepřením: $w(0) = w'(0) = w(L) = w''(L) = 0$;
- (B4) nosník s volným koncem:

$$w(0) = w'(0) = 0;$$

$$w''(L) = E I w'''(L) - \frac{1}{3} E \alpha (w'(L))^3 + P (1 - \nu^2) w'(L) = 0.$$

Další využití nelineárního modelu vyžaduje variační formulaci, [65]. Pro tyto účely je nutné zavést tzv. prostory kinematicky přípustných posunutí V_i , $i = 1, \dots, 4$, což jsou v tomto případě podprostory Sobolevova prostoru $H^2((0, L))$ dané stabilními okrajovými podmínkami. Tedy

$$(B1) : V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v(L) = 0\},$$

$$(B2) : V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = v(L) = v'(L) = 0\},$$

$$(B3) : V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = v(L) = 0\},$$

$$(B4) : V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}.$$

V případech, kdy nebudou okrajové podmínky jasně specifikovány, budeme používat jednotné označení prostoru kinematicky přípustných posunutí V .

Nyní můžeme přistoupit k variační formulaci úlohy ohybu Gaova nelineárního nosníku, která má následující tvar

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) = \mathcal{L}(v), \end{cases} \quad \forall v \in V, \quad (6)$$

kde

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_0^L EI w'' v'' dx - \int_0^L P(1 - \nu^2) w' v' dx, \\ \pi(w, v) &= \int_0^L E t b (1 - \nu^2) (w')^3 v' dx, \quad \mathcal{L}(v) = \int_0^L (1 - \nu^2) q v dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Variační formulaci (6) lze ekvivalentně vyjádřit jako minimalizaci funkcionálu celkové potenciální energie, tj. jako úlohu

$$\text{Najít } w \in V : \quad \Pi_G(w) = \min_{v \in V} \Pi_G(v), \quad (8)$$

kde $\Pi_G(v)$ je funkcionál celkové potenciální energie pro Gaův nosník daný vztahem

$$\Pi_G(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{1}{4} \pi(v, v) - \mathcal{L}(v). \quad (9)$$

Tento funkcionál je spojitý a lze ukázat, že za určitých podmínek je i ryze konvexní a koercivní, [24]. Předpokládejme tedy dále, že platí

(P1) $q \in L^2((0, L))$,

(P2) E, t, b, ν jsou kladné konstanty,

(P3) $P < \bar{P}$, kde $\bar{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} P_{cr}^E$, a P_{cr}^E je Eulerova kritická síla.

Pak lze dokázat následující lemma, viz [48].

Lemma 2.1. *Nechť platí předpoklady (P1)–(P3), pak funkcionál $\Pi_G(v)$ daný vztahem (9) je ryze konvexní a koercivní.*

Eulerova kritická síla P_{cr}^E je mezní hodnota axiální síly, která je známá z teorie stability a je definována vztahem

$$P_{cr}^E = \min_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} R(v), \quad (10)$$

kde

$$R(v) = \frac{EI \int_0^L (v'')^2 dx}{\int_0^L (v')^2 dx}, \quad v \in V$$

je tzv. Rayleighův podíl. V roce 1757 odvodil Euler explicitní formule pro výpočet kritické hodnoty osové síly

$$P_{cr}^E = \frac{\pi^2 EI}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}, \quad (11)$$

kde konstanta \mathcal{K} závisí na zvolených okrajových podmínkách, viz Tabulka 1, detailnější informace lze najít např. v [11], [18] nebo [23].

	(B1)	(B2)	(B3)	(B4)
\mathcal{K}	1	0.5	0.7	2

Tabulka 1: Tabulka konstant

V případě Gaova nelineárního nosníku definujeme tzv. nelineární Rayleighův podíl, viz [58], pro $u, v \in V$ vztahem

$$R_u(v) = \frac{EI \int_0^L (v'')^2 dx + \frac{1}{3} E\alpha \int_0^L (u'v')^2 dx}{\int_0^L (v')^2 dx}.$$

Pak lze ukázat, že pro kritickou hodnotu \bar{P} axiální síly Gaova nelineárního nosníku platí

$$(1 - \nu^2)\bar{P} = \min_{u \in V} \min_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \left(R(v) + \frac{1}{3} E\alpha \frac{\int_0^L (u'v')^2 dx}{\int_0^L (v')^2 dx} \right),$$

přičemž

$$(1 - \nu^2)\bar{P} = P_{cr}^E.$$

Odtud tedy plyne zdůvodnění předpokladu (P3), viz [58], kde

$$\bar{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} P_{cr}^E.$$

S ohledem na Lemma 2.1 a základní věty variačního počtu lze zformulovat podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení úlohy ohybu Gaova nosníku, viz [48].

Věta 2.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Pak úlohy (6) a (8) jsou vzájemně ekvivalentní a mají jediné řešení.*

Nyní úlohu ohybu Gaova nosníku zobecníme v tom smyslu, že budeme uvažovat Youngův modul pružnosti E a Poissonovu konstantu ν jako po částech kladné konstantní funkce. V tomto případě budeme místo (P2) a (P3) uvažovat následující předpoklady

(P2)* E, ν jsou po částech kladné konstantní funkce a t, b jsou kladné konstanty,

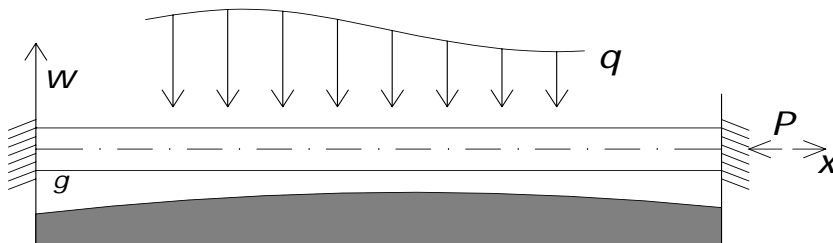
(P3)* $P < \bar{P}_{\min}$, kde $\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E$, přičemž $P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}$ je Eulerova kritická síla, E_{\min}, ν_{\min} jsou minimální hodnoty funkcí E, ν a konstanta \mathcal{K} nabývá hodnot dle zvolených okrajových podmínek, viz Tabulka 1.

Lze ukázat, že v případě splnění předpokladů (P1), (P2)* a (P3)* je funkcionál $\Pi_G(v)$ definovaný vztahem (9) ryze konvexní a koercivní na V . Je tedy zřejmé, že i v tomto obecnějším případě lze zformulovat větu o existenci jediného řešení, viz [60], [61].

Věta 2.2. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)* a (P3)*. Pak úlohy (6) a (8) jsou vzájemně ekvivalentní a mají jediné řešení.*

3. Kontaktní úloha pro nelineární nosník s podložím

Kontaktní úlohy se velmi často vyskytují v běžné inženýrské praxi, např. při řešení základů různých staveb a konstrukcí, při vyztužování v dolech, tunelech a výkopových pracích, nebo také při navrhování kolejnic v železniční dopravě. V této kapitole se budeme zabývat kontaktní úlohou Gaova nelineárního nosníku s podložím, přičemž budeme uvažovat dva typy podloží, a to dokonale tuhé a elasticky deformovatelné. Navíc budeme předpokládat, že mezi nosníkem a podložím je mezera. Tuto mezeru popíšeme hladkou funkcí $g < 0$, viz Obrázek 2. Je-li nosník pevně spjatý s podložím, hovoříme o tzv. *bilaterálním* podloží. V opačném případě, tj. pokud nosník s podložím spjatý není, hovoříme o podloží *unilaterálním*. My se omezíme pouze na úlohy s unilaterálním podložím.



Obrázek 2: Oboustranně vetknutý nosník nad podložím

3.1. Kontaktní úloha s dokonale tuhým podložím

Nejprve se budeme zabývat kontaktní úlohou pro Gaův nelineární nosník a dokonale tuhé podloží. Předpokládáme, že ve vzdálenosti g pod nosníkem je umístěna dokonale tuhá překážka neboli podloží. Mezera mezi nosníkem a podložím je tedy obecně popsána funkcí $g(x)$. Poznamenejme, že v případě kontaktu s dokonale tuhým podložím nedochází k za-boření nosníku do podloží. Uvažujme tedy rovnici Gaova nosníku společně s kontaktními podmínkami

$$E I w^{IV} - 3 E t b (1 - \nu^2) (w')^2 w'' + P (1 - \nu^2) w'' = (1 - \nu^2) q + T(w) \quad \text{v } (0, L), \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} w \geq g, \\ T(w) \geq 0, \\ (w - g) T(w) = 0, \end{array} \right\} \quad \text{v } (0, L), \quad (13)$$

kde $T(w)$ je kontaktní síla mezi nosníkem a podložím, která závisí na neznámém průhybu w . Je zřejmé, že mohou nastat pouze dvě situace s ohledem na velikost průhybu w . Je-li $w(x) = g(x)$ pro $x \in (0, L)$, pak nastává v bodě x kontakt a $T(w(x)) \geq 0$. Jestliže $w(x) > g(x)$ pro $x \in (0, L)$, pak v bodě x ke kontaktu nedochází a je tedy zřejmé, že $T(w(x)) = 0$. Podmínky (13) jsou známé z literatury jako *Signoriniho podmínky*. Samozřejmě i v kontaktní úloze je třeba s ohledem na fyzikální realitu uvažovat ještě čtyři okrajové podmínky. I v tomto případě tedy budeme volit jednu z možností (B1), (B2), (B3) nebo (B4) uvedených na straně 15.

Slabá formulace úlohy (12), (13) je pak dána ve tvaru variační nerovnice

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in K \text{ takové, že} \\ a(w, v - w) + \pi(w, v - w) \geq \mathcal{L}(v - w), \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (14)$$

kde formy $a(w, v)$, $\pi(w, v)$ a lineární funkcionál $\mathcal{L}(v)$ jsou definovány v (7), K je množina přípustných průhybů ve tvaru

$$K = \{v \in V : v \geq g \text{ na } (0, L)\}, \quad (15)$$

přičemž V značí prostor kinematicky přípustných posunutí a $g \in \mathcal{C}(\langle 0, L \rangle)$, $g < 0$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$. V případě potřeby rozlišit úlohy s ohledem na dané okrajové podmínky budeme používat odpovídající značení prostoru V_i , $i = 1, \dots, 4$, viz str. 15.

Variační nerovnici (14) lze ekvivalentně vyjádřit jako minimalizaci funkcionálu celkové potenciální energie, tj. jako úlohu

$$\text{Najít } w \in K : \quad \Pi_G(w) = \min_{v \in K} \Pi_G(v), \quad (16)$$

kde $\Pi_G(w)$ je daný vztahem (9). Připomeňme, že za platnosti předpokladů (P1)–(P3) je funkcionál $\Pi_G(w)$ ryze konvexní a koercivní, viz Lemma 2.1. Navíc množina K je neprázdná, uzavřená a konvexní. Na základě toho lze za předpokladů (P1)–(P3) uvedených na straně 16 zformulovat podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení studované úlohy.

Věta 3.1. *Nechť platí předpoklady (P1)–(P3). Pak úlohy (14) a (16) jsou vzájemně ekvivalentní a mají jediné řešení $w \in K$.*

Analogicky jako v předchozí kapitole lze i zde vyslovit obecnější tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení studované kontaktní úlohy v případě, že Youngův modul pružnosti E

a Poissonova konstanta ν jsou po částech kladné konstantní funkce a místo předpokladů (P2) a (P3) jsou splněny předpoklady (P2)* a (P3)* uvedené na straně 18.

Věta 3.2. *Nechť platí předpoklady (P1), (P2)* a (P3)*. Pak úlohy (14) a (16) jsou vzájemně ekvivalentní a mají jediné řešení $w \in K$.*

3.2. Kontaktní úloha s elasticky deformovatelným podložím

V případě deformovatelného podloží budeme uvažovat nejčastější a nejjednodušší model, což je tzv. Winklerův model podloží, viz např. [20] a [77]. Jedná se o jednoparametrický model, který lze znázornit jako soubor pružin samostatně působících na kontaktu nosníku a podloží. V tomto případě předpokládáme, že podloží je umístěno ve vzdálenosti $g \leq 0$ pod nosníkem. Je-li $g \equiv 0$, pak nosník na podloží leží. V porovnání s dokonale tuhým podložím však může v tomto případě dojít k zaboření nosníku do podloží, tedy $w(x) < g(x)$ v některých částech intervalu $(0, L)$. V takovém případě lze určit velikost reakce podloží vztahem

$$T(w) = kb(1 - \nu^2)(g - w)^+ \quad \text{v } (0, L),$$

kde $k > 0$ je modul pružnosti uvažovaného podloží a

$$(g(x) - w(x))^+ = \max\{0, g(x) - w(x)\}.$$

Toto vyjádření lze interpretovat jako podmínku normálové poddajnosti.

Kontaktní úloha Gaova nosníku a deformovatelného podloží je pak dána rovnicí

$$EI w^{IV} - 3Etb(1 - \nu^2)(w')^2 w'' + P(1 - \nu^2)w'' = (1 - \nu^2)q + T(w) \quad \text{v } (0, L)$$

společně s okrajovými podmínkami (B1), (B2), (B3) nebo (B4) definovanými na straně 15. Řešení této úlohy lze najít např. v článkách [30] a [46]. Příslušná variační formulace je ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) - \kappa(w, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (17)$$

kde $a(w, v)$, $\pi(w, v)$ a $\mathcal{L}(v)$ jsou definovány v (7), kontaktní člen κ je definován vztahem

$$\kappa(w, v) = \int_0^L kb(1 - \nu^2)(g - w)^+ v \, dx \quad (18)$$

a V je prostor přípustných posunutí. I zde v případě potřeby odlišit úlohy s ohledem na uvažované okrajové podmínky budeme používat odpovídající značení prostoru V_i , $i = 1, \dots, 4$, viz str. 15.

Úlohu (17) lze opět ekvivalentně vyjádřit jako minimalizaci funkcionálu celkové potenciální energie

$$\text{Najít } w \in V : \quad \Pi(w) = \min_{v \in V} \Pi(v), \quad (19)$$

přičemž funkcionál $\Pi(v)$ je dán ve tvaru součtu

$$\Pi(v) = \Pi_G(v) + \Pi_F(v), \quad (20)$$

kde $\Pi_G(v)$ je definovaný vztahem (9) a

$$\Pi_F(v) = \frac{1}{2} \kappa(v, v).$$

Je zřejmé, že funkcionál $\Pi_F(v)$ je nezáporný, konvexní a spojitý. Proto lze s využitím předpokladů (P1)–(P3) uvedených na straně 16 zformulovat následující větu, viz [48].

Věta 3.3. *Nechť platí předpoklady (P1)–(P3) a $k > 0$. Pak jsou úlohy (17) a (19) vzájemně ekvivalentní a mají jediné řešení $w \in V$.*

Kontaktní úlohu pro nelineární Gaův nosník s deformovatelným podložím je možné zobecnit i pro případ, kdy uvažujeme, že modul pružnosti podloží k je dán jako kladná po částech konstantní funkce. Existence jediného řešení úlohy (17) je tedy zajištěna i v tomto případě.

Věta 3.4. *Nechť platí předpoklady (P1)–(P3) a k je po částech kladná konstantní funkce. Pak úlohy (17) a (19) jsou vzájemně ekvivalentní a mají jediné řešení $w \in V$.*

Protože uvažujeme kontaktní úlohu, tak bychom Eulerovu kritickou sílu P_{cr}^E , zmíněnou v předpokladu (P3) a definovanou vztahem (11), měli doplnit členem představujícím vliv deformovatelného podloží. Tedy konkrétně bychom měli uvažovat

$$\hat{P}_{cr}^E = \min_{v \in V} \frac{\int_0^L E I (v'')^2 dx + \int_{\gamma_C} k b (g - v)^2 dx}{\int_0^L (v')^2 dx},$$

kde $\gamma_C \subset \langle 0, L \rangle$ představuje kontaktní zónu, kterou ovšem předem neznáme. Je zřejmé, že $P_{cr}^E \leq \hat{P}_{cr}^E$. Analogickým způsobem bychom měli tedy definovat i hodnotu kritické síly pro nelineární Gaův nosník, tedy

$$\hat{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} \hat{P}_{cr}^E = \min_{v \in V} \frac{\int_0^L E I (v'')^2 dx + \int_{\gamma_C} k b (1 - \nu^2) (g - v)^2 dx}{\int_0^L (1 - \nu^2) (v')^2 dx}.$$

S ohledem na neznámou kontaktní zónu γ_C je zřejmé, že se hodnota kritické síly Gaova nosníku bude nacházet v intervalu (\bar{P}, \hat{P}) . A protože velikost kontaktní zóny γ_C nelze předem určit, budeme v předpokladu (P3) uvažovat jako horní mez axiální síly hodnotu \bar{P} .

4. Identifikace neznámých parametrů

Úloha identifikace neznámých parametrů spadá do obecnější oblasti inverzních úloh, které mají široké uplatnění nejen v matematice, ale i ve strojírenství, přírodních vědách, zdravotnictví a v mnoha dalších odvětvích. Obecně inverzní úlohou rozumíme proces, kdy na základě znalosti jistých pozorování, získaných například měřeními, chceme najít odpovídající hodnoty vstupních parametrů uvažovaného modelu. V této práci se zaměříme na identifikaci materiálových parametrů Gaova nosníku a v případě kontaktní úlohy s deformovatelným podložím na identifikaci modulu pružnosti podloží. Uvažovat budeme nejprve úlohu ohybu a poté kontaktní úlohy s dokonale tuhým i deformovatelným podložím. K řešení bude použita metoda optimálního řízení.

4.1. Identifikace neznámých parametrů v úloze ohybu nosníku

Nejprve se budeme zabývat úlohou identifikace neznámých materiálových parametrů v úloze ohybu nelineárního Gaova nosníku, konkrétně Youngova modulu E a Poissonovy konstanty ν . Jak již bylo zmíněno, použijeme metodu optimálního řízení, přičemž E a ν budou hrát roli řídicí proměnných. Předpokládejme tedy, že interval $(0, L)$ je rozdělen na r otevřených vzájemně disjunktních podintervalů $K_i, i = 1, \dots, r$, tedy $K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$ a $\langle 0, L \rangle = \bigcup_{i=1}^r \overline{K_i}$.

Poznámka 4.1. Pro zjednodušení zápisu budeme dále dvojici materiálových parametrů (E, ν) značit jako parametr $p := (E, \nu)$.

Pro další účely definujme množinu přípustných hodnot pro řídicí proměnnou $p = (E, \nu)$ vztahem

$$U_{ad} := \{p = (E, \nu) \mid p \in L^\infty((0, L)) \times L^\infty((0, L)) : 0 < E_{\min} \leq E \leq E_{\max} < \infty \text{ v } (0, L), \\ 0 \leq \nu \leq 0.5 \text{ v } (0, L), p|_{K_i} \in P_0(K_i) \times P_0(K_i), i = 1, \dots, r\}, \quad (21)$$

kde $E_{\min} < E_{\max}$ jsou dané konstanty a $P_0(K_i)$ je množina po částech konstantních funkcí na K_i . Je tedy zřejmé, že U_{ad} je uzavřená konvexní množina dvojic funkcí, které jsou na daném dělení intervalu $(0, L)$ po částech konstantní. Abychom zdůraznili, že je Gaův model nosníku parametrizován hodnotou parametru $p \in U_{ad}$, budeme v dalším textu formy

definované v (7) značit symboly a_p , π_p a \mathcal{L}_p . Příslušná stavová úloha je tedy tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w(p) \in V \text{ takové, že} \\ a_p(w, v) + \pi_p(w, v) = \mathcal{L}_p(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (22)$$

S ohledem na zobecnění uvedené v závěru Kapitoly 2 lze tvrdit, že existence jediného řešení stavové úlohy (22) je splněna za platnosti předpokladů

(P1) $q \in L^2((0, L))$,

(P2)' t, b jsou kladné konstanty,

(P3)' $P < \bar{P}_{min}$, kde $\bar{P}_{min} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(1 - \nu_{min}^2)(\mathcal{K} \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}$,

kde $\nu_{min} = 0$ je minimální přípustná hodnota Poissonovy konstanty ν . Poznamenejme, že

$$\bar{P}_{min} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2} \leq \frac{\pi^2 E I}{(1 - \nu^2)(\mathcal{K} \cdot L)^2} \quad \forall (E, \nu) \in U_{ad},$$

kde konstanta \mathcal{K} je daná v Tabulce 1 podle typu uvažovaných okrajových podmínek (B1), (B2), (B3) nebo (B4). Lze tedy zformulovat následující větu.

Věta 4.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)', pak má úloha (22) jediné řešení pro libovolné $p \in U_{ad}$.*

Nyní můžeme přikročit k formulaci úlohy identifikace, která má podobu úlohy optimálního řízení, viz např. [15], [73]:

$$\begin{cases} \text{Najít } p^* \in U_{ad} \text{ takové, že} \\ J(w(p^*)) = \min_{p \in U_{ad}} J(w(p)), \\ \text{kde } w(p) \text{ je řešením stavové úlohy (22)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál.} \end{cases} \quad (23)$$

Je-li p^* řešením identifikačního problému (23) a $w^* := w(p^*)$ řeší stavový problém (22) pro dané p^* , pak (p^*, w^*) nazýváme *optimální dvojice* úlohy (23). Pro další účely budeme potřebovat zavést pojem konvergence v přípustné množině U_{ad} . Budeme chtít ukázat, že

řešení úlohy (22) závisí spojitě na p . Je zřejmé, že prvky $p \in U_{ad}$ jsou po částech konstantní vektorové funkce na dělení intervalu $(0, L)$. Lze je tedy psát jako vektor $p = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{R}^{2r}$, kde $p_i = p|_{K_i} = (E_i, \nu_i)$, $i = 1, \dots, r$ (pro zjednodušení zápisu budeme používat stejný symbol pro vektor $p \in \mathbb{R}^{2r}$ a funkci $p \in U_{ad}$). Podobně, pro $p_n \in U_{ad}$ je $p_n = (p_{n1}, \dots, p_{nr}) \in \mathbb{R}^{2r}$, kde $p_{ni} = p|_{K_i} = (E_i, \nu_i)$, $i = 1, \dots, r$. Konvergencí v přípustné množině U_{ad} budeme rozumět konvergenci složek vektorů posloupnosti $\{p_n\}$, tedy:

$$\begin{aligned} p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p &\stackrel{\text{def}}{\iff} (E_{ni} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_i) \wedge (\nu_{ni} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_i) \forall i = 1, \dots, r \iff \\ &\iff \|p_n - p\|_{(L^\infty((0,L)))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Přípustná množina U_{ad} je ohraničená a uzavřená podmnožina \mathbb{R}^{2r} , tedy U_{ad} je kompaktní množina.

Poznamenejme ještě pro úplnost, že pro $p_n \in U_{ad}$ uvažujeme stavovou úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p_n \in U_{ad} \\ \text{najít } w(p_n) \in V \text{ takové, že} \\ a_{p_n}(w, v) + \pi_{p_n}(w, v) = \mathcal{L}_{p_n}(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (25)$$

Spojité závislosti řešení $w(p)$ stavové úlohy (22) na materiálovém parametru $p \in U_{ad}$ pro volbu okrajových podmínek (B1), a tedy prostor V_1 , je dokázána v následujícím lemmatu, viz [60]. Pro zbývající typy okrajových podmínek (B2), (B3) a (B4) je tvrzení lemmatu dokázáno v Dodatku 9, viz Lemma 9.1.

Lemma 4.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)' a dále necht $p_n \in U_{ad}$, $n = 1, 2, \dots$ a $p \in U_{ad}$ jsou takové, že*

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \quad v \in (L^\infty((0, L)))^2.$$

Pak

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(p) \in V_1,$$

kde $w_n := w(p_n)$, resp. $w(p)$, je řešením úlohy (25), resp. (22).

Důkaz. Nejprve ukážeme, že posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená ve V_1 . Necht tedy $w_n \in V_1$ je řešením úlohy (25), pak platí

$$a_{p_n}(w_n, v) + \pi_{p_n}(w_n, v) = \mathcal{L}_{p_n}(v), \quad \forall v \in V_1. \quad (26)$$

Položme $v = w_n$, pak z (26) dostaneme

$$a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w_n) = \mathcal{L}_{p_n}(w_n). \quad (27)$$

Dále je z definice (21) přípustné množiny U_{ad} zřejmé, že

$$0 < 1 - \nu_n^2 \leq 1, \quad (28)$$

neboť $0 \leq \nu_n \leq 0.5$. Tedy platí

$$\pi_{p_n}(w_n, w_n) = tb \int_0^L E_n (1 - \nu_n^2) (w'_n)^4 dx \geq 0, \quad \forall p_n = (E_n, \nu_n) \in U_{ad}. \quad (29)$$

Dále budeme chtít odhadnout bilineární formu

$$a_{p_n}(w_n, w_n) = \int_0^L E_n I(w''_n)^2 dx - \int_0^L P(1 - \nu_n^2)(w'_n)^2 dx.$$

Je zřejmé, že $H_0^2((0, L)) \subset V_1 \subset H^2((0, L))$ a platí, že Sobolevův prostor $H^k((0, L))$, $k = 1, 2, \dots$, je spojitě vnořený do prostoru spojitých funkcí $C^{k-1}(\langle 0, L \rangle)$, viz [1], [42]. Tedy

$$\exists c > 0 : \max_{x \in (0, L)} |v'(x)| \geq c \|v\|_2 \quad \forall v \in H^2((0, L)),$$

kde $\|\cdot\|_k$, $k = 0, 1, \dots$, značí normu v prostoru $H^k((0, L))$. Dále také použijeme nerovnost

$$\exists \bar{c} > 0 : \|v''(x)\|_0^2 \geq \bar{c} \|v\|_2^2 \quad \forall v \in V_1, \quad (30)$$

dokázanou v Dodatku 9, viz (181).

Nechť $P \geq 0$, pak z (28) a (179) dostáváme pro člen s axiální silou

$$\int_0^L P(1 - \nu_n^2)(w'_n(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L P(1 - \nu_n^2)(w''_n(x))^2 dx. \quad (31)$$

Celkem tedy můžeme s využitím (29), (31) a (30) psát

$$\begin{aligned} a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w_n) &= \int_0^L E_n I(w''_n)^2 dx - \int_0^L P(1 - \nu_n^2)(w'_n)^2 dx + \\ &+ tb \int_0^L E_n (1 - \nu_n^2)(w'_n)^4 dx \geq \int_0^L E_n I(w''_n)^2 dx - P \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w''_n)^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L E_{\min} I(w''_n)^2 dx - P \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w''_n)^2 dx = c_1 \|w''_n\|_0^2 \geq \bar{c} c_1 \|w_n\|_{V_1}^2, \end{aligned} \quad (32)$$

přičemž $c_1 := E_{\min}I - P\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 1$. Pokud je axiální síla $P < 0$, pak (32) platí triviálně a $c_1 = E_{\min}I$. Použitím Hölderovy nerovnosti a (28) dostaneme odhad pro pravou stranu rovnosti (27) ve tvaru

$$\mathcal{L}_{p_n}(w_n) = \int_0^L (1 - \nu_n^2) q w_n dx \leq \|q\|_{L^2((0,L))} \|w_n\|_{V_1}. \quad (33)$$

Z (32), (27) a (33) je zřejmé, že posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená ve V_1 . Existuje tedy vybraná podposloupnost, pro zjednodušení budeme značit stejně jako $\{w_n\}$, taková, že

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w \quad (\text{slabě}) \text{ ve } V_1. \quad (34)$$

Dále ukážeme, že w je řešením stavové úlohy (6). Nejprve dokážeme, že

$$\int_0^L E_n I w_n'' v'' dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^L E I w'' v'' dx, \quad (35)$$

$$\int_0^L E_n (1 - \nu_n^2) (w_n')^3 v' dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^L E (1 - \nu^2) (w')^3 v' dx, \quad (36)$$

$$\int_0^L P (1 - \nu_n^2) w_n' v' dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^L P (1 - \nu^2) w' v' dx. \quad (37)$$

Využitím (24), tedy $E_n \rightarrow E$ v $L^\infty((0, L))$ a (34) dostáváme platnost tvrzení (35):

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^L E_n I w_n'' v'' dx - \int_0^L E w'' v'' dx \right| = \\ & = \left| \int_0^L E_n I w_n'' v'' dx \pm \int_0^L E I w_n'' v'' dx - \int_0^L E I w'' v'' dx \right| \leq \\ & \leq \int_0^L |E_n - E| |I w_n'' v''| dx + \left| \int_0^L E I (w_n'' - w'') v'' dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Podobně s využitím (24), kompaktního vnoření Sobolevova prostoru $H^2((0, L))$ do prostoru spojitých funkcí $C^1((0, L))$, (34) a vzorce $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$ dostaneme platnost tvrzení (36):

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^L E_n(1 - \nu_n^2)(w'_n)^3 v' dx - \int_0^L E(1 - \nu^2)(w')^3 v' dx \right| = \\
& = \left| \int_0^L E_n(1 - \nu_n^2)(w'_n)^3 v' dx \pm \int_0^L E(1 - \nu^2)(w'_n)^3 v' dx - \int_0^L E(1 - \nu^2)(w')^3 v' dx \right| \leq \\
& \leq \int_0^L |(E_n - E) + (E\nu^2 - E_n\nu_n^2)| |(w'_n)^3 v'| dx + \\
& \quad + \left| \int_0^L E(1 - \nu^2) v' ((w'_n)^3 - (w')^3) dx \right| \leq \\
& \leq \left(\|E_n - E\|_{L^\infty((0,L))} + \|E\nu^2 - E_n\nu_n^2\|_{L^\infty((0,L))} \right) \|w_n\|_{C^1((0,L))}^3 \|v\|_{C^1((0,L))} + \\
& \quad + \|E(1 - \nu^2)\|_{L^\infty((0,L))} \|v\|_{C^1((0,L))} \|w_n - w\|_{C^1((0,L))} \\
& \qquad \qquad \qquad \|((w'_n)^2 + w'_n v' + (v')^2)\|_{C^1((0,L))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem lze dokázat i vztah (37). Celkem tedy pro $n \rightarrow \infty$ máme

$$\begin{aligned}
& \int_0^L E_n I w_n'' v'' dx + tb \int_0^L E_n(1 - \nu_n^2)(w'_n)^3 v' dx - \int_0^L P(1 - \nu_n^2)w'_n v' dx = \\
& = \int_0^L (1 - \nu_n^2) q v dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^L E I w'' v'' dx + tb \int_0^L E(1 - \nu^2)(w')^3 v' dx - \\
& - \int_0^L P(1 - \nu^2) w' v' dx = \int_0^L (1 - \nu^2) q v dx,
\end{aligned}$$

tedy, že w je řešením stavové úlohy (6). Protože existuje právě jedno řešení této úlohy, je zřejmé, že celá posloupnost $\{w_n\}$ konverguje slabě k $w \in V_1$.

Abychom dokázali silnou konvergenci posloupnosti $\{w_n\}$ k w , stačí dokázat, že

$$[[w_n]] \rightarrow [[w]] \quad \text{pro } n \rightarrow \infty \text{ ve } V_1,$$

kde

$$[[w]]^2 := \int_0^L E I (w'')^2 dx$$

je energetická norma prostoru V_1 a vzhledem k ní je tento prostor úplný. Pak

$$\begin{aligned}
[[w_n]]^2 &= \int_0^L EI(w_n'')^2 dx = \int_0^L (E - E_n)I(w_n'')^2 dx + \int_0^L E_n I(w_n'')^2 dx = \\
&= \int_0^L (E - E_n)I(w_n'')^2 dx + \int_0^L (1 - \nu_n^2) q w_n dx - tb \int_0^L E_n (1 - \nu_n^2) (w_n')^4 dx \\
&\quad + \int_0^L P(1 - \nu_n^2) (w_n')^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^L (1 - \nu^2) q w dx - tb \int_0^L E(1 - \nu^2) (w')^4 dx + \\
&\quad + \int_0^L P(1 - \nu^2) (w')^2 dx = \int_0^L EI(w'')^2 dx = [[w]]^2
\end{aligned}$$

a tedy posloupnost $\{w_n\}$ konverguje silně k w ve V_1 . \square

Dále dokážeme, že existuje alespoň jedno řešení uvažované identifikační úlohy (23). Přitom budeme předpokládat, že cenový funkcionál J je spojitý, tedy, že platí

$$w(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(p) \implies J(w(p_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J(w(p)). \quad (38)$$

Věta 4.2. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (21), necht jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)' a cenový funkcionál J splňuje (38). Pak identifikační úloha (23) má alespoň jedno řešení.*

Důkaz. Necht $\{p_n\}$, $p_n \in U_{ad}$ je minimalizující posloupnost funkcionálu J v přípustné množině U_{ad} , tj.

$$\mathcal{G} := \inf_{p \in U_{ad}} J(w(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(w(p_n)). \quad (39)$$

Protože je množina U_{ad} kompaktní, tak pro každou vybranou podposloupnost $\{p_n\}$ (pro zjednodušení je použito stejné značení) existuje takový prvek $p^* \in U_{ad}$, pro který platí

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p^* \quad \text{v } (L^\infty((0, L)))^2.$$

Z Lemmatu 4.1 dále plyne, že

$$w(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(p^*) \quad \text{ve } V_1.$$

Odtud a s využitím (38), (39) dostáváme

$$\mathcal{G} := \inf_{p \in U_{ad}} J(w(p)) = J(w(p^*)) \geq \mathcal{G},$$

tj. p^* je řešením úlohy (23). \square

Poznamenejme, že Věta 4.2 bude platit i pro zbývající tři typy okrajových podmínek s využitím Lemmatu 9.1 uvedeného a dokázaného v Dodatku 9.

Funkcionálů, které splňují podmínku (38), je celá řada. Takovým standardním příkladem funkcionálu je

$$J(w(p)) = \frac{1}{2} \|w(p) - z\|^2, \quad (40)$$

kde $w(p)$ je řešení stavové úlohy (22) pro dané $p \in U_{ad}$, z je daný průhyb nosníku a $\|\cdot\|$ značí normu prostoru V . Je zřejmé, že funkcionál J je spojitý jestliže například $z \in L^2((0, L))$ a $\|\cdot\|$ je $L^2((0, L))$ norma. V praktických aplikacích je většinou průhyb z dán v podobě diskrétních hodnot z_i získaných nejčastěji z experimentálního měření v bodech t_i . V takovém případě je cenový funkcionál dán ve tvaru

$$\hat{J}(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y(t_i) - z_i)^2, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)^\top \in \mathbb{R}^m, \quad (41)$$

kde $t_i \in (0, L)$, $i = 1, \dots, m$. Protože je prostor $H^2((0, L))$ kompaktně vnořen do prostoru spojitých funkcí $C^1((0, L))$, viz [1], je $y \in V$ spojitá funkce. Tedy funkcionál \hat{J} je spojitý.

4.2. Identifikace neznámých parametrů v kontaktní úloze nosníku s dokonale tuhým podložím

Nyní se budeme věnovat identifikaci neznámých materiálových parametrů Gaova nosníku v kontaktní úloze s dokonale tuhým podložím, přičemž nosník je umístěným ve vzdálenosti g nad podložím. I v tomto případě předpokládáme, že je interval $(0, L)$ rozdělen na r otevřených, vzájemně disjunktních segmentů K_i , $i = 1, \dots, r$, tedy $K_i \cap K_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ a $\langle 0, L \rangle = \bigcup_{i=1}^r \overline{K_i}$.

Podobně jako v předchozím budeme i zde pro dvojici materiálových parametrů, Youngova modulu E a Poissonovy konstanty ν , používat jednodušší označení $p := (E, \nu)$. Analogicky je definována i množina přípustných hodnot

$$U_{ad} = \{p := (E, \nu) \mid p \in L^\infty((0, L)) \times L^\infty((0, L)) : 0 < E_{\min} \leq E \leq E_{\max} < \infty \text{ v } (0, L), \\ 0 \leq \nu \leq 0.5 \text{ v } (0, L), p|_{K_i} \in P_0(K_i) \times P_0(K_i), i = 1, \dots, r\}, \quad (42)$$

kde $E_{\min} < E_{\max}$ jsou dané konstanty a $P_0(K_i)$ je množina po částech konstantních funkcí na jednotlivých segmentech nosníku K_i . I zde budeme parametrizaci nosníku parametrem

p zdůrazňovat použitím dolního indexu u příslušných forem. Tedy stavová úloha pro nelineární Gaův nosník s dokonale tuhým podlořím je tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w(p) \in K \text{ takové, ře} \\ a_p(w, v - w) + \pi_p(w, v - w) \geq \mathcal{L}_p(v - w), \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (43)$$

kde

$$K = \{v \in V : v \geq g \text{ na } (0, L)\}. \quad (44)$$

S ohledem na výsledky předchozích kapitol je zřejmé, ře předpoklady (P1), (P2)' a (P3)' uvedené na straně 25 zajiřtují existenci jediného řešení a lze tedy zformulovat následující větu.

Věta 4.3. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)', pak má úloha (43) jedině řešení pro libovolné $p \in U_{ad}$.*

Nyní můžeme přikročit k formulaci úlohy identifikace pro kontaktní úlohu s dokonale tuhým podlořím, která má i v tomto případě podobu úlohy optimálního řízení:

$$\begin{cases} \text{Najít } p^* \in U_{ad}, \text{ takové, ře} \\ J(w(p^*)) = \min_{p \in U_{ad}} J(w(p)), \\ \text{kde } w(p) \text{ je řešením stavové úlohy (43)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (45)$$

Analogicky jako v předchozí podkapitole i zde používáme pro (p^*, w^*) pojem *optimální dvojice* úlohy (45), je-li p^* řešením úlohy (45) a $w^* := w(p^*)$ řeší stavový problém (43) pro dané p^* . I v tomto případě jsou prvky $p \in U_{ad}$ po částech konstantní vektorové funkce na dělení intervalu $(0, L)$. Lze je tedy opět psát jako vektor $p = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{R}^{2r}$, kde $p_i = p|_{K_i} = (E_i, \nu_i)$, $i = 1, \dots, r$. Podobně, pro $p_n \in U_{ad}$ je $p_n = (p_{n1}, \dots, p_{nr}) \in \mathbb{R}^{2r}$, kde $p_{ni} = p_n|_{K_i} = (E_i, \nu_i)$, $i = 1, \dots, r$. A analogicky, konvergencí v přípustné množině U_{ad} budeme rozumět konvergenci složek vektorů posloupnosti $\{p_n\}$, tedy:

$$\begin{aligned} p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p &\stackrel{\text{def}}{\iff} (E_{ni} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E_i) \wedge (\nu_{ni} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu_i) \forall i = 1, \dots, r \iff \\ &\iff \|p_n - p\|_{(L^\infty((0, L)))^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Dále ukážeme, že řešení $w(p)$ stavové úlohy (43) spojitě závisí na materiálovém parametru $p \in U_{ad}$, nyní pro volbu okrajových podmínek (B2), a tedy prostor V_2 , viz [62]. Pro zbývající typy okrajových podmínek (B1), (B3) a (B4) lze spojitou závislost samozřejmě dokázat také, viz Dodatek 9, Lemma 9.2.

Připomeňme, že přípustná množina U_{ad} je ohraničená a uzavřená podmnožina \mathbb{R}^{2r} , tedy je to kompaktní množina. Pro úplnost si ještě také uvedeme stavovou úlohu pro $p_n \in U_{ad}$:

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p_n \in U_{ad} \\ \text{najít } w(p_n) \in K \text{ takové, že} \\ a_{p_n}(w, v - w) + \pi_{p_n}(w, v - w) \geq \mathcal{L}_{p_n}(v - w), \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (47)$$

kde K je daná vztahem (44). Nyní již můžeme přistoupit k formulaci spojitě závislosti.

Lemma 4.2. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)'. Dále necht' $p_n \in U_{ad}$, $n = 1, 2, \dots$ a $p \in U_{ad}$ jsou takové, že*

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \text{ v } (L^\infty((0, L)))^2.$$

Pak

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(p) \in V_2,$$

kde $w_n := w(p_n)$, resp. $w(p)$, je řešení úlohy (47), resp. (43).

Důkaz. Důkaz tohoto lemmatu je veden obdobně jako důkaz Lemmatu 4.1 v odstavci 4.1. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená ve V_2 . Z (43) víme, že

$$a_{p_n}(w_n, v - w_n) + \pi_{p_n}(w_n, v - w_n) \geq \mathcal{L}_{p_n}(v - w_n) \quad \forall v \in K. \quad (48)$$

Protože $g < 0$ na $\langle 0, L \rangle$, je zřejmé, že $0 \in K$. Dosadíme-li za $v = 0$ do vztahu (48) obdržíme následující nerovnost

$$a_{p_n}(w_n, w_n) \leq a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w_n) \leq \mathcal{L}_{p_n}(w_n), \quad (49)$$

kde jsme využili toho, že

$$\pi_{p_n}(w_n, w_n) = \int_0^L E_n t b (1 - \nu_n^2) (w_n')^4 dx \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogicky jako v důkazu Lemmatu 4.1 získáme následující odhady. Necht $P \geq 0$, pak s ohledem na (184) a (181) dostaneme

$$\begin{aligned} a_{p_n}(w_n, w_n) &= \int_0^L E_n I (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu_n^2) (w_n')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L E_{\min} I (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = \\ &= c_2 \|w_n''\|_0^2 \geq \bar{c} c_2 \|w_n\|_{V_2}^2, \end{aligned} \quad (50)$$

kde $c_2 = E_{\min} I - P \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 0.5$ a $\bar{c} > 0$ je konstanta z nerovnosti (181). V případě záporné axiální síly $P < 0$, platí výše uvedený odhad automaticky, přičemž $c_2 = E_{\min} I > 0$. Dále z (49), (50) a odhadu

$$\mathcal{L}_{p_n}(w_n) = \int_0^L (1 - \nu_n^2) q w_n dx \leq \|q\|_{L^2((0,L))} \|w_n\|_{V_2}$$

plyne, že posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená v prostoru V_2 . Lze z ní tedy vybrat podposloupnost (opět pro jednoduchost značíme stejně) takovou, že

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w \quad (\text{slabě}) \quad \text{ve } V_2. \quad (51)$$

Dále ukážeme, že w je řešením úlohy (43). Je zřejmé, že konvexní a uzavřená množina K je slabě uzavřená a tedy $w \in K$. Podobně jako v důkazu Lemmatu 4.1 lze ukázat, že pro každé $v \in K$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_n}(w_n, v) = a_p(w, v), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{p_n}(w_n, v) = \pi_p(w, v) \quad (52)$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{p_n}(v) = \mathcal{L}_p(v). \quad (53)$$

Z (46) a (51) plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{p_n}(w_n) = \mathcal{L}_p(w). \quad (54)$$

Dále platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_{p_n}(w_n, w_n) \geq a_p(w, w), \quad (55)$$

neboť

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{p_n}(w_n, w_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_{p_n}(w_n, w_n) \pm a_p(w_n, w_n)) \geq \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_{p_n}(w_n, w_n) - a_p(w_n, w_n)) + \liminf_{n \rightarrow \infty} a_p(w_n, w_n) \geq a_p(w, w). \end{aligned}$$

Zde jsme využili jednak toho, že symetrická, V -eliptická bilineární forma a_p je slabě zdola polospojité ve V_2 a dále pak, že z (46) a (51) plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{p_n}(w_n, w_n) - a_p(w_n, w_n)) = 0.$$

Nyní dokážeme, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{p_n}(w_n, w_n) = \pi_p(w, w). \quad (56)$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} |\pi_{p_n}(w_n, w_n) - \pi_p(w, w)| &= \left| \int_0^L E_n t b (1 - \nu_n^2) (w'_n)^4 dx - \int_0^L E t b (1 - \nu^2) (w')^4 dx \right| = \\ &= \left| \int_0^L E_n t b (1 - \nu_n^2) (w'_n)^4 dx \pm \int_0^L E t b (1 - \nu^2) (w'_n)^4 dx - \int_0^L E t b (1 - \nu^2) (w')^4 dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^L (E_n (1 - \nu_n^2) - E (1 - \nu^2)) t b (w'_n)^4 dx \right| + \left| \int_0^L E t b (1 - \nu^2) ((w'_n)^4 - (w')^4) dx \right| \leq \\ &\leq c \left(\|E_n - E\|_{L^\infty((0,L))} + \|E\nu^2 - E_n\nu_n^2\|_{L^\infty((0,L))} \right) \|t b\|_{C^1((0,L))}^4 + \\ &\quad + \int_0^L |E t b (1 - \nu^2)| |(w'_n)^4 - (w')^4| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

kde $c > 0$ je konstanta, kterou dostáváme užitím (46), (51), algebraického a topologického vnoření prostoru $H^2((0, L))$ do prostoru $C^1((0, L))$ a Lebesgueovy věty. Ze stavové úlohy (47) dále plyne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{p_n}(w_n, v - w_n) + \pi_{p_n}(w_n, v - w_n)) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{p_n}(v - w_n) \quad \forall v \in K. \quad (57)$$

Dále z (53) a (54) dostáváme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{p_n}(v - w_n) = \mathcal{L}_p(v - w). \quad (58)$$

Pro levou stranu nerovnosti (57) dostaneme užitím (52), (55) a (56) následující odhad

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{p_n}(w_n, v - w_n) + \pi_{p_n}(w_n, v - w_n)) &\leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{p_n}(w_n, v - w_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \pi_{p_n}(w_n, v - w_n) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{p_n}(w_n, v) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_{p_n}(w_n, w_n)) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \pi_{p_n}(w_n, v) + \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} (-\pi_{p_n}(w_n, w_n)) = a_p(w, v) - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_p(w, v - w) \leq \\ &\leq a_p(w, v - w) + \pi_p(w, v - w). \end{aligned} \quad (59)$$

Z (58) a (59) dále plyne, že $w \in K$ splňuje nerovnost

$$a_p(w, v - w) + \pi_p(w, v - w) \geq \mathcal{L}_p(v - w), \quad \forall v \in K,$$

tedy, že w je řešením stavové úlohy (43). Protože tato úloha má jediné řešení, je zřejmé, že celá podposloupnost $\{w_n\}$ slabě konverguje k w v prostoru V_2 .

K důkazu silné konvergence posloupnosti $\{w_n\}$ k w ve V_2 stačí dokázat, že

$$[[w_n - w]]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

kde

$$[[w]]^2 := a_p(w, w)$$

je energetická norma prostoru V_2 . Vzhledem k ní je tento prostor úplný. Pak lze psát

$$\begin{aligned} 0 &\leq [[w_n - w]]^2 = a_p(w_n - w, w_n - w) = \\ &= a_p(w_n - w, w_n - w) - a_{p_n}(w_n - w, w_n - w) + a_{p_n}(w_n, w_n - w) - a_{p_n}(w, w_n - w) \leq \\ &\leq a_p(w_n - w, w_n - w) - a_{p_n}(w_n - w, w_n - w) - \mathcal{L}_{p_n}(w - w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w - w_n) - \\ &\quad - a_{p_n}(w, w_n - w) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

kde jsme použili $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(p) \in V_2$, $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ v $(L^\infty((0, L)))^2$ a (48) a (52). \square

I v tomto případě lze dokázat, že pro identifikační úlohu (45) existuje alespoň jedno řešení.

Věta 4.4. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (42). Nechť platí předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a cenový funkcionál J splňuje (38). Pak identifikační úloha (45) má alespoň jedno řešení.*

Důkaz. Nechť $\{p_n\}$, $p_n \in U_{ad}$ je minimalizující posloupnost J v přípustné množině U_{ad} :

$$\mathcal{G} := \inf_{p \in U_{ad}} J(w(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(w(p_n)). \quad (60)$$

Protože je množina U_{ad} kompaktní, tak pro každou podposloupnost $\{p_n\}$ (pro jednoduchost používáme stejné značení) existuje prvek $p^* \in U_{ad}$, takový, že

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p^* \quad \text{v } (L^\infty((0, L)))^2.$$

Z Lemmatu 4.2 dále plyne, že

$$w(p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w(p^*) \quad \text{ve } V_2.$$

Odtud a užitím (38), (60) dále plyne, že

$$\mathcal{G} := \inf_{p \in U_{ad}} J(w(p)) = J(w(p^*)) \geq \mathcal{G},$$

a tedy p^* je řešením úlohy (45). □

4.3. Identifikace neznámých parametrů v kontaktní úloze nosníku s elasticky deformovatelným podložím

V tomto odstavci se budeme zabývat identifikací neznámých parametrů v kontaktní úloze nelineárního Gaova nosníku s elasticky deformovatelným podložím. V tomto případě je možné uvažovat dvě úlohy identifikace, a to identifikaci neznámých materiálových parametrů Gaova nosníku nebo identifikaci koeficientu tuhosti podloží. Vzhledem k tomu, že, že jsme identifikaci neznámých parametrů nosníku řešili již v předchozích dvou odstavcích, zaměříme se nyní pouze na úlohu identifikace koeficientu tuhosti podloží. Předpokládejme dále, že Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta ν jsou konstantní na celém intervalu $\langle 0, L \rangle$ a že koeficient tuhosti podloží je po částech konstantní funkce na daném dělení intervalu. Konkrétně uvažujme, že je interval $\langle 0, L \rangle$ rozdělen na s otevřených, vzájemně disjunktních segmentů F_i , $i = 1, \dots, s$ tj. $F_i \cap F_j = \emptyset, \forall i \neq j$ a $\langle 0, L \rangle = \bigcup_{i=1}^s \overline{F_i}$.

Přípustná množina U_{ad} je definovaná vztahem

$$U_{ad} = \{k \in L^\infty((0, L)) : 0 < k_{\min} \leq k \leq k_{\max} < \infty \text{ v } (0, L), k|_{F_i} \in P_0(F_i), i = 1, \dots, s\}, \quad (61)$$

kde k_{\min} , k_{\max} jsou dané konstanty a $P_0(F_i)$ je množina po částech konstantních funkcí na F_i . Stavovou úlohu nyní budeme parametrizovat parametrem $k \in U_{ad}$, což zdůrazníme dolním indexem u příslušné formy, tedy κ_k . Stavová úloha je tedy tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } k \in U_{ad} \\ \text{najít } w(k) \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) - \kappa_k(w, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (62)$$

S ohledem na výsledky odstavce 3.2 lze zformulovat následující tvrzení.

Věta 4.5. *Nechť platí předpoklady (P1)–(P3), pak má úloha (62) jediné řešení pro libovolný parametr $k \in U_{ad}$.*

Nyní můžeme zformulovat úlohu identifikace koeficientu tuhosti podloží uvažované kontaktní úlohy:

$$\begin{cases} \text{Najít } k^* \in U_{ad} \text{ takové, že} \\ J(w(k^*)) = \min_{k \in U_{ad}} J(w(k)), \\ \text{kde } w(k) \text{ je řešením stavové úlohy (62)} \\ \text{a } J : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcional daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (63)$$

Je-li k^* řešením úlohy (63) a $w^* := w(k^*)$ řeší stavový problém (62), pak (k^*, w^*) nazýváme *optimální dvojice* úlohy (63). Obdobně jako v předchozích odstavcích lze i v tomto případě každou funkci $k \in U_{ad}$ psát jako vektor $k = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{R}^s$, $k_i = k|_{F_i}$, $i = 1, \dots, s$. Konvergenci v přípustné množině U_{ad} definujeme také obdobně:

$$k_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} k \stackrel{\text{def.}}{\iff} (k_{ni} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} k_i) \forall i = 1, \dots, s \iff \|k_n - k\|_{L^\infty((0,L))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (64)$$

kde $k_n = (k_{n1}, \dots, k_{ns}) \in \mathbb{R}^s$, $k_{ni} = k_n|_{F_i}$, $i = 1, \dots, s$. Dále ukážeme, že řešení $w(k)$ stavové úlohy (62) spojitě závisí na koeficientu tuhosti podloží $k \in U_{ad}$, a to opět pro volbu okrajových podmínek (B2). Pro zbývající typy okrajových podmínek (B1), (B3) a (B4) lze spojitou závislost samozřejmě dokázat také, viz Dodatek 9, Lemma 9.3.

Je zřejmé, že U_{ad} je opět ohraničená a uzavřená podmnožina v \mathbb{R}^s , tedy je kompaktní. Pro úplnost ještě zformulujme stavovou úlohu pro $k_n \in U_{ad}$:

$$\begin{cases} \text{Pro dané } k_n \in U_{ad} \\ \text{najít } w(k_n) \in V_2 \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) - \kappa_{k_n}(w, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V_2. \end{cases} \quad (65)$$

Nyní již můžeme přistoupit k formulaci spojitě závislosti.

Lemma 4.3. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Dále necht $k_n \in U_{ad}$, $n = 1, 2, \dots$ a $k \in U_{ad}$ jsou takové, že*

$$k_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} k \text{ v } L^\infty((0, L)). \quad (66)$$

Pak

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w(k) \in V_2,$$

kde $w_n := w(k_n)$, resp. $w(k)$, je řešení úlohy (65), resp. (62).

Důkaz. Důkaz tohoto lemmatu lze provést analogicky jako důkazy Lemmat 4.1 a 4.2. Proto uvedeme pouze stěžejní části důkazu. Nejprve je třeba dokázat, že posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená ve V_2 . Ze stavové úlohy (65) plyne

$$a(w_n, w_n) + \pi(w_n, w_n) - \kappa_{k_n}(w_n, w_n) = \mathcal{L}(w_n). \quad (67)$$

Přitom analogicky jako v Lemmatu 4.2. lze v případě, že $P \geq 0$ s ohledem na (184) psát

$$\begin{aligned} a(w_n, w_n) &= \int_0^L E I (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu^2) (w_n')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L E I (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = \\ &= c_2 |w_n|_{V_2}^2 \geq \bar{c} c_2 \|w_n\|_{V_2}^2, \end{aligned} \quad (68)$$

kde $c_2 = EI - P \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 0.5$ a $\bar{c} > 0$ je konstanta z nerovnosti (181). V případě záporné axiální síly $P < 0$, platí výše uvedený odhad automaticky, přičemž $c_2 = E_{\min} I > 0$. Dále lze dokázat, že $\pi(w_n, w_n) \geq 0$ a $\kappa_{k_n}(w_n, w_n) \leq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, přičemž jsme využili toho, že $g < 0$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$. Odtud, z (33), (68) a (67) dostáváme:

$$\begin{aligned} \bar{c} c_2 \|w_n\|_{V_2}^2 &\leq a(w_n, w_n) \leq \\ &\leq a(w_n, w_n) + \pi(w_n, w_n) - \kappa_{k_n}(w_n, w_n) = \mathcal{L}(w_n) \leq \|q\|_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$

Tedy posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená ve V_2 , tudíž existuje její podposloupnost $\{w_n\}$ (pro přehlednost značíme stejným symbolem) a prvek $w \in V_2$ takový, že

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w \text{ ve } V_2. \quad (69)$$

Abychom dále dokázali, že w je řešením stavové úlohy (62) je potřeba dokázat, že

$$\kappa_{k_n}(w_n, v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \kappa_k(w, v) \quad \forall v \in V_2. \quad (70)$$

To je důsledkem (64), (69) a Lebesgueovy věty. Limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ v (65), užitím (52) a (70) dostaneme, že $w = w(k)$ je řešením úlohy (62) a že nejen podposloupnost, ale i celá posloupnost $\{w_n\}$, konverguje slabě k w . Silnou konvergenci $\{w_n\}$ k w ve V_2 lze dokázat analogicky jako v důkazu Lemmatu 4.1. \square

Jako důsledek právě dokázaného lemmatu dostáváme následující existenční větu.

Věta 4.6. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (61). Nechť platí předpoklady (P1)–(P3) a cenový funkcionál J splňuje (38). Pak identifikační úloha (63) má alespoň jedno řešení.*

Důkaz. Důkaz lze provést analogicky jako důkaz Věty 4.2 resp. 4.4. □

5. Diskretizace a konvergenční analýza

Úlohy identifikace neznámých parametrů, které jsme zformulovali v předchozí kapitole, nelze exaktně vyřešit. Proto použijeme aproximaci úlohy metodou konečných prvků. Uvažujme, že je dáno ekvidistantní dělení

$$D_h : 0 = x_0^{(t)} < x_1^{(t)} < \dots < x_t^{(t)} = L,$$

intervalu $\langle 0, L \rangle$ na t podintervalů $\mathcal{I}_j = \langle x_{j-1}^{(t)}, x_j^{(t)} \rangle$ délky $h_j = x_j^{(t)} - x_{j-1}^{(t)}$, $j = 1, \dots, t$ a necht $h := \max_{j=1, \dots, t} \{h_j\}$. Předpokládejme také, že dělení D_h je konzistentní s dělením nosníku $\{K_i\}$ nebo podloží $\{F_i\}$ pro libovolné $h > 0$. Tedy, že hranice K_i , $i = 1, \dots, r$ a F_i , $i = 1, \dots, s$ patří do D_h pro každé $h > 0$. Dále předpokládejme, že existuje konstanta $\beta > 0$, která nezávisí na diskretizačním parametru h , taková, že $h/h_j \leq \beta$, $j = 1, \dots, t$. Dále definujme diskrétní prostory

$$V_h^1 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h(L) = 0\},$$

$$V_h^2 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h'(0) = v_h(L) = v_h'(L) = 0\},$$

$$V_h^3 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h'(0) = v_h(L) = 0\},$$

$$V_h^4 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h'(0) = 0\},$$

kde $P_3(\mathcal{I}_j)$ je prostor kubických polynomů definovaných na \mathcal{I}_j , $j = 1, \dots, t$. Přitom je $V_h^i \subset V_i$ pro $i = 1, \dots, 4$. Pro libovolné $h > 0$ dále platí

$$\dim V_h^1 = 2t, \quad \dim V_h^2 = 2(t-1), \quad \dim V_h^3 = 2t-1, \quad \dim V_h^4 = 2t.$$

V případech, kdy nebudou okrajové podmínky jasně specifikovány, budeme používat jednotné označení $V_h \subset V$ a $\dim V_h = N$.

5.1. Diskretizace úlohy identifikace pro ohyb nosníku

Nejprve se budeme zabývat diskretizací úlohy identifikace neznámých parametrů v úloze průhybu nosníku (23) a budeme uvažovat okrajové podmínky (B1), a tedy prostor V_1 . Protože přípustná množina U_{ad} definovaná vztahem (21) je sama o sobě diskrétní množinou, není třeba provádět její diskretizaci.

Nejprve si uveďme pro dané $h > 0$ diskretizaci stavové úlohy (22):

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p) \in V_h^1 \text{ takové, že} \\ a_p(w_h, v_h) + \pi_p(w_h, v_h) = \mathcal{L}_p(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^1, \end{cases} \quad (71)$$

nebo ekvivalentně

$$\text{Najít } w_h \in V_h^1 : \quad \Pi_G(w_h) = \min_{v_h \in V_h^1} \Pi_G(v_h),$$

přičemž funkcionál Π_G je definován vztahem (9). S ohledem na tvrzení Věty 4.1 lze formulovat tvrzení o existenci jediného řešení úlohy (71).

Věta 5.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)'. Pak úloha (71) má jediné řešení pro libovolné $p \in U_{ad}$ a $h > 0$.*

Diskretizací úlohy (23) pro dané $h > 0$ dostaneme

$$\begin{cases} \text{Najít } p^* \in U_{ad} \text{ takové, že} \\ J(w_h(p^*)) = \min_{p \in U_{ad}} J(w_h(p)), \\ \text{kde } w_h(p) \text{ je řešením stavové úlohy (71)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (72)$$

Analogicky jako v kapitole 4.1 lze zformulovat tvrzení o existenci alespoň jednoho řešení úlohy (72).

Věta 5.2. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (21), necht jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)' a cenový funkcionál J splňuje (38). Pak identifikační úloha (72) má alespoň jedno řešení pro každé $h > 0$.*

Důkaz. Důkaz této věty lze provést podobným způsobem jako důkaz Věty 4.2. □

Dále se podíváme na vztah úlohy identifikace (23) a její diskretizace (72) pro $h \rightarrow 0+$. Budeme používat značení p^h , abychom zdůraznili, že $p^h \in U_{ad}$ je uvažováno ve stavové úloze s daným $p := p^h$. Připomeňme také, že přípustná množina U_{ad} na diskretizačním parametru h nezávisí. Tedy pro dané $h > 0$ uvažujeme stavovou úlohu

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p^h) \in V_h^1 \text{ takové, že} \\ a_{p^h}(w_h, v_h) + \pi_{p^h}(w_h, v_h) = \mathcal{L}_{p^h}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^1. \end{cases} \quad (73)$$

A obdobně úlohu identifikace

$$\begin{cases} \text{Najít } p^{*h} \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(p^{*h})) = \min_{p^h \in U_{ad}} J(w_h(p^h)), \\ \text{kde } w_h(p^h) \text{ je řešením stavové úlohy (73).} \end{cases} \quad (74)$$

Pro porozumění vzájemného vztahu úloh (23) a (72) je důležité následující lemma.

Lemma 5.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)'. Dále necht' $\{p^h\} \subset U_{ad}$ je taková posloupnost, že $p^h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p \in U_{ad}$. Pak*

$$w_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w \quad \text{ve } V_1,$$

kde $w_h := w_h(p^h)$, resp. $w := w(p)$, je řešení úlohy (73), resp. (22).

Důkaz. Důkaz tohoto lemmatu lze provést obdobně jako důkaz Lemmatu 4.1. Protože posloupnost $\{w_h(p^h)\}$ je ohraničená v prostoru V_1 , existuje vybraná podposloupnost $\{w_h(p^h)\}$ (značíme opět stejně) taková, že

$$w_h(p^h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w \quad \text{ve } V_1. \quad (75)$$

Nechť $\bar{v} \in V$ je libovolné, ale pevné. Pak existuje posloupnost $\{\bar{v}_h\}$, $\bar{v}_h \in V_h^1$, $\forall h > 0$ taková, že

$$\bar{v}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \bar{v} \quad \text{ve } V, \quad (76)$$

což plyne z toho, že systém diskrétních prostorů $\{V_h^1\}$, $h > 0$, je hustý ve V_1 . Ze stavové úlohy (73) máme

$$a_{p^h}(w_h, \bar{v}_h) + \pi_{p^h}(w_h, \bar{v}_h) = \mathcal{L}_{p^h}(\bar{v}_{h_n}).$$

Odtud limitním přechodem pro $h \rightarrow 0^+$ a užitím (75) a (76) dostáváme

$$a(w, \bar{v}) + \pi(w, \bar{v}) = \mathcal{L}(\bar{v}), \quad \forall \bar{v} \in V_1.$$

Dokázali jsme tedy, že $w := w(p)$ je řešením úlohy (22) a že celá posloupnost $\{w_h(p^h)\}$ slabě konverguje k w ve V_1 . Silná konvergence se dokáže analogicky jako v Lemmatu 4.1. \square

Je-li $p^* \in U_{ad}$ řešením úlohy (23) a $w(p^*)$ řeší úlohu (22), pak dvojici $(p^*, w(p^*))$ nazýváme optimální dvojicí úlohy (23). Stejně konvence se budeme také držet také v případě diskrétní úlohy, tj. (p^{*h}, w_h^*) nazveme optimální dvojicí úlohy (74).

Nyní můžeme přistoupit k hlavnímu tvrzení tohoto odstavce, a to je konvergenční věta. Pro jednoduchost budeme posloupnost a podposloupnost značit stejně.

Věta 5.3. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a (38). Dále necht $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$, $w_h^* := w_h(p^{*h})$ je posloupnost optimálních dvojic diskrétní úlohy (74), $h \rightarrow 0^+$. Pak existuje podposloupnost $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$ taková, že*

$$p^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p^* \text{ v } (L^\infty((0, L)))^2, \quad w_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(p^*) \text{ ve } V_1, \quad (77)$$

kde $(p^*, w(p^*))$ je optimální dvojice úlohy (23). Kromě toho každý hromadný bod posloupnosti $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$ ve smyslu (77) má tuto vlastnost.

Důkaz. Existence podposloupnosti $\{p^{*h}, w^*\}$ splňující (77) je zřejmá z důvodu kompaktnosti přípustné množiny U_{ad} a toho, že

$$w_h(p^{*h}) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(p^*) \text{ ve } V_1,$$

což plyne z Lemmatu 5.1. Necht $\bar{p} \in U_{ad}$ je libovolné, ale pevné. Víme, že

$$w_h(\bar{p}) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(\bar{p}) \text{ ve } V_1.$$

Navíc z definice úlohy (74) plyne

$$J(w_h(p^{*h})) \leq J(w_h(\bar{p}))$$

a ze spojitosti funkcionálu J ve V_1 dostaneme

$$J(w(p^*)) \leq J(w(\bar{p})),$$

tedy, že $(p^*, w(p^*))$ je optimální dvojice úlohy (23). Z důkazu je zřejmé, že každý jiný hromadný bod posloupnosti $\{p^{*h}, w_h^*\}$ je také optimální dvojicí úlohy (23). \square

S ohledem na odstavce 4.1 a Lemma 9.1 lze platnost tvrzení tohoto odstavce samozřejmě dokázat i pro ostatní typy okrajových podmínek (B2), (B3) a (B4).

5.2. Diskretizace úlohy identifikace v kontaktní úloze s dokonale tuhým podložím

Nyní se budeme věnovat diskretizaci úlohy identifikace neznámých parametrů v kontaktní úloze (45) nosníku s dokonale tuhým podložím s okrajovými podmínkami (B2). I v tomto případě je přípustná množina U_{ad} definovaná vztahem (42) diskrétní množinou. Zbývá tedy diskretizovat množinu K definovanou vztahem (15). Nechtě tedy $K_h \subset V_h^2$, $h \rightarrow 0^+$ jsou uzavřené, konvexní podmnožiny, které nemusí být nutně podmnožinami množiny K definované vztahem

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h(x_j^{(t)}) \geq g(x_j^{(t)}), \forall j = 1, \dots, t-1\}, \quad (78)$$

kde $x_1^{(t)}, \dots, x_{t-1}^{(t)}$ jsou uzlové body dělení D_h . Diskretizace stavové úlohy (43) pro dané $h > 0$ je tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p) \in K_h \text{ takové, že} \\ a_p(w_h, v_h - w_h) + \pi_p(w_h, v_h - w_h) \geq \mathcal{L}_p(v_h - w_h), \quad \forall v_h \in K_h. \end{cases} \quad (79)$$

Ekvivalentně lze úlohu formulovat jako minimalizaci cenového funkcionálu Π_G , definovaného vztahem (9), na konvexní množině K_h :

$$\text{Najít } w_h \in K_h : \quad \Pi_G(w_h) = \min_{v_h \in K_h} \Pi_G(v_h).$$

Analogicky jako v odstavci 4.2 lze zformulovat větu o existenci jediného řešení.

Věta 5.4. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)'. Pak úloha (79) má jediné řešení $w_h \in K_h$ pro libovolné $p \in U_{ad}$ a $h > 0$.*

Diskretizací úlohy identifikace (45) budeme pro dané $h > 0$ rozumět úlohu

$$\begin{cases} \text{Najít } p^* \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(p^*)) = \min_{p \in U_{ad}} J(w_h(p)), \\ \text{kde } w_h(p) \text{ je řešením stavové úlohy (79)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (80)$$

Na základě výsledků odstavce 4.2 lze zformulovat následující větu.

Věta 5.5. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (42). Nechť platí předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a cenový funkcionál J splňuje (38). Pak identifikační úloha (80) má alespoň jedno řešení pro každé $h > 0$.*

Důkaz. Tvrzení se dokáže analogicky jako tvrzení Věty 4.4. □

Nyní se zaměříme na vztah řešení úlohy (45) a (80) pro $h \rightarrow 0^+$. K tomu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 5.2. *Platí:*

- systém $\{K_h\}$, $h \rightarrow 0^+$ je hustý v K v normě prostoru V , tj.

$$\forall v \in K, \forall \varepsilon > 0 \exists v_{\bar{h}} \in K_{\bar{h}}, K_{\bar{h}} \in \{K_h\} \text{ takové, že } \|v - v_{\bar{h}}\|_V \leq \varepsilon, \quad (81)$$

- jestliže $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} v$ ve V , $v_h \in K_h, \forall h > 0$, pak $v \in K$. (82)

Důkaz. Nechť $v \in K$. Nejprve předpokládejme, že $v > g$ na celém intervalu $\langle 0, L \rangle$. Protože jsou obě funkce v i g na intervalu $\langle 0, L \rangle$ spojitě, existuje δ -okolí $\mathcal{O}_\delta([v])$ grafu $[v]$, $\delta > 0$, funkce v takové, že $\mathcal{O}_\delta([v]) \cap [g] = \emptyset$. Protože je prostor $C_0^\infty(\langle 0, L \rangle)$ hustý ve V , existuje posloupnost $\{v_n\}$, $v_n \in C_0^\infty(\langle 0, L \rangle)$ taková, že

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \text{ ve } V.$$

Odtud a ze spojitého vnoření prostoru V do $C_0(\langle 0, L \rangle)$ pak dostáváme:

$$v_n \rightrightarrows v \text{ na } \langle 0, L \rangle. \quad (83)$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolně malé. Z (83) je zřejmé, že existuje $v_{\bar{n}} \in \{v_n\}$ takové, že jeho graf leží v $\mathcal{O}_\delta([v])$ tak, že $v_{\bar{n}} \in K$ a

$$\|v - v_{\bar{n}}\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (84)$$

Nechť $r_h v_{\bar{n}} \in V_h$ je Hermitova interpolace $v_{\bar{n}}$, tedy $r_h v_{\bar{n}} \in K_h$. Navíc víme, viz [1], že platí nerovnost

$$\|v_{\bar{n}} - r_h v_{\bar{n}}\|_V \leq ch \|v_{\bar{n}}\|_{H^3(\langle 0, L \rangle)},$$

kde $c > 0$ a norma $\|v_{\bar{n}}\|_{H^3(\langle 0, L \rangle)}$ nezávisí na diskretizačním parametru h . Tudíž existuje $h_0 > 0$ takové, že

$$\|v_{\bar{n}} - r_h v_{\bar{n}}\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad r_h v_{\bar{n}} \in K_h, \quad \forall h \leq h_0. \quad (85)$$

Dále z (84), (85) a trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\|v - r_{\bar{h}} v_{\bar{n}}\|_V \leq \varepsilon$$

za předpokladu, že $\bar{h} > 0$ je dostatečně malé. Nyní necht $v \in K$ je takové, že $v \geq g$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$. Ze spojitosti funkcí v, g , okrajových podmínek kladených na v a funkci $g < 0$ na $\langle 0, L \rangle$ je zřejmé, že $v > g$ na okolí I_1 , resp. I_2 , krajních bodů $x = 0$, resp. $x = L$. Označme $\mathcal{P} = I_1 \cup I_2$. Necht $\varphi \in C_0^\infty(\langle 0, L \rangle)$ je taková funkce, že pro ni platí $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}$ a $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \langle 0, L \rangle \setminus \mathcal{P}$. Dále pro libovolné $\theta > 0$ definujme $v_\theta = v + \theta\varphi$. Je zřejmé, že $v_\theta(x) = v(x) > g(x) \quad \forall x \in \mathcal{P}$ a $v_\theta(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle 0, L \rangle \setminus \mathcal{P}$, tj. $v_\theta > g$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$ a

$$\|v - v_\theta\|_V = \theta\|\varphi\|_V.$$

Tudíž pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\theta > 0$ takové, že

$$\|v - v_\theta\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále bychom postupovali obdobným způsobem jako výše pro $v_\theta > g$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$. Tím se dokáže tvrzení (81).

Zbývá tedy dokázat tvrzení (82). Necht $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} v$ ve V , $v_h \in K_h, \forall h > 0$. Protože je prostor V kompaktně vnořen do prostoru spojitých funkcí $C(\langle 0, L \rangle)$ dostáváme, že

$$v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} v \quad \text{na} \quad \langle 0, L \rangle. \quad (86)$$

Chceme dokázat, že $v \in K$. Předpokládejme opak, tedy že $v \notin K$, tj. existuje $\bar{x} \in (0, L)$ takové, že $v(\bar{x}) < g(\bar{x})$. Ze spojitosti funkcí v a g pak plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$v(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathcal{O}_\delta(\bar{x}), \quad (87)$$

kde $\mathcal{O}_\delta(\bar{x})$ je δ -okolí bodu \bar{x} . Protože norma dělení D_h jde limitně k 0, existuje $\bar{h} > 0$ dostatečně malé a uzlový bod $x_j^{(\bar{h})} \in \mathcal{O}_\delta(\bar{x})$ takový, že $v_{\bar{h}}(x_j^{(\bar{h})}) < g(x_j^{(\bar{h})})$, což plyne z (86) a (87). To je ovšem ve sporu s předpokladem, že $v_{\bar{h}} \in K_{\bar{h}}$. Tedy $v \geq g$ na $\langle 0, L \rangle$, tj. $v \in K$. \square

Doposud jsme uvažovali pevný diskretizační parametr $h > 0$. Nyní budeme předpokládat, že $h \rightarrow 0^+$. Připomeňme, že tento parametr je vázaný na konečně dimenzionální prostor V_h , nikoli na přípustnou množinu U_{ad} , která je i v tomto případě diskrétní. Na druhou stranu by měla být volba konkrétního parametru $p \in U_{ad}$ v diskretizované úloze nějak označena. Pro dané $h > 0$ budeme tedy uvažovat diskretizovanou stavovou úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p^h) \in K_h \text{ takové, že} \\ a_{p^h}(w_h, v_h - w_h) + \pi_{p^h}(w_h, v_h - w_h) \geq \mathcal{L}_{p^h}(v_h - w_h), \quad \forall v_h \in K_h. \end{cases} \quad (88)$$

Podobně pro dané $h > 0$ je identifikační úloha tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } p^{*h} \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(p^{*h})) = \min_{p^h \in U_{ad}} J(w_h(p^h)), \\ \text{kde } w_h(p^h) \text{ je řešením stavové úlohy (88)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (89)$$

Pro porozumění vzájemného vztahu úloh (45) a (89) je důležité následující lemma.

Lemma 5.3. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a necht' $\{p^h\} \subset U_{ad}$ je taková posloupnost, že $p^h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p \in U_{ad}$. Pak*

$$w_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w \quad \text{ve } V_2,$$

kde $w_h := w_h(p^h)$, resp. $w := w(p)$, je řešení úlohy (88), resp. (43).

Důkaz. Analogicky jako v důkazu Lemmatu 4.2. lze dokázat, že posloupnost $\{w_h\}$ je ohraničená ve V_2 . Tudíž z ní lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost (opět pro přehlednost použijeme stejné značení $\{w_h\}$) takovou, že

$$w_h \rightharpoonup w \text{ ve } V_2. \quad (90)$$

Pak z (82) plyne, že $w \in K$. Dále ukážeme, že w je řešením stavové úlohy (43). Necht' $\bar{v} \in K$ je libovolné a necht' posloupnost $\{\bar{v}_h\}$, $\bar{v}_h \in K_h$ je taková, že

$$\bar{v}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \bar{v} \text{ ve } V_2. \quad (91)$$

Existence takové posloupnosti plyne z (81). Z diskrétní stavové úlohy (88) máme

$$a_{p^h}(w_h, \bar{v}_h - w_h) + \pi_{p^h}(w_h, \bar{v}_h - w_h) \geq \mathcal{L}_{p^h}(\bar{v}_h - w_h).$$

Odtud pak limitním přechodem pro $h \rightarrow 0+$ a užitím (90) a (91) dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0+} a_{p^h}(w_h, \bar{v}_h) = a_p(w, \bar{v}), \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \pi_{p^h}(w_h, \bar{v}_h) = \pi_p(w, \bar{v}) \quad (92)$$

a

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \mathcal{L}_{p^h}(\bar{v}_h - w_h) = \mathcal{L}_p(\bar{v} - w). \quad (93)$$

Z (92), (93) a užitím důkazu Lemmatu 4.2 lze dále dokázat

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} a_{p^h}(w_h, w_h) \geq a_p(w, w) \quad \text{a} \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \pi_{p^h}(w_h, w_h) = \pi_p(w, w).$$

Analogicky jako v důkazu Lemmatu 4.2 lze také dokázat, že

$$a_p(w, \bar{v} - w) + \pi_p(w, \bar{v} - w) \geq \mathcal{L}_p(\bar{v} - w),$$

tedy, že w je řešením úlohy (43). Protože má tato úloha jediné řešení, je zřejmé, že celá posloupnost $\{w_h\}$ konverguje slabě k w ve V_2 . Nyní zbývá ukázat, že $w_h \xrightarrow{h \rightarrow 0+} w$ v normě prostoru V_2 . Z předpokladu (81) plyne, že existuje posloupnost $\{\bar{w}_h\}$, $\bar{w}_h \in K_h$, $\forall h > 0$ taková, že

$$\bar{w}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0+} w \quad \text{ve } V_2.$$

Protože je bilineární forma a_p , pro $p \in U_{ad}$, stejnoměrně V -eliptická na přípustné množině U_{ad} , existuje konstanta $\alpha > 0$ nezávislá na parametru $p \in U_{ad}$ taková, že platí nerovnost

$$\alpha \|w_h - \bar{w}_h\|_{V_2}^2 \leq \pi_{p^h}(w_h, \bar{w}_h - w_h) - \mathcal{L}_{p^h}(\bar{w}_h - w_h) - a_{p^h}(\bar{w}_h, \bar{w}_h - w_h), \quad (94)$$

přičemž jsme také využili (88). Z (90), (94) a toho, že

$$p^h \xrightarrow{h \rightarrow 0+} p \quad \text{v } (L^\infty((0, L)))^2$$

plyne, že pravá strana nerovnosti (94) konverguje k 0. Tudíž

$$\|\bar{w}_h - w_h\|_{V_2} \longrightarrow 0 + .$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti ihned plyne tvrzení lemmatu. □

Na základě předchozího lemmatu lze dokázat následující tvrzení. Pro jednoduchost budeme posloupnost a podposloupnost značit opět stejně.

Věta 5.6. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a (38). Dále necht $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$, $w_h^* := w_h(p^{*h})$ je posloupnost optimálních dvojic diskrétní stavové úlohy (89), $h \rightarrow 0^+$. Pak existuje podposloupnost $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$ taková, že*

$$p^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p^* \text{ v } (L^\infty((0, L)))^2, \quad w_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(p^*) \text{ ve } V_2, \quad (95)$$

kde $(p^*, w(p^*))$ je optimální dvojicí úlohy (45). Kromě toho každý hromadný bod posloupnosti $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$ ve smyslu (95) má tuto vlastnost.

Důkaz. Necht $\{p^{*h}\}$ je posloupnost řešení úlohy (80), $h \rightarrow 0^+$. Z kompaktnosti přípustné množiny U_{ad} v prostoru $(L^\infty((0, L)))^2$ plyne existence podposloupnosti $\{p^{*h}\}$ takové, že

$$p^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p^* \text{ v } (L^\infty((0, L)))^2.$$

Dále podle Lemmatu 5.3 je

$$w_h(p^{*h}) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(p^*) \text{ ve } V_2. \quad (96)$$

Necht $\bar{p} \in U_{ad}$ je libovolný pevně zvolený parametr. Z definice úlohy (80) máme

$$J(w_h(p^{*h})) \leq J(w_h(\bar{p})).$$

Limitním přechodem pro $h \rightarrow 0^+$, ze spojitosti funkcionálu J , (96) a skutečnosti, že $w_h(\bar{p}) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(\bar{p})$ ve V_2 dostaneme nerovnost

$$J(w(p^*)) \leq J(w(\bar{p})),$$

která dokazuje tvrzení. □

S ohledem na odstavce 4.2 a Lemma 9.2 lze platnost tvrzení tohoto odstavce samozřejmě dokázat i pro ostatní typy okrajových podmínek (B1), (B3) a (B4).

5.3. Diskretizace úlohy identifikace v kontaktní úloze s elasticky deformovatelným podložím

Nyní se budeme věnovat diskretizaci úlohy identifikace koeficientu tuhosti podloží v kontaktní úloze nosníku s deformovatelným podložím (63) s okrajovými podmínkami (B2). Přípustná množina U_{ad} definovaná vztahem (61) je i v tomto případě diskrétní množinou. Uvažujme dále pro dané $h > 0$ diskrétní prostor $V_h^2 \subset V_2$. Příslušná diskretizace stavové úlohy (62) je tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } k \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(k) \in V_h^2 \text{ takové, že} \\ a(w_h, v_h) + \pi(w_h, v_h) - \kappa_k(w_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h^2. \quad (97)$$

Ekvivalentně lze úlohu (97) zformulovat jako minimalizaci cenového funkcionálu ve tvaru

$$\text{Najít } w_h \in V_h^2 : \quad \Pi(w_h) = \min_{v_h \in V_h^2} \Pi(v_h),$$

přičemž funkcionál $\Pi(v)$ je definován vztahem (20). Analogicky jako v odstavci 4.3 lze zformulovat větu o existenci jediného řešení.

Věta 5.7. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Pak úloha (97) má jediné řešení pro libovolné $k \in U_{ad}$ a $h > 0$.*

Diskretizací úlohy (63) budeme pro dané $h > 0$ rozumět úlohu

$$\begin{cases} \text{Najít } k^* \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(k^*)) = \min_{k \in U_{ad}} J(w_h(k)), \\ \text{kde } w_h(k) \text{ je řešením stavové úlohy (97)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (98)$$

Věta 5.8. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (61), necht jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a cenový funkcionál J splňuje (38). Pak úloha (98) má pro každé $h > 0$ alespoň jedno řešení.*

Důkaz. Důkaz lze provést analogicky jako důkaz Věty 4.2 resp. 4.4. □

Nyní budeme opět zkoumat vzájemný vztah řešení úloh (63) a úlohy (98) pro $h \rightarrow 0^+$. Stejně jako v předchozí kapitole budeme i zde parametr $k \in U_{ad}$ v diskrétní variantě stavové úlohy (97) značit jako k^h . Tedy pro dané $h > 0$ uvažujeme stavovou úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } k^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(k^h) \in V_h^2 \text{ takové, že} \\ a(w_h, v_h) + \pi(w_h, v_h) - \kappa_{k^h}(w_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^2. \end{cases} \quad (99)$$

Podobně pro dané $h > 0$ je diskretizovaná úloha identifikace tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } k^{*h} \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(k^{*h})) = \min_{k^h \in U_{ad}} J(w_h(k^h)), \\ \text{kde } w_h(k^h) \text{ je řešením stavové úlohy (99)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcional daný vztahem (40).} \end{cases} \quad (100)$$

Analogicky jako v předchozích odstavcích zformulujeme lemma týkající se řešení stavové úlohy a její diskretizace.

Lemma 5.4. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a $\{k^h\} \subset U_{ad}$, $k \in U_{ad}$ je taková posloupnost, že $k^h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} k \in L^\infty((0, L))$. Pak*

$$w_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w \quad \text{ve } V_2,$$

kde $w_h := w_h(k^h)$, resp. $w := w(k)$, je řešení úlohy (99), resp. (62).

Důkaz. Postupujeme analogicky jako v důkazu Lemmatu 4.3. Lze tedy dokázat, že posloupnost $\{w_h(k^h)\}$ je ohraničená ve V_2 . Tudíž existuje slabě konvergentní podposloupnost

$$w_h(k^h) \rightharpoonup w \quad \text{ve } V_2. \quad (101)$$

Nechť $\bar{v} \in V_2$ je libovolné, ale pevně zvolené. Protože systém $\{V_h^2\}$, $h \rightarrow 0^+$ je hustý ve V_2 , existuje posloupnost $\{\bar{v}_h\}$, $\bar{v}_h \in V_h^2$ taková, že

$$\bar{v}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \bar{v} \quad \text{ve } V_2. \quad (102)$$

Z definice stavové úlohy (99) plyne, že

$$a(w_h, \bar{v}_h) + \pi(w_h, \bar{v}_h) - \kappa_{k^h}(w_h, \bar{v}_h) = \mathcal{L}(\bar{v}_h).$$

Odtud limitním přechodem pro $h \rightarrow 0+$ a využitím (101), (102) a $k^h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} k$ v $L^\infty((0, L))$ obdržíme

$$a(w, \bar{v}) + \pi(w, \bar{v}) - \kappa_k(w, \bar{v}) = \mathcal{L}(\bar{v}).$$

Tedy $w := w(k)$ je řešením stavové úlohy (62). Protože je toto řešení určeno jednoznačně, je zřejmé, že i celá posloupnost $\{w_h(k^h)\}$ konverguje slabě k w ve V_2 . Silnou konvergenci dokážeme stejným způsobem jako v důkazu Lemmatu 4.1. \square

Nyní můžeme analogicky jako v předchozích odstavcích přistoupit k formulaci konvergenční věty. I zde budeme pro jednoduchost posloupnost a podposloupnost značit stejně.

Věta 5.9. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a (38). Dále necht $\{(k^{*h}, w_h^*)\}$, $w_h^* := w_h(k^{*h})$ je posloupnost optimálních dvojic diskrétní úlohy (100), $h \rightarrow 0+$. Pak existuje podposloupnost $\{(k^{*h}, w_h^*)\}$ taková, že*

$$k^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} k^* \text{ v } L^\infty((0, L)), \quad w_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(k^*) \text{ ve } V_2, \quad (103)$$

kde $(k^*, w(k^*))$ je optimální dvojicí úlohy (63). Kromě toho každý hromadný bod posloupnosti $\{(k^{*h}, w_h^*)\}$ ve smyslu (103) má tuto vlastnost.

Důkaz. Protože je přípustná množina U_{ad} kompaktní v prostoru $L^\infty((0, L))$ víme, že existuje podposloupnost $\{k^{*h}\}$ taková, že

$$k^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} k^* \text{ v } L^\infty((0, L)).$$

Navíc z Lemmatu 5.4 plyne

$$w_h(k^{*h}) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(k^*) \text{ ve } V_2.$$

Dále necht $\bar{k} \in U_{ad}$ je libovolné ale pevně zvolené. Z definice úlohy identifikace (98) plyne, že $J(w_h(p^{*h})) \leq J(w_h(\bar{p}))$. Zbytek důkazu se vede stejně jako v důkaze Věty 5.6. \square

S ohledem na odstavec 4.3 a Lemma 9.3 lze platnost tvrzení tohoto odstavce samozřejmě dokázat i pro ostatní typy okrajových podmínek (B1), (B3) a (B4).

6. Algebraická formulace identifikačních úloh

V této kapitole se budeme zabývat maticovou resp. algebraickou formulací diskrétních úloh identifikace (72), (80) a (98) použitím metody konečných prvků. Pro všechny studované úlohy budeme uvažovat cenový funkcionál J definovaný v (40), jehož algebraická reprezentace je

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z})^\top(\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \quad (104)$$

kde matice \mathbf{S} reprezentuje operátor restrikce z \mathbb{R}^N do \mathbb{R}^m a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)^\top$ je vektor daných, například naměřených, hodnot.

6.1. Algebraická formulace úlohy identifikace pro ohyb

Připomeňme, že $p := (E, \nu) \in U_{ad}$ je po částech konstantní vektorová funkce na intervalu $(0, L)$. Lze ji tedy psát jako vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r})^\top \in \mathbb{R}^{2r}$, pro jehož komponenty platí $p_{2i-1} = E_i := E|_{K_i}$ a $p_{2i} = \nu_i := \nu|_{K_i}$, $i = 1, \dots, r$. Podobně přípustnou množinu U_{ad} definovanou vztahem (21) lze psát jako kompaktní množinu $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{2r}$ ve tvaru:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r})^\top \in \mathbb{R}^{2r} \mid 0 < E_{\min} \leq p_{2i-1} \leq E_{\max} < \infty, \\ 0 \leq p_{2i} \leq 0.5, i = 1, \dots, r\}. \quad (105)$$

Protože má prostor V_h konečnou dimenzi, lze každou funkci $v_h \in V_h$ psát ve tvaru lineární kombinace bázevých funkcí, tedy jako

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x),$$

kde $\dim(V_h) = N$, φ_i jsou bázevové funkce prostoru V_h a $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$.

Diskretizovaná stavová úloha (71) vede na systém nelineárních algebraických rovnic

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{p} \in \mathbf{U}, \\ \text{najít } \mathbf{w} := \mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \text{ takové, že} \\ (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{w} + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (106)$$

kde $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ je vektor jehož složky w_i jsou koeficienty lineární kombinace bázevých funkcí, přičemž se jedná vlastně o hodnoty w_h a w'_h v uzlových bodech dělení D_h . Dále

pak $(I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{w}$, $\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \mathbf{w}$ a $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ je postupně algebraické vyjádření forem $a_p(w_h, v_h)$, $\pi_p(w_h, v_h)$ a $\mathcal{L}_p(v_h)$. Matice $\mathbf{K}_1(\mathbf{p})$, $\mathbf{K}_2(\mathbf{p})$ a vektor $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ jsou pro $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$ definované následovně, [63], [64]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) &= (k_{ij}^{(1)}(\mathbf{p}))_{i,j=1}^N, & k_{ij}^{(1)}(\mathbf{p}) &= \int_{M_{ij}} E \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx, \\ \mathbf{K}_2(\mathbf{p}) &= (k_{ij}^{(2)}(\mathbf{p}))_{i,j=1}^N, & k_{ij}^{(2)}(\mathbf{p}) &= \int_{M_{ij}} (1 - \nu^2) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \\ \mathbf{q}(\mathbf{p}) &= (q_i(\mathbf{p}))_{i=1}^N, & q_i(\mathbf{p}) &= \int_{\text{supp } \varphi_i} (1 - \nu^2) q(x) \varphi_i(x) dx, \end{aligned} \quad (107)$$

přičemž $M_{ij} = \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j$. Matice $\mathbf{K}_1(\mathbf{p})$ a $\mathbf{K}_2(\mathbf{p})$ jsou počítány exaktně, zatímco vektor $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ počítáme složeným lichoběžníkovým pravidlem. Pro algebraické vyjádření nelineárního formy $\pi_p(w_h, v_h)$, definujme zobrazení $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{U} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= tb \int_0^L E(1 - \nu^2) (w_h')^3 v_h' dx = \\ &= tb \sum_{i,j=1}^N w_i v_j \int_0^L E(1 - \nu^2) (w_h')^2 \varphi_i' \varphi_j' dx = \mathbf{w}^\top \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \mathbf{v}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = (k_{ij}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{w}))_{i,j=1}^N, \quad k_{ij}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = tb \int_0^L E(1 - \nu^2) (w_h'(x))^2 \varphi_i' \varphi_j' dx. \quad (108)$$

Pro samotný výpočet nelineární matice $\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ použijeme složené lichoběžníkové pravidlo. Nyní můžeme přikročit k algebraické formulaci úlohy identifikace pro průhyb nelineárního Gaova nosníku, která je v tomto případě daná tvarem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najít } \mathbf{p}^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^*)) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p})), \\ \text{kde } \mathbf{w}(\mathbf{p}) \text{ je řešením (106)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (104).} \end{array} \right. \quad (109)$$

6.2. Algebraická formulace úlohy identifikace pro kontakt s dokonale tuhým podložím

Analogicky jako v předchozím odstavci zavedeme nyní algebraickou formulaci úlohy identifikace kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím. Připomeňme, že i v této části

práce je $p := (E, \nu) \in U_{ad}$ po částech konstantní vektorová funkce a lze ji tedy psát jako vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r})^\top \in \mathbb{R}^{2r}$, přičemž pro jeho složky platí $p_{2i-1} = E_i := E|_{K_i}$, $p_{2i} = \nu_i := \nu|_{K_i}$, $i = 1, \dots, r$. Přípustnou množinu U_{ad} definovanou vztahem (42) lze chápat jako kompaktní množinu $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{2r}$ ve tvaru:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r})^\top \in \mathbb{R}^{2r} \mid 0 < E_{\min} \leq p_{2i-1} \leq E_{\max} < \infty, \\ 0 \leq p_{2i} \leq 0.5, \quad i = 1, \dots, r\}. \quad (110)$$

Dále si uvedeme algebraický tvar množiny K_h , který je dán ve tvaru:

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{B}\mathbf{v} \geq \mathbf{g}\},$$

kde $\mathbf{g} = (g(x_1^{(t)}), \dots, g(x_{t-1}^{(t)}))^\top$ je vektor funkčních hodnot funkce g ve vnitřních bodech dělení intervalu D_h . Matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(t-1) \times N}$ představuje zobrazení z \mathbb{R}^N na $\mathbb{R}^{(t-1)}$, které vybere funkční hodnoty $v_h(x_i^{(t)})$, $i = 1, \dots, t-1$ z vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$. Přitom složky v_i tohoto vektoru jsou vlastně hodnoty v_h a v'_h v uzlových bodech dělení D_h , tedy $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)^\top$,

$$v_{2i-1} = v_h(x_i^{(t)}), \quad v_{2i} = v'_h(x_i^{(t)}), \quad i = 1, \dots, t-1.$$

Diskretizovaná stavová úloha (79) vede na systém nelineárních algebraických nerovnic

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{p} \in \mathbf{U}, \\ \text{najít } \mathbf{w} := \mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbf{K} \text{ takové, že } \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K} \text{ platí} \\ \mathbf{w}^\top (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}^\top \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w})(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \geq \mathbf{q}^\top(\mathbf{p})(\mathbf{v} - \mathbf{w}), \end{cases} \quad (111)$$

kde $\mathbf{w}^\top (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) (\mathbf{v} - \mathbf{w})$, $\mathbf{w}^\top \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$, $\mathbf{q}^\top(\mathbf{p})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ je postupně algebraické vyjádření forem $a_p(w_h, v_h - w_h)$, $\pi_p(w_h, v_h - w_h)$ a $\mathcal{L}_p(v_h - w_h)$. Matice $\mathbf{K}_1(\mathbf{p})$, $\mathbf{K}_2(\mathbf{p})$ a vektor $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ pro $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$ jsou definované vztahy (107) uvedených v předchozím odstavci. Matice $\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ je definovaná vztahem (108). K jejímu výpočtu a k výpočtu $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ použijeme složené lichoběžníkové pravidlo.

Na základě výše uvedeného lze nyní zformulovat maticovou formulaci úlohy identifikace pro kontaktní úlohu nosníku s dokonale tuhým podložím. Ta má následující podobu

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{p}^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^*)) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p})), \\ \text{kde } \mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbf{K} \text{ je řešením (111)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (104).} \end{cases} \quad (112)$$

Tato úloha však představuje nehladký optimalizační problém, [19], neboť minimalizovaná funkce není obecně spojitě diferencovatelná. Ztráta diferencovatelnosti je způsobena stavovou úlohou (111), která je ve tvaru variační nerovnice, [26]. Jednou z možností, jak tuto obtíž překonat, je nahradit variační nerovnici posloupností hladkých rovnic užitím vhodné penalizace, která je detailněji popsána v Dodatku 10.1 Z tvaru penalizované stavové úlohy (194) a využitím penalizačního funkcionálu $j(v)$ ve tvaru (195) dostaneme algebraickou formulaci penalizované stavové úlohy (111), tj. úlohu

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{p} \in \mathbf{U} \text{ a } \varepsilon > 0, \\ \text{najít } \mathbf{w}_\varepsilon := \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \text{ takové, že} \\ (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\varepsilon) \mathbf{w}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}'(\mathbf{w}_\varepsilon) = \mathbf{q}(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (113)$$

kde

$$\mathbf{j}'(\mathbf{w}_\varepsilon) = (j'_i(\mathbf{w}_\varepsilon))_{i=1}^N, \quad j'_i(\mathbf{w}_\varepsilon) = - \int_{\text{supp } \varphi_i} ((g - w_{\varepsilon h})^+)^2 \varphi_i \, dx,$$

Pro výpočet derivace penalizačního členu $\mathbf{j}'(\mathbf{w}_\varepsilon)$ bylo užito složené lichoběžníkové pravidlo na ekvidistantním dělení $\text{supp } \varphi_i$.

Na základě výše uvedeného můžeme zformulovat penalizovanou úlohu identifikace

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{p}_\varepsilon^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}_\varepsilon^*)) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})), \\ \text{kde } \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \text{ je řešením (113)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (104).} \end{cases} \quad (114)$$

Protože jsme původní stavovou úlohu (111) ve tvaru nerovnice nahradili systémem nelineárních rovnic (113), nejsou úlohy (114) a (112) vzájemně ekvivalentní. Lze však dokázat, že z libovolné posloupnosti řešení $\{\mathbf{p}_\varepsilon^*\}$ úlohy (114) lze vybrat podposloupnost, která konverguje k řešení \mathbf{p}^* úlohy identifikace (112) pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$, podrobnější informace lze najít např. v [34], [35].

6.3. Algebraická formulace úlohy identifikace pro kontakt s elasticky deformovatelným podložím

Podobně jako tomu bylo v předchozích dvou kapitolách, zavedeme nyní algebraickou formulaci úlohy identifikace kontaktní úlohy s elasticky deformovatelným podložím (98).

V tomto případě je každé $k \in U_{ad}$ po částech konstantní vektorová funkce na intervalu $(0, L)$. Lze ji tedy psát jako vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s)^\top \in \mathbb{R}^s$, kde pro složky vektoru \mathbf{k} platí $k_i = k|_{F_i}$, $i = 1, \dots, s$. Přípustnou množinu U_{ad} definovanou vztahem (61) lze chápat jako kompaktní množinu $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^s$ ve tvaru:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{R}^s \mid 0 < k_{\min} \leq k_i \leq k_{\max} < \infty, i = 1, \dots, s\}. \quad (115)$$

Nyní může rovnou přistoupit k algebraické formulaci stavové úlohy (99), která je ve tvaru systému nelineárních rovnic

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{k} \in \mathbf{U}, \\ \text{najít } \mathbf{w} := \mathbf{w}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^N \text{ takové, že} \\ (E I \mathbf{K}_1 - P(1 - \nu^2) \mathbf{K}_2) \mathbf{w} + E(1 - \nu^2) t b \mathbf{K}_3(\mathbf{w}) \mathbf{w} - \\ \quad \quad \quad - b(1 - \nu^2) \mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{w}) = (1 - \nu^2) \mathbf{q}, \end{cases} \quad (116)$$

kde matice \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , $\mathbf{K}_3(\mathbf{w})$ a vektor \mathbf{q} jsou dané obdobnými vztahy jako v předchozích odstavcích, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= (k_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^N, & k_{ij}^{(1)} &= \int_{M_{ij}} \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx, \\ \mathbf{K}_2 &= (k_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^N, & k_{ij}^{(2)} &= \int_{M_{ij}} \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \\ \mathbf{K}_3(\mathbf{w}) &= (k_{ij}^{(3)}(\mathbf{w}))_{i,j=1}^N, & k_{ij}^{(3)}(\mathbf{w}) &= \int_0^L (w_h')^2 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \\ \mathbf{q} &= (q_i)_{i=1}^N, & q_i &= \int_{\text{supp } \varphi_i} q \varphi_i(x) dx, \end{aligned} \quad (117)$$

a $M_{ij} = \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j$. Prvky matic \mathbf{K}_1 a \mathbf{K}_2 jsou vypočteny exaktně. Pro výpočet prvků nelineární matice $\mathbf{K}_3(\mathbf{w})$ a vektoru \mathbf{q} použijeme složené lichoběžníkové pravidlo. Algebraický tvar nelineárního kontaktního členu $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{w})$ je definován jako vektor

$$\mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{w}) = (g_i(\mathbf{k}, \mathbf{w}))_{i=1}^N, \quad g_i(\mathbf{k}, \mathbf{w}) = \int_{\text{supp } \varphi_i} k (g - w_h)^+ \varphi_i dx, \quad (118)$$

jehož složky spočítáme opět užitím složeného lichoběžníkového pravidla. Maticová formulace problému identifikace v kontaktní úloze s elasticky deformovatelným podložím je nyní tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{k}^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}^*)) = \min_{\mathbf{k} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k})), \\ \text{kde } \mathbf{w}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^N \text{ je řešením (116)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (104).} \end{cases} \quad (119)$$

Tato úloha je však úlohou nehladké optimalizace, neboť člen $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{w})$ není spojitě diferencovatelný. To lze vyřešit užitím regularizační metody uvedené v Dodatku 10.2. Stavovou úlohu (116) tedy nahradíme regularizovanou úlohou tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro dané } \mathbf{k} \in \mathbf{U} \text{ a } \delta > 0, \\ \text{najít } \mathbf{w}_\delta := \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^N \text{ takové, že} \\ (E I \mathbf{K}_1 - P(1 - \nu^2) \mathbf{K}_2) \mathbf{w}_\delta + E(1 - \nu^2) t b \mathbf{K}_3(\mathbf{w}_\delta) \mathbf{w}_\delta - \\ \quad - b(1 - \nu^2) \mathbf{g}_\delta(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta) = (1 - \nu^2) \mathbf{q}, \end{array} \right. \quad (120)$$

kde matice \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , $\mathbf{K}_3(\mathbf{w}_\delta)$ a vektor \mathbf{q} jsou definovány v (117). Užitím vztahu (200) dostaneme regularizovaný člen $\mathbf{g}_\delta(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta)$ ve tvaru

$$\mathbf{g}_\delta(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta) = (g_{\delta i}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta))_{i=1}^N,$$

kde

$$g_{\delta i}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\text{supp } \varphi_i} k ((g - w_h) + \sqrt{(g - w_h)^2 + \delta^2}) \varphi_i dx.$$

Regularizovaná úloha identifikace je pak tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najít } \mathbf{k}_\delta^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}_\delta^*)) = \min_{\mathbf{k} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})), \\ \text{kde } \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^N \text{ je řešením (120)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (104).} \end{array} \right. \quad (121)$$

Protože jsme původní stavovou úlohu (116) v úloze identifikace (119) nahradili regularizovaným systémem rovnic (120), nejsou úlohy (119) a (121) vzájemně ekvivalentní. Analogicky jako v předchozím odstavci lze i v tomto případě dokázat, že z libovolné posloupnosti řešení $\{\mathbf{k}_\delta^*\}$ úlohy (121) lze vybrat podposloupnost, která konverguje k řešení \mathbf{k}^* úlohy (119) pro $\delta \rightarrow 0+$, podrobnější informace lze najít např. v [35].

7. Citlivostní analýza

V předchozích kapitolách jsme se zabývali spojitou závislostí řešení stavových úloh na řídicích proměnných, což byly materiálové parametry nosníku nebo podloží. Tato spojitá závislost zajišťuje existenci řešení uvažovaných identifikačních úloh. Pro výpočetní účely však bude ještě užitečná znalost gradientu diskretizovaného cenového funkcionálu. Podíváme se tedy postupně na výpočet gradientu funkcionálu ve všech třech studovaných úlohách. Připomeňme, že uvažujeme algebraickou reprezentaci \mathcal{J} funkcionálu J ve tvaru

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{z})^\top(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m. \quad (122)$$

7.1. Citlivostní analýza úlohy identifikace pro ohyb

V této části se budeme zabývat analýzou citlivosti úlohy identifikace pro průhyb nelineárního Gaova nosníku. Definujme funkci $\widehat{\mathcal{J}} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}) := \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p})), \quad \mathbf{p} \in \mathbf{U},$$

kde $\mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$ je řešení stavové úlohy (106) a množina \mathbf{U} je ve tvaru (105). Naším cílem je nyní vypočítat parciální derivace $\widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{p})$ podle proměnných p_i , $i = 1, \dots, 2r$. Je zřejmé, že

$$\widehat{\mathcal{J}}_i(\mathbf{p}) := \frac{\partial}{\partial p_i} \widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p})))^\top \mathbf{w}_i(\mathbf{p}), \quad (123)$$

kde $\nabla_{\mathbf{v}}$ značí gradient $\mathcal{J} : \mathbf{v} \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ a $\mathbf{w}_i(\mathbf{p}) := \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbf{w}(\mathbf{p})$. Připomeňme, že $\mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$ řeší nelineární stavovou úlohu (106), což lze zapsat jako systém nelineárních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}(\mathbf{p})) = \mathbf{0}, \quad (124)$$

kde $\mathbf{R} : \mathbf{U} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ je funkce definovaná předpisem

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) := (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{v} + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v} - \mathbf{q}(\mathbf{p}), \quad (125)$$

přičemž jsme použili stejné značení matic a vektoru jako v odstavci 6.1. Derivováním vztahu (124) podle p_i , $i = 1, \dots, 2r$, dostaneme následující systém rovnic

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}(\mathbf{p})) \mathbf{w}_i(\mathbf{p}) = -\mathbf{R}_{,i}(\mathbf{p}, \mathbf{w}(\mathbf{p})), \quad (126)$$

kde $\mathbf{R}_{,i} := \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbf{R}$ a $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}$ značí gradient \mathbf{R} podle \mathbf{v} . Z definice (125) přitom plyne, že

$$\mathbf{R}_{,i}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p}))_{,i} \mathbf{v} + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v})_{,i} \mathbf{v} - \mathbf{q}_{,i}(\mathbf{p})$$

a

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p}) + \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v}).$$

Pro vyčíslení členu $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v})$ si stačí uvědomit, že $\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v}$ je algebraické vyjádření nelineární formy $\pi(w, v)$, definované v (7), na prostoru V_h . Protože jsou všechny materiálové parametry po částech konstantní funkce lze uvažovat nelineární formu π v následujícím tvaru

$$\pi(v_h, z_h) = \int_0^L (v'_h)^3 z'_h dx = \int_0^L (v'_h)^2 v'_h z'_h dx, \quad v_h, z_h \in V_h. \quad (127)$$

Pak

$$\pi_{,v_h}(v_h, z_h)(w_h) := \frac{d}{dt} \pi(v_h + tw_h, z_h)|_{t=0} = 3 \int_0^L (v'_h)^2 w'_h z'_h dx \quad w_h \in V_h. \quad (128)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $w_h = \varphi_i$, $z_h = \varphi_j$, kde $\{\varphi_i\}$ jsou báze funkce diskrétního prostoru V_h a použijeme-li vztah (108) dostaneme

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v}) = 3 \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}^N.$$

Dále použijeme k eliminaci členu $\mathbf{w}_{,i}(\mathbf{p})$ ve výrazu (123) tzv. adjungovanou úlohu ve tvaru

$$(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}(\mathbf{p})))^{\top} \mathbf{m}(\mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p})))^{\top}, \quad (129)$$

kde

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}) = \mathbf{S}^{\top}(\mathbf{S} \mathbf{w} - \mathbf{z}).$$

Vynásobíme-li rovnici (129) výrazem $\mathbf{w}_{,i}(\mathbf{p})$ dostaneme

$$(\mathbf{m}(\mathbf{p}))^{\top} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}(\mathbf{p})) \mathbf{w}_{,i}(\mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}))^{\top} \mathbf{w}_{,i}(\mathbf{p}) = \widehat{\mathcal{J}}_{,i}(\mathbf{p}).$$

Odtud a z (126) dostáváme

$$\widehat{\mathcal{J}}_{,i}(\mathbf{p}) = -(\mathbf{m}(\mathbf{p}))^{\top} \mathbf{R}_{,i}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_{,i}(\mathbf{p})), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{U}, i = 1, \dots, 2r.$$

7.2. Citlivostní analýza úlohy identifikace pro kontakt s dokonale tuhým podložím

Nyní se zaměříme na analýzu citlivosti úlohy identifikace pro kontakt Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím. S ohledem na výsledky odstavce 6.2 nebudeme provádět analýzu citlivosti pro původní úlohu identifikace (112) se stavovou úlohou ve tvaru nerovnosti (111), ale zaměříme se již na úlohu (114) s penalizačním parametrem $\varepsilon > 0$, která bude následně použita i pro numerické výpočty. Definujme nyní funkci $\widehat{\mathcal{J}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}) := \mathcal{J}(\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{U},$$

kde $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$ je řešením penalizované stavové úlohy (113) a množina \mathcal{U} je daná vztahem (110). Pak

$$\widehat{\mathcal{J}}_{,i}(\mathbf{p}) := \frac{\partial}{\partial p_i} \widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})))^\top \mathbf{w}_{\varepsilon,i}(\mathbf{p}), \quad (130)$$

kde $\nabla_{\mathbf{v}}$ značí gradient $\mathcal{J} : \mathbf{v} \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ a $\mathbf{w}_{\varepsilon,i}(\mathbf{p}) := \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})$. K vyeliminování členu $\mathbf{w}_{\varepsilon,i}$ ve vztahu (130) použijeme i v tomto případě adjungovanou úlohu. Pro tyto účely nejprve definujme funkci $\mathbf{R} : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ předpisem

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) := (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{v} + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}'(\mathbf{v}) - \mathbf{q}(\mathbf{p}), \quad (131)$$

s použitím stejného značení matic a vektorů jako v odstavci 6.2. Je zřejmé, že $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})$ je řešení úlohy (113) právě tehdy, když platí rovnost

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})) = \mathbf{0}.$$

Odtud dále derivováním podle parametru p_i , $i = 1, \dots, 2r$, obdržíme následující systém rovnic

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})) \mathbf{w}_{\varepsilon,i} = -\mathbf{R}_{,i}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})), \quad (132)$$

kde $\mathbf{R}_{,i} := \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbf{R}$ a $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}$ značí gradient funkce \mathbf{R} vzhledem k proměnné \mathbf{v} . Z definice (131) dále plyne

$$\mathbf{R}_{,i}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p}))_{,i} \mathbf{v} + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v})_{,i} \mathbf{v} - \mathbf{q}_{,i}(\mathbf{p})$$

a také

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = I\mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P\mathbf{K}_2(\mathbf{p}) + \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{j}'(\mathbf{v}). \quad (133)$$

Výpočet nelineárního členu $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v})$ provedeme analogicky jako v předchozím odstavci s využitím vztahů (127) a (128). Tedy

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}) = 3\mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}^N.$$

Poslední člen výrazu (133), tedy gradient derivace penalizačního členu $\mathbf{j}'(\mathbf{v})$, je ve tvaru

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{j}'(\mathbf{v}) = (j_{i,l}(\mathbf{v}))_{i,l=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N,$$

kde

$$j_{i,l}(\mathbf{v}) = \int_{M_{il}} (g - v_h)^+ \varphi_i \varphi_l \, dx, \quad v_h \in V_h$$

a $M_{il} = \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_l$. Jak již bylo řečeno, k vyeliminování členu $\mathbf{w}_{\varepsilon,i}(\mathbf{p})$ ve vztahu (130) použijeme adjungovanou úlohu ve tvaru

$$(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{p})))^{\top} \mathbf{m}(\mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{J}(\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{p})))^{\top}, \quad (134)$$

kde $\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{J}(\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{p}))$ je opět dáno vztahem $\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \mathbf{S}^{\top}(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{z})$. Vynásobíme-li rovnost (134) výrazem $\mathbf{w}_{\varepsilon,i}$ dostaneme

$$(\mathbf{m}(\mathbf{p}))^{\top} \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{p})) \mathbf{w}_{\varepsilon,i}(\mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{J}(\mathbf{w}_{\varepsilon}))^{\top} \mathbf{w}_{\varepsilon,i}(\mathbf{p}) = \widehat{\mathcal{J}}_i(\mathbf{p}).$$

Odtud a užitím vztahu (132) dostáváme

$$\widehat{\mathcal{J}}_i(\mathbf{p}) = -(\mathbf{m}(\mathbf{p}))^{\top} \mathbf{R}_{,i}(\mathbf{p}, \mathbf{w}_{\varepsilon,i}(\mathbf{p})), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{U}, i = 1, \dots, 2r.$$

7.3. Citlivostní analýza úlohy identifikace pro kontakt s elasticky deformovatelným podložím

V závěrečné části této kapitoly se budeme zabývat analýzou citlivosti úlohy identifikace pro kontakt Gaova nosníku s elasticky deformovatelným podložím. S ohledem na výsledky uvedené v odstavci 6.3 nebudeme uvažovat původní nehladkou úlohu identifikace ve tvaru (119), ale již přímo regularizovanou úlohu (121) s regularizačním parametrem

$\delta > 0$. Podobně jako v předchozích odstavcích i v tomto případě uvažujme algebraickou reprezentaci $\widehat{\mathcal{J}} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionalu \mathcal{J} definovanou předpisem

$$\widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{k}) := \mathcal{J}(\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})), \quad \mathbf{k} \in \mathbf{U},$$

kde $\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^N$ je řešením regularizovaného stavového problému (120) a množina \mathbf{U} je definovaná v (115). Pak lze psát

$$\widehat{\mathcal{J}}_{,i}(\mathbf{k}) := \frac{\partial}{\partial k_i} \widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{k}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})))^\top \mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k}), \quad (135)$$

kde $\nabla_{\mathbf{v}}$ značí opět gradient $\mathcal{J} : \mathbf{v} \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ a $\mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k}) := \frac{\partial}{\partial k_i} \mathbf{w}(\mathbf{k})$. K vyeeliminování členu $\mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k})$ ve vztahu (135) použijeme znovu adjungovanou úlohu. Nejprve regularizovanou stavovou úlohu (120) zapíšeme ekvivalentně ve tvaru

$$\mathbf{R}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})) = \mathbf{0},$$

kde funkce $\mathbf{R} : \mathbf{U} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ je definovaná vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) := & \left(E I \mathbf{K}_1 - P(1 - \nu^2) \mathbf{K}_2 + E(1 - \nu^2) t b \mathbf{K}_3(\mathbf{v}) \right) \mathbf{v} - \\ & - b(1 - \nu^2) \mathbf{g}_\delta(\mathbf{k}, \mathbf{v}) - (1 - \nu^2) \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (136)$$

Odtud derivováním podle k_i , $i = 1, \dots, s$, dostáváme

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})) \mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k}) = -\mathbf{R}_{,i}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})), \quad (137)$$

kde $\mathbf{R}_{,i} := \frac{\partial}{\partial k_i} \mathbf{R}$ a $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}$ značí gradient \mathbf{R} vzhledem k \mathbf{v} . Ze definice (136) dále plyne, že

$$\mathbf{R}_{,i}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = -b(1 - \nu^2) \mathbf{g}_{\delta,i}(\mathbf{k}, \mathbf{v}),$$

a

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = & E I \mathbf{K}_1 - P(1 - \nu^2) \mathbf{K}_2 + E(1 - \nu^2) t b \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{v})\mathbf{v}) - \\ & - b(1 - \nu^2) \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{g}_\delta(\mathbf{k}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (138)$$

Z předchozích odstavců již víme, že

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{K}_3(\mathbf{v})\mathbf{v}) = 3\mathbf{K}_3(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Dále, poslední člen ve výrazu (138) je matice

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{g}_{\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = (g_{i,l}(\mathbf{k}, \mathbf{v}))_{i,l=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N,$$

jejíž prvky jsou definované vztahem

$$g_{i,l}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \int_{M_{il}} k \left(1 + \frac{g - v_h}{\sqrt{(g - v_{\delta h})^2 + \delta^2}} \right) \varphi_i \varphi_l dx, \quad v_h \in V_h$$

a $M_{il} = \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_l$. K eliminaci členu $\mathbf{w}_{\delta,i}$ ve výrazu (135) použijeme adjungovanou úlohu ve tvaru

$$(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_{\delta}(\mathbf{k})))^{\top} \mathbf{m}(\mathbf{k}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_{\delta}(\mathbf{k})))^{\top}, \quad (139)$$

kde

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \mathbf{S}^{\top} (\mathbf{S} \mathbf{v} - \mathbf{z}).$$

Vynásobením rovnosti (139) členem $\mathbf{w}_{\delta,i}$ obdržíme

$$(\mathbf{m}(\mathbf{k}))^{\top} (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_{\delta}(\mathbf{k}))) \mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_{\delta}))^{\top} \mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k}) = \widehat{\mathcal{J}}_i(\mathbf{k}).$$

Odtud a využitím vztahu (137) definujeme složky gradientu funkcionálu \mathcal{J} vzhledem k proměnné \mathbf{k} vztahem

$$\widehat{\mathcal{J}}_{,i}(\mathbf{k}) = -(\mathbf{m}(\mathbf{k}))^{\top} \mathbf{R}_{,i}(\mathbf{k}, \mathbf{w}_{\delta,i}(\mathbf{k})), \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbf{U}, i = 1, \dots, s.$$

8. Příklady

V této kapitole si předvedeme jednoduché modelové příklady pro všechny tři úlohy identifikace studované v předchozích kapitolách. K výpočtům jsme použili matematický software MATLAB.

8.1. Příklad identifikace parametrů v úloze ohybu

Uvažujme nelineární Gaův nosník, který je rozdělen na r stejně dlouhých, materiálově homogenních segmentů, tzn. každý segment je popsán dvojicí materiálových parametrů $p_i = (E_i, \nu_i)$, $i = 1, \dots, r$. Numerické výpočty budou předvedeny pro prostě podepřený nosník, tj. nosník s okrajovými podmínkami (B1). Nejprve se podíváme na řešení samotné úlohy ohybu Gaova nosníku. Z této úlohy pak následně vygenerujeme vstupní parametry pro úlohu identifikace parametrů nosníku.

Nechť je pro Gaův nosník dána

- tloušťka nosníku $t = 0.1\text{m}$,
- šířka nosníku $b = 0.1\text{m}$,
- délka nosníku $L = 10\text{m}$.

Na nosník působí

- po celé délce vertikální zatížení $q = -5 \cdot 10^2 \text{Nm}^{-1}$,
- axiální síla $P = 10^4 \text{N}$ působící v koncovém bodě $x = L$.

8.1.1. Úloha ohybu Gaova nosníku

Uvažujme nyní pro úlohu ohybu Gaova nosníku vstupní data daná výše. Dále je potřeba ještě zadat materiálové konstanty nosníku, tedy Youngův modul pružnosti E a Poissonovu konstantu ν .

A. ÚLOHA S JEDNÍM SEGMENTEM

Nejprve budeme uvažovat nejjednodušší modelovou situaci, kdy jsou tyto konstanty po celé délce nosníku stejné, tedy máme jeden segment, tj. $r = 1$. Nechť

$$E_1 = 2.1 \cdot 10^{11} \text{Pa}, \quad \nu_1 = 0.3. \quad (140)$$

Pokud budou splněny předpoklady (P1), (P2) a (P3) uvedené na straně 16, bude dle Věty 2.1 existovat jediné řešení úlohy ohybu (6). Platnost předpokladů (P1) a (P2) je zřejmá. Co se týká platnosti předpokladu (P3), je potřeba vypočítat Eulerovu kritickou sílu P_{cr}^E dle vzorce (11). S ohledem na vstupní data, vztahy (3), (11) a okrajové podmínky (B1) dostáváme

$$\bar{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E I}{(1 - \nu^2) L^2} = \frac{\pi^2 E b^3 t}{3(1 - \nu^2) L^2} = 7.592 \cdot 10^5 \text{N}.$$

Protože $P = 10^4 \text{N}$, je $P < \bar{P}$ a tedy máme zaručenu existenci jediného řešení úlohy ohybu (6), kterou lze ekvivalentně zformulovat jako minimalizaci funkcionálu celkové potenciální energie, viz (8).

Diskretizací uvažované úlohy s krokem $h = 10/36$ dostaneme algebraickou formulaci ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{72} \text{ takové, že} \\ (I \mathbf{K}_1 - P \mathbf{K}_2) \mathbf{w} + \mathbf{K}_3(\mathbf{w}) \mathbf{w} = \mathbf{q}, \end{cases} \quad (141)$$

kde matice \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , $\mathbf{K}_3(\mathbf{v})$ a vektor \mathbf{q} jsou definované vztahy v kapitole 6.1. Vzhledem k faktu, že nelineární matice $\mathbf{K}_3(\mathbf{v})$ závisí na \mathbf{v} , nelze nalézt řešení úlohy (141) přímým výpočtem, proto pro výpočet řešení uvažované úlohy ohybu použijeme níže uvedený iterační Algoritmus 1.

Algoritmus 1 Výpočet řešení úlohy ohybu Gaova nosníku

- zvolíme $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{R}^{72}$
- pro $i = 0, 1, \dots$ až do splnění podmínek ukončovacího kritéria

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{w}^{i+1} \in \mathbb{R}^{72} \text{ takové, že} \\ \mathbf{T} \Delta \mathbf{w} = -\mathbf{t}, \\ \mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + \Delta \mathbf{w} \end{cases}$$

kde

$$\mathbf{T} = I \mathbf{K}_1 - P \mathbf{K}_2 + 3\mathbf{K}_3(\mathbf{w}^i)$$

a

$$\mathbf{t} = (I \mathbf{K}_1 - P \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3(\mathbf{w}^i)) \mathbf{w}^i - \mathbf{q}$$

Pro úlohu identifikace použijeme právě vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (141) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-3} \cdot (-0.148, -0.276, -0.370, -0.419, -0.419, -0.370, -0.276, -0.148)^\top. \quad (142)$$

B. ÚLOHA SE DVĚMA SEGMENTY

Nyní budeme uvažovat dva segmenty nosníku, tedy $r = 2$. Materiálové parametry nosníku jsou nyní dány jako dvě dvojice hodnot (E_i, ν_i) [Pa, ·], $i = 1, 2$, kde

$$(E_1, \nu_1) = (2.1 \cdot 10^{11}, 0.3), \quad (E_2, \nu_2) = (7.2 \cdot 10^{10}, 0.2). \quad (143)$$

V tomto případě s ohledem na Větu 2.2 víme, že bude zajištěna existence jediného řešení úlohy ohybu (6) za platnosti předpokladů (P1), (P2)* a (P3)* uvedených na straně 16, resp. 18. První dva předpoklady jsou splněny, zbývá ověřit předpoklad (P3)*, tedy zda je $P < \bar{P}_{\min}$, přičemž

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2},$$

kde E_{\min} , ν_{\min} jsou minimální hodnoty funkcí E , ν a konstanta \mathcal{K} nabývá hodnot dle zvolených okrajových podmínek, viz Tabulka 1. Tedy v našem případě je $E_{\min} = 7.2 \cdot 10^9$, $\nu_{\min} = 0.2$ a s ohledem na uvažované okrajové podmínky (B1) je $\mathcal{K} = 1$. Po dosazení všech vstupních hodnot dostáváme

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(1 - \nu_{\min}^2) L^2} = \frac{\pi^2 E_{\min} b^3 t}{3(1 - \nu_{\min}^2) L^2} = 2.467 \cdot 10^4 \text{N}.$$

Protože $P = 10^4 \text{N}$, je $P < \bar{P}_{\min}$ a tedy máme zaručenu existenci jediného řešení uvažované úlohy ohybu (6). Stejně jako v případě, kdy jsme uvažovali jeden segment nosníku, provedeme i nyní diskretizaci s krokem $h = 10/36$ a najdeme řešení algebraické formulace uvažované úlohy ohybu dle Algoritmu 1. Pro úlohu identifikace použijeme opět vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (141) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$, tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-2} \cdot (-0.949, -1.886, -2.799, -3.684, -4.444, -4.442, -3.539, -1.967)^\top. \quad (144)$$

C. ÚLOHA SE ČTYŘMI SEGMENTY

Jako poslední modelovou situaci si uvedeme úlohu ohybu pro nosník se čtyřmi segmenty, tedy $r = 4$. Na jednotlivých segmentech jsou nyní dány materiálové konstanty (E_i, ν_i) [Pa, ·], $i = 1, \dots, 4$, s těmito hodnotami

$$\begin{aligned} (E_1, \nu_1) &= (2.1 \cdot 10^{11}, 0.3), & (E_2, \nu_2) &= (7.2 \cdot 10^9, 0.2), \\ (E_3, \nu_3) &= (5 \cdot 10^{10}, 0.4), & (E_4, \nu_4) &= (2.1 \cdot 10^{11}, 0.3). \end{aligned} \quad (145)$$

Analogicky jako v situaci se dvěma segmenty nosníku ověříme i v tomto případě splnění předpokladu (P3)*. Platnost předpokladů (P1) a (P2)* je zřejmá. Pro uvažované materiálové konstanty nyní máme stejně jako v případě dvou segmentů $E_{\min} = 7.2 \cdot 10^9$, $\nu_{\min} = 0.2$. Pak tedy

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(1 - \nu_{\min}^2) L^2} = \frac{\pi^2 E_{\min} b^3 t}{3(1 - \nu_{\min}^2) L^2} = 2.467 \cdot 10^4 \text{N}.$$

Protože je $P = 10^4 \text{N} < \bar{P}_{\min}$, máme garantovanu existenci jediného řešení uvažované úlohy ohybu (6). Pro úlohu identifikace použijeme opět funkční hodnoty řešení (141) vypočítané pro diskretizaci s krokem $h = 10/36$ pomocí Algoritmu 1 v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-1} \cdot (-0.102, -0.203, -0.291, -0.321, -0.282, -0.222, -0.151, -0.076)^\top. \quad (146)$$

8.1.2. Úloha identifikace pro úlohu ohybu Gaova nosníku

Přikročme nyní k samotné úloze identifikace neznámých materiálových konstant E a ν Gaova nosníku. Připomeňme, že jsme pro jednoduchost zavedli značení po částech konstantní funkce $p := (E, \nu)$ a vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r})^\top \in \mathbb{R}^{2r}$, pro jehož složky platí $p_{2i-1} = E_i := E|_{K_i}$ a $p_{2i} = \nu_i := \nu|_{K_i}$, $i = 1, \dots, r$, kde K_i značí jednotlivé segmenty. Dále již budeme uvažovat algebraickou formulaci úlohy identifikace ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{p}^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^*)) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p})), \\ \text{kde } \mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{72} \text{ je řešením (148)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^{72} \rightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (149).} \end{cases} \quad (147)$$

Stavová úloha je tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{p} \in \mathbf{U} \\ \text{najít } \mathbf{w} := \mathbf{w}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{72} \text{ takové, že} \\ (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{w} + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (148)$$

a funkce

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z})^\top(\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{72}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^8, \quad (149)$$

přičemž matice \mathbf{S} reprezentuje operátor restrikce z \mathbb{R}^{72} do \mathbb{R}^8 a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_8)^\top$ je vektor hodnot, které jsme vypočítali v předchozím odstavci pro tři různé varianty počtu segmentů. Ještě zbývá připomenout přípustnou množinu \mathbf{U} , která je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r}) \in \mathbb{R}^{2r} \mid 0 < E_{\min} \leq p_{2i-1} \leq E_{\max} < \infty, \\ 0 < p_{2i} \leq 0.5, \quad i = 1, \dots, r \}, \end{aligned}$$

$E_{\min} = 10^9 \text{Pa}$ a $E_{\max} = 8 \cdot 10^{11} \text{Pa}$ jsou dané meze pro Youngův modul pružnosti E . Naším úkolem je nyní najít materiálové parametry (E_i, ν_i) , $i = 1, \dots, r$, pro tři uvažované počty segmentů $r = 1$, $r = 2$ a $r = 4$. Tedy chceme na základě naměřených hodnot \mathbf{z} daných v (142), (144) a (146) odhadnou přesné hodnoty materiálových konstant Gaova nosníku (140), (143) a (145). K minimalizaci funkce \mathcal{J} ve tvaru (149) v rámci úlohy (147) je použita metoda sekvenciálního kvadratického programování *fmincon* implementovaná v softwaru Matlab.

A. ÚLOHA S JEDNÍM SEGMENTEM

Vektor počáteční aproximace \mathbf{p}^0 pro minimalizační proces byl zvolen následovně

$$\mathbf{p}_\varepsilon^0 = ((10^{11}, 0.4)).$$

Dosažené numerické výsledky pro úlohu (147) jsou uvedeny v Tabulce 2, kde *it* značí celkový počet iterací potřebný pro funkci *fmincon* a \mathbf{p}^* je výsledný vektor materiálových parametrů. V Tabulce 3 lze najít vstupní a výslednou hodnotu cenového funkcionálu. Na obrázku 3 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu. Pro přehlednost bylo použito logaritmické měřítko na ose y . Pro ověření kvality numerických výpočtů jsme použili relativní chyby

$$err_E^0 = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^0\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad \text{a} \quad err_E^* = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^*\|}{\|\mathbf{E}\|},$$

kde $\|\cdot\|$ značí Euklidovskou normu, E je v tomto případě skalár z (140) a vektory \mathbf{p}_E^0 , \mathbf{p}_E^* značí liché složky vektorů \mathbf{p}^0 a \mathbf{p}^* . Podobně jsme zavedli relativní chybu i pro druhý materiálový parametr

$$err_{\nu^0} = \frac{\|\boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_{\nu}^0\|}{\|\boldsymbol{\nu}\|} \quad \text{a} \quad err_{\nu^*} = \frac{\|\boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_{\nu}^*\|}{\|\boldsymbol{\nu}\|},$$

$\boldsymbol{\nu}$ je v tomto případě jednoho segmentu tedy skalár daný v (140). Vektory, respektive skaláry, \mathbf{p}_{ν}^0 a \mathbf{p}_{ν}^* značí sudé složky vektorů \mathbf{p}^0 a \mathbf{p}^* . Hodnoty relativních chyb lze najít v Tabulce 4.

<i>it</i>	\mathbf{p}^* [Pa]
14	(2.100 999 · 10 ¹¹ , 0.299 276)

Tabulka 2: Výsledky pro úlohu identifikace průhybu a 1 segment

$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^*))$
3.6262 · 10 ⁻⁶	4.9085 · 10 ⁻²¹

Tabulka 3: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro 1 segment

err_{E^0}	err_{E^*}	err_{ν^0}	err_{ν^*}
0.5240	4.7530 · 10 ⁻⁴	0.3366	0.0024

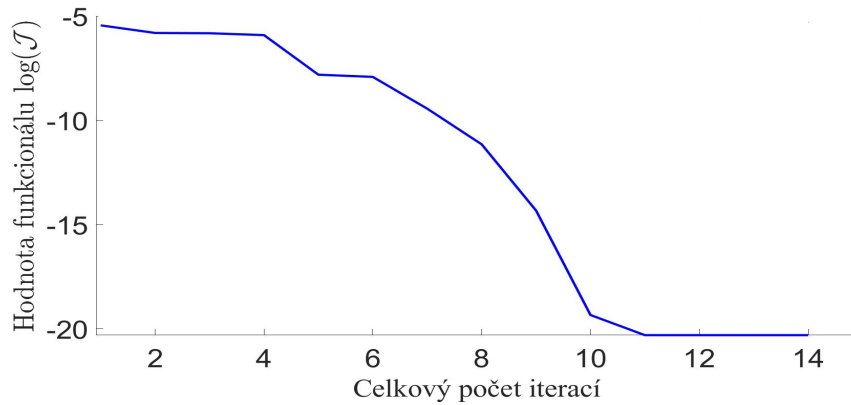
Tabulka 4: Hodnoty relativních chyb pro 1 segment

B. ÚLOHA SE DVĚMA SEGMENTY

Vektor počáteční aproximace \mathbf{p}^0 pro minimalizační proces byl zvolen následovně

$$\mathbf{p}^0 = ((10^{11}, 0.4), (10^{11}, 0.4)).$$

Dosažené numerické výsledky pro úlohu (147) jsou uvedeny v Tabulce 5, kde *it* značí celkový počet iterací potřebný pro funkci *fmincon* a \mathbf{p}_e^* je výsledný vektor materiálových parametrů.



Obrázek 3: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro 1 segment

V Tabulce 6 lze najít vstupní a výslednou hodnotu cenového funkcionálu. Na obrázku 4 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu. Pro přehlednost bylo opět použito logaritmické měřítko na ose y . Pro ověření kvality výpočtu jsme opět zvolili kombinaci relativních chyb

$$err_E^0 = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^0\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad \text{a} \quad err_E^* = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^*\|}{\|\mathbf{E}\|},$$

kde $\|\cdot\|$ značí Euklidovskou normu, \mathbf{E} je vektor se složkami E_i , $i = 1, 2$ z (143) a vektory \mathbf{p}_E^0 a \mathbf{p}_E^* značí liché složky vektorů \mathbf{p}^0 a \mathbf{p}^* . Podobně pro druhý materiálový parametr

$$err_v^0 = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{p}_v^0\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{a} \quad err_v^* = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{p}_v^*\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

příčemž \mathbf{v} je vektor se složkami v_i , $i = 1, 2$ z (143) a vektory \mathbf{p}_v^0 a \mathbf{p}_v^* značí sudé složky vektorů \mathbf{p}^0 a \mathbf{p}^* . Hodnoty relativních chyb lze najít v Tabulce 7.

it	\mathbf{p}^* [Pa]
108	$((2.090\,398 \cdot 10^{11}, 0.310\,093), (7.117\,378 \cdot 10^9, 0.235\,707))$

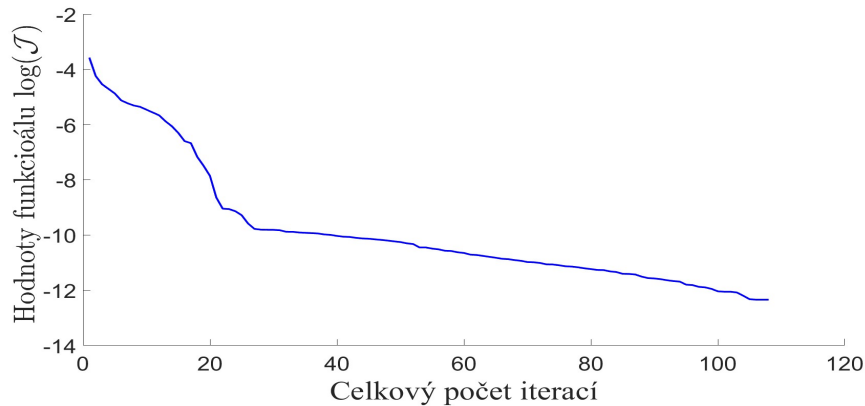
Tabulka 5: Výsledky pro úlohu identifikace průhybu se 2 segmenty

$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^*))$
$2.6661 \cdot 10^{-4}$	$4.5582 \cdot 10^{-13}$

Tabulka 6: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro 2 segmenty

err_E^0	err_E^*	err_v^0	err_v^*
0.6848	0.0046	0.4808	0.0953

Tabulka 7: Hodnoty relativních chyb pro 2 segmenty



Obrázek 4: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro 2 segmenty

C. ÚLOHA SE ČTYŘMI SEGMENTY

Nyní se podíváme na identifikaci pouze jednoho materiálového parametru, a to konkrétně Youngova modulu E . Budeme uvažovat dané hodnoty Poissonovy konstanty ν na všech čtyřech segmentech z (145). Naším úkolem nyní bude na základě naměřených hodnot (146) odhadnout přesné hodnoty Youngova modulu E v (145). Postup je analogický jako v předchozích příkladech, nyní jen zafixujeme známé parametry ν_i , $i = 1, \dots, 4$. Je třeba si také uvědomit, že parametr \mathbf{p} je nyní poskládán jen ze složek E_i , $i = 1, \dots, 4$. Vektor počáteční aproximace \mathbf{p}^0 pro minimalizační proces byl zvolen následovně

$$\mathbf{p}_\varepsilon^0 = (1, 1, 1, 1) \cdot 10^{11}.$$

Dosažené numerické výsledky pro úlohu (147), nyní redukovanou pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4$, jsou uvedeny v Tabulce 8, kde it opět značí celkový počet iterací potřebný pro funkci $fmincon$ a \mathbf{p}^* je výsledný vektor materiálového parametru. Dále podobně, v Tabulce 9 lze najít vstupní a výslednou hodnotu cenového funkcionálu. Na obrázku 5 lze pozorovat pokles hodnoty ce-

nového funkcionálu během iteračního procesu v logaritmickém měřítku. Pro ověření kvality výpočtu jsme zvolili relativní chyby

$$err_{E^0} = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^0\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad \text{a} \quad err_{E^*} = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^*\|}{\|\mathbf{E}\|},$$

jejichž hodnoty lze najít v Tabulce 10.

it	\mathbf{p}^* [Pa]
76	$(2.100\,126 \cdot 10^{11}, 7.199\,099 \cdot 10^9, 4.999\,175 \cdot 10^{10}, 2.100\,850 \cdot 10^{11})$

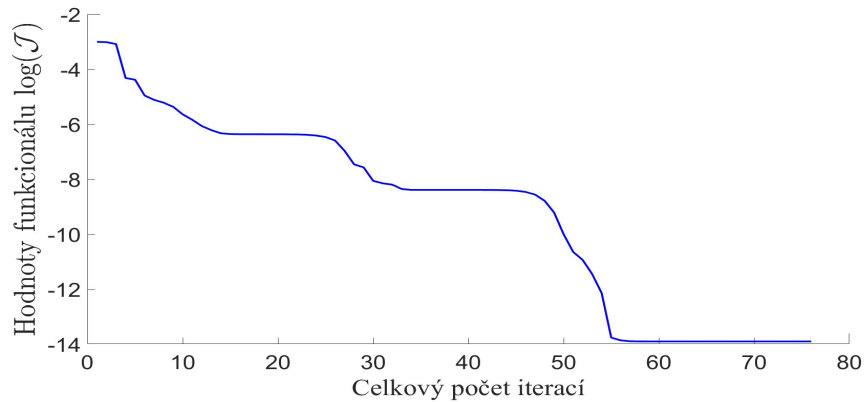
Tabulka 8: Výsledky pro úlohu identifikace průhybu se 4 segmenty

$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}^*))$
$9.7164 \cdot 10^{-4}$	$1.2367 \cdot 10^{-14}$

Tabulka 9: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro 4 segmenty.

err_{E^0}	err_{E^*}
0.6238	$2.8653 \cdot 10^{-4}$

Tabulka 10: Hodnoty relativních chyb pro 4 segmenty



Obrázek 5: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro 4 segmenty

8.2. Příklady identifikace parametrů nosníku v kontaktní úloze s dokonale tuhým podložím

Uvažujme nelineární Gaův nosník, který je rozdělen na r stejně dlouhých, materiálově homogenních segmentů, tzn. každý segment je popsán dvojicí materiálových parametrů $p_i = (E_i, \nu_i)$, $i = 1, \dots, r$. Numerické výpočty budou předvedeny pro oboustranně vetknutý nosník, tj. nosník s okrajovými podmínkami (B2). Nejprve se podíváme na řešení samotné kontaktní úlohy Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím. Z této úlohy pak následně vygenerujeme vstupní parametry pro úlohu identifikace parametrů nosníku.

Nechť je dále pro Gaův nosník dána

- tloušťka nosníku $t = 0.1\text{m}$,
- šířka nosníku $b = 0.1\text{m}$,
- délka nosníku $L = 10\text{m}$.

Na nosník přitom působí

- konstantní vertikální zatížení $q = -8 \cdot 10^2 \text{Nm}^{-1}$, které působí po celé délce nosníku,
- axiální síla $P = 10^5 \text{N}$ působící v koncovém bodě $x = L$.

Mezi nosníkem a dokonale tuhým překážkou je mezera, která je popsána funkcí g . Tu uvažujme jako konstantní funkci $g = -0.001\text{m}$ na celém intervalu $\langle 0, 10 \rangle$.

8.2.1. Kontaktní úloha Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím

Uvažujme nyní pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s dokonale tuhým překážkou vstupní data daná výše. Dále je potřeba ještě zadat materiálové konstanty nosníku, tedy Youngův modul pružnosti E a Poissonovu konstantu ν .

A. ÚLOHA S JEDNÍM SEGMENTEM

Nejprve budeme uvažovat nejjednodušší modelovou situaci, kdy jsou tyto konstanty po celé délce nosníku stejné, tedy máme jeden segment, tj. $r = 1$. Nechť

$$E_1 = 2.1 \cdot 10^{11} \text{Pa}, \quad \nu_1 = 0.3. \quad (150)$$

Pokud budou splněny předpoklady (P1), (P2) a (P3) uvedené na straně 16, bude dle Věty 3.1 existovat jediné řešení kontaktní úlohy (14). Platnost předpokladů (P1) a (P2) je zřejmá. Co se týká platnosti předpokladu (P3), je potřeba vypočítat Eulerovu kritickou sílu P_{cr}^E dle vzorce (11). S ohledem na vstupní data, vztahy (3), (11) a okrajové podmínky (B2) dostáváme

$$\bar{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E I}{(1 - \nu^2)(0.5 L)^2} = \frac{8 \pi^2 E b^3 t}{3(1 - \nu^2) L^2} = 6.074 \cdot 10^6 \text{N}.$$

Protože $P = 10^5 \text{N}$, je $P < \bar{P}$ a tedy máme zaručenu existenci jediného řešení uvažované kontaktní úlohy (14), kterou lze ekvivalentně zformulovat jako minimalizaci funkcionálu celkové potenciální energie na konvexní množině K , viz (16).

Diskretizací této kontaktní úlohy s krokem $h = 10/36$ dostaneme algebraickou formulaci ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{w} \in \mathbf{K} \text{ takové, že} \\ F(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} F(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (151)$$

kde funkce $F(\mathbf{v})$ je daná vztahem

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \left(I \mathbf{K}_1 - P \mathbf{K}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_3(\mathbf{v}) \right) \mathbf{v} - \mathbf{q}^\top \mathbf{v}$$

a množina \mathbf{K} je

$$\mathbf{K} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{70} : \mathbf{B}\mathbf{v} \geq \mathbf{g} \}.$$

Matice \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , $\mathbf{K}_3(\mathbf{v})$, \mathbf{B} a vektory \mathbf{q} , \mathbf{g} jsou definované vztahy v kapitole 6.2. Vzhledem k faktu, že nelineární matice $\mathbf{K}_3(\mathbf{v})$ závisí na \mathbf{v} , nelze nalézt řešení úlohy (151) přímým výpočtem, proto pro výpočet řešení uvažované kontaktní úlohy použijeme níže uvedený iterační Algoritmus 2.

Úloha (152) je úloha konvexního kvadratického programování. K jejímu řešení jsme použili funkci *quadprog*. Pro úlohu identifikace použijeme právě vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (152) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-3} \cdot (-0.167, -0.500, -0.808, -0.979, -0.979, -0.808, -0.500, -0.167)^\top. \quad (153)$$

Algoritmus 2 Výpočet řešení kontaktní úlohy Gaova nosníku a dokonale tuhé překážky

- zvolíme $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{R}^{70}$
- pro $i = 0, 1, \dots$ až do splnění podmínek ukončovacího kritéria

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{w}^{i+1} \in \mathbf{K} \text{ takové, že} \\ F(\mathbf{w}^{i+1}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} F_i(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (152)$$

kde

$$F_i(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \left(I \mathbf{K}_1 - P \mathbf{K}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_3(\mathbf{w}^i) \right) \mathbf{v} - \mathbf{q}^\top \mathbf{v}$$

a

$$\mathbf{K} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{70} : \mathbf{B}\mathbf{v} \geq \mathbf{g} \}.$$

B. ÚLOHA SE DVĚMA SEGMENTY

Nyní budeme uvažovat dva segmenty nosníku, tedy $r = 2$. Materiálové parametry nosníku jsou nyní dány jako dvě dvojice hodnot (E_i, ν_i) [Pa, \cdot], $i = 1, 2$, kde

$$(E_1, \nu_1) = (2.1 \cdot 10^{11}, 0.3), \quad (E_2, \nu_2) = (7.2 \cdot 10^9, 0.2). \quad (154)$$

V tomto případě s ohledem na Větu 3.2 víme, že bude zajištěna existence jediného řešení uvažované kontaktní úlohy (14) za platnosti předpokladů (P1), (P2)* a (P3)* uvedených na straně 16, resp. 18. První dva předpoklady jsou splněny, zbývá ověřit předpoklad (P3)*, tedy zda je $P < \bar{P}_{\min}$, přičemž

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2},$$

kde E_{\min} , ν_{\min} jsou minimální hodnoty funkcí E , ν a konstanta \mathcal{K} nabývá hodnot dle zvolených okrajových podmínek, viz Tabulka 1. Tedy v našem případě je $E_{\min} = 7.2 \cdot 10^9$, $\nu_{\min} = 0.2$ a s ohledem na uvažované okrajové podmínky (B2) je $\mathcal{K} = 0.5$. Po dosazení všech vstupních hodnot dostáváme

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(1 - \nu_{\min}^2)(0.5 L)^2} = \frac{8 \pi^2 E_{\min} b^3 t}{3(1 - \nu_{\min}^2) L^2} = 1.974 \cdot 10^5 \text{N}.$$

Protože $P = 10^5 \text{N}$, je $P < \bar{P}_{\min}$ a tedy máme zaručenu existenci jediného řešení uvažované kontaktní úlohy (14). Stejně jako v případě, kdy jsme uvažovali jeden segment nosníku,

provedeme diskretizaci s krokem $h = 10/36$ a najdeme řešení algebraické formulace uvažované kontaktní úlohy dle Algoritmu 2. Pro úlohu identifikace použijeme opět vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (152) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-3} \cdot (-0.140, -0.423, -0.701, -0.908, -1.000, -1.000, -0.991, -0.579)^\top. \quad (155)$$

C. ÚLOHA SE ČTYŘMI SEGMENTY

Jako poslední modelovou úlohu si uvedeme kontaktní úlohu pro nosník se čtyřmi segmenty, tedy $r = 4$. Na jednotlivých segmentech jsou nyní dány materiálové konstanty (E_i, ν_i) [Pa, ·], $i = 1, \dots, 4$, s hodnotami

$$\begin{aligned} (E_1, \nu_1) &= (2.1 \cdot 10^{11}, 0.3), & (E_2, \nu_2) &= (7.2 \cdot 10^9, 0.2), \\ (E_3, \nu_3) &= (5 \cdot 10^{10}, 0.45), & (E_4, \nu_4) &= (2.1 \cdot 10^{11}, 0.3). \end{aligned} \quad (156)$$

Analogicky jako v situaci se dvěma segmenty nosníku ověříme i v tomto případě splnění předpokladu (P3)*. platnost předpokladu (P1) a (P2)* je zřejmá. Pro uvažované materiálové konstanty nyní máme $E_{\min} = 7.2 \cdot 10^9$, $\nu_{\min} = 0.2$, a tedy

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{1 - \nu_{\min}^2} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E_{\min} I}{(1 - \nu_{\min}^2)(0.5L)^2} = \frac{8 \pi^2 E_{\min} b^3 t}{3(1 - \nu_{\min}^2) L^2} = 1.974 \cdot 10^5 \text{N}.$$

I v tomto případě je $P = 10^5 \text{N} < \bar{P}_{\min}$, což zajišťuje existenci jediného řešení uvažované kontaktní úlohy (14). Pro úlohu identifikace použijeme opět funkční hodnoty řešení úlohy (152) vypočítané pro diskretizaci s krokem $h = 10/36$ pomocí Algoritmu 2 v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-3} \cdot (-0.156, -0.495, -0.900, -1.000, -0.979, -0.807, -0.474, -0.152)^\top. \quad (157)$$

8.2.2. Úloha identifikace pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím

Přikročíme nyní k samotné úloze identifikace neznámých materiálových konstant E a ν Gaova nosníku. Připomeňme, že jsme pro jednoduchost zavedli značení po částech konstantní funkce $p := (E, \nu)$ a vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r})^\top \in \mathbb{R}^{2r}$, pro jehož komponenty platí

$p_{2i-1} = E_i := E|_{K_i}$ a $p_{2i} = \nu_i := \nu|_{K_i}$, $i = 1, \dots, r$, kde K_i značí jednotlivé segmenty. Dále již budeme uvažovat algebraickou formulaci penalizované úlohy identifikace ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{p}_\varepsilon^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}_\varepsilon^*)) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p})), \\ \text{kde } \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{70} \text{ je řešením (159)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^{70} \rightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (160).} \end{cases} \quad (158)$$

Stavová úloha je tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{p} \in \mathbf{U} \text{ a } \varepsilon > 0, \\ \text{najít } \mathbf{w}_\varepsilon := \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{70} \text{ takové, že} \\ (I \mathbf{K}_1(\mathbf{p}) - P \mathbf{K}_2(\mathbf{p})) \mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{K}_3(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\varepsilon) \mathbf{w}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}'(\mathbf{w}_\varepsilon) = \mathbf{q}(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (159)$$

kde

$$\mathbf{j}'(\mathbf{w}_\varepsilon) = (j'_i(\mathbf{w}_\varepsilon))_{i=1}^{70}, \quad j'_i(\mathbf{w}_\varepsilon) = - \int_{\text{supp } \varphi_i} ((g - w_{\varepsilon h})^+)^2 \varphi_i \, dx,$$

a funkce

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\mathbf{S} \mathbf{w} - \mathbf{z})^\top (\mathbf{S} \mathbf{w} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{70}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^8, \quad (160)$$

přičemž matice \mathbf{S} reprezentuje operátor restrikce z \mathbb{R}^{70} do \mathbb{R}^8 a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_8)^\top$ je vektor hodnot, které jsme vypočítali v předchozím odstavci pro tři různé varianty počtu segmentů. Ještě zbývá připomenout přípustnou množinu \mathbf{U} , která je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2r}) \in \mathbb{R}^{2r} \mid 0 < E_{\min} \leq p_{2i-1} \leq E_{\max} < \infty, \\ 0 < p_{2i} \leq 0.5, \quad i = 1, \dots, r \}, \end{aligned}$$

kde $E_{\min} = 10^9 \text{Pa}$ a $E_{\max} = 8 \cdot 10^{11} \text{Pa}$ jsou dané meze pro Youngův modul pružnosti E . Naším úkolem je nyní najít materiálové parametry (E_i, ν_i) , $i = 1, \dots, r$, pro $r = 1$, $r = 2$ a $r = 4$. Tedy chceme na základě naměřených hodnot \mathbf{z} daných v (153), (155) a (157) odhadnout přesné hodnoty materiálových konstant Gaova nosníku (150), (154) a (156). Úloha identifikace bude postupně řešena pro tři různé hodnoty penalizačního parametru $\varepsilon = 10^{-8}$, 10^{-10} a 10^{-12} . K minimalizaci funkce \mathcal{J} ve tvaru (160) v rámci úlohy (158) je použita metoda sekvenciálního kvadratického programování *fmincon* implementovaná v softwaru Matlab. Penalizovaná stavová úloha (159) je řešena pomocí Newtonovy metody.

A. ÚLOHA S JEDNÍM SEGMENTEM

Vektor počáteční aproximace \mathbf{p}_ε^0 pro minimalizační proces byl zvolen následovně

$$\mathbf{p}_\varepsilon^0 = ((10^{11}, 0.4)).$$

Dosažené numerické výsledky pro úlohu (158) jsou uvedeny v Tabulce 11, kde it značí celkový počet iterací potřebný pro funkci $fmincon$ a \mathbf{p}_ε^* je výsledný vektor materiálových parametrů. V Tabulce 12 lze najít vstupní a výslednou hodnotu cenového funkcionálu. Na obrázku 6 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu. Pro přehlednost bylo použito logaritmické měřítko na ose y . Pro ověření kvality numerických výpočtů jsme opět zvolili kombinaci relativních chyb

$$err_E^0 = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_{\varepsilon,E}^0\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad \text{a} \quad err_E^* = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_{\varepsilon,E}^*\|}{\|\mathbf{E}\|},$$

kde $\|\cdot\|$ značí Euklidovskou normu, \mathbf{E} je v tomto případě skalár z (150) a vektory $\mathbf{p}_{\varepsilon,E}^0$, $\mathbf{p}_{\varepsilon,E}^*$ značí liché složky vektorů \mathbf{p}_ε^0 , \mathbf{p}_ε^* . Podobně definujeme relativní chybu pro druhý materiálový parametr

$$err_v^0 = \frac{\|\boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^0\|}{\|\boldsymbol{\nu}\|} \quad \text{a} \quad err_v^* = \frac{\|\boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^*\|}{\|\boldsymbol{\nu}\|},$$

$\boldsymbol{\nu}$ je v tomto případě jednoho segmentu tedy skalár daný v (150). Vektory, respektive skaláry, $\mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^0$ a $\mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^*$ značí sudé složky vektorů \mathbf{p}_ε^0 a \mathbf{p}_ε^* . Hodnoty relativních chyb lze najít v Tabulce 13.

$r = 1$	it	\mathbf{p}_ε^* [Pa, ·]
$\varepsilon = 10^{-8}$	19	$(2.104\,964 \cdot 10^{11}, 0.296\,392)$
$\varepsilon = 10^{-10}$	20	$(2.104\,990 \cdot 10^{11}, 0.296\,374)$
$\varepsilon = 10^{-12}$	17	$(2.105\,015 \cdot 10^{11}, 0.296\,356)$

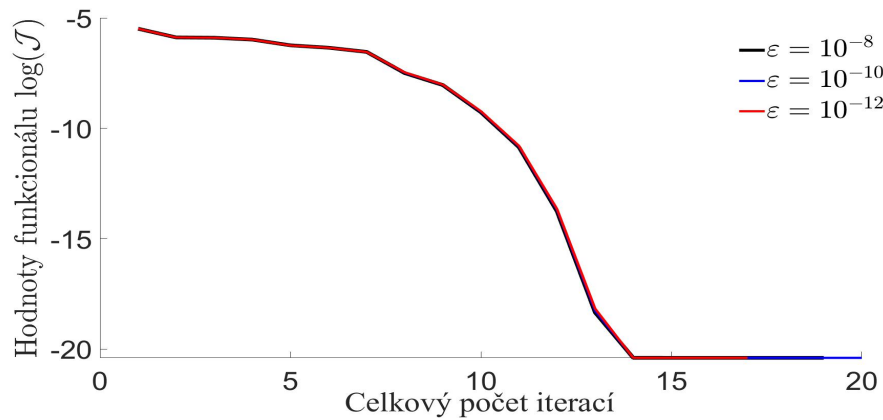
Tabulka 11: Výsledky pro úlohu identifikace parametrů nosníku s 1 segmentem a hodnoty ε

$r = 1$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}_\varepsilon^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}_\varepsilon^*))$
$\varepsilon = 10^{-8}$	$3.2417 \cdot 10^{-6}$	$1.6461 \cdot 10^{-31}$
$\varepsilon = 10^{-10}$	$3.2420 \cdot 10^{-6}$	$4.0293 \cdot 10^{-21}$
$\varepsilon = 10^{-12}$	$3.2420 \cdot 10^{-6}$	$8.1154 \cdot 10^{-20}$

Tabulka 12: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé ε a 1 segment

$r = 1$	err_E^0	err_E^*	err_v^0	err_v^*
$\varepsilon = 10^{-8}$	0.5249	0.0024	0.3496	0.0122
$\varepsilon = 10^{-10}$	0.5249	0.0024	0.3496	0.0122
$\varepsilon = 10^{-12}$	0.5249	0.0024	0.3497	0.0123

Tabulka 13: Hodnoty relativních chyb pro 1 segment a hodnoty ε



Obrázek 6: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro volby ε a 1 segment

B. ÚLOHA SE DVĚMA SEGMENTY

Vektor počáteční aproximace \mathbf{p}_ε^0 pro minimalizační proces byl zvolen následovně

$$\mathbf{p}_\varepsilon^0 = ((10^{11}, 0.4), (10^{11}, 0.4)).$$

Dosažené numerické výsledky pro úlohu (158) jsou uvedeny v Tabulce 14, kde it značí celkový počet iterací potřebný pro funkci $fmincon$ a \mathbf{p}_ε^* je výsledný vektor materiálových parametrů. V Tabulce 15 lze najít vstupní a výslednou hodnotu cenového funkcionálu. Na obrázku 7 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního pro-

cesu. Pro přehlednost bylo opět použito logaritmické měřítko na ose y . Pro ověření kvality numerických výpočtů jsme opět zvolili kombinaci relativních chyb

$$err_E^0 = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_{\varepsilon,E}^0\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad \text{a} \quad err_E^* = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_{\varepsilon,E}^*\|}{\|\mathbf{E}\|},$$

kde $\|\cdot\|$ značí Euklidovskou normu, \mathbf{E} je vektor se složkami E_i , $i = 1, 2$ z (154) a vektory $\mathbf{p}_{\varepsilon,E}^0$ a $\mathbf{p}_{\varepsilon,E}^*$ značí liché složky vektorů \mathbf{p}_ε^0 a \mathbf{p}_ε^* . Podobně definujeme relativní chybu pro druhý materiálový parametr

$$err_v^0 = \frac{\|\boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^0\|}{\|\boldsymbol{\nu}\|} \quad \text{a} \quad err_v^* = \frac{\|\boldsymbol{\nu} - \mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^*\|}{\|\boldsymbol{\nu}\|},$$

$\boldsymbol{\nu}$ je vektor se složkami ν_i , $i = 1, 2$ z (154) a vektory $\mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^0$ a $\mathbf{p}_{\varepsilon,\nu}^*$ značí sudé složky vektorů \mathbf{p}_ε^0 a \mathbf{p}_ε^* . Hodnoty relativních chyb lze najít v Tabulce 16.

$r = 2$	it	\mathbf{p}_ε^* [Pa, ·]
$\varepsilon = 10^{-8}$	42	((2.111 700 · 10 ¹¹ , 0.291 271), (7.239 847 · 10 ⁹ , 0.186 220))
$\varepsilon = 10^{-10}$	44	((2.109 007 · 10 ¹¹ , 0.293 361), (7.230 658 · 10 ⁹ , 0.189 435))
$\varepsilon = 10^{-12}$	43	((2.110 814 · 10 ¹¹ , 0.291691), (7.235 241 · 10 ⁹ , 0.187 807))

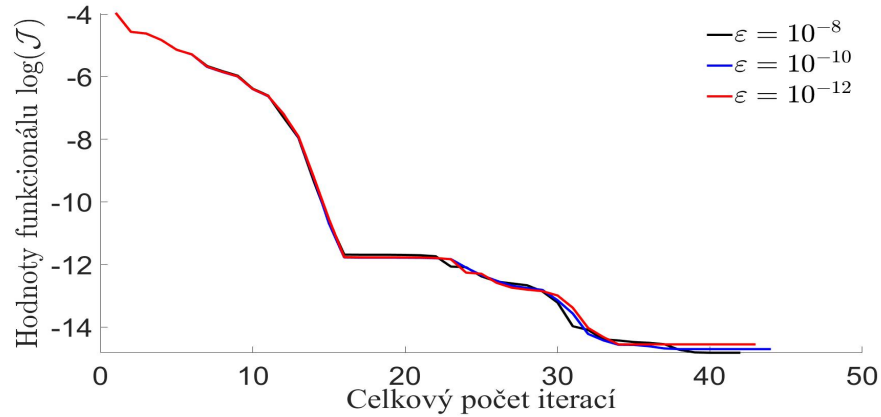
Tabulka 14: Výsledky pro úlohu identifikace parametrů nosníku pro 2 segmenty a hodnoty ε

$r = 2$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}_\varepsilon^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}_\varepsilon^*))$
$\varepsilon = 10^{-8}$	$1.1044 \cdot 10^{-4}$	$1.1912 \cdot 10^{-16}$
$\varepsilon = 10^{-10}$	$1.1066 \cdot 10^{-4}$	$1.4844 \cdot 10^{-15}$
$\varepsilon = 10^{-12}$	$1.1044 \cdot 10^{-4}$	$1.0302 \cdot 10^{-15}$

Tabulka 15: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé ε a 2 segmenty

$r = 2$	err_E^0	err_E^*	err_v^0	err_v^*
$\varepsilon = 10^{-8}$	0.6852	0.0055	0.6938	0.0472
$\varepsilon = 10^{-10}$	0.6851	0.0042	0.6759	0.0357
$\varepsilon = 10^{-12}$	0.6852	0.0051	0.6867	0.042

Tabulka 16: Hodnoty relativních chyb pro 2 segmenty a hodnoty ε



Obrázek 7: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro volby ε a 2 segmenty

C. ÚLOHA SE ČTYŘMI SEGMENTY

Nyní se podíváme na identifikaci pouze jednoho materiálového parametru, a to konkrétně Youngova modulu E . Budeme uvažovat dané hodnoty Poissonovy konstanty ν na všech čtyřech segmentech z (156). Naším úkolem nyní bude na základě naměřených hodnot (157) odhadnout přesné hodnoty Youngova modulu E v (156). Postup je analogický jako v předchozích příkladech, nyní jen zafixujeme známé parametry ν_i , $i = 1, \dots, 4$. Je třeba si také uvědomit, že parametr \mathbf{p} je nyní poskládán jen ze složek E_i , $i = 1, \dots, 4$. Vektor počáteční aproximace \mathbf{p}^0 pro minimalizační proces byl zvolen následovně

$$\mathbf{p}_\varepsilon^0 = (1, 1, 1, 1) \cdot 10^{11}.$$

Dosažené numerické výsledky pro úlohu (158), nyní redukovanou pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4$, jsou uvedeny v Tabulce 17, kde it opět značí celkový počet iterací potřebný pro funkci $fmincon$ a \mathbf{p}_ε^* je výsledný vektor materiálového parametru. Dále podobně, v Tabulce 18 lze najít vstupní a výslednou hodnotu cenového funkcionálu. Na obrázku 8 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu v logaritmickeém měřítku. Pro ověření kvality

výpočtu jsme zvolili relativní chyby

$$err_E^0 = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^0\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad \text{a} \quad err_E^* = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{p}_E^*\|}{\|\mathbf{E}\|},$$

jejichž hodnoty lze najít v Tabulce 19.

$r = 4$	it	\mathbf{p}_ε^* [Pa]
$\varepsilon = 10^{-8}$	69	$(2.100\,003 \cdot 10^{11}, 7.199\,911 \cdot 10^9, 5.000\,200 \cdot 10^{10}, 2.100\,006 \cdot 10^{11})$
$\varepsilon = 10^{-10}$	76	$(2.100\,003 \cdot 10^{11}, 7.199\,911 \cdot 10^9, 5.000\,201 \cdot 10^{10}, 2.100\,006 \cdot 10^{11})$
$\varepsilon = 10^{-12}$	69	$(2.100\,003 \cdot 10^{11}, 7.199\,918 \cdot 10^9, 5.000\,218 \cdot 10^{10}, 2.100\,005 \cdot 10^{11})$

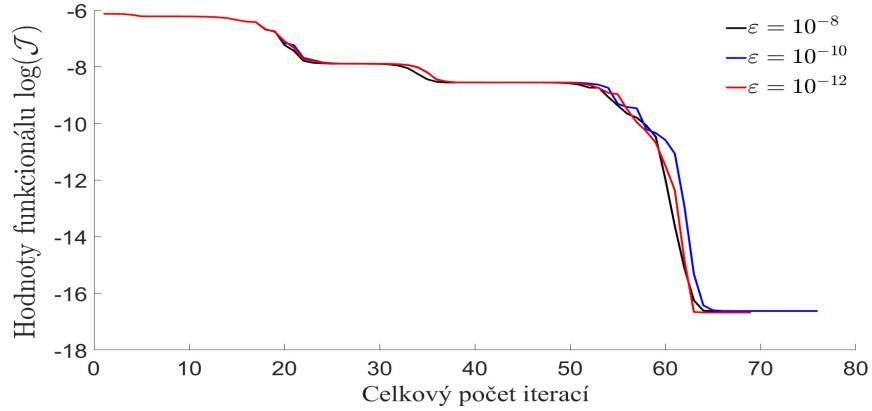
Tabulka 17: Výsledky pro úlohu identifikace parametrů nosníku se 4 segmenty a různé ε

$r = 4$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}_\varepsilon^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{p}_\varepsilon^*))$
$\varepsilon = 10^{-8}$	$7.4348 \cdot 10^{-7}$	$2.3829 \cdot 10^{-17}$
$\varepsilon = 10^{-10}$	$7.4366 \cdot 10^{-7}$	$2.3966 \cdot 10^{-17}$
$\varepsilon = 10^{-12}$	$7.4366 \cdot 10^{-7}$	$2.1219 \cdot 10^{-17}$

Tabulka 18: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé ε a 4 segmenty

$r = 4$	err_E^0	err_E^*
$\varepsilon = 10^{-8}$	0.6238	$7.1255 \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon = 10^{-10}$	0.6238	$7.1529 \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon = 10^{-12}$	0.6238	$7.4707 \cdot 10^{-6}$

Tabulka 19: Hodnoty relativních chyb pro volby ε a 4 segmenty



Obrázek 8: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro ε a 4 segmenty.

8.3. Příklad identifikace parametrů v kontaktní úloze s elasticky deformovatelným podložím

Uvažujme kontaktní úlohu (17) pro vetknutý nosník, tj. nosník s okrajovými podmínkami (B2), který je umístěný nad elasticky deformovatelným podložím v konstantní vzdálenosti. Podloží je rozděleno na s stejně dlouhých, materiálově homogenních segmentů, tzn. každý segment je popsán modulem pružnosti podloží k_i , $i = 1, \dots, s$.

Budeme uvažovat nosník s těmito vstupními daty

- Youngův modul pružnosti $E = 2.1 \cdot 10^{10}$ Pa,
- Poissonův poměr $\nu = 0.3$,
- tloušťka nosníku $t = 0.1$ m,
- šířka nosníku $b = 0.1$ m,
- délka nosníku $L = 10$ m.

Na nosník přitom působí

- konstantní vertikální zatížení $q = -2 \cdot 10^4$ Nm⁻¹, které působí po celé délce nosníku,
- axiální síla $P = 10^4$ N působící v koncovém bodě $x = L$.

Mezi nosníkem a dokonale tuhou překážkou je mezera, která je popsána funkcí g . Tu uvažujme jako konstantní funkci $g = -0.02$ m na celém intervalu $\langle 0, 10 \rangle$.

8.3.1. Kontaktní úloha Gaova nosníku s deformovatelným podložím

Uvažujme nyní pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s deformovatelným podložím vstupní data daná výše. Bez ohledu na počet uvažovaných segmentů podloží budeme mít zajištěnu existenci jediného řešení kontaktní úlohy dle Věty 3.4 pokud budou splněny předpoklady (P1)–(P3) u vedené na straně 16 . Přitom splnění předpokladů (P1) a (P2) je zřejmé. Pro ověření předpokladu (P3) nyní vypočteme hodnotu kritické síly \bar{P}_{\min} :

$$\bar{P}_{\min} = \frac{1}{(1 - \nu^2)} P_{cr}^E = \frac{\pi^2 E I}{(1 - \nu^2)(0.5L)^2} = \frac{8 \pi^2 E b^3 t}{3(1 - \nu^2) L^2} \doteq 6.0736 \cdot 10^6 \text{N}.$$

Pro uvažovanou axiální sílu $P = 10^4 \text{N}$ je tedy podmínka $P < \bar{P}_{\min}$ zaručující platnost předpokladu (P3) splněna. Tím je zajištěna existence jediného řešení úlohy uvažované kontaktní úlohy (17). Diskretizací této úlohy s krokem $h = 10/36$ dostaneme algebraickou formulaci ve tvaru systému nehladkých rovnic

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{70} \text{ takové, že} \\ (E I \mathbf{K}_1 - P(1 - \nu^2) \mathbf{K}_2) \mathbf{w} + E(1 - \nu^2) t b \mathbf{K}_3(\mathbf{w}) \mathbf{w} - b(1 - \nu^2) \mathbf{g}(\mathbf{w}) = (1 - \nu^2) \mathbf{q}, \end{cases} \quad (161)$$

kde matice \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , $\mathbf{K}_3(\mathbf{w})$ a vektory \mathbf{q} , $\mathbf{g}(\mathbf{w})$ jsou dané vztahy 117 respektive 118. K řešení této úlohy jsme pro tři níže uvedené úlohy použili nehladkou Newtonovu metodu, viz Algoritmus 3.

A. ÚLOHA S JEDNÍM SEGMENTEM

Nejprve budeme uvažovat nejjednodušší modelovou situaci, kdy bude uvažované podloží dáno jediným koeficientem tuhosti, tedy máme jeden segment, tj. $s = 1$ a

$$k_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}. \quad (163)$$

Řešení kontaktní úlohy s deformovatelným podložím s tímto daným koeficientem vypočteme nehladkou Newtonovou metodou. Pro úlohu identifikace použijeme vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (161) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-2} \cdot (-0.464, -1.406, -2.305, -2.831, -2.832, -2.305, -1.407, -0.464)^\top. \quad (164)$$

Algoritmus 3 Výpočet řešení kontaktní úlohy Gaova nosníku a deformovatelného podloží

- zvolíme $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{R}^{70}$
- pro $i = 0, 1, \dots$ až do splnění podmínek ukončovacího kritéria

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{w}^{i+1} \in \mathbb{R}^{70} \text{ takové, že} \\ \mathbf{T}(\mathbf{w}^i) \Delta \mathbf{w} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^i), \\ \mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + \Delta \mathbf{w} \end{cases} \quad (162)$$

kde

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{G}(\mathbf{w})$$

a

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = (E I \mathbf{K}_1 - P(1-\nu^2) \mathbf{K}_2 + E(1-\nu^2) t b \mathbf{K}_3(\mathbf{w})) \mathbf{w} - b(1-\nu^2) \mathbf{g}(\mathbf{w}) - (1-\nu^2) \mathbf{q}$$

A. ÚLOHA SE DVĚMA SEGMENTY

Nyní budeme uvažovat dva segmenty nosníku, tedy $s = 2$. Koeficienty tuhosti podloží jednotlivých segmentů jsou

$$k_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}, \quad k_2 = 7 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-3}. \quad (165)$$

Řešení kontaktní úlohy s deformovatelným podložím daným dvěma segmenty a danými koeficienty vypočteme opět nehladkou Newtonovou metodou. Pro úlohu identifikace použijeme vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (161) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-2} \cdot (-0.465, -1.408, -2.307, -2.835, -2.836, -2.310, -1.410, -0.466)^\top. \quad (166)$$

A. ÚLOHA SE ČTYŘMI SEGMENTY

Jako poslední modelovou úlohu si uvedeme kontaktní úlohu pro nosník s deformovatelným podložím, které se bude skládat ze čtyř segmentů, tedy $s = 4$. Na jednotlivých segmentech jsou nyní dány tyto koeficienty tuhosti podloží

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}, & k_2 &= 7 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-3} \\ k_3 &= 5 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-3}, & k_4 &= 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}. \end{aligned} \quad (167)$$

Řešení kontaktní úlohy s deformovatelným podložím daným čtyřmi segmenty s těmito koeficienty tuhosti vypočteme opět nehladkou Newtonovou metodou. Pro úlohu identifikace použijeme vypočítané funkční hodnoty řešení úlohy (161) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$. Tedy budeme uvažovat vektor měření $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^8$ ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-2} \cdot (-0.465, -1.409, -2.309, -2.837, -2.838, -2.312, -1.411, -0.466)^\top. \quad (168)$$

8.3.2. Úloha identifikace pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s deformovatelným podložím

Nyní můžeme přejít k úloze identifikace (63) a její algebraické formulaci, která je podrobněji popsána v kapitole 6.3. Její algebraická formulace je ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } \mathbf{k}_\delta^* \in \mathbf{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}_\delta^*)) = \min_{\mathbf{k} \in \mathbf{U}} \mathcal{J}(\mathbf{w}_\delta(\mathbf{k})), \\ \text{kde } \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{70} \text{ je řešením (170)} \\ \text{a } \mathcal{J} : \mathbb{R}^{70} \rightarrow \mathbb{R} \text{ je funkce daná vztahem (171).} \end{cases} \quad (169)$$

Stavovou úlohu již uvažujeme z důvodu potřebné hladkosti regularizovanou, tedy ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } \mathbf{k} \in \mathbf{U} \text{ a } \delta > 0, \\ \text{najít } \mathbf{w}_\delta := \mathbf{w}_\delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{70} \text{ takové, že} \\ (E I \mathbf{K}_1 - P(1 - \nu^2) \mathbf{K}_2) \mathbf{w}_\delta + E(1 - \nu^2) t b \mathbf{K}_3(\mathbf{w}_\delta) \mathbf{w}_\delta - \\ \quad - b(1 - \nu^2) \mathbf{g}_\delta(\mathbf{k}, \mathbf{w}_\delta) = (1 - \nu^2) \mathbf{q}. \end{cases} \quad (170)$$

Připomeňme, že funkce \mathcal{J} je dána předpisem

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z})^\top (\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{70}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^8, \quad (171)$$

přičemž matice \mathbf{S} reprezentuje operátor restrikce z \mathbb{R}^{70} do \mathbb{R}^8 a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_8)^\top$ je vektor hodnot, které jsme vypočítali v předchozím odstavci pro tři různé varianty počtu segmentů. Ještě zbývá připomenout přípustnou množinu \mathbf{U} , která je v tomto případě tvaru

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{R}^s \mid 0 < k_{\min} \leq k_i \leq k_{\max} < \infty, i = 1, \dots, s\},$$

kde $k_{\min} = 10^2 \text{ Nm}^{-3}$ a $k_{\max} = 9 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}$ jsou meze dané pro koeficienty tuhosti podloží. Naším úkolem je nyní najít koeficienty tuhosti podloží k_i , $i = 1, \dots, s$, pro $s = 1, s = 2$

a $s = 4$. Tedy chceme na základě naměřených hodnot \mathbf{z} daných v (164), (166) a (168) odhadnout přesné hodnoty koeficientů tuhosti uvažovaného podloží (163), (165) a (167). Úloha identifikace bude postupně řešena pro tři různé hodnoty regularizačního parametru $\delta = 10^0, 10^{-1}$ a 10^{-2} . K minimalizaci funkce \mathcal{J} ve tvaru (171) v rámci úlohy (169) je použita metoda sekvenciálního kvadratického programování *fmincon* implementovaná v softwaru Matlab. Regularizovaná stavová úloha (170) je řešena pomocí Newtonovy metody.

A. ÚLOHA S JEDNÍM SEGMENTEM

Vektor počáteční aproximace \mathbf{k}_δ^0 pro minimalizační proces byl zvolen

$$\mathbf{k}_\delta^0 = 10^5.$$

Příslušné numerické výsledky lze najít v Tabulce 20, kde *it* značí celkový počet iterací potřebný pro funkci *fmincon* a \mathbf{k}_δ^* je výsledná hodnota koeficientu tuhosti podloží, a to pro všechny tři volby regularizačního parametru δ . V Tabulce 21 lze najít vstupní a výslednou hodnotu diskretizovaného cenového funkcionálu \mathcal{J} . Na obrázku 9 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu. Pro přehlednost bylo použito logaritmické měřítko na ose *y*. Pro ověření kvality numerických výpočtů jsme použili relativní chyby

$$err_k^0 = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^0\|}{\|\mathbf{k}\|} \quad \text{a} \quad err_k^* = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^*\|}{\|\mathbf{k}\|},$$

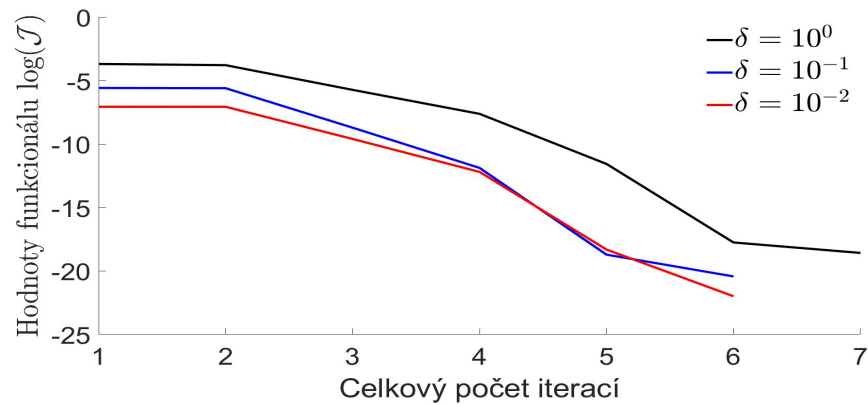
kde $\|\cdot\|$ značí opět Euklidovskou normu, \mathbf{k} je v tomto případě skalár daný (163), viz Tabulka 22.

$s = 1$	<i>it</i>	$\mathbf{k}_\delta^* [\text{Nm}^{-3}]$
$\delta = 10^0$	7	$2.999999 \cdot 10^5$
$\delta = 10^{-1}$	6	$2.999999 \cdot 10^5$
$\delta = 10^{-2}$	6	$2.999999 \cdot 10^5$

Tabulka 20: Výsledky pro úlohu identifikace parametru deformovatelného podloží s 1 segmentem

$s = 1$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^*))$
$\delta = 10^0$	$2.0480 \cdot 10^{-4}$	$2.6590 \cdot 10^{-19}$
$\delta = 10^{-1}$	$2.6312 \cdot 10^{-6}$	$3.7355 \cdot 10^{-21}$
$\delta = 10^{-2}$	$8.7368 \cdot 10^{-8}$	$1.0216 \cdot 10^{-22}$

Tabulka 21: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé δ a 1 segment



Obrázek 9: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro 1 segment a volby δ

$s = 1$	err_k^0	err_k^*
$\delta = 10^0$	0.6667	$2.4839 \cdot 10^{-8}$
$\delta = 10^{-1}$	0.6667	$2.4865 \cdot 10^{-8}$
$\delta = 10^{-2}$	0.6667	$2.2297 \cdot 10^{-8}$

Tabulka 22: Hodnoty relativních chyb pro 1 segment a hodnoty δ

B. ÚLOHA SE DVĚMA SEGMENTY

Nyní budeme předpokládat, že podloží je složeno ze dvou segmentů, tedy $s = 2$ a vektor počáteční aproximace \mathbf{k}_δ^0 pro minimalizační proces byl zvolen jako vektor

$$\mathbf{k}_\delta^0 = (10^5, 10^5).$$

Postupujeme analogicky jako v předchozím případě, příslušné numerické výsledky lze najít v Tabulce 23, kde \mathbf{k}_δ^* je výsledný vektor koeficientů tuhosti podloží, a to pro všechny tři volby regularizačního parametru δ . V Tabulce 24 lze najít vstupní a výslednou hodnotu

diskretizovaného cenového funkcionálu \mathcal{J} . Na obrázku 10 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu, i zde je použito logaritmické měřítko na ose y . Opět jsme počítali relativní chyby

$$err_k^0 = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^0\|}{\|\mathbf{k}\|} \quad \text{a} \quad err_k^* = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^*\|}{\|\mathbf{k}\|},$$

kde \mathbf{k} je v tomto případě vektor daný (165), viz Tabulka 25.

$s = 2$	it	\mathbf{k}_δ^* [Nm ⁻³]
$\delta = 10^0$	10	(3.000000 · 10 ⁵ , 6.999993 · 10 ³)
$\delta = 10^{-1}$	9	(2.999999 · 10 ⁵ , 6.999999 · 10 ³)
$\delta = 10^{-2}$	8	(2.999999 · 10 ⁵ , 6.999995 · 10 ³)

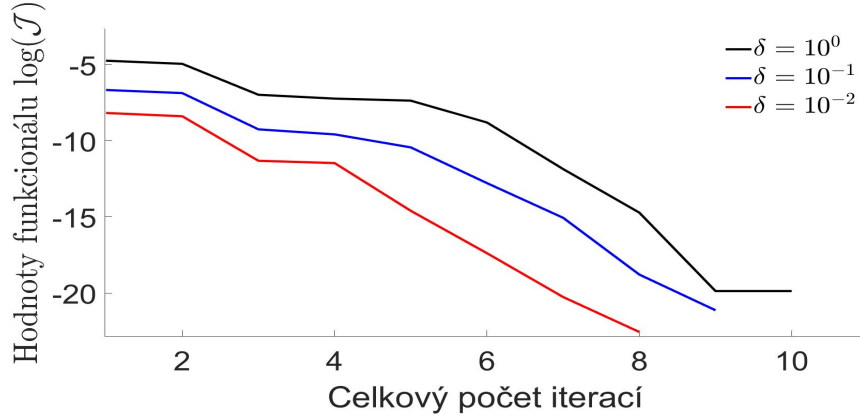
Tabulka 23: Výsledky pro úlohu identifikace parametru deformovatelného podloží pro 2 segmenty

$s = 2$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^*))$
$\delta = 10^0$	1.7808 · 10 ⁻⁵	1,3315 · 10 ⁻²⁰
$\delta = 10^{-1}$	2.1267 · 10 ⁻⁷	7.3222 · 10 ⁻²²
$\delta = 10^{-2}$	6.5833 · 10 ⁻⁹	2.7348 · 10 ⁻²³

Tabulka 24: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé δ a 2 segmenty

$s = 2$	err_k^0	err_k^*
$\delta = 10^0$	0.7350	2.9247 · 10 ⁻⁸
$\delta = 10^{-1}$	0.7350	1.9313 · 10 ⁻⁸
$\delta = 10^{-2}$	0.7350	1.7922 · 10 ⁻⁸

Tabulka 25: Hodnoty relativních chyb pro 2 segmenty a různé δ



Obrázek 10: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro 2 segmenty a volby δ .

C. ÚLOHA SE ČTYŘMI SEGMENTY

Vektor počáteční aproximace \mathbf{k}_δ^0 pro minimalizační proces byl v tomto případě zvolen

$$\mathbf{k}_\delta^0 = (10^5, 10^5, 10^5, 10^5).$$

Postupujeme opět analogicky, příslušné numerické výsledky lze najít v Tabulce 26, kde \mathbf{k}_δ^* je výsledný vektor koeficientů tuhosti podloží, a to pro všechny tři volby regularizačního parametru δ . V Tabulce 27 lze najít vstupní a výslednou hodnotu diskretizovaného cenového funkcionálu \mathcal{J} . Na obrázku 11 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu v logaritmickém měřítku. Opět jsme počítali relativní chyby

$$err_k^0 = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^0\|}{\|\mathbf{k}\|} \quad \text{a} \quad err_k^* = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^*\|}{\|\mathbf{k}\|},$$

kde \mathbf{k} je v tomto případě vektor daný (167), viz Tabulka 28.

$s = 4$	it	$\mathbf{k}_\delta^* [\text{Nm}^{-3}]$
$\delta = 10^0$	18	$(3.000010 \cdot 10^5, 6.999749 \cdot 10^3, 4.999975 \cdot 10^4, 3.000010 \cdot 10^5)$
$\delta = 10^{-1}$	13	$(3.000012 \cdot 10^5, 6.999729 \cdot 10^3, 4.999973 \cdot 10^4, 3.000012 \cdot 10^5)$
$\delta = 10^{-2}$	18	$(3.000079 \cdot 10^5, 6.998432 \cdot 10^3, 5.000176 \cdot 10^4, 2.999886 \cdot 10^5)$

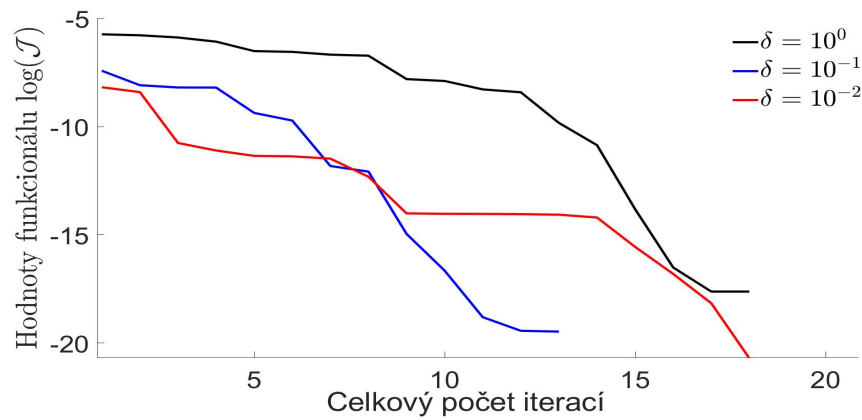
Tabulka 26: Výsledky pro úlohu identifikace parametru deformovatelného podloží pro 4 segmenty

$s = 4$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^*))$
$\delta = 10^0$	$1.8391 \cdot 10^{-6}$	$2.4007 \cdot 10^{-19}$
$\delta = 10^{-1}$	$1.6342 \cdot 10^{-7}$	$3.1086 \cdot 10^{-20}$
$\delta = 10^{-2}$	$8.6988 \cdot 10^{-9}$	$1.3568 \cdot 10^{-20}$

Tabulka 27: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé δ a 4 segmenty

$s = 4$	err_k^0	err_k^*
$\delta = 10^0$	0.7066	$3.3639 \cdot 10^{-6}$
$\delta = 10^{-1}$	0.7066	$4.2586 \cdot 10^{-6}$
$\delta = 10^{-2}$	0.7066	$3.2906 \cdot 10^{-5}$

Tabulka 28: Hodnoty relativních chyb pro 4 segmenty a volby δ



Obrázek 11: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} během výpočtu pro 4 segmenty a volby δ .

Závěr

Cílem této disertační práce bylo vytvořit ucelenou teorii zabývající se úlohou identifikace neznámých materiálových parametrů Gaova nelineárního nosníku pro úlohu ohybu a kontaktní úlohu s dokonale pružným podložím. Uvažovali jsme také kontaktní úlohu Gaova nosníku s deformovatelným podložím, přičemž jsme se zaměřili pouze na identifikaci koeficientu tuhosti podloží.

Pro studium úlohy identifikace jsme zvolili Gaův model nosníku, který je vhodnější pro složitější strojní a stavební konstrukce, protože není limitován malými průhyby na rozdíl od jiných populárních lineárních modelů. Vzhledem k důležitosti identifikačních úloh v různých průmyslových a technických odvětvích jsme se rozhodli věnovat se právě úlohám identifikace pro Gaův model nosníku, které, pokud je nám známo, doposud nebyly detailně zpracovány.

Stěžejní část této disertační práce se zabývala formulací identifikačních úloh, jejich diskretizací, konvergenční analýze, následně pak algebraické formulaci včetně citlivostní analýzy, a to jak pro úlohu ohybu nelineárního nosníku, tak i pro kontaktní úlohu nosníku s dokonale tuhým i elasticky deformovatelným podložím. V případě úlohy ohybu a kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím jsme se zabývali identifikací materiálových parametrů Gaova nosníku. V úloze kontaktu s elasticky deformovatelným podložím jsme se zaměřili na identifikace modulu pružnosti podloží. Studované úlohy byly formulovány jako úlohy optimálního řízení. V poslední kapitole jsme prezentovali řešené modelové úlohy pro všechny tři studované úlohy identifikace. K řešení jsme použili matematický software MATLAB.

Teoretická část této disertační práce byla publikována ve dvou impaktovaných časopisech [60], [62] a jednom recenzovaném sborníku [61]. V plánu je ještě detailnější zpracování numerických algoritmů a výpočtů, s cílem další publikace.

Domníváme se, že stanovené cíle předložené disertační práce byly splněny.

Seznam použité literatury

- [1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F.: *Sobolev spaces*. Academic Press: London, UK, 2003.
- [2] Ahn, J., Kuttler, K. L., Shillor, M.: Dynamic contact of two Gao beams. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2012, No. 194, pp. 1–42, 2012.
- [3] Ali, E. J., Gao, D. Y.: Canonical finite element method for solving nonconvex variational problems to post buckling beam problem. *AIP Proceedings of the 2nd International Conference, Numerical Computations: Theory and Algorithms*, Vol. 1776, pp. 1–4, 2016.
- [4] Ali, E. J., Gao, D. Y.: Improved canonical dual finite element method and algorithm for post-buckling analysis of nonlinear Gao beam. In: Gao D. Y., Latorre V., Ruan N. (eds): *Canonical Duality Theory. Advances in Mechanics and Mathematics*, Vol. 37, pp. 277–289, Springer, 2017.
- [5] Ali, E. J., Gao, D. Y.: On SDP method for solving canonical dual problem in post buckling of large deformed elastic beam. *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 16, No. 5, pp. 1225–1240, 2018.
- [6] Andrews, K. T., M'Bengue, M. F., Shillor, M.: Vibrations of a nonlinear dynamic beam between two stops. *Discrete and Continuous Dynamical System*, Vol. 12, No. 1, pp. 23–38, 2009.
- [7] Andrews, K. T., Dumont, Y., M'Bengue, M. F., Purcell, J., Shillor, M.: Analysis and simulations of a nonlinear dynamic beam. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 63, No. 6, pp. 1005–1019, 2012.
- [8] Andrews, K. T., Kuttler, K. L., Shillor, M.: Dynamic Gao beam in contact with a reactive or rigid foundation. In: Han, W., Migorski, S., Sofonea, M. (Eds): *Advances in Variational and Hemivariational Inequalities with Applications. Advances in Mechanics and Mathematics*, Vol. 33, pp. 225–248, 2015.
- [9] Antipov, Y. A.: Nonlinear bending models for beams and plates. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 470, No. 2170, pp. 20140064, 2014.
- [10] Bajer, C. I., Dyniewicz, B., Shillor, M.: A Gao beam subjected to a moving inertial point load. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 23, No. 3, pp. 461–472, 2018.
- [11] Bažant, Z. P., Cedolin, L.: *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific Publishing Co., 2010.
- [12] Blaschke, W.: *Kreis und Kugel*. Verlag von Veit & Comp, Leipzig, 1916.

- [13] Boaca, T.: Identification of the minimum value of reservoir permeability in nonlinear single phase mud filtrate invasion model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 59, pp. 103274, 2021.
- [14] Borsos, B., Karátson, J.: Robust iterative solvers for Gao type nonlinear beam models in elasticity. *Computational Methods in Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 1, pp. 1–13, 2022.
- [15] Borzì, A., Schulz, V.: *Computational optimization of systems governed by partial differential equations*. SIAM, Philadelphia, 2011.
- [16] Burkotová, J., Machalová, J., Radová, J.: Optimal thickness distribution of stepped nonlinear Gao beam. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 189, pp. 21–35, 2021.
- [17] Cai, K., Gao, D. Y., Qin, Q. H.: Post-buckling solutions of hyper-elastic beam by canonical dual finite element method. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 19, No. 6, pp. 659–671, 2014.
- [18] Cedolin, L.: *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific: Singapore, 2010.
- [19] Clarke, F. H.: *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [20] Dinev, D.: Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions. *Engineering Mechanics*, Vol. 19, No. 6, pp. 381–392, 2012.
- [21] Dyniewicz, B., Bajer, C. I.: The Gao beam under a moving inertial load and harmonic compression. In: *MATEC Web of Conferences, EDP Sciences*, Vol. 285, pp. 00003, 2019.
- [22] Dyniewicz, B., Bajer, C. I., Kuttler, K. L., Shillor, M.: Vibrations of a Gao beam subjected to a moving mass. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 50, pp. 342–364, 2019.
- [23] Easley, J. G., Waas, A. M.: *Analysis of structures. An introduction including numerical methods*. John Wiley and Sons, 2011.
- [24] Ekeland, I., Témam, R.: *Convex analysis and variational problems*, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [25] Ellabib, A., Ouakrim, Y.: Inverse problem for a class of nonlinear elliptic equations with entropy solution. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 46, pp. 137–156, 2019.
- [26] Facchinei, F., Pang, J. S.: *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*, Vol. I and II. Springer, New York 2003.

- [27] Gao, D. Y.: Nonlinear elastic beam theory with application in contact problems and variational approaches. *Mechanics Research Communications*, Vol. 23, No. 1, pp. 11–17, 1996.
- [28] Gao, D. Y.: Dual extremum principles in finite deformation theory with applications to post-buckling analysis of extended nonlinear beam model. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, No. 11, part 2, pp. 64–71, 1997.
- [29] Gao, D. Y.: Finite deformation beam models and triality theory in dynamical post-buckling analysis. *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 35, No. 1, pp. 103–131, 2000.
- [30] Gao, D. Y., Machalová, J., Netuka, H.: Mixed Finite element solutions to contact problems of nonlinear Gao beam on elastic foundation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 22, pp. 537–550, 2015.
- [31] Ge, H., Qian, F., Liang, Y., Du, W., Wang, L.: Identification and control of nonlinear systems by a dissimilation particle swarm optimization-based Elman neural network. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 9, No. 4, pp. 1345–1360, 2008.
- [32] Gladwell, G. M. L., Bishop, R. E. D.: The inverse problem for Euler–Bernoulli beam. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 407, No. 1832, pp. 199–218, 1986.
- [33] Glowinski, R.: *Lectures on numerical methods for non-linear variational problems*. Springer Science and Business Media, 2008.
- [34] Haslinger, J., Blaheta, R., Hrtus, R.: Identification problems with given material interfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 310, pp. 129–142, 2017.
- [35] Haslinger, J., Mäkinen, R. A. E.: The parameter identification in the Stokes system with threshold slip boundary conditions. *ZAMM–Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 100, No. 5, pp. e201900209, 2020.
- [36] Jang, T. S., Sung, H. G., Han, S. L., Kwon, S. H.: Inverse determination of the loading source of the infinite beam on elastic foundation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, No. 12, pp. 2350–2356, 2008.
- [37] Kirchhoff, G.: Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. *Journal für die Reine und Angewandte Math*, Vol. 56, pp. 285–313, 1859.
- [38] Komkov, V.: Euler’s buckling formula and Wirtinger’s inequality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 14, No. 6, pp. 661–668, 1983.

- [39] Komkov, V.: *Variational principles of continuum mechanics with engineering applications: Volume 1: Critical Points Theory*. Vol. 24, Springer Science & Business Media, 1986.
- [40] Kuttler, K. L., Purcell, J., Shillor, M.: Analysis and simulations of a contact problem for a nonlinear dynamic beam with a crack. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 65, No. 1, pp. 1–25, 2011.
- [41] Kuttler, K. L., Purcell, J., Shillor, M.: Analysis and simulations of a contact problem for a nonlinear dynamic beam with a crack. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 65, No. 1, pp. 1–25, 2012.
- [42] Lebedev, L. P., Vorovich, I. I., Gladwell, G. M. L.: *Functional Analysis: Applications in Mechanics and Inverse Problems*. Springer, Solid Mechanics and Its Applications, 2002.
- [43] Lesnic, D., Elliott, L., Ingham, D. B.: Analysis of coefficient identification problems associated to the inverse Euler–Bernoulli beam theory. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol. 62, No. 2, pp. 101–116, 1999.
- [44] Levere, K. M.: An inverse problem for the nonlinear Gao beam. *International Journal of Applied Nonlinear Science* 3, Vol. 1, No. 2, pp. 122–135, 2014.
- [45] Love, A. E. H.: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Donover, New York, 1944.
- [46] Machalová, J., Netuka, H.: Bending of a nonlinear beam reposing on an unilateral foundation. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 45–54, 2011.
- [47] Machalová, J., Netuka, H.: Solution of contact problems for nonlinear Gao beam and obstacle. *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2015, 2015.
- [48] Machalová, J., Netuka, H.: Control variational method approach to bending and contact problems for Gao beam. *Applications of Mathematics*, Vol. 62, No. 6, pp. 661–677, 2017.
- [49] Machalová, J., Netuka, H.: Solution of contact problems for Gao beam and elastic foundation. *Mathematics and Mechanics of Solids, Special Issue on Inequality Problems In Contact Mechanics*, Vol. 23, No. 3, pp. 473–488, 2018.
- [50] Machalová, J., Netuka, H.: Comments on the large deformation elastic beam model developed by D. Y. Gao. *Mechanics Research Communications*, Vol. 110, 103607, 2020.
- [51] M'Bengue, M. B. F., Shillor, M.: Regularity results for the problem of vibrations of a nonlinear beam. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 27, 2008.

- [52] Marinov, T. T., Vatsala, A. S.: Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli beam equation. *Computational Mathematics with Applications*, Vol. 56, No. 2, pp. 400–410, 2008.
- [53] Marinov, T. T., Marinova, R.: Inverse problem for coefficient identification in Euler–Bernoulli equation by linear spline approximation. *International Conference on Large–Scale Scientific Computing*, Springer, pp. 588–595, 2010.
- [54] Mata, P. and Oller, S., Barbat, A.: Static analysis of beam structures under nonlinear geometric and constitutive behavior. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 196, No. 45–48, pp. 4458–4478, 2007.
- [55] Meier, Ch., Popp, A., Wall, W. A.: A locking–free finite element formulation and reduced models for geometrically exact Kirchhoff rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 290, pp. 314–341, 2016.
- [56] Meier, Ch., Popp, A., Wall, W. A.: Geometrically exact finite element formulations for slender beams: Kirchhoff–Love theory versus Simo–Reissner theory. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 26, No. 1, pp. 163–243, 2019.
- [57] Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.: *Analytic inequalities*. Vol. 1, Springer, 1970.
- [58] Netuka, H., Machalová, J.: Post–buckling solutions for the Gao beam. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 76, No. 3, pp. 329–347, 2023.
- [59] Picart, D., Ainseba, B.: Parameter identification in multistage population dynamics model. *Nonlinear analysis: Real world applications*, Vol. 12, No. 6, pp. 3315–3328, 2010.
- [60] Radová, J. Machalová, J. Burkotová J.: Identification problem for nonlinear Gao beam. *Mathematics*, Vol. 8, No. 11, pp. 1916, 2020.
- [61] Radová, J., Machalová, J.: Identification problem for nonlinear beam–extension for different types of boundary conditions. *PANM 21: Proceedings of 21st conference, Jablonec nad Nisou, 2022. Institute of Mathematics CAS, Prague*, pp. 199–208, 2023.
- [62] Radová, J., Machalová, J.: Parameter identification in contact problems for Gao beam. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 77, 104068, 2024.
- [63] Reddy, J.: *An introduction to the finite element method*. McGraw–Hill Education: New York, USA, Vol. 1221, 2004.
- [64] Reddy, J.: *An introduction to the finite element method*. Third edition. McGraw–Hill Book Co., New York, 2006.
- [65] Rektorys, K.: *Variational methods in mathematics, science and engineering*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [66] Reissner, E.: On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 23, pp. 795–804, 1972.
- [67] Reissner, E.: On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 87–95, 1973.
- [68] Romero, I., Urrecha, M., Cyron, C. J.: A torsion-free non-linear beam model. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 58, pp. 1–10, 2014.
- [69] Santos, H. A. F. A., Gao, D. Y.: Canonical dual finite element method for solving post-buckling problems of a large deformation elastic beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 240–247, 2012.
- [70] Simo, J. C.: A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 55–70, 1985.
- [71] Sun, B.: Optimal control of vibrations of a dynamic Gao beam in contact with a reactive foundation. *International Journal of Systems Science*, Vol. 48, No. 5, pp. 1084–1091, 2017.
- [72] Sun, B.: Maximum principle for optimal control of vibrations of a dynamic Gao beam in contact with a rigid foundation. *International Journal of Systems Science*, Vol. 48, No. 16, pp. 3522–3529, 2017.
- [73] Tröltzsch, F.: *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods, and applications*. American Mathematical Soc.: Providence, RI, USA, 2010.
- [74] Wang, S., Chang, Y., Li, X., Zhang, J.: Parameter identification for a class of nonlinear chaotic and hyperchaotic flows. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, No. 1, pp. 423–431, 2010.
- [75] Wang, Y. Y., Sun, B.: Pontryagin’s maximum principle for optimal control of vibrations of two nonlinear Gao beams. In: *2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation*, pp. 913–918, IEEE, 2020.
- [76] Wang, Y. Y., Sun, B.: Optimal control of vibrations of two nonlinear Gao beams connected with a joint. *International Journal of Systems Science*, Vol. 52, No. 10, pp. 2064–2081, 2021.
- [77] Winkler, E.: *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Dominicus, Prague, 1867.
- [78] Zhong, X. U., Liao, S. L., Gao, D. Y.: HAM approach for post-buckling problems of a large deformed elastic beam. *Submitted to Computers & Mathematics with Application*, 2018.

9. Dodatek 1

Analytické nerovnosti a jejich použití

V této části práce si představíme analytické nerovnosti, které jsou využity v důkazech Lemmatu 4.1, 4.2 a 4.3, v nichž je zformulována spojitá závislost řešení stavových úloh (22), (43) a (62) na uvažovaných materiálových parametrech nosníku resp. podloží. Tato zmíněná lemmata jsou dokázána vždy pro jeden konkrétní typ okrajových podmínek. S využitím dále uvedených nerovností je možné tvrzení lemmat rozšířit na všechny čtyři typy okrajových podmínek (B1), (B2), (B3) a (B4) uvedených na straně 15.

Nejprve si uvedeme *Wirtingerovu nerovnost*, kterou lze nalézt např. v [57].

Věta 9.1. *Nechť $y(x) \in L^2(\mathbb{R})$ je periodická funkce s periodou 2π a nechť $y'(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Jestliže $\int_0^{2\pi} y(x) dx = 0$, pak platí nerovnost*

$$\int_0^{2\pi} (y(x))^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (y'(x))^2 dx. \quad (172)$$

Důkaz této nerovnosti je založen na Fourierově rozvoji funkcí y a y' na intervalu $(0, 2\pi)$, podrobnosti lze nalézt např. v [12]. Tvrzení věty 9.1 lze zobecnit pro funkce $f \in H^1((0, 2\pi))$. Jestliže je splněna podmínka $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, pak platí nerovnost (172). Wirtingerovu nerovnost (172) lze také zobecnit i pro funkce definované na intervalu $\langle 0, L \rangle$. Nechť tedy $y(x)$ je funkce periodická s periodou L a $y'(x) \in L^2(0, L)$. Substitucí $t = \frac{L}{2\pi}x$ získáme modifikaci Wirtingerovy nerovnosti (172) ve tvaru

$$\int_0^L (\hat{y}(t))^2 dt \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (\hat{y}'(t))^2 dt, \quad (173)$$

kde $\hat{y}(t) = y(x(t)) = y(\frac{2\pi t}{L})$.

Uvažujme nyní nelineární Gaův nosník s okrajovými podmínkami (B2) definovanými na straně 15. Položíme-li $y(x) = w'(x)$, pak jsou splněny předpoklady nerovnosti (173) a tedy platí

$$\int_0^L (w'(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (w''(x))^2 dx. \quad (174)$$

Nyní si uvedeme nerovnost známou jako *Wirtinger-Poincaré-Almansiho nerovnost*, kterou lze nalézt např. v [39].

Věta 9.2. *Nechť $y(x)$ je funkce definovaná na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ taková, že $y(0) = y(\pi) = 0$ a $y'(x) \in L^2(0, \pi)$. Pak*

$$\int_0^\pi (y(x))^2 dx \leq \int_0^\pi (y'(x))^2 dx. \quad (175)$$

Wirtinger-Poincaré-Almansiho nerovnost (175) lze zobecnit i pro funkce y definované na intervalu $\langle 0, L \rangle$. Pokud $y(0) = y(L) = 0$ a $y'(x) \in L^2(\langle 0, L \rangle)$, pak

$$\int_0^L (y(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (y'(x))^2 dx. \quad (176)$$

Podobnou nerovnost lze odvodit také pro funkce definované na intervalu $\langle 0, L \rangle$ splňující pouze jedinou podmínku $y(0) = 0$, viz [38]. Hlavní myšlenka spočívá v symetrizaci problému dodefinováním funkce $y(x)$ na interval $\langle 0, 2L \rangle$. Tedy pro $x \in \langle L, 2L \rangle$ definujeme $y(x) = y(L + \xi) = y(L - \xi) = y(2L - x)$, kde $\xi = x - L$. Tudíž $y(0) = y(2L)$, $y \in L^2(\langle 0, 2L \rangle)$ a z nerovnosti (175) máme

$$\int_0^{2L} (y(x))^2 dx \leq \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^{2L} (y'(x))^2 dx.$$

Vzhledem k symetrii funkce $y(x)$ na intervalu $\langle 0, 2L \rangle$ je zřejmé, že

$$\int_0^L (y(x))^2 dx \leq \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (y'(x))^2 dx. \quad (177)$$

Uvažujeme-li nyní nelineární Gaův nosník s volným koncem, tj. nosník s okrajovými podmínkami (B4) definovanými na straně 15, můžeme symetrizovat průhyb nosníku w na intervalu $\langle 0, 2L \rangle$. Pak pro $y(x) = w'(x)$ a užitím nerovnosti (177) dostáváme

$$\int_0^L (w'(x))^2 dx \leq \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w''(x))^2 dx. \quad (178)$$

V případě Gaova nosníku s okrajovými podmínkami (B3) lze také použít myšlenku symetrizace, což vede i v tomto případě na nerovnost (178) jako v případě nosníku s volným koncem. Pro Gaův nosník s okrajovými podmínkami (B1) lze použít stejných úvah jako pro nosník s okrajovými podmínkami (B2). Funkce w' splňuje předpoklady Věty 9.1 modifikované na interval $\langle 0, L \rangle$, proto pak s ohledem na nerovnost (173) obdržíme

$$\int_0^L (w'(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (w''(x))^2 dx.$$

Je tedy zřejmé, že v případě okrajových podmínek (B1) platí

$$\int_0^L (w'(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (w''(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w''(x))^2 dx. \quad (179)$$

Užitím Věty 9.2, jejího zobecnění (176) a použitím nerovnosti (177) dostáváme

$$\int_0^L (w(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w'(x))^2 dx \leq \frac{1}{4} \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \int_0^L (w''(x))^2 dx. \quad (180)$$

Dále lze ukázat, že pro všechny čtyři uvažované typy okrajových podmínek (B1), (B2), (B3), (B4) a odpovídající prostory V_i , $i = 1, \dots, 4$ platí

$$\exists \bar{c} > 0 : \|v''(x)\|_0^2 \geq \bar{c} \|v\|_2^2 \quad \forall v \in V_i, \quad (181)$$

kde $\|\cdot\|_k$, $k = 0, 1, \dots$, je norma v prostoru $H^k((0, L))$. Pro funkce z prostoru V_1 plyne nerovnost (181) přímo z (180). Pro funkce z prostorů V_2 , V_3 a V_4 máme $v(0) = v'(0) = 0$, tudíž můžeme použít dvakrát zobecnění (177) Věty 9.2, nejprve pro $y = w$, pak pro $y = w'$. Tedy

$$\int_0^L (w(x))^2 dx \leq \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w'(x))^2 dx \leq \left(\frac{2L}{\pi}\right)^4 \int_0^L (w''(x))^2 dx, \quad (182)$$

odkud plyne nerovnost (181) pro funkce z prostorů V_2 , V_3 a V_4 .

Na základě uvedených nerovností lze nyní rozšířit tvrzení Lemmatu 4.1 pro okrajové podmínky (B2), (B3) a (B4) a prostory V_2 , V_3 a V_4 . Podobně pak můžeme rozšířit tvrzení Lemmatu 4.2 a 4.3 pro okrajové podmínky (B1), (B3) a (B4) a prostory V_1 , V_3 a V_4 . Pro okrajové podmínky (B3) je však třeba zpřísnit předpoklad na axiální sílu. Konkrétně dále předpokládáme, že platí

$$(\mathbf{P3})' \quad P < \bar{P}_{min}, \quad \text{kde} \quad \bar{P}_{min} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}$$

Konstanta \mathcal{K} je nyní nově s ohledem na zvolené okrajové podmínky daná hodnotami v Tabulce 29. Oproti původním hodnotám v Tabulce 1 jsme nyní pro (B3) požadavky na axiální sílu zpřísnili.

	(B1)	(B2)	(B3)	(B4)
\mathcal{K}	1	0.5	2	2

Tabulka 29: Tabulka konstant

Nyní již můžeme přistoupit k formulaci Lemmatu 4.1 i pro ostatní okrajové podmínky.

Lemma 9.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)' a dále nechť $p_n \in U_{ad}$, $n = 1, 2, \dots$ a $p \in U_{ad}$ jsou takové, že*

$$p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p \quad v \quad (L^\infty((0, L)))^2.$$

Pak

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w(p) \in V_i,$$

kde $i \in \{2, 3, 4\}$, $w_n := w(p_n)$, resp. $w(p)$, je řešením úlohy (25), resp. (22) pro $V = V_i$.

Důkaz. Důkaz lemmatu se pro okrajové podmínky (B2), (B3) a (B4) vede analogicky jako v případě okrajových podmínek (B1) uvažovaných v Lemmatu 4.1. Okrajové podmínky jsou klíčové pouze v rámci prvního kroku důkazu, kdy se dokazuje ohraničenost posloupnosti $\{w_n\}$, konkrétně při důkazu omezenosti zdola součtu forem $a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w_n)$, viz (32). Nechť tedy $w_n \in V_i$, kde $i \in \{2, 3, 4\}$. Z definice (21) přípustné množiny U_{ad} víme, že $0 < 1 - \nu_n^2 \leq 1$, a tudíž

$$\pi_{p_n}(w_n, w_n) = tb \int_0^L E_n (1 - \nu_n^2) (w_n')^4 dx \geq 0, \quad \forall p_n = (E_n, \nu_n) \in U_{ad}. \quad (183)$$

Uvažujme nyní $P \geq 0$. Pak v případě okrajových podmínek (B2) dostaneme užitím (174) nerovnost

$$\int_0^L P (1 - \nu_n^2) (w_n'(x))^2 dx \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L P (1 - \nu_n^2) (w_n''(x))^2 dx. \quad (184)$$

Celkem tedy můžeme s využitím (183), (184) a (181) psát

$$\begin{aligned} a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w_n) &= \int_0^L E_n I(w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu_n^2) (w_n')^2 dx + \\ &+ tb \int_0^L E_n (1 - \nu_n^2) (w_n')^4 dx \geq \int_0^L E_n I(w_n'')^2 dx - P \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L E_{\min} I(w_n'')^2 dx - P \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = c_2 \|w_n''\|_0^2 \geq \\ &\geq \bar{c} c_2 \|w_n\|_{V_2}^2, \end{aligned} \quad (185)$$

kde $c_2 := E_{\min}I - \frac{PL^2}{4\pi^2} > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 0.5$ z Tabulky 29. V případě záporné axiální síly $P < 0$, je nerovnost (185) splněna automaticky a $c_2 = E_{\min}I$.

Pro nosník s okrajovými podmínkami (B3) a (B4) lze na základě nerovnosti (178) provést jednotný odhad. Uvažujme opět nejprve případ $P \geq 0$. Pak z (183), (178) a (181) máme

$$\begin{aligned}
a_{p_n}(w_n, w_n) + \pi_{p_n}(w_n, w_n) &= \int_0^L E_n I (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu_n^2)(w_n')^2 dx + \\
&+ t b \int_0^L E_n (1 - \nu_n^2)(w_n')^4 dx \geq \int_0^L E_n I (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx \geq \\
&\geq \int_0^L E_{\min} I (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = c_i \|w_n''\|_0^2 \geq \\
&\geq \bar{c} c_i \|w_n\|_{V_i}^2,
\end{aligned} \tag{186}$$

kde $i = 3, 4$, a $c_3 = c_4 := E_{\min}I - P\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 2$ z Tabulky 29. V případě namáhání nosníku tahem, tj. $P < 0$, je nerovnost (186) opět splněna triviálně s $c_3 = c_4 = E_{\min}I$.

Dále se v důkaze postupuje analogicky jako v důkaze Lemmatu 4.1 s tím, že volba okrajových podmínek nehraje zásadní roli. \square

Nyní Lemma 4.2, které je dokázané pro okrajové podmínky (B2), zobecníme i pro zbývající okrajové podmínky (B1), (B3) a (B4). Přitom budeme opět předpokládat přísnější předpoklad na axiální sílu pro (B3), tedy předpoklad (P3)' s konstantou \mathcal{K} z Tabulky 29.

Lemma 9.2. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)'. Dále necht' $p_n \in U_{ad}$, $n = 1, 2, \dots$ a $p \in U_{ad}$ jsou takové, že*

$$p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p \quad v \quad (L^\infty((0, L)))^2.$$

Pak

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w(p) \in V_i,$$

kde $i \in \{1, 3, 4\}$, $w_n := w(p_n)$, resp. $w(p)$, je řešení úlohy (47), resp. (43) pro $V = V_i$.

Důkaz. Důkaz je veden naprosto shodně s důkazem Lemmatu 4.2. Jediný rozdíl, při kterém se projeví volba okrajových podmínek (B1), (B3) nebo (B4), nebo-li volba prostoru V_1, V_3

nebo V_4 , spočívá v odhadu bilineární formy $a_{p_n}(w_n, w_n)$. Necht $P \geq 0$, pak v případě okrajových podmínek (B1) s využitím (179) a (181) dostaneme

$$\begin{aligned} a_{p_n}(w_n, w_n) &= \int_0^L E_n I (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu_n^2) (w_n')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L E_{\min} I (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = \\ &= c_1 \|w_n''\|_0^2 \geq \bar{c} c_1 \|w_n\|_{V_1}^2, \end{aligned} \quad (187)$$

kde $c_1 = E_{\min} I - P \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 1$, viz Tabulka 29. Konstanta $\bar{c} > 0$ je konstanta z nerovnosti (181). V případě okrajových podmínek (B3) a (B4) dostaneme s ohledem na nerovnost (178) a (181) odhad ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{p_n}(w_n, w_n) &= \int_0^L E_n I (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu_n^2) (w_n')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L E_{\min} I (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = \\ &= c_i \|w_n''\|_0^2 \geq \bar{c} c_i \|w_n\|_{V_i}^2, \end{aligned} \quad (188)$$

kde $i = 3, 4$, $c_3 = c_4 = E_{\min} I - P \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 2$, viz Tabulka 29 a $\bar{c} > 0$ je konstanta z nerovnosti (181). V případě záporné axiální síly $P < 0$, platí všechny výše uvedené odhady automaticky. \square

Analogicky lze zobecnit tvrzení spojitě závislosti pro úlohu identifikace kontaktní úlohy s deformovatelným podložím.

Lemma 9.3. *Necht jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Dále necht $k_n \in U_{ad}$, $n = 1, 2, \dots$ a $k \in U_{ad}$ jsou takové, že*

$$k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k \text{ v } L^\infty((0, L)). \quad (189)$$

Pak

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(k) \in V_2,$$

kde $i \in \{1, 3, 4\}$, $w_n := w(k_n)$, resp. $w(k)$, je řešení úlohy (65), resp. (62) pro $V = V_i$.

Důkaz. I v tomto případě je postup důkazu analogický jako v důkazech Lemmat 4.1 a 4.2. Proto uvedeme pouze důkaz omezenosti bilineární formy $a(w_n, w_n)$, což je jediné místo v důkaze, kde se projeví volba okrajových podmínek (B1), (B3, a (B4)). Postupujeme stejně jako v důkaze předchozího lemmatu. Necht $P \geq 0$, pak v případě okrajových podmínek (B1) s využitím (179) a (181) dostaneme

$$\begin{aligned} a(w_n, w_n) &= \int_0^L EI (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu^2) (w_n')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L EI (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = \\ &= c_1 \|w_n''\|_0^2 \geq \bar{c} c_1 \|w_n\|_{V_1}^2, \end{aligned} \quad (190)$$

kde $c_1 = EI - P \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 1$, viz Tabulka 29. Konstanta $\bar{c} > 0$ je z nerovnosti (181). V případě okrajových podmínek (B3) a (B4) dostaneme s ohledem na nerovnost (178) odhad ve tvaru

$$\begin{aligned} a(w_n, w_n) &= \int_0^L EI (w_n'')^2 dx - \int_0^L P (1 - \nu^2) (w_n')^2 dx \geq \\ &\geq \int_0^L EI (w_n'')^2 dx - P \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \int_0^L (w_n'')^2 dx = \\ &= c_i \|w_n''\|_0^2 \geq \bar{c} c_i \|w_n\|_{V_i}^2, \end{aligned} \quad (191)$$

kde $i = 3, 4$, $c_3 = c_4 = EI - P \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 > 0$ vzhledem k předpokladu (P3)' s konstantou $\mathcal{K} = 2$, viz Tabulka 29 a $\bar{c} > 0$ je opět z (181). V případě záporné axiální síly $P < 0$, platí všechny výše uvedené odhady automaticky. \square

10. Dodatek 2

Aproximace nehladkých úloh

10.1. Penalizační metoda

Penalizační metoda je jedním z efektivních způsobů jak se lze vypořádat s nehladkou úlohou identifikace (45). Hlavní myšlenkou je nahradit variační nerovnici penalizovanou úlohou, která je za jistých podmínek ekvivalentní s nelineární rovnicí. Níže uvádíme pouze hlavní myšlenky penalizační metody použité pro řešení optimalizační úlohy s omezeními.

Uvažujme variační nerovnici, která reprezentuje stavovou úlohu v úloze identifikace s dokonale tuhým podložím, tj.

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in K \text{ takové, že} \\ a(w, v - w) + \pi(w, v - w) \geq \mathcal{L}(v - w), \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (192)$$

kde množina K je daná v (15) a formy a, π, \mathcal{L} jsou definované vztahy (7).

Nechť $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcionál s vlastnostmi

- (p1) j je konvexní a slabě zdola polospojité v prostoru V ,
- (p2) $j(v) \geq 0, \forall v \in V, j(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$.

Dále necht $\varepsilon > 0$ je penalizační parametr. Definujme funkcionál $j_\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $j_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} j$. Pak lze ke stavové úloze (192) zformulovat penalizovaný problém

$$\begin{cases} \text{Najít } w_\varepsilon \in V \text{ takové, že} \\ a(w_\varepsilon, v - w_\varepsilon) + \pi(w_\varepsilon, v - w_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(w_\varepsilon) \geq \mathcal{L}(v - w_\varepsilon), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (193)$$

Pokud jsou splněny předpoklady Věty 3.2 a funkcionál j splňuje (p1), (p2), pak lze dokázat, že úloha (193) má právě jedno řešení pro každé $\varepsilon > 0$, viz [33].

Pokud je funkcionál j_ε diferencovatelný v prostoru V , pak je penalizační problém (193) ekvivalentní s nelineární rovnicí

$$\begin{cases} \text{Najít } w_\varepsilon \in V \text{ takové, že} \\ a(w_\varepsilon, v) + \pi(w_\varepsilon, v) + \langle j'_\varepsilon(w_\varepsilon), v \rangle = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (194)$$

kde $j'_\varepsilon(w_\varepsilon) \in V'$ je gradient funkcionálu j_ε v w_ε . Abychom zajistili diferencovatelnost stavové úlohy uvažujeme penalizační funkcionál j ve tvaru

$$j(v) = \frac{1}{3} \int_0^L \left((g - w)^+ \right)^3 dx. \quad (195)$$

Snadno lze ověřit, že tento funkcionál je diferencovatelný na prostoru V , splňuje předpoklady (p1) a (p2) a platí

$$\langle j'_\varepsilon(w_\varepsilon), v \rangle = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^L ((g - w_\varepsilon)^+)^2 v \, dx, \quad \forall v \in V. \quad (196)$$

Dále lze dokázat konvergenční větu pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$, viz [33].

Věta 10.1. *Nechť a , π , \mathcal{L} jsou formy definované v (7), množina K je definovaná vztahem (15) a funkcionál j je diferencovatelný na V a splňuje předpoklady (p1) a (p2). Pak*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|w_\varepsilon - w\|_V = 0 \quad a \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} j_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0,$$

kde w , resp. w_ε je řešení stavové úlohy (192), resp. (194).

Pro praktické výpočty je nezbytná diskrétní formulace úlohy (194). Pro daný diskretizační parametr $h > 0$ a ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, L \rangle$ s krokem h je diskretizovaná úloha tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } w_{\varepsilon h} \in V_h \text{ takové, že} \\ a(w_{\varepsilon h}, v_h) + \pi(w_{\varepsilon h}, v_h) + \langle j'_\varepsilon(w_{\varepsilon h}), v_h \rangle = \mathcal{L}(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (197)$$

10.2. Regularizační metoda

V tomto odstavci si představíme hlavní myšlenku regularizační metody, kterou jsme použili při identifikaci neznámého koeficientu tuhosti podloží v kontaktní úloze. Identifikační úloha (63) je nehladkou úlohou díky kontaktnímu členu ve stavové úloze, která je ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) - \kappa(w, v) = \mathcal{L}(v), \end{cases} \quad \forall v \in V, \quad (198)$$

kde V je prostor funkcí, formy a , π , κ a \mathcal{L} jsou dané vztahy (7) a (18). Jak již bylo řečeno, stavová úloha není hladká, což je způsobeno funkcí $(g - v)^+$, která se vyskytuje v kontaktním členu $\kappa(w, v)$, tedy konkrétně

$$\kappa(w, v) = \int_0^L k b (1 - \nu^2) (g - w)^+ v \, dx.$$

Protože

$$(g - v)^+ = \frac{1}{2}((g - v) + |g - v|)$$

lze člen $|g - v|$ aproximovat posloupností funkcí

$$\sqrt{(g - w)^2 + \delta^2}, \quad \text{kde } \delta \rightarrow 0+.$$

Místo původní nediferencovatelné úlohy (198) tedy nyní uvažujeme regularizovanou stavovou úlohu

$$\begin{cases} \text{Najít } w_\delta \in V \text{ takové, že} \\ a(w_\delta, v) + \pi(w_\delta, v) - \kappa_\delta(w_\delta, v) = \mathcal{L}(v), \end{cases} \quad \forall v \in V, \quad (199)$$

kde

$$\kappa_\delta(w, v) = \frac{1}{2} \int_0^L k b (1 - \nu^2) \left((g - w) + \sqrt{(g - w)^2 + \delta^2} \right) v \, dx. \quad (200)$$

I v tomto případě lze dokázat konvergenční větu.

Věta 10.2. *Nechť a , π , \mathcal{L} , κ_δ jsou definované vztahy (7) a (200) a necht $\delta > 0$ je regularizační parametr. Pak*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|w_\delta - w\|_V = 0,$$

kde w resp. w_δ je řešením stavové úlohy (198) resp. (199).

Diskretizaci regularizovaného stavového problému (199) na prostoru V_h lze provést podobně jako diskretizaci stavového problému (198). Pro daný diskretizační parametr $h > 0$ a ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, L \rangle$ máme je diskretizovaná úloha tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } w_{\delta h} \in V_h \text{ takové, že} \\ a(w_{\delta h}, v_h) + \pi(w_{\delta h}, v_h) - \kappa_\delta(w_{\delta h}, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (201)$$

Seznam použitého značení

Prostor spojitých funkcí: $C^{k-1}((0, L))$, $k = 1, 2, \dots$

Prostor polynomů stupně k na intervalu \mathcal{I} : $P_k(\mathcal{I})$

Sobolevovy prostory: $H_0^2((0, L))$, $H^k((0, L))$, $k = 1, 2, \dots$

Okrajové podmínky pro nosník:

(B1) prostě podepřený nosník: $w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0$

(B2) oboustranně vetknutý nosník: $w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$

(B3) nosník s vetknutím a podepřením: $w(0) = w'(0) = w(L) = w''(L) = 0$

(B4) nosník s volným koncem:

$$w(0) = w'(0) = 0;$$

$$w''(L) = EI w'''(L) - \frac{1}{3} E \alpha (w'(L))^3 + P(1 - \nu^2) w'(L) = 0$$

Prostory funkcí Sobolevova prostoru dané stabilními podmínkami:

$$V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v(L) = 0\}$$

$$V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = v(L) = v'(L) = 0\}$$

$$V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = v(L) = 0\}$$

$$V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}$$

Formy:

$$a(w, v) = \int_0^L EI w'' v'' dx - \int_0^L P(1 - \nu^2) w' v' dx$$

$$\pi(w, v) = \int_0^L E t b (1 - \nu^2) (w')^3 v' dx$$

$$\kappa(w, v) = \int_0^L k b (1 - \nu^2) (g - w)^+ v dx$$

$$\mathcal{L}(v) = \int_0^L (1 - \nu^2) q v dx$$

Funkcionály:

$$\Pi(u, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) dx dy - \int_0^L qw dx + Pu(L)$$

$$\Pi_G(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{1}{4} \pi(v, v) - \mathcal{L}(v)$$

$$\Pi_F(v) = \frac{1}{2} \kappa(v, v)$$

$$J(w(p)) = \frac{1}{2} \|w(p) - z\|^2$$

$$\hat{J}(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y(t_i) - z_i)^2$$

Kontaktní podmínky:

$$\left. \begin{array}{l} w \geq g, \\ T(w) \geq 0, \\ (w - g)T(w) = 0, \end{array} \right\} \quad \forall (0, L),$$

$$T(w) = kb(1 - \nu^2)(g - w)^+$$

Předpoklady:

(P1) $q \in L^2((0, L))$

(P2) E, t, b, ν jsou kladné konstanty

(P3) $P < \bar{P}$, kde $\bar{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} P_{cr}^E$, a P_{cr}^E je Eulerova kritická síla.

(P2)' t, b jsou kladné konstanty

(P3)' $P < \bar{P}_{min}$, kde $\bar{P}_{min} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(1 - \nu_{min}^2)(\mathcal{K} \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}$,

(P2)* E, ν jsou po částech kladné konstantní funkce a t, b jsou kladné konstanty

(P3)* $P < \bar{P}_{min}$, kde $\bar{P}_{min} = \frac{1}{1 - \nu_{min}^2} P_{cr}^E$

Penalizační člen:

$$j(v) = \frac{1}{3} \int_0^L ((g - w)^+)^3 dx$$

Derivace penalizačního členu:

$$\langle j'_\varepsilon(w_\varepsilon), v \rangle = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^L ((g - w_\varepsilon)^+)^2 v dx$$

Regularizační člen:

$$\kappa_\delta(w, v) = \frac{1}{2} \int_0^L k b (1 - \nu^2) \left((g - w) + \sqrt{(g - w)^2 + \delta^2} \right) v dx$$

Diskrétní prostory funkcí Sobolevova prostoru dané stabilními podmínkami:

$$V_h^1 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h(L) = 0\}$$

$$V_h^2 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v'_h(0) = v_h(L) = v'_h(L) = 0\}$$

$$V_h^3 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v'_h(0) = v_h(L) = 0\}$$

$$V_h^4 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v'_h(0) = 0\}$$

Přípustné množiny:

$$U_{ad} = \{p = (E, \nu) \mid p \in L^\infty(\langle 0, L \rangle) \times L^\infty(\langle 0, L \rangle) : 0 < E_{\min} \leq E \leq E_{\max} < \infty \text{ v } (0, L), \\ 0 \leq \nu \leq 0.5 \text{ v } (0, L), p|_{K_i} \in P_0(K_i) \times P_0(K_i), i = 1, \dots, r\}$$

$$U_{ad} = \{k \in L^\infty(\langle 0, L \rangle) : 0 < k_{\min} \leq k \leq k_{\max} < \infty \text{ v } (0, L), k|_{F_i} \in P_0(F_i), i = 1, \dots, s\}$$

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

AUTOREFERÁT DISERTAČNÍ PRÁCE

Řešení kontaktních úloh pro nosník s podložím



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí disertační práce: **doc. RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.**
Vypracovala: **Mgr. Jana Radová**
Studijní program: P1104 Aplikovaná matematika
Studijní obor: Aplikovaná matematika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2024

Výsledky obsažené v disertační práci byly získány během doktorského studia oboru Aplikovaná matematika na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Uchazeč **Mgr. Jana Radová**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Školitel **doc. RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Oponenti **prof. RNDr. Igor Bock, CSc.**
Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita v Bratislavě

prof. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., FEng.
Katedra aplikované mechaniky
Fakulta strojní
VŠB–Technická univerzita Ostrava

Autoreferát byl rozeslán dne

Obhajoba disertační práce se koná 12. června 2024 v 11 hod. před oborovou radou doktorského studijního programu Aplikovaná matematika v zasedací místnosti Katedry matematické analýzy a aplikací matematiky č. 5.064 v budově Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, 17. listopadu 12.

S disertační prací je možno se seznámit na studijním oddělení Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Obsah

1	Abstrakt	4
2	Abstract in English	4
3	Úvod	5
4	Cíl práce	6
5	Aktuální stav	7
6	Shrnutí práce	8
6.1	Variační formulace stavových úloh	10
6.2	Úloha identifikace	12
6.3	Diskretizace a konvergenční analýza	16
6.4	Ilustrační příklad	21
7	Závěr	24
8	Seznam publikací	25
9	Seznam konferencí a workshopů	26
10	Výzkumné pobyty	27
	Literatura	28

1. Abstrakt

Tato disertační práce se zabývá úlohami identifikace neznámých materiálových parametrů nelineárního Gaova modelu nosníku nejprve v úloze ohybu a poté v kontaktní úloze, přičemž je uvažováno jak dokonale tuhé podloží, tak i deformovatelné. V případě kontaktní úlohy s elasticky deformovatelným podložím lze navíc zformulovat i úlohu identifikace modulu pružnosti podloží. Úloha identifikace neznámých parametrů spadá do obecnější oblasti inverzních úloh, které mají široké uplatnění, a to nejen v matematice. Obecně inverzní úlohou rozumíme proces, kdy na základě znalosti jistých pozorování, získaných například měřeními, chceme najít odpovídající hodnoty vstupních parametrů uvažovaného modelu. V práci se zabýváme Gaovým statickým nelineárním modelem nosníku, dynamický model uvažován není. V kontaktních úlohách jsme se zaměřili na studium tzv. unilaterálních úloh, tj. úloh, kdy uvažujeme model nosníku, který není pevně spjatý s podložím. V práci jsou uvažovány dva typy podloží. Dokonalé tuhé podloží, které je modelováno pomocí Signoriniho podmínek, a elasticky deformovatelné podloží, tzv. Winklerovo podloží, což je nejjednodušší jednoparametrický model podloží. Práce se zabývá úlohami identifikace neznámých materiálových parametrů nelineárního Gaova modelu nosníku nejprve v úloze ohybu a poté v kontaktní úloze. Úlohy jsou formulovány jako úlohy optimálního řízení, kdy roli řídicích proměnných hrají neznámé materiálové parametry nosníku nebo v případě kontaktní úlohy s deformovatelným podložím modul pružnosti podloží. K diskretizaci a algebraické formulaci úlohy optimálního řízení je použita metoda konečných prvků. Teoretické výsledky obsažené v disertační práci jsou prezentovány na několika ilustrativních příkladech.

Klíčová slova: Gaův nelineární nosník, průhyb, kontaktní úloha, identifikace parametru, materiálový parametr, modul pružnosti podloží, úloha optimálního řízení

2. Abstract in English

This dissertation thesis deals with the identification problem of unknown material parameters of a nonlinear beam model in a bending problem and then in a contact problem. Data identification problems are an essential class of inverse problems with many practical applications. From a set of measured data, one tries to identify some characteristic quantities which are not known a-priori in corresponding mathematical models. This thesis considers a static nonlinear Gao beam model. We have focused on the study of so-called unilateral contact problems. Recall

that the wording unilateral means the beam is not fixed with the foundation. Here, two foundations will be considered: a perfectly rigid foundation, given by so-called Signorini conditions, and an elastic, one parametric Winkler's foundation. The main goal of this dissertation thesis is to develop a comprehensive theory dealing with the identification problem of unknown material parameters for the bending problem of a nonlinear Gao beam and then for a contact problem with two types of foundations. In the case of a contact problem with an elastic deformable foundation, we focus on identifying the modulus that characterizes the foundation. The analyzed problem is formulated as an optimal control problem, and the unknown material parameters of the beam or modulus foundation are the control variables. Discretization and algebraic formulation are based on using the finite element method. Finally, the theoretical results are completed by several numerical examples.

Key words: Gao nonlinear beam, deflection, contact problem, identification of parameter, material parameter, modulus of foundation, optimal control problem

3. Úvod

Kontaktní úlohy, v nichž není uvažován vliv tření popisují vzájemnou interakci mezi dvěma tělesy. Z hlediska praxe mají kontaktní úlohy velký význam v mnoha odvětvích strojního a stavebního inženýrství např. při vyztužování tunelů, výkopových pracích, při navrhování kolejnic v železniční dopravě, v lodním stavitelství apod.

V předložené disertační práci se zabýváme kontaktní úlohou nosníku a podloží. Přitom uvažujeme dlouhé a štíhlé nosníky, tedy takové nosníky, jejichž délka výrazně převyšuje zbylé dva rozměry, tj. tloušťku a šířku. Nejčastěji používaným matematickým modelem nosníku je klasický lineární Euler–Bernoulliho model, který byl vytvořen kolem roku 1750. Navzdory své popularitě je využití tohoto modelu omezeno pouze na případy, kdy jeho průhyb není příliš velký. Složitější strojní a stavební konstrukce ovšem vyžadují také modely nosníku, které nejsou limitovány malými průhyby, ale umožňují i středně velké průhyby. Jedním takovým typem nosníku je nelineární Gaův model, který poprvé publikoval D. Y. Gao v roce 1996 v článku [18].

V disertační práci uvažujeme tzv. unilaterální úlohy, tedy úlohy, kdy předpokládáme, že nelineární model Gaova nosníku není pevně spjatý s podložím. Dokonale tuhé podloží je modelováno pomocí tzv. Signoriniho podmínky. Tyto podmínky popisují vztah mezi průhybem

nosníku a kontaktní silou, přičemž nedochází k průniku nosníku do podloží. Nosník tedy po zatížení zůstává nad podložím nebo na podloží leží, a to v závislosti na velikosti působící síly na nosník. Dalším typem podloží, které je v práci uvažováno, je elasticky deformovatelné podloží, tzv. Winklerovo podloží, což je nejjednodušší jednoparametrický model podloží. V tomto případě může při vertikálním zatížení nosníku dojít k průniku nosníku do podloží. Detailnější informace o řešení kontaktních úloh Gaova nosníku s deformovatelným podložím lze najít v [26], [27], [28] nebo [29].

Stěžejní část disertační práce se zabývá formulací identifikačních úloh, jejich diskretizací, konvergenční analýzou, následně pak algebraickou formulací včetně citlivostní analýzy, a to jak pro úlohu ohybu nelineárního nosníku, tak i pro kontaktní úlohu nosníku s dokonale tuhým i elasticky deformovatelným podložím. V případě úlohy ohybu a kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím jsme se zabývali identifikací materiálových parametrů Gaova nosníku. V úloze kontaktu s elasticky deformovatelným podložím jsme se zaměřili na identifikaci modulu pružnosti podloží. Úlohy identifikace neznámých parametrů jsou součástí širší kategorie inverzních úloh, které nacházejí rozsáhlé využití v různých situacích. Obecně inverzní úlohou rozumíme proces, kdy na základě znalosti jistých pozorování, získaných například měřeními, chceme najít odpovídající hodnoty vstupních parametrů uvažovaného modelu. Úlohy identifikace lze zformulovat jako úlohy optimálního řízení, viz např. [11], [39], kde roli řídicích proměnných hrají právě materiálové parametry nosníku nebo podloží.

Hlavní výsledky této disertační práce byly publikovány ve třech prvoautorských článcích [33], [34] a [35].

4. Cíl práce

Cílem disertační práce bylo vytvořit ucelenou teorii zabývající se úlohami identifikace neznámých materiálových parametrů v úloze ohybu nelineárního Gaova nosníku a také v kontaktní úloze se dvěma typy podloží. V první části disertační práce uvádíme základní poznatky ohledně řešitelnosti úlohy ohybu a kontaktních úloh pro oba dva uvažované typy podloží. Následně jsou zformulovány úlohy identifikace jako úlohy optimálního řízení. Nejprve je uvažována úloha identifikace pro ohyb Gaova nelineárního nosníku a poté pro kontaktní úlohy tohoto nosníku s dokonale tuhým i elasticky deformovatelným podložím. Dále jsou zformulována a dokázána tvrzení o existenci alespoň jednoho řešení studovaných identifikačních úloh. Vzhledem k tomu,

že tyto úlohy nelze exaktně vyřešit, je pro řešení použita aproximace metodou konečných prvků. I pro diskretizované úlohy jsou dále zformulována tvrzení o existenci alespoň jednoho řešení. Následně jsme zkoumali vztah diskrétní a spojité formulace úloh identifikace. Je dokázána konvergence posloupnosti řešení diskrétní úlohy k řešení spojité úlohy identifikace pro všechny tři studované identifikační úlohy. Pro řešení diskretizovaných úloh je zpracována jejich algebraická formulace, která byla následně využita pro řešení modelových úloh. V případě identifikačních úloh pro kontaktní úlohy Gaova nosníku jak s dokonale tuhým, tak i s deformovatelným podložím ale nastává při řešení těchto úloh problém, neboť se jedná o nehladké optimalizační úlohy. To je vyřešeno užitím penalizační metody pro kontaktní úlohu s dokonale tuhým podložím a metody regularizace pro kontaktní úlohu s deformovatelným podložím. Hlavní myšlenky obou metod jsou shrnuty v Dodatku disertační práce. Pro výpočetní účely je také provedena analýza citlivosti. Závěrečná kapitola disertační práce je věnována ilustračním příkladům úloh identifikace, které jsou řešeny prostřednictvím matematického softwaru Matlab.

5. Aktuální stav

Disertační práce se zabývá úlohami identifikace pro statický Gaův nelineární model nosníku, který považujeme za jeden z nejzajímavějších nelineárních modelů. Poprvé tento model publikoval D. Y. Gao roce 1996 ve své práci [18]. Další práce věnované tomuto modelu, respektive odvozením a úpravou některých jeho konstant jsou články [36], [30]. Pro statický model Gaova nelineárního nosníku byly studovány a řešeny úlohy ohybu a kontaktní úlohy v článcích [22], [26], [27], [28] a [29]. Numerickým metodám pro řešení úlohy ohybu Gaova modelu je věnována práce [10]. Dále bylo publikováno několik prací zabývajících se touto tematikou užitím tzv. kanonické duality [43], [21]. Tato dualita byla následně použita při řešení úloh tzv. post-bucklingu, přičemž se víceméně jednalo jen o články týkající se výpočtů, [19], [2], [3], [4], [13]. Velmi zajímavé výsledky pro úlohu bucklingu Gaova nosníku přináší práce [32]. Jedinou nám známou prací zabývajících se tvarovou optimalizací tohoto nelineárního modelu nosníku je [12].

Statický model Gaova nosníku byl rozšířen i pro dynamické úlohy, [20]. Tematicke dynamického Gaova nosníku se věnovala celá řada významných autorů, [1], [5], [23], [24], [31] a [41]. Kontaktní úloha dynamického modelu Gaova nosníku je studována v [7], [37] a [38]. Další velmi zajímavé práce z posledních let o dynamickém modelu Gaova nosníku jsou [8], [16], [17] nebo [40].

Inverzní úloha pro dynamický model Gaova nosníku byla řešena v [25], a to konkrétně pro data z článku [6]. V současné době je již publikováno více než 30 prací zabývajících se nelineárním modelem Gaova nosníku.

Úlohy identifikace, kterými se zabývá předložená disertační práce, mají široké uplatnění v mnoha odvětvích. Nicméně touto problematikou aplikovanou na úlohy s nelineárním modelem Gaova nosníku se zatím nikdo nezabýval. První práce, která zkoumá úlohu identifikace neznámých materiálových parametrů Gaova nosníku v úloze ohybu je autorčin první článek [33]. Ten byl později doplněn prací [34]. Následovalo studium úlohy identifikace Gaova nosníku pro kontaktní úlohu jak s dokonale tuhým, tak i deformovatelným podložím, což bylo publikováno v [35].

6. Shrnutí práce

V práci se zabýváme Gaovým nelineárním modelem, který poprvé publikoval prof. D. Y. Gao ve své práci [18]. Tento model nosníku je dán diferenciální rovnicí čtvrtého řádu, která vlastně představuje úlohu ohybu nosníku. Tato rovnice je tvaru

$$E I w^{IV} - E \alpha (w')^2 w'' + P \mu w'' = f \quad \text{na } (0, L), \quad (1)$$

kde

$$\alpha = 3 t b (1 - \nu^2), \quad \mu = (1 - \nu^2)(1 + \nu), \quad f = (1 - \nu^2) q,$$

E je Youngův modul pružnosti, I značí moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose, w popisuje neznámý průhyb. Dále ν je Poissonova konstanta, t , b značí šířku a tloušťku nosníku. Po celé délce L nosníku působí vertikální zatížení q a v koncovém bodě $x = L$ působí axiální síla P . V případě $P > 0$ dochází ke stlačování nosníku, v opačném případě k jeho natahování. Tento model nosníku byl původně navržen pro nekonvexní úlohy, které vedou na tzv. úlohu bucklingu. Pro případ konvexních úloh byla v [30] navržena modifikace konstanty μ ve tvaru

$$\mu = 1 - \nu^2. \quad (2)$$

Protože se v disertační práci zabýváme pouze konvexními úlohami, uvažujeme nadále konstantu μ ve tvaru (2).

K rovnici (1) budeme uvažovat ještě čtyři okrajové podmínky, přičemž s ohledem na fyzikální realitu budeme volit jednu z následujících možností:

(B1) prostě podepřený nosník: $w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0$;

(B2) oboustranně vetknutý nosník: $w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$;

(B3) nosník s vetknutím a podepřením: $w(0) = w'(0) = w(L) = w''(L) = 0$;

(B4) nosník s volným koncem:

$$w(0) = w'(0) = 0;$$

$$w''(L) = EI w'''(L) - \frac{1}{3}E \alpha (w'(L))^3 + P(1 - \nu^2) w'(L) = 0.$$

Kromě úlohy ohybu Gaova nosníku (1) se v práci také zabýváme kontaktní úlohou, přičemž uvažujeme dokonale tuhé a elasticky deformovatelné podloží. Uvažujeme pouze tzv. *unilaterální* úlohy, tj. úlohy, kdy nosník není pevně spjatý s podložím. Navíc předpokládáme, že mezi nosníkem a podložím je mezera, která bude v celé práci popsána konstantní funkcí $g \leq 0$. V případě dokonale tuhého podloží tedy uvažujeme rovnici Gaova nosníku společně s kontaktními podmínkami

$$EI w^{IV} - 3Etb(1 - \nu^2)(w')^2 w'' + P(1 - \nu^2) w'' = (1 - \nu^2)q + T(w) \quad \text{v } (0, L), \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} w \geq g, \\ T(w) \geq 0, \\ (w - g)T(w) = 0, \end{array} \right\} \quad \text{v } (0, L), \quad (4)$$

kde $T(w)$ je kontaktní síla mezi nosníkem a podložím, která závisí na neznámém průhybu w . K úloze (3), (4) ještě uvažujeme okrajové podmínky (B1), (B2), (B3) nebo (B4). Je zřejmé, že mohou nastat pouze dvě situace s ohledem na velikost průhybu w . Je-li $w(x) = g(x)$ pro $x \in (0, L)$, pak nastává v bodě x kontakt a $T(w(x)) \geq 0$. Jestliže $w(x) > g(x)$ pro $x \in (0, L)$, pak v bodě x ke kontaktu nedochází a je tedy zřejmé, že $T(w(x)) = 0$. Podmínky (4) jsou známé z literatury jako *Signoriniho podmínky*.

V případě deformovatelného podloží uvažujeme nejčastější a nejjednodušší model podloží, což je tzv. Winklerův model, viz např. [15] a [42]. I tomto případě předpokládáme, že podloží je umístěno ve vzdálenosti $g \leq 0$ pod nosníkem. Je-li $g \equiv 0$, pak nosník na podloží leží. V porovnání s dokonale tuhým podložím však může v tomto případě dojít k zaboření nosníku

do podloží, tedy $w(x) < g(x)$ v některých částech intervalu $(0, L)$. V takovém případě lze určit velikost reakce podloží vztahem

$$T(w) = k b (1 - \nu^2)(g - w)^+ \quad \text{v } (0, L), \quad (5)$$

kde $k > 0$ je modul pružnosti uvažovaného podloží a

$$(g(x) - w(x))^+ = \max\{0, g(x) - w(x)\}.$$

Tento vztah lze interpretovat jako podmínku normálové poddajnosti. Kontaktní úloha Gaova nosníku a deformovatelného podloží je pak dána rovnicí

$$E I w^{IV} - 3 E t b (1 - \nu^2) (w')^2 w'' + P (1 - \nu^2) w'' = (1 - \nu^2) q + T(w) \quad \text{v } (0, L), \quad (6)$$

kde $T(w)$ je dáno vztahem (5). Současně ještě uvažujeme okrajové podmínky (B1), (B2), (B3) nebo (B4).

6.1. Variační formulace stavových úloh

Pro další zpracování úloh (1), (3) a (6) je potřebná jejich variační formulace. Pro tyto účely je nutné zavést tzv. prostory kinematicky přípustných posunutí V_i , $i = 1, \dots, 4$, což jsou v tomto případě podprostory Sobolevova prostoru $H^2((0, L))$ dané stabilními okrajovými podmínkami. Tedy

$$(B1) : V_1 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v(L) = 0\},$$

$$(B2) : V_2 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = v(L) = v'(L) = 0\},$$

$$(B3) : V_3 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = v(L) = 0\},$$

$$(B4) : V_4 = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v'(0) = 0\}.$$

V případech, kdy nebudou okrajové podmínky jasně specifikovány, budeme používat jednotné označení prostoru kinematicky přípustných posunutí V .

Úloha ohybu

Uvažujme nejprve úlohu ohybu nelineárního Gaova nosníku (1). Její slabá formulace je ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) = \mathcal{L}(v), \end{cases} \quad \forall v \in V, \quad (7)$$

kde V značí prostor kinematických posunutí a

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_0^L EI w'' v'' dx - \int_0^L P(1 - \nu^2) w' v' dx, \\ \pi(w, v) &= \int_0^L E t b (1 - \nu^2) (w')^3 v' dx, \quad \mathcal{L}(v) = \int_0^L (1 - \nu^2) q v dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Kontaktní úloha s dokonale tuhým podložím

Slabá formulace úlohy kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím (3), (4) je dána ve tvaru variační nerovnice

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in K \text{ takové, že} \\ a(w, v - w) + \pi(w, v - w) \geq \mathcal{L}(v - w), \end{cases} \quad \forall v \in K, \quad (9)$$

kde formy $a(w, v)$, $\pi(w, v)$ a lineární funkcionál $\mathcal{L}(v)$ jsou definovány v (8) a K je množina přípustných průhybů ve tvaru

$$K = \{v \in V : v \geq g \text{ na } (0, L)\}, \quad (10)$$

přičemž V značí opět prostor kinematicky přípustných posunutí a $g \in \mathcal{C}(\langle 0, L \rangle)$, $g \leq 0$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Kontaktní úloha s deformovatelným podložím

Pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s deformovatelným podložím je variační formulace tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } w \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) - \kappa(w, v) = \mathcal{L}(v), \end{cases} \quad \forall v \in V, \quad (11)$$

kde $a(w, v)$, $\pi(w, v)$ a $\mathcal{L}(v)$ jsou formy zavedené v (8), kontaktní člen κ je definován vztahem

$$\kappa(w, v) = \int_0^L k b (1 - \nu^2) (g - w)^+ v dx \quad (12)$$

a V je prostor přípustných posunutí.

Pro všechny tři uvažované úlohy (7), (9) a (11) lze splnění předpokladů

(P1) $q \in L^2((0, L))$,

(P2) E, t, b, ν jsou kladné konstanty,

(P3) $P < \bar{P}$, kde $\bar{P} = \frac{1}{1 - \nu^2} P_{cr}^E$, a P_{cr}^E je Eulerova kritická síla.

dokázat existenci a jednoznačnost řešení, viz např. [28].

Věta 6.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Pak úlohy (7), (9) a (11) mají jediné řešení.*

Poznamenejme, že Eulerova kritická síla P_{cr}^E je mezní hodnota axiální síly, která je známá z teorie stability a je definována vztahem

$$P_{cr}^E = \frac{\pi^2 EI}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}, \quad (13)$$

kde konstanta \mathcal{K} závisí na zvolených okrajových podmínkách, viz Tabulka 1, detailnější informace lze najít např. v [9], [14].

	(B1)	(B2)	(B3)	(B4)
\mathcal{K}	1	0.5	0.7	2

Tabulka 1: Tabulka konstant

6.2. Úloha identifikace

Nyní zformulujeme úlohy identifikace materiálových parametrů Gaova nosníku pro úlohu ohybu a kontaktní úlohu s dokonale tuhým podložím. V případě kontaktní úlohy s deformovatelným podložím pak zformulujeme úlohu identifikace modulu pružnosti podloží. K řešení je použita metoda optimálního řízení.

Úloha ohybu a kontaktní úloha s dokonale tuhým podložím

Předpokládejme nyní, že materiálové parametry nosníku, Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta ν jsou po částech konstantní funkce na intervalu $(0, L)$, které neznáme a budeme je chtít pomocí úlohy identifikace odhadnout. Interval $(0, L)$ je rozdělen na r otevřených

vzájemně disjunktních podintervalů $K_i, i = 1, \dots, r$, tedy $K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$ a $\langle 0, L \rangle = \bigcup_{i=1}^r \overline{K_i}$. Dvojici neznámých materiálových parametrů (E, ν) budeme dále značit jako jeden parametr $p := (E, \nu)$. Pro další účely definujeme množinu přípustných hodnot pro řídicí proměnnou $p = (E, \nu)$ vztahem

$$U_{ad} := \{p = (E, \nu) \mid p \in L^\infty((0, L)) \times L^\infty((0, L)) : 0 < E_{\min} \leq E \leq E_{\max} < \infty \text{ v } (0, L), \\ 0 \leq \nu \leq 0.5 \text{ v } (0, L), p|_{K_i} \in P_0(K_i) \times P_0(K_i), i = 1, \dots, r\}, \quad (14)$$

kde $E_{\min} < E_{\max}$ jsou dané konstanty a $P_0(K_i)$ je množina konstantních funkcí na K_i . Je tedy zřejmé, že U_{ad} je uzavřená konvexní množina dvojic funkcí, které jsou na daném dělení intervalu $(0, L)$ po částech konstantní. Abychom zdůraznili, že je Gaův model nosníku parametrizován hodnotou parametru $p \in U_{ad}$, budeme v dalším textu formy definované v (8) značit symboly a_p, π_p a \mathcal{L}_p . Příslušná stavová úloha ohybu nosníku je tedy tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w(p) \in V \text{ takové, že} \\ a_p(w, v) + \pi_p(w, v) = \mathcal{L}_p(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (15)$$

Analogicky pro kontaktní úlohu Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w(p) \in K \text{ takové, že} \\ a_p(w, v - w) + \pi_p(w, v - w) \geq \mathcal{L}_p(v - w), \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (16)$$

přičemž množina K je daná vztahem (10).

Nyní, v situaci, kdy E a ν jsou po částech konstantní funkce, lze dokázat existenci jediného řešení úloh (15) a (16), pokud budou splněny tyto modifikované předpoklady

(P1) $q \in L^2((0, L))$,

(P2)' t, b jsou kladné konstanty,

(P3)' $P < \overline{P}_{min}$, kde $\overline{P}_{min} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(1 - \nu_{min}^2)(\mathcal{K} \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 E_{min} I}{(\mathcal{K} \cdot L)^2}$,

kde $\nu_{min} = 0$ je minimální přípustná hodnota Poissonovy konstanty ν a \mathcal{K} je konstanta daná zvolenými okrajovými podmínkami, viz Tabulka 1 .

Nyní můžeme přikročit k formulaci úlohy identifikace, která má podobu úlohy optimálního řízení, viz např. [11], [39],

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najít } p^* \in U_{ad} \text{ takové, že} \\ J(w(p^*)) = \min_{p \in U_{ad}} J(w(p)), \\ \text{kde } w(p) \text{ je řešením stavové úlohy (15) nebo (16)} \\ \text{a } J : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál.} \end{array} \right. \quad (17)$$

Dále budeme předpokládat, že cenový funkcionál J je spojitý, tedy, že platí

$$w(p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w(p) \implies J(w(p_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} J(w(p)). \quad (18)$$

Lze dokázat, že úloha identifikace parametrů Gaova nosníku, jak v případě úlohy ohybu, tak i v kontaktní úloze s dokonale tuhým podložím má alespoň jedno řešení.

Věta 6.2. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (14). Nechť platí předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a cenový funkcionál J je splňuje (18). Pak existuje alespoň jedno řešení identifikační úlohy (17).*

Kontaktní úloha s deformovatelným podložím

Nyní předpokládejme, že materiálové parametry nosníku, Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta ν jsou na intervalu $(0, L)$ konstantní a že koeficient tuhosti podloží k je po částech konstantní funkce. Tedy uvažujme, že interval $\langle 0, L \rangle$ je rozdělen na s otevřených, vzájemně disjunktčních segmentů F_i , $i = 1, \dots, s$ tj. $F_i \cap F_j = \emptyset, \forall i \neq j$ a $\langle 0, L \rangle = \bigcup_{i=1}^s \overline{F_i}$ a množina přípustných hodnot je tvaru

$$U_{ad} = \{k \in L^\infty((0, L)) : 0 < k_{min} \leq k \leq k_{max} < \infty \vee (0, L), k|_{F_i} \in P_0(F_i), i = 1, \dots, s\}, \quad (19)$$

kde $k_{min} < k_{max}$ jsou dané konstanty a $P_0(F_i)$ je množina konstantních funkcí na F_i . Stavovou úlohu v případě uvažované kontaktní úlohy s deformovatelným podložím parametrizujeme

parametrem $k \in U_{ad}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pro dané } k \in U_{ad} \\ \text{najít } w(k) \in V \text{ takové, že} \\ a(w, v) + \pi(w, v) - \kappa_k(w, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (20)$$

I v tomto případě, kdy uvažujeme koeficient tuhosti podloží jako po částech konstantní funkci, lze dokázat existenci jediného řešení úlohy (20), a to za platnosti předpokladů (P1)–(P3).

Nyní můžeme zformulovat úlohu identifikace koeficientu tuhosti podloží uvažované kontaktní úlohy

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najít } k^* \in U_{ad} \text{ takové, že} \\ J(w(k^*)) = \min_{k \in U_{ad}} J(w(k)), \\ \text{kde } w(k) \text{ je řešením stavové úlohy (20)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je daný cenový funkcionál.} \end{array} \right. \quad (21)$$

Analogicky jako pro dříve uvažovanou úlohu identifikace můžeme i pro úlohu (21) dokázat tvrzení o existenci alespoň jednoho řešení.

Věta 6.3. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (19). Nechť platí předpoklady (P1)–(P3) a cenový funkcionál J splňuje (18). Pak existuje alespoň jedno řešení úlohy identifikace (21).*

Pro všechny tři úlohy identifikace budeme uvažovat cenový funkcionál

$$J(w) = \frac{1}{2} \|w - z\|^2, \quad (22)$$

kde $w = w(p)$, resp. $w = w(k)$, je řešení stavové úlohy (15) nebo (16), resp. (20), pro dané $p \in U_{ad}$, resp. $k \in U_{ad}$, z je daný průhyb nosníku a $\|\cdot\|$ značí normu prostoru V . Je zřejmé, že funkcionál J je spojitý jestliže například $z \in L^2((0, L))$ a $\|\cdot\|$ je $L^2((0, L))$ norma. V praktických aplikacích je většinou průhyb z dán v podobě diskrétních hodnot z_i získaných nejčastěji z experimentálního měření v bodech t_i . V takovém případě je cenový funkcionál dán ve tvaru

$$\hat{J}(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y(t_i) - z_i)^2, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)^\top \in \mathbb{R}^m, \quad (23)$$

kde $t_i \in (0, L)$, $i = 1, \dots, m$. Protože je prostor $H^2((0, L))$ kompaktně vnořen do prostoru spojitých funkcí $C^1((0, L))$, je $y \in V$ spojitá funkce. Tedy funkcionál \hat{J} je spojitý.

6.3. Diskretizace a konvergenční analýza

Úlohy identifikace neznámých parametrů, které jsme zformulovali v předchozím odstavci, nelze vyřešit exaktně. Proto provedeme aproximaci úloh užitím metody konečných prvků. Uvažujme, že je dáno ekvidistantní dělení

$$D_h : 0 = x_0^{(t)} < x_1^{(t)} < \dots < x_t^{(t)} = L,$$

intervalu $\langle 0, L \rangle$ na t podintervalů $\mathcal{I}_j = \langle x_{j-1}^{(t)}, x_j^{(t)} \rangle$ délky $h_j = x_j^{(t)} - x_{j-1}^{(t)}$, $j = 1, \dots, t$ a nechť $h := \max_{j=1, \dots, t} \{h_j\}$. Předpokládejme také, že dělení D_h je konzistentní s dělením nosníku $\{K_i\}$ nebo podloží $\{F_i\}$ pro libovolné $h > 0$. Tedy, že hranice K_i , $i = 1, \dots, r$ a F_i , $i = 1, \dots, s$ patří do D_h pro každé $h > 0$. Dále předpokládejme, že existuje konstanta $\beta > 0$, která nezávisí na diskretizačním parametru h , taková, že $h/h_j \leq \beta$, $j = 1, \dots, t$. Dále definujme diskrétní prostory

$$V_h^1 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h(L) = 0\},$$

$$V_h^2 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h'(0) = v_h(L) = v_h'(L) = 0\},$$

$$V_h^3 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h'(0) = v_h(L) = 0\},$$

$$V_h^4 = \{v_h \in C^1(\langle 0, L \rangle) : v_h|_{\mathcal{I}_j} \in P_3(\mathcal{I}_j), j = 1, \dots, t, v_h(0) = v_h'(0) = 0\},$$

kde $P_3(\mathcal{I}_j)$ je prostor kubických polynomů definovaných na \mathcal{I}_j , $j = 1, \dots, t$. Přitom je $V_h^i \subset V_i$ pro $i = 1, \dots, 4$. Pro libovolné $h > 0$ dále platí

$$\dim V_h^1 = 2t, \quad \dim V_h^2 = 2(t-1), \quad \dim V_h^3 = 2t-1, \quad \dim V_h^4 = 2t.$$

V případech, kdy nebudou okrajové podmínky jasně specifikovány, budeme používat jednotné označení $V_h \subset V$ a $\dim V_h = N$.

Úloha ohybu a kontaktní úloha s dokonale tuhým podložím

Přípustná množina U_{ad} pro úlohu identifikace materiálových parametrů nosníku definovaná vztahem (14) je sama o sobě diskrétní množinou a není tedy třeba provádět její diskretizaci. Stavovou

úlohu ohybu Gaova nosníku (15) pro dané $h > 0$ aproximujeme její konečně prvkovou aproximací

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p^h) \in V_h \text{ takové, že} \\ a_{p^h}(w_h, v_h) + \pi_{p^h}(w_h, v_h) = \mathcal{L}_{p^h}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (24)$$

Podobně lze aproximovat stavovou úlohu pro kontakt Gaova nosníku s dokonale tuhým podložím

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p) \in K_h \text{ takové, že} \\ a_p(w_h, v_h - w_h) + \pi_p(w_h, v_h - w_h) \geq \mathcal{L}_p(v_h - w_h), \quad \forall v_h \in K_h, \end{cases} \quad (25)$$

kde K_h je diskretizace množiny K definované vztahem (10), tedy

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h(x_j^{(t)}) \geq g(x_j^{(t)}), \forall j = 1, \dots, t-1\}. \quad (26)$$

Pro obě úlohy lze dokázat existenci jediného řešení.

Věta 6.4. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)' a (P3)'. Pak pro libovolné $p \in U_{ad}$ a $h > 0$ mají obě úlohy, (24) i (25), jediné řešení.*

Dále diskretizujeme identifikační úlohu (17). Pro dané $h > 0$ dostaneme

$$\begin{cases} \text{Najít } p^* \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(p^*)) = \min_{p \in U_{ad}} J(w_h(p)), \\ \text{kde } w_h(p) \text{ je řešením stavové úlohy (24) nebo (25)} \\ \text{a } J : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (22).} \end{cases} \quad (27)$$

I v případě diskretizované úlohy (27) lze dokázat existenci alespoň jednoho řešení.

Věta 6.5. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (14), nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a cenový funkcionál J je spojitý. Pak má úloha identifikace (27) pro každé $h > 0$ alespoň jedno řešení.*

Doposud jsme předpokládali, že h je zvoleno pevně. Nyní se podívejme na situaci $h \rightarrow 0+$, $p^h \xrightarrow{h \rightarrow 0+} p \in U_{ad}$. Budeme používat značení p^h , abychom zdůraznili, že $p^h \in U_{ad}$ je uvažováno

ve stavové úloze s daným $p := p^h$. Tedy pro dané $h > 0$ uvažujeme v případě úlohy ohybu stavovou úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p^h) \in V_h \text{ takové, že} \\ a_{p^h}(w_h, v_h) + \pi_{p^h}(w_h, v_h) = \mathcal{L}_{p^h}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (28)$$

A pro kontaktní úlohu s dokonale tuhým podložím pak stavovou úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } p^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(p^h) \in K_h \text{ takové, že} \\ a_{p^h}(w_h, v_h - w_h) + \pi_{p^h}(w_h, v_h - w_h) \geq \mathcal{L}_{p^h}(v_h - w_h), \quad \forall v_h \in K_h. \end{cases} \quad (29)$$

Obdobně, pro dané $h > 0$ je identifikační úloha tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } p^{*h} \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(p^{*h})) = \min_{p^h \in U_{ad}} J(w_h(p^h)), \\ \text{kde } w_h(p^h) \text{ je řešením stavové úlohy (28) nebo (29)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (22).} \end{cases} \quad (30)$$

Pro porozumění vzájemného vztahu úloh (17) a (30) je důležité následující lemma.

Lemma 6.1. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a nechť $\{p^h\} \subset U_{ad}$ je taková posloupnost, že $p^h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p \in U_{ad}$. Pak*

$$w_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w \quad \text{ve } V,$$

kde $w_h := w_h(p^h)$, resp. $w := w(p)$, je řešení úlohy (28) nebo (29), resp. (15) nebo (16).

Na základě uvedeného lemmatu lze následně dokázat konvergenční větu, v níž pro jednoduchost značíme posloupnost a podposloupnost stejně.

Věta 6.6. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1), (P2)', (P3)' a (18). Dále nechť $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$, $w_h^* := w_h(p^{*h})$ je posloupnost optimálních dvojic diskrétní úlohy (30), $h \rightarrow 0^+$. Pak existuje podposloupnost $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$ taková, že*

$$p^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} p^* \text{ v } (L^\infty((0, L)))^2, \quad w_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(p^*) \text{ ve } V, \quad (31)$$

kde $(p^*, w(p^*))$ je optimální dvojicí úlohy (17). Kromě toho každý hromadný bod posloupnosti $\{(p^{*h}, w_h^*)\}$ ve smyslu (31) má tuto vlastnost.

Pod pojmem optimální dvojice úlohy (17) rozumíme dvojici (p^*, w^*) , kde p^* je řešením identifikačního problému (17) a $w^* := w(p^*)$ řeší stavový problém (15), resp. (16), pro dané p^* . Analogicky je zaveden pojem optimální dvojice (p^{*h}, w_h^*) , $w_h^* := w_h(p^{*h})$ pro diskrétní úlohu (30).

Kontaktní úloha s deformovatelným podložím

Přípustná množina U_{ad} pro úlohu identifikace koeficientu tuhosti podloží pro kontaktní úlohu s deformovatelným podložím je definovaná vztahem (19). Je tedy sama o sobě diskrétní množinou a není proto potřeba provádět její diskretizaci. Diskretizací příslušné stavové úlohy pro dané $h > 0$ (20) dostaneme

$$\begin{cases} \text{Pro dané } k \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(k) \in V_h \text{ takové, že} \\ a(w_h, v_h) + \pi(w_h, v_h) - \kappa_k(w_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (32)$$

Podobně pro dané $h > 0$ je diskretizovaná úloha identifikace (21) tvaru

$$\begin{cases} \text{Najít } k^* \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(k^*)) = \min_{k \in U_{ad}} J(w_h(k)), \\ \text{kde } w_h(k) \text{ je řešením stavové úlohy (34)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (22)}. \end{cases} \quad (33)$$

Pro úlohu (33) lze opět dokázat existenci alespoň jednoho řešení.

Věta 6.7. *Nechť U_{ad} je přípustná množina definovaná vztahem (19), nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a cenový funkcionál J je spojitý. Pak pro každé $h > 0$ má úloha (33) alespoň jedno řešení.*

Nyní nás bude zajímat vzájemný vztah řešení úloh (21) a (33) pro $h \rightarrow 0^+$. Stejně jako v předchozí identifikační úloze, bude i zde parametr $k \in U_{ad}$ v diskrétní variantě stavové úlohy (32) označen jako k^h . Tedy pro dané $h > 0$ uvažujeme stavovou úlohu ve tvaru

$$\begin{cases} \text{Pro dané } k^h \in U_{ad} \\ \text{najít } w_h := w_h(k^h) \in V_h^2 \text{ takové, že} \\ a(w_h, v_h) + \pi(w_h, v_h) - \kappa_{k^h}(w_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (34)$$

Podobně pro dané $h > 0$ je diskretizovaná úloha identifikace tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najít } k^{*h} \in U_{ad}, \text{ takové, že} \\ J(w_h(k^{*h})) = \min_{k^h \in U_{ad}} J(w_h(k^h)), \\ \text{kde } w_h(k^h) \text{ je řešením stavové úlohy (34)} \\ \text{a } J : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ je cenový funkcionál daný vztahem (22).} \end{array} \right. \quad (35)$$

Opět pro porozumění vztahu úloh (21) a (35) lze dokázat následující lemma.

Lemma 6.2. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a $\{k^h\} \subset U_{ad}$, $k \in U_{ad}$ je taková posloupnost, že $k^h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} k \in L^\infty((0, L))$. Pak*

$$w_h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w \quad \text{ve } V,$$

kde $w_h := w_h(k^h)$, resp. $w := w(k)$, je řešení úlohy (34), resp. (20).

Na základě tohoto lemmatu lze zformulovat konvergenční větu.

Věta 6.8. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a (18). Dále nechť $\{(k^{*h}, w_h^*)\}$, $w_h^* := w_h(k^{*h})$ je posloupnost optimálních dvojic diskrétní úlohy (35), $h \rightarrow 0^+$. Pak existuje podposloupnost $\{(k^{*h}, w_h^*)\}$ taková, že*

$$k^{*h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} k^* \text{ v } L^\infty((0, L)), \quad w_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} w(k^*) \text{ ve } V, \quad (36)$$

kde $(k^*, w(k^*))$ je optimální dvojicí úlohy (21). Kromě toho každý hromadný bod posloupnosti $\{(k^{*h}, w_h^*)\}$ ve smyslu (36) má tuto vlastnost.

Pod pojmem optimální dvojice úlohy (21) rozumíme dvojici (k^*, w^*) , kde k^* je řešením identifikačního problému (21) a $w^* := w(p^*)$ řeší stavový problém (20) pro dané k^* . Analogicky je zaveden pojem optimální dvojice (k^{*h}, w_h^*) , $w_h^* := w_h(k^{*h})$ pro diskrétní úlohu (35).

Pro numerické výpočty je dále žádoucí najít algebraickou formulaci identifikačních úloh (30), (33) a příslušných stavových úloh. Podrobnosti k této problematice včetně citlivostní analýzy lze najít v disertační práci.

6.4. Ilustrační příklad

Pro ilustraci si uvedeme numerické řešení úlohy identifikace s elasticky deformovatelným podložím. Řešené ukázkové příklady úloh identifikace pro úlohu ohybu Gaova nosníku a kontaktní úlohu s dokonale tuhým podložím jsou uvedeny v disertační práci. Uvažujme tedy kontaktní úlohu vetknutého Gaova nosníku s deformovatelným podložím (11). Tedy uvažujme kontaktní úlohu s okrajovými podmínkami (B2). Nosník je umístěn nad elasticky deformovatelným podložím v konstantní vzdálenosti g . Podloží je rozděleno na 4 stejně dlouhé, materiálově homogenní segmenty, tzn. každý segment je popsán modulem pružnosti podloží k_i , $i = 1, \dots, 4$.

Konkrétně budeme uvažovat nosník s těmito vstupními daty

- Youngův modul pružnosti $E = 2.1 \cdot 10^{10} \text{Pa}$,
- Poissonova konstanta $\nu = 0.3$,
- tloušťka nosníku $t = 0.1 \text{m}$,
- šířka nosníku $b = 0.1 \text{m}$,
- délka nosníku $L = 10 \text{m}$.

Na nosník přitom působí

- konstantní vertikální zatížení $q = -2 \cdot 10^4 \text{Nm}^{-1}$, které působí po celé délce nosníku,
- axiální síla $P = 10^4 \text{N}$ působící v koncovém bodě $x = L$.

Nosník je umístěn ve vzdálenosti $g = -0.02 \text{m}$ nad elasticky deformovatelným podložím. Naším úkolem je najít vektor modulu pružnosti podloží, a to užitím úlohy identifikace (21), přičemž uvažujeme cenový funkcionál ve tvaru (23). Přípustná množina pro koeficient tuhosti podloží je dána vztahem (19), přičemž $k_{\min} = 10^2 \text{Nm}^{-3}$ a $k_{\max} = 9 \cdot 10^5 \text{Nm}^{-3}$.

Pro úlohu identifikace uvažujme diskretizovaný funkcionál ve tvaru

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z})^\top(\mathbf{S}\mathbf{w} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{72}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^8,$$

přičemž jsme provedli diskretizaci uvažované úlohy s krokem $h = 10/36$. Matice \mathbf{S} reprezentuje operátor restrikce z \mathbb{R}^{72} do \mathbb{R}^8 a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_8)^\top$ je vektor měření ve tvaru

$$\mathbf{z} = 10^{-2} \cdot (-0.465, -1.409, -2.309, -2.837, -2.838, -2.312, -1.411, -0.466)^\top.$$

Složky tohoto vektoru jsou získány jako hodnoty řešení w úlohy (11) v bodech $t_i = \frac{10}{9}i$, $i = 1, \dots, 8$ s těmito danými hodnotami koeficientu tuhosti podloží na všech čtyřech segmentech

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}, & k_2 &= 7 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-3} \\ k_3 &= 5 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-3}, & k_4 &= 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-3}. \end{aligned} \quad (37)$$

Poznamenejme, že uvažovaná úloha identifikace (21) je úlohou nehladké optimalizace, neboť kontaktní člen ve stavové úloze není spojitě diferencovatelný. To lze vyřešit užitím regularizační metody. Problematický kontaktní člen ve stavové úloze (11) nahradíme regularizovaným členem

$$\kappa_\delta(w, v) = \frac{1}{2} \int_0^L k b (1 - \nu^2) \left((g - w) + \sqrt{(g - w)^2 + \delta^2} \right) v \, dx,$$

čímž získáme regularizovanou úlohu, která již je spojitě diferencovatelná.

Lze dokázat, že pro $\delta \rightarrow 0+$ konverguje řešení regularizované úlohy k řešení úlohy (11), podrobnější informace viz disertační práce.

Úlohu identifikace jsme postupně řešili pro tři různé hodnoty regularizačního parametru, konkrétně $\delta = 10^0, 10^{-1}$ a 10^{-2} . Vektor počáteční aproximace \mathbf{k}_δ^0 pro minimalizační proces byl v tomto případě zvolen

$$\mathbf{k}_\delta^0 = (10^5, 10^5, 10^5, 10^5).$$

Dosažené výsledky lze najít v níže uvedených tabulkách, přičemž Tabulka 2 uvádí celkový počet iterací a výsledné hodnoty modulu pružnosti podloží. V Tabulce 3 najdeme počáteční a koncovou hodnotu cenového funkcionálu a v Tabulce 4 jsou pro ověření kvality výpočtu uvedeny hodnoty relativních chyb

$$err_k^0 = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^0\|}{\|\mathbf{k}\|} \quad \text{a} \quad err_k^* = \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_\delta^*\|}{\|\mathbf{k}\|},$$

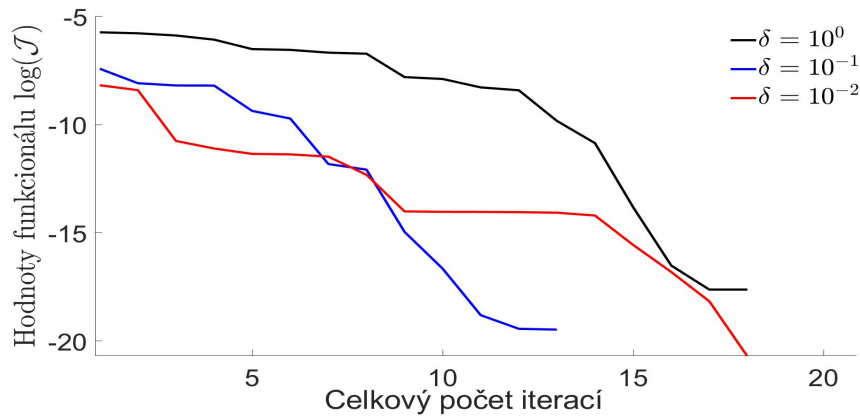
$s = 4$	it	$\mathbf{k}_\delta^* [\text{Nm}^{-3}]$
$\delta = 10^0$	18	$(3.000010 \cdot 10^5, 6.999749 \cdot 10^3, 4.999975 \cdot 10^4, 3.000010 \cdot 10^5)$
$\delta = 10^{-1}$	13	$(3.000012 \cdot 10^5, 6.999729 \cdot 10^3, 4.999973 \cdot 10^4, 3.000012 \cdot 10^5)$
$\delta = 10^{-2}$	18	$(3.000079 \cdot 10^5, 6.998432 \cdot 10^3, 5.000176 \cdot 10^4, 2.999886 \cdot 10^5)$

Tabulka 2: Výsledky pro úlohu identifikace s deformovatelným podložím se 4 segmenty a hodnoty δ .

kde \mathbf{k} je v tomto případě vektor, jehož složky jsou dány v (37). Na obrázku 1 lze pozorovat pokles hodnoty cenového funkcionálu během iteračního procesu. Pro přehlednost bylo použito logaritmické měřítko na ose y .

$s = 4$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^0))$	$\mathcal{J}(\mathbf{w}(\mathbf{k}_\delta^*))$
$\delta = 10^0$	$1.8391 \cdot 10^{-6}$	$2.4007 \cdot 10^{-19}$
$\delta = 10^{-1}$	$1.6342 \cdot 10^{-7}$	$3.1086 \cdot 10^{-20}$
$\delta = 10^{-2}$	$8.6988 \cdot 10^{-9}$	$1.3568 \cdot 10^{-20}$

Tabulka 3: Počáteční a koncová hodnota cenového funkcionálu pro různé δ .



Obrázek 1: Hodnoty cenového funkcionálu \mathcal{J} pro různé δ a 4 segmenty.

$s = 4$	err_k^0	err_k^*
$\delta = 10^0$	0.7066	$3.3639 \cdot 10^{-6}$
$\delta = 10^{-1}$	0.7066	$4.2586 \cdot 10^{-6}$
$\delta = 10^{-2}$	0.7066	$3.2906 \cdot 10^{-5}$

Tabulka 4: Hodnoty relativních chyb pro 4 segmenty.

7. Závěr

Cílem disertační práce bylo vytvořit ucelenou teorii zabývající se úlohou identifikace neznámých materiálových parametrů Gaova nelineárního nosníku pro úlohu ohybu a kontaktní úlohu s dokonale pružným podložím. Uvažovali jsme také kontaktní úlohu Gaova nosníku s deformovatelným podložím, přičemž jsme se zaměřili pouze na identifikaci koeficientu tuhosti podloží.

Pro studium úlohy identifikace jsme zvolili Gaův model nosníku, který je vhodnější pro složitější strojní a stavební konstrukce, protože není limitován malými průhyby na rozdíl od jiných populárních lineárních modelů. Vzhledem k důležitosti identifikačních úloh v různých průmyslových a technických odvětvích jsme se rozhodli věnovat se právě úlohám identifikace pro Gaův model nosníku, které, pokud je nám známo, doposud nebyly detailně zpracovány.

Stěžejní část disertační práce se zabývala formulací identifikačních úloh, jejich diskretizací, konvergenční analýzou, následně pak algebraickou formulací včetně citlivostní analýzy, a to jak pro úlohu ohybu nelineárního nosníku, tak i pro kontaktní úlohu nosníku s dokonale tuhým i elasticky deformovatelným podložím. V případě úlohy ohybu a kontaktní úlohy s dokonale tuhým podložím jsme se zabývali identifikací materiálových parametrů Gaova nosníku. V úloze kontaktu s elasticky deformovatelným podložím jsme se zaměřili na identifikace modulu pružnosti podloží. Studované úlohy byly formulovány jako úlohy optimálního řízení. Teoretickou část práce jsme doplnili řešenými modelovými úlohami pro všechny tři studované úlohy identifikace. K řešení jsme použili matematický software MATLAB.

Teoretická část této disertační práce byla publikována ve dvou impaktovaných časopisech [33], [35] a jednom recenzovaném sborníku [34]. V plánu je ještě detailnější zpracování numerických algoritmů a výpočtů, s cílem další publikace.

8. Seznam publikací

Prvoautorské publikace

- **Radová, J.**, Machalová, J., Burkotová J.: Identification problem for nonlinear Gao beam. *Mathematics*, Vol. 8, No. 11, 1916, 2020.
- **Radová, J.**, Machalová, J.: Identification problem for nonlinear beam–extension for different types of boundary conditions. *PANM 21: Proceedings of 21st conference, Jablonec nad Nisou, 2022. Institute of Mathematics CAS, Prague*, pp. 199–208, 2023.
- **Radová, J.**, Machalová, J.: Parameter identification in contact problems for Gao beam. *Non-linear Analysis: Real World Applications*, Vol. 77, 104068, 2024.

Spoluautorská publikace

- Burkotová, J., Machalová, J., **Radová, J.**: Optimal thickness distribution of stepped nonlinear Gao beam. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 189, pp. 21–35, 2021.

9. Seznam konferencí a workshopů

Aktivní účast

- Mezinárodní konference Computational Mechanics 2018 (CM 2018), pořádaná Západočeskou Univerzitou v Plzni, konaná ve dnech 31. října – 2. listopadu 2018 v Srní.
Prezentovaný příspěvek: *Optimal control method for solution of inverse problem.*
- Mezinárodní konference Olomoucian Days of Applied Mathematics 2019 (ODAM 2019), pořádaná Katedrou matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP v Olomouci, konaná ve dnech 29.–31. května 2019 v Olomouci.
Prezentovaný příspěvek: *Solution of inverse problem for Gao beam using optimal control problem.*
- Mezinárodní konference Modelling 2019, pořádaná Ústavem geoniky AV ČR, Matematickým ústavem AV ČR a VŠB–TUO, konaná v Olomouci 16.–20. září 2019.
Prezentovaný příspěvek: *Optimal control method for solution of nonlinear inverse problem.*
- Mezinárodní konference Computational Mechanics 2021 (CM 2021), pořádaná Západočeskou univerzitou v Plzni, konaná ve dnech 8.–10. listopadu 2021 v Srní.
Prezentovaný příspěvek: *Inverse problem for nonlinear Gao beam model.*
- Mezinárodní konference Programy a Algoritmy Numerické Matematiky 21 (PANM 21), pořádaná Matematickým ústavem AV ČR, konaná ve dnech 19.–24. června 2022 v Jablonci nad Nisou.
Prezentovaný příspěvek: *Contact problem for nonlinear Gao beam model–Parameter identification.*
- Mezinárodní konference EQUADIFF 15 pořádaná Masarykovou univerzitou, Vysokým učeníem technickým v Brně, Matematickým ústavem AV ČR a Jednotou českých matematiků a fyziků, konaná ve dnech 11.–15. července 2022 v Brně.
Prezentovaný příspěvek: *Identification of material parameters for Gao beam.*

- Mezinárodní konference International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2022), konaná ve dnech 19.–25. září 2022 v Heraklionu, Kréta.
Prezentovaný příspěvek: *Identification of material parameters for nonlinear beam and obstacle.*
- Mezinárodní konference Olomoucian Days of Applied Mathematics 2023 (ODAM 2023), pořádána Katedrou matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP v Olomouci, konaná ve dnech 12.–14. června 2023 v Olomouci.
Prezentovaný příspěvek: *Parameter identification for Gao beam and foundation.*

Pasivní účast

- Workshop Recent Trends in Optimal Control of Partial Differential Equations 2019, pořádaný Technickou univerzitou v Berlíně, konaný ve dnech 25.–27. února 2019.
- Mezinárodní konference a zimní škola Seminar on Numerical Analysis (SNA 2023), pořádaná Ústavem geoniky AV ČR a VŠB Technická univerzita Ostrava, konaná ve dnech 23.–27. ledna 2023 na VŠB–TUO v Ostravě.

10. Výzkumné pobyty

- Vědecko-výzkumná stáž, září 2018–únor 2019 v rámci projektu Podpora mobility na UP, CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_027/0008482 na Technické Univerzitě v Berlíně, Německo, pod vedením prof. Dietmara Hömberga

Seznam použité literatury

- [1] Ahn, J., Kuttler, K. L., Shillor, M.: Dynamic contact of two Gao beams. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2012, No. 194, pp. 1–42, 2012.
- [2] Ali, E. J., Gao, D. Y.: Canonical finite element method for solving nonconvex variational problems to post buckling beam problem. *AIP Proceedings of the 2nd International Conference, Numerical Computations: Theory and Algorithms*, Vol. 1776, pp. 1–4, 2016.
- [3] Ali, E. J., Gao, D. Y.: Improved canonical dual finite element method and algorithm for post–buckling analysis of nonlinear Gao beam. In: Gao D. Y., Latorre V., Ruan N. (eds): Canonical Duality Theory. *Advances in Mechanics and Mathematics*, Vol. 37, pp. 277–289, Springer, 2017.
- [4] Ali, E. J., Gao, D. Y.: On SDP method for solving canonical dual problem in post buckling of large deformed elastic beam. *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 16, No. 5, pp. 1225–1240, 2018.
- [5] Andrews, K. T., M'Bengue, M. F., Shillor, M.: Vibrations of a nonlinear dynamic beam between two stops. *Discrete and Continuous Dynamical System*, Vol. 12, No. 1, pp. 23–38, 2009.
- [6] Andrews, K. T., Dumont, Y., M'Bengue, M. F., Purcell, J., Shillor, M.: Analysis and simulations of a nonlinear dynamic beam. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 63, No. 6, pp. 1005–1019, 2012.
- [7] Andrews, K. T., Kuttler, K. L., Shillor, M.: Dynamic Gao beam in contact with a reactive or rigid foundation. In: Han, W., Migorski, S., Sofonea, M. (Eds): Advances in Variational and Hemivariational Inequalities with Applications. *Advances in Mechanics and Mathematics*, Vol. 33, pp. 225–248, 2015.
- [8] Bajer, C. I., Dyniewicz, B., Shillor, M.: A Gao beam subjected to a moving inertial point load. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 23, No. 3, pp. 461–472, 2018.
- [9] Bažant, Z. P., Cedolin, L.: *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific Publishing Co., 2010.

- [10] Borsos, B., Karátson, J.: Robust iterative solvers for Gao type nonlinear beam models in elasticity. *Computational Methods in Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 1, pp. 1–13, 2022.
- [11] Borzì, A., Schulz, V.: *Computational optimization of systems governed by partial differential equations*. SIAM, Philadelphia, 2011.
- [12] Burkotová, J., Machalová, J., Radová, J.: Optimal thickness distribution of stepped nonlinear Gao beam. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 189, pp. 21–35, 2021
- [13] Cai, K., Gao, D. Y., Qin, Q. H.: Post–buckling solutions of hyper–elastic beam by canonical dual finite element method. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 19, No. 6, pp. 659–671, 2014.
- [14] Cedolin, L.: *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific: Singapore, 2010.
- [15] Dinev, D.: Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions. *Engineering Mechanics*, Vol. 19, No. 6, pp. 381–392, 2012.
- [16] Dyniewicz, B., Bajer, C. I.: The Gao beam under a moving inertial load and harmonic compression. In: *MATEC Web of Conferences, EDP Sciences*, Vol. 285, pp. 00003, 2019.
- [17] Dyniewicz, B., Bajer, C. I., Kuttler, K. L., Shillor, M.: Vibrations of a Gao beam subjected to a moving mass. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 50, pp. 342–364, 2019.
- [18] Gao, D. Y.: Nonlinear elastic beam theory with application in contact problems and variational approaches. *Mechanics Research Communications*, Vol. 23, No. 1, pp. 11–17, 1996.
- [19] Gao, D. Y.: Dual extremum principles in finite deformation theory with applications to post–buckling analysis of extended nonlinear beam model. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, No. 11, part 2, pp. 64–71, 1997.
- [20] Gao, D. Y.: Finite deformation beam models and triality theory in dynamical post–buckling analysis. *International Journal of Non–linear Mechanics*, Vol. 35, No. 1, pp. 103–131, 2000.

- [21] Gao, D. Y.: *Duality Principles in Nonconvex Systems: Theory, Methods and Applications*. Springer, 2000.
- [22] Gao, D. Y., Machalová, J., Netuka, H.: Mixed Finite element solutions to contact problems of nonlinear Gao beam on elastic foundation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 22, pp. 537–550, 2015.
- [23] Kuttler, K. L., Purcell, J., Shillor, M.: Analysis and simulations of a contact problem for a nonlinear dynamic beam with a crack. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 65, No. 1, pp. 1–25, 2011.
- [24] Kuttler, K. L., Purcell, J., Shillor, M.: Analysis and simulations of a contact problem for a nonlinear dynamic beam with a crack. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 65, No. 1, pp. 1–25, 2012.
- [25] Levere, K. M.: An inverse problem for the nonlinear Gao beam. *International Journal of Applied Nonlinear Science* 3, Vol. 1, No. 2, pp. 122–135, 2014.
- [26] Machalová, J., Netuka, H.: Bending of a nonlinear beam reposing on an unilateral foundation. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 45–54, 2011.
- [27] Machalová, J., Netuka, H.: Solution of contact problems for nonlinear Gao beam and obstacle. *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2015, 2015.
- [28] Machalová, J., Netuka, H.: Control variational method approach to bending and contact problems for Gao beam. *Applications of Mathematics*, Vol. 62, No. 6, pp. 661–677, 2017.
- [29] Machalová, J., Netuka, H.: Solution of contact problems for Gao beam and elastic foundation. *Mathematics and Mechanics of Solids, Special Issue on Inequality Problems In Contact Mechanics*, Vol. 23, No. 3, pp. 473–488, 2018.
- [30] Machalová, J., Netuka, H.: Comments on the large deformation elastic beam model developed by D. Y. Gao. *Mechanics Research Communications*, Vol. 110, 103607, 2020.
- [31] M’Bengue, M. B. F., Shillor, M.: Regularity results for the problem of vibrations of a nonlinear beam. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 27, 2008.

- [32] Netuka, H., Machalová, J.: Post-buckling solutions for the Gao beam. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 76, No. 3, pp. 329–347, 2023.
- [33] Radová, J. Machalová, J. Burkotová J.: Identification problem for nonlinear Gao beam. *Mathematics*, Vol. 8, No. 11, 1916, 2020.
- [34] Radová, J., Machalová, J.: Identification problem for nonlinear beam–extension for different types of boundary conditions. *PANM 21: Proceedings of 21st conference, Jablonec nad Nisou, 2022. Institute of Mathematics CAS, Prague*, pp. 199–208, 2023.
- [35] Radová, J., Machalová, J.: Parameter identification in contact problems for Gao beam. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 77, 104068, 2024.
- [36] Santos, H. A., F. A., Gao, D. Y.: Canonical dual finite element method for solving post-buckling problems of a large deformation elastic beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 240–247, 2012.
- [37] Sun, B.: Optimal control of vibrations of a dynamic Gao beam in contact with a reactive foundation. *International Journal of Systems Science*, Vol. 48, No. 5, pp. 1084–1091, 2017.
- [38] Sun, B.: Maximum principle for optimal control of vibrations of a dynamic Gao beam in contact with a rigid foundation. *International Journal of Systems Science*, Vol. 48, No. 16, pp. 3522–3529, 2017.
- [39] Tröltzsch, F.: *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods, and applications*. American Mathematical Soc.: Providence, RI, USA, 2010.
- [40] Wang, Y. Y., Sun, B.: Pontryagin’s maximum principle for optimal control of vibrations of two nonlinear Gao beams. *In: 2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation*, pp. 913–918, IEEE, 2020.
- [41] Wang, Y. Y., Sun, B.: Optimal control of vibrations of two nonlinear Gao beams connected with a joint. *International Journal of Systems Science*, Vol. 52, No. 10, pp. 2064–2081, 2021.
- [42] Winkler, E.: *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Dominicus, Prague, 1867.

- [43] Zhong, X. U., Liao, S. L., Gao, D. Y.: HAM approach for post–buckling problems of a large deformed elastic beam. *Submitted to Computers & Mathematics with Application*, 2018.