

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
IS-LM ekonomický model



Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Lenka Kozelková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité k vytvoření této práce.

V Olomouci dne 29. března 2010

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala své vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za odborné vedení bakalářské práce, za rady, připomínky i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod	5
1 Diferenciální rovnice a dynamické systémy	6
1.1 Obyčejné lineární diferenciální rovnice 2. řádu	6
1.1.1 Homogenní rovnice	6
1.1.2 Nehomogenní rovnice	7
1.1.3 Metoda variace konstant	7
1.1.4 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty	8
1.1.5 Metoda neurčitých koeficientů	9
1.2 Stabilita	10
1.2.1 Ljapunovská stabilita	11
1.2.2 Stejnoměrná stabilita	11
1.2.3 Asymptotická stabilita	12
1.3 Dynamické systémy	13
1.3.1 Spojité dynamické systémy generované autonomními obyčejnými diferenciálními rovnicemi	14
1.3.2 Stabilita ekvilibria	16
1.3.3 Dynamické systémy vznikající z autonomních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty v reálné rovině	17
2 IS-LM ekonomický model	26
2.1 Historie	26
2.2 Odvození modelu	26
2.2.1 Užití teorie dynamických systémů	28
2.2.2 Užití teorie diferenciálních rovnic	35
Závěr	38
Literatura	39

Úvod

Cílem této bakalářské práce je konstrukce IS-LM ekonomického modelu a studium jeho vlastností.

Nejprve uvedeme výběr potřebné teorie diferenciálních rovnic a dynamických systémů. A poté tuto teorii aplikujeme na samotný model. Pomocí matematické teorie chceme tedy odvodit chování ekonomického modelu.

Jako první si určíme studované proměnné. Jedinou nezávislou proměnnou je čas, ostatní jsou jeho funkcemi. Změnu proměnných určuje jejich první derivace. Tento model budeme nejprve vyšetřovat z hlediska dynamických systémů a poté také jako diferenciální rovnici 2. řádu. Na závěr si za proměnné navolíme konkrétní čísla a vyjádříme početně i graficky chování proměnných v jednotlivých zvolených případech.

1 Diferenciální rovnice a dynamické systémy

1.1 Obyčejné lineární diferenciální rovnice 2. řádu

V této kapitole bylo čerpáno z [2], [3].

Lineární diferenciální rovnicí 2. řádu nazýváme rovnici

$$\ddot{y} + a(x)\dot{y} + b(x)y = c(x). \quad (1)$$

O funkcích a, b, c obvykle předpokládáme, že jsou spojité na nějakém intervalu $I \in \mathbb{R}$. Jestliže $c(x) \not\equiv 0$, potom rovnici (1) nazýváme nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu. Rovnice

$$\ddot{y} + a(x)\dot{y} + b(x)y = 0 \quad (2)$$

se nazývá homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

Definice 1. Řešením rovnice (1) rozumíme funkci $y = \varphi(x)$ definovanou na nějakém intervalu $J \subseteq I$ takovou, že $\ddot{\varphi}$ je spojitá na J a

$$\ddot{\varphi}(x) + a(x)\dot{\varphi}(x) + b(x)\varphi(x) = c(x)$$

pro každé $x \in J$.

1.1.1 Homogenní rovnice

Věta 1. Jestliže $y_1(x), y_2(x)$ jsou dvě řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu (2), pak $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, je také řešením.

Definice 2. Řekneme, že $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně závislé na intervalu J , existují-li konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jedna je různá od nuly, takové, že

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0, x \in J.$$

V opačném případě jsou lineárně nezávislé.

Definice 3. Necht' $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou funkce diferencovatelné na J . Wronskiánem rozumíme determinant ve tvaru

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \dot{y}_1(x) & \dot{y}_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\dot{y}_2(x) - \dot{y}_1(x)y_2(x).$$

Wronskián slouží k vyšetření lineární závislosti systému funkcí.

Věta 2. Necht' y_1, y_2 jsou dvě řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé na J právě tehdy, když $W[y_1, y_2] \neq 0$ pro některé $x \in J$.

Každou dvojici lineárně nezávislých řešení y_1, y_2 dané homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu nazveme fundamentálním systémem řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu (též báze řešení).

Definice 4. Obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu má tvar

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Věta 3. Každé řešení y rovnice (2) je tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

pro vhodně zvolené konstanty C_1, C_2 .

Definice 5. Řešení z věty 3 nazýváme partikulárním řešením diferenciální rovnice (2).

1.1.2 Nehomogenní rovnice

Věta 4. Je-li Y řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu (1) a \bar{y} je obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu (2), potom $y = \bar{y} + Y$ je řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

Definice 6. Protože řešení $y = \bar{y} + Y$ závisí na dvou libovolných konstantách C_1, C_2 , nazýváme y obecným řešením diferenciální rovnice (1). Pro každou konkrétní volbu konstant C_1, C_2 pak dostáváme partikulární řešení diferenciální rovnice (1).

1.1.3 Metoda variace konstant

U této metody se snažíme v obecném řešení homogenní rovnice zaměnit konstanty C_1, C_2 vhodnými funkcemi $K_1(x), K_2(x)$ a hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

Uvažujeme diferenciální rovnici (1).

Nechť $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice (2), tj.

$$\ddot{y}_i + a(x)\dot{y}_i + b(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Hledejme řešení rovnice ve tvaru

$$y(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

Vypočteme první derivaci a dostaneme.

$$\dot{y} = \dot{K}_1 y_1 + K_1 \dot{y}_1 + \dot{K}_2 y_2 + K_2 \dot{y}_2$$

Poté určíme za podmínky $\dot{K}_1 y_1 + \dot{K}_2 y_2 = 0$ také druhou derivaci. Pak máme

$$\dot{y} = K_1 \dot{y}_1 + K_2 \dot{y}_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{K}_1 \dot{y}_1 + K_1 \ddot{y}_1 + \dot{K}_2 \dot{y}_2 + K_2 \ddot{y}_2.$$

Po dosazení do rovnice (1) a následné úpravě dostaneme

$$\dot{K}_1 y_1 + K_1 \ddot{y}_1 + \dot{K}_2 y_2 + K_2 \ddot{y}_2 + a(K_1 y_1 + K_2 y_2) + b(K_1 y_1 + K_2 y_2) = c(x),$$

$$\dot{K}_1 y_1 + \dot{K}_2 y_2 + K_1(\ddot{y}_1 + a y_1 + b y_1) + K_2(\ddot{y}_2 + a y_2 + b y_2) = c(x).$$

Jestliže platí (3), dostaneme

$$\dot{K}_1 y_1 + \dot{K}_2 y_2 = c(x).$$

Celkově máme pro derivace funkcí \dot{K}_1 a \dot{K}_2 následující soustavu lineárních rovnic.

$$\dot{K}_1 y_1 + \dot{K}_2 y_2 = 0$$

$$\dot{K}_1 y_1 + \dot{K}_2 y_2 = c(x).$$

Determinant matice soustavy je wronskián

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix},$$

který je nenulový, a proto má soustava jediné řešení. K_1 a K_2 dostaneme, když \dot{K}_1 a \dot{K}_2 zintegrujeme.

1.1.4 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Nechť v diferenciální rovnici (1) jsou funkce $a(x)$ a $b(x)$ konstantní, tj. $a(x) \equiv a$, $b(x) \equiv b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak má rovnice (1) tvar

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = c(x) \tag{5}$$

a příslušná homogenní rovnice má tvar

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0. \tag{6}$$

Fundamentální systém řešení rovnice (5) lze určit následujícím způsobem.

Nechť máme charakteristickou rovnici ve tvaru

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{7}$$

Vyřešením této rovnice získáme kořeny λ_1 a λ_2 , z nichž získáme fundamentální systém řešení.

Kořeny rovnice (7) závisí na diskriminantu, jestliže je kladný, dostaneme dvě různá reálná čísla, jestliže je roven nule, dostaneme jeden dvojnásobný kořen a pro záporný diskriminant je řešením dvojce komplexně sdružených kořenů.

Věta 5. Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a zároveň $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak fundamentální systém řešení lze zapsat

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

a obecné řešení má tvar

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Věta 6. Necht' $\lambda_1 = \lambda_2$, pak fundamentální systém řešení má tvar

$$y_1 = e^{\lambda t}, y_2 = te^{\lambda t}$$

a obecné řešení lze zapsat

$$y(x) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 x e^{\lambda t}.$$

Věta 7. Necht' $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, kde $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, pak fundamentální systém řešení má tvar

$$y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha t} \sin \beta x$$

a obecné řešení lze zapsat

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta x.$$

Nyní uvažujeme nehomogenní diferenciální rovnici (5). Její obecné řešení má tvar

$$y(x) = \bar{y} + Y,$$

kde \bar{y} je obecné řešení diferenciální rovnice (6) a Y je partikulární řešení diferenciální rovnice (5).

Partikulární řešení rovnice (5) můžeme určit metodou variace konstant nebo metodou neurčitých koeficientů. Vzhledem k tomu, že metoda neurčitých koeficientů je výrazně rychlejší než variace konstant, dáváme jí u těchto rovnic přednost. U této metody musí mít pravá strana rovnice speciální tvar. Popíšeme následující tři případy.

1.1.5 Metoda neurčitých koeficientů

Uvažujeme rovnici ve tvaru

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = c(x). \quad (8)$$

Věta 8. Necht' $c(x) = P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n . Předpokládáme, že číslo 0 je k -násobným kořenem charakteristické rovnice (7). Přitom $k = 0$ znamená, že tato rovnice nemá kořen 0. Pak rovnice (8) má partikulární řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x),$$

kde $Q_n(x)$ je vhodný polynom stupně n s neznámými koeficienty.

Věta 9. Necht' $c(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že číslo α je k -násobným kořenem charakteristické rovnice (7); $k = 0$, nemá-li tento kořen. Pak rovnice (8) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x)e^{\alpha x},$$

kde $Q_n(x)$ je vhodný polynom stupně n s neznámými koeficienty.

Věta 10. Necht' $c(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m , $Q_n(x)$ je polynom stupně n a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že číslo $\alpha + \beta i$ je k -

násobný kořenem charakteristické rovnice (7); $k = 0$, nemá-li tento kořen. Pak rovnice (8) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k [R_s(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + S_s(x)e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

kde $s = \max\{m, n\}$ (je-li $P_m(x) \equiv 0$, je $s = n$, je-li $Q_n(x) \equiv 0$, je $s = m$) a $R_s(x)$ a $S_s(x)$ jsou vhodné polynomy stupně s s neznámými koeficienty.

1.2 Stabilita

Nelineární diferenciální rovnici 2. řádu nazýváme rovnicí

$$\dot{y} = f(t, y, \dot{y}). \quad (9)$$

O funkci f zde předpokládáme, že je spojitá na jisté množině $D \subset J \times \mathbb{R}^2$, kde $J = (t_0, \infty)$. Dále budeme předpokládat, že rovnice (9) má řešení y_0 na J , tj. funkce y_0 má spojitou druhou derivaci na J a splňuje na J rovnici (9).

Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ budeme užívat normu

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

a pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

souhlasnou maticovou normu

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^2}.$$

Rovnici (9) lze převést na systém diferenciálních rovnic pomocí substituce

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t).$$

Dostáváme

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t)). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Označíme-li

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) \quad \text{a} \\ \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t)) = (x_2(t), f(t, x_1(t), x_2(t))),$$

dostáváme z rovnice (9) systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \quad (11)$$

tj. vektorovou diferenciální rovnici 1. řádu.

Položíme-li

$$\mathbf{x}_0(t) = (y_0(t), \dot{y}_0(t)),$$

dostáváme vektorovou funkci $\mathbf{x}_0(t)$, která je řešením systému (11) na J .

Nyní uvažujeme obecně nelineární vektorovou funkci

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2)$$

spojitou na D a systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (12)$$

Definice 7. Řešením diferenciální rovnice (12) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$ definovanou na nějakém intervalu $J \subseteq I$ takovou, že $\dot{\mathbf{x}}$ je spojitá na J a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad \text{pro každé } t \in J.$$

1.2.1 Ljapunovská stabilita

Definice 8. (Ljapunov) Řešení \mathbf{x}_0 rovnice (12) se nazývá Ljapunovsky stabilní (stručněji stabilní), když ke každému $\varepsilon > 0$ a $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ tak, že každé řešení \mathbf{x} rovnice (12) vyhovující podmínce $\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)\| < \delta$ existuje pro $t \geq t_1$ a splňuje pro tuto t nerovnost $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \varepsilon$.

Definice 9. Řešení \mathbf{x}_0 rovnice (12) je nestabilní, když existují $t_1 \geq t_0$ a $\varepsilon > 0$ tak, že ke každému $\delta > 0$ existuje řešení \mathbf{x} rovnice (12) vyhovující podmínce

$$\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)\| < \delta$$

a přitom

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \geq \varepsilon \quad \text{pro nějaké } t \geq t_1.$$

1.2.2 Stejněměrná stabilita

Definice 10. (Persidskij) Řešení \mathbf{x}_0 rovnice (12) se nazývá stejněměrně stabilní, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq t_0$ všechna řešení \mathbf{x} rovnice (12) splňující podmínku $\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)\| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_1$ a splňují pro ně nerovnost $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \varepsilon$.

Je-li systém (12) autonomní a je-li \mathbf{x}_0 konstantní řešení tohoto systému, pak řešení \mathbf{x}_0 je stejněměrně stabilní právě tehdy, když je stabilní. Obecně je pojem stejněměrné stability silnější než pojem stability.

1.2.3 Asymptotická stabilita

Definice 11. (Ljapunov) Řešení \mathbf{x}_0 rovnice (12) se nazývá asymptoticky stabilní, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ tak, že pro každé řešení \mathbf{x} rovnice (12) splňující nerovnost $\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)\| < \delta$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| = 0.$$

Nyní uvažujeme speciální případy rovnice (12), zejména lineární vektorovou rovnici

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} \quad (13)$$

a nelineární rovnici

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \quad (14)$$

kde A je čtvercová matice řádu 2 spojitá na J a \mathbf{g} je vektorová funkce spojitá na D taková, že $\mathbf{g}(t, 0) \equiv 0$.

Definice 12. Každou dvojici lineárně nezávislých řešení $\mathbf{x}_1(t)$ a $\mathbf{x}_2(t)$ rovnice (13) na J nazveme fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (13).

Maticová funkce $Y(t)$, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (13) se nazývá fundamentální matice diferenciální rovnice (13).

Nechť $Y(t)$ značí libovolnou fundamentální matici diferenciální rovnice (13).

Věta 11. Nulové řešení vektorové rovnice (13) je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že

$$\|Y(t)\| \leq K \quad \text{pro } t \in J.$$

Věta 12. Nulové řešení vektorové rovnice (13), kde A je konstantní matice, je stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice A má nekladnou reálnou část a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchého typu (tj. každý blok odpovídající takovému kořenu v Jordanově kanonickém tvaru má nenulové prvky jen v hlavní diagonále).

Věta 13. Nulové řešení rovnice (13) je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že

$$\|Y(t)Y^{-1}(s)\| \leq K \quad \text{pro } t_0 \leq s \leq t < \infty. \quad (15)$$

Věta 14. Necht' platí (15) a necht'

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| \leq \gamma(t)\|\mathbf{x}\|, \quad (t, \mathbf{x}) \in D,$$

kde γ je nezáporná spojitá funkce taková, že

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)ds < \infty.$$

Pak je nulové řešení rovnice (14) stejnoměrně stabilní.

Věta 15. Nulové řešení vektorové rovnice (13) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když

$$\|Y(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

Věta 16. Nulové řešení vektorové rovnice (13) s konstantní maticí A je asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice A má zápornou reálnou část.

Věta 17. Necht' platí

$$\int_{t_0}^t \|Y(t)Y^{-1}(s)\| ds \leq K \quad \text{pro } t \geq t_0$$

a

$$\|g(t, \mathbf{x})\| \leq \gamma \|\mathbf{x}\| \quad \text{pro } (t, \mathbf{x}) \in D,$$

kde $\gamma < K^{-1}$. Pak je nulové řešení vektorové rovnice (14) asymptoticky stabilní.

Věta 18. (Ljapunov) Necht' A je konstantní čtvercová matice řádu n . Jestliže alespoň jeden kořen charakteristické rovnice matice A má kladnou reálnou část a

$$\frac{\|g(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \Rightarrow 0 \quad \text{na } J \text{ pro } \mathbf{x} \rightarrow 0,$$

pak nulové řešení rovnice

$$\dot{x} = Ax + g(t, \mathbf{x})$$

je nestabilní.

1.3 Dynamické systémy

V této části práce je čerpáno z [5].

Dynamický systém je matematický model měnící se v čase podle jistých pravidel, která jsou stanovena v následující definici.

Definice 13. Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ a necht' $\varphi: J \times G \rightarrow G$ je spojitě zobrazení s těmito vlastnostmi:

1. $\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$ pro $(0, \mathbf{x}^0) \in J \times G$.
2. $\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}^0))$ pro každé $t, s \in J$ a $\mathbf{x}^0 \in G$.
3. Pro každé $t \in J$ existuje k zobrazení $\varphi(t, \cdot)$ inverzní zobrazení $\varphi(-t, \cdot)$.

Pak zobrazení $\varphi: J \times G \rightarrow G$ nazveme tok.

Pro každé pevné $t \in J$, zobrazení $\varphi(t, \cdot): G \rightarrow G$ nazveme dynamický systém.

Je-li J interval, hovoříme o spojitéch dynamických systémech, je-li J diskrétní množina např. posloupnost, hovoříme o diskrétních dynamických systémech. Diskrétní dynamické systémy lze získat z diferenčních rovnic, zatímco spojité dynamické systémy lze získat z diferenciálních rovnic.

1.3.1 Spojité dynamické systémy generované autonomními obyčejnými diferenciálními rovnicemi

Uvažujeme diferenciální rovnici

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (16)$$

kde $\mathbf{f} \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$.

Definice 14. Řešením rovnice (16) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x}(t): J \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že $\mathbf{x} \in C^1(J)$ splňuje (16) pro každé $t \in J$.

Obvykle k rovnici (16) přidáváme dodatečné podmínky pro řešení. Počáteční Cauchyova podmínka má tvar

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n. \quad (17)$$

Úloha najít řešení diferenciální rovnice (16) splňující podmínku (17) se nazývá počáteční Cauchyova úloha.

Věta 19. (Základní věta o existenci a jednoznačnosti) Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\mathbf{f} \in C^1(G)$, $\mathbf{x}^0 \in G$. Potom úloha (16), (17) má jediné řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ definované na maximálním intervalu $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0})$ obsahujícím 0. Navíc $\boldsymbol{\varphi}$ je C^2 - funkce v t a C^1 - funkce v \mathbf{x}^0 .

Rozlišujeme tyto metody studia úlohy (16), (17) resp. rovnice (16):

- 1) Elementární metody řešení. Lze užít pouze u lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a některých nelineárních.
- 2) Numerické metody řešení. Řešení je nacházeno pouze přibližně, není zaručena správnost. Výhoda metody spočívá v tom, že ji lze užít na počítači.
- 3) Kvalitativní studium. Nehledáme řešení ani analyticky ani numericky, ale z vlastností funkce \mathbf{f} určujeme vlastnosti řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ pro různé volby \mathbf{x}^0 . Jednu z možností takového studia dává teorie dynamických systémů.

Způsob, jakým vznikne z úlohy (16), (17) dynamický systém popisuje následující věta.

Věta 20. Je-li $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ řešením úlohy (16), (17), pak pokud ho chápeme jako funkci $n + 1$ proměnných t, x_1^0, \dots, x_n^0 , je $\boldsymbol{\varphi}$ tokem. Pro každé pevné t je pak $\boldsymbol{\varphi}(t, \cdot)$ dynamickým systémem.

Jedním ze základních cílů teorie dynamických systémů je stanovit fázový portrét diferenciální rovnice (16). Tento portrét dává globální informaci o chování množiny řešení rovnice (16).

Nejprve uvedeme základní pojmy potřebné k definici fázového portréту.

Definice 15. Graf řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ je množina

$$\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)) : t \in I_{\mathbf{x}^0}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Je to hladká křivka v \mathbb{R}^{n+1} s parametrickými rovnicemi

$$t = t, x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), t \in I_{\mathbf{x}^0},$$

kde $(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$.

Definice 16. Orbita řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ je množina

$$\{\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0) : t \in I_{\mathbf{x}^0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Je to hladká křivka v \mathbb{R}^n s parametrickými rovnicemi

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Orbitu řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ dostaneme jako projekci grafu tohoto řešení do prostoru \mathbb{R}^n . Orbitu značíme $\gamma(\mathbf{x}^0)$.

Definice 17. Kladná část orbity řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ je množina

$$\gamma_+(\mathbf{x}^0) = \{\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0) : t \in [0, b_{\mathbf{x}^0}]\}.$$

Záporná část orbity řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ je množina

$$\gamma_-(\mathbf{x}^0) = \{\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0) : t \in (a_{\mathbf{x}^0}, 0]\}.$$

Definice 18. Kritický bod diferenciální rovnice (16) je bod $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ splňující rovnici $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Termín kritický bod je užíván ve více významech:

- bod v \mathbb{R}^n splňující rovnici $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$,
- jednobodová orbita konstantního řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$,
- konstantní řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$.

V aplikacích užíváme místo termínu kritický bod nejčastěji termín ekvilibrrium nebo bod rovnováhy.

Definice 19. Fázový portrét diferenciální rovnice (16) je množina všech orbit diferenciální rovnice (16) společně se šipkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)$ na orbitě pro rostoucí t .

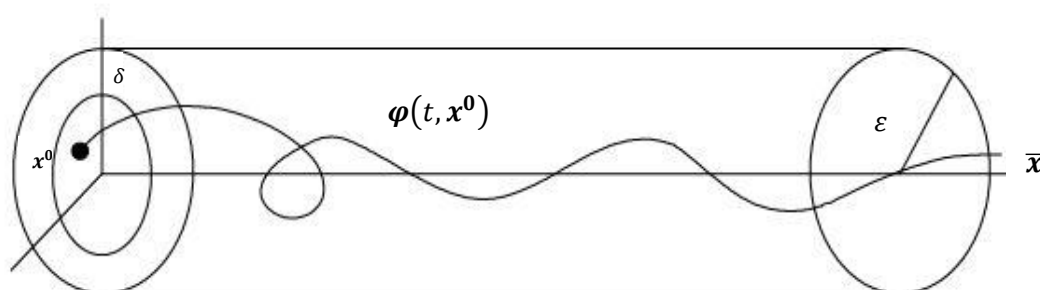
1.3.2 Stabilita ekvilibria

V aplikacích je velmi důležité vědět, zda řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)$ s počáteční podmínkou \boldsymbol{x}^0 blízkou ekvilibriu $\bar{\boldsymbol{x}}$ se s rostoucím časem přibližuje k ekvilibriu, nebo se od něho vzdaluje. Toto chování je charakterizováno vlastností, kterou nazýváme stabilita nebo nestabilita ekvilibria.

Definice 20. Ekvilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} \in G \subset \mathbb{R}^n$ nazveme stabilní, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x}^0 \in G$ platí:

$$\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^0\| < \delta \implies \|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon, \text{ pro všechna } t \geq 0.$$

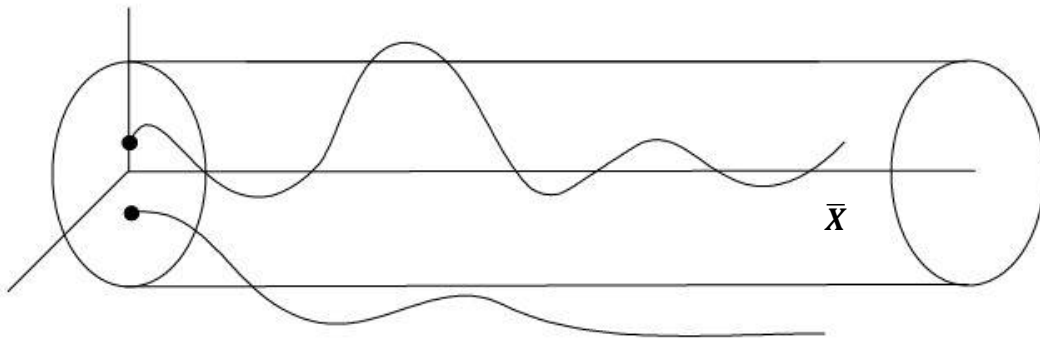
Platí-li podmínka z definice 20, pak graf řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)$ zůstává v ε -ovém válci pro všechna $t \geq 0$, pokud řešení startuje v δ -ovém okolí ekvilibria. (obr. 1)



Obr. 1

Definice 21. Ekvilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} \in G \subset \mathbb{R}^n$ nazveme nestabilní, jestliže není stabilní.

Existuje takový ε -ový válec, že graf každého řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)$ tento válec opustí pro nějaké $t > 0$. (obr. 2)

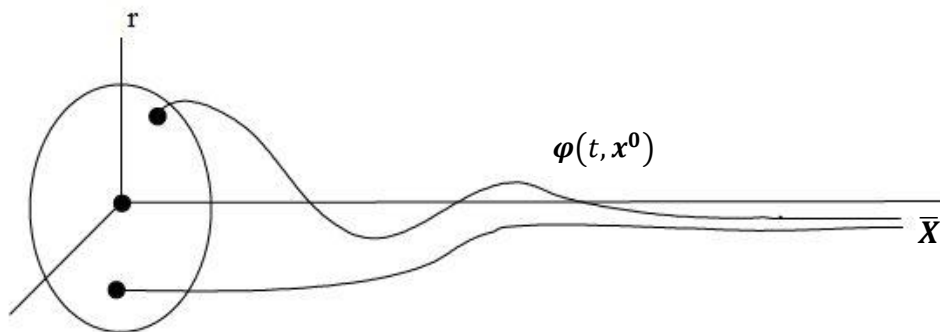


Obr. 2

Definice 22. Ekvilibrrium $\bar{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$ nazveme asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a existuje $r > 0$ takové, že pro každé $x^0 \in G$ platí:

$$\|\bar{x} - x^0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x^0) - \bar{x}\| = 0.$$

Graf $\varphi(t, x^0)$ konverguje k \bar{x} . (obr. 3)



Obr. 3

1.3.3 Dynamické systémy vznikající z autonomních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty v reálné rovině

Vlastní čísla matice A

V tomto případě má systém tvar $\dot{x} = Ax$, tj.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Označme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definice 23. Kořeny charakteristické rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ nazveme vlastní čísla matice A .

Vlastní čísla tedy najdeme z rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0.$$

Rovnici dále upravíme na tvar

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

kde $(a_{11} + a_{22})$ je stopa matice A (budeme značit trA) a $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je determinant matice A (budeme značit $\det A$). Rovnici lze tedy psát ve tvaru

$$\lambda^2 - trA\lambda + \det A = 0$$

Vyřešením této kvadratické rovnice získáme vlastní čísla matice A . Nejprve určíme diskriminant

$$D = trA^2 - 4 \det A.$$

A poté z následujícího vztahu samotná vlastní čísla.

$$\lambda_{1,2} = \frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4 \det A}}{2} \quad (19)$$

Podle vlastních čísel matice A , konkrétně podle determinantu ($\det A$) a stopy matice A (trA), rozlišujeme následující typy fázových portrétů.

Zřídlo

Zřídlo je dáno podmínkou $\det A > 0, trA > 0$. V tomto případě má systém (18) ekvilíbrium $(0,0)$, přičemž se jedná o nestabilní ekvilíbrium. Fázový portrét má nyní tvar v závislosti na vzájemném vztahu mezi $\det A$ a trA . Rozlišujeme tyto možnosti:

a) uzel – zřídlo

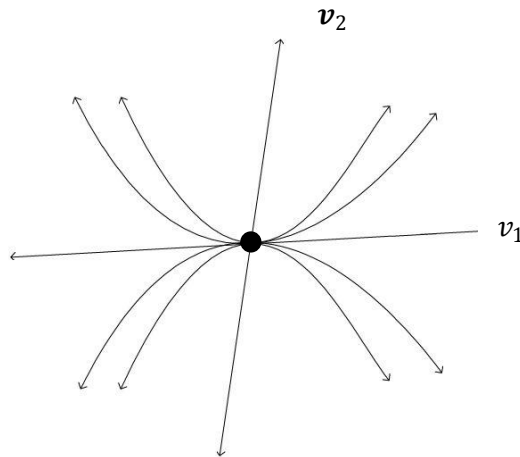
V tomto případě platí vztah

$$\det A < \frac{(tr)^2}{4},$$

a proto existují dvě kladná (reálná) různá vlastní čísla λ_1, λ_2 a k nim existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Příslušný Jordanův kanonický tvar matice A je matice

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou sloupce transformační matice P . Ta splňuje rovnici $AP = PJ$. Všechny orbity jdou do ∞ pro $t \rightarrow \infty$ (přesněji $\|\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)\| \rightarrow \infty$ pro $t \rightarrow \infty$) a jdou do počátku pro $t \rightarrow -\infty$. Jedná se o orbity různé od ekvilibia $(0,0)$. Všechny zakřivené orbity mají tečný vektor \mathbf{v}_1 . Dále fázový portrét obsahuje dvě přímky. Jedna má směr \mathbf{v}_1 a druhá má směr \mathbf{v}_2 . (obr. 4)



Obr. 4

b) uzel – zřídlo

Tentokrát platí vztah

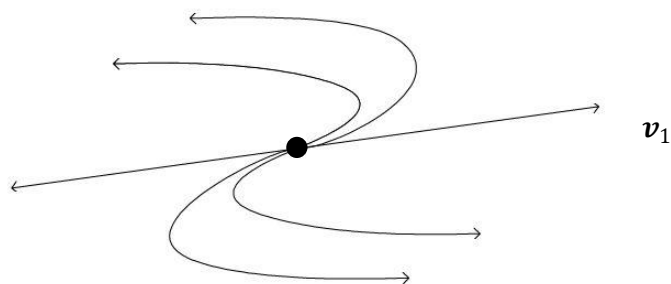
$$\det A = \frac{(\text{tr}A)^2}{4}.$$

Vlastní čísla λ_1, λ_2 jsou kladná a zároveň jsou si rovna.

Jestliže platí

$$h(A - \lambda_1 I) = 1,$$

dostaneme následující fázový portrét. (obr. 5)



Obr. 5

Zde existuje jediný (až na násobek) vlastní vektor \mathbf{v}_1 . Jedná se o tečný vektor ke všem „zakřiveným“ orbitám. Jordanova kanonická matice J má zde tvar

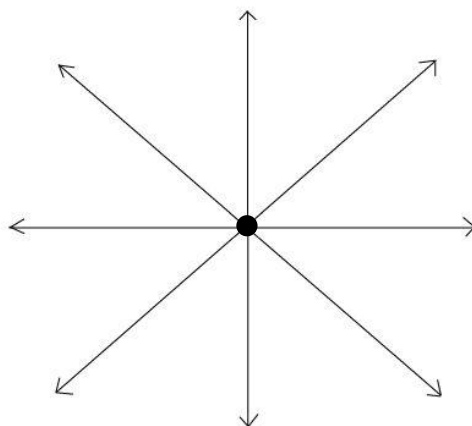
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

a vlastní vektor \mathbf{v}_1 je první sloupec transformační matice P .

Jestliže však platí

$$h(A - \lambda_1 I) = 0,$$

fázový portrét má tento tvar. (obr. 6)



Obr. 6

Jordanova kanonická matice má následující tvar

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

V tomto fázovém portrétu jsou všechny vektory vlastní a portrét se skládá z přímek procházejících počátkem.

c) ohnisko – zřídlo

V posledním případě platí

$$\frac{(\text{tr}A)^2}{4} < \det A. \quad (20)$$

Vlastní čísla jsou určena vztahy

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \neq 0.$$

Jedná se o komplexní čísla, tudíž k nim neexistují reálné vlastní vektory. Jordanova kanonická matice má tento tvar

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Fázový portrét rotuje po směru resp. proti směru hodinových ručiček.(obr. 7) O kterou z těchto možností se jedná, zjistíme pomocí znaménka u prvku a_{21} matice A . Je-li $a_{21} > 0$, rotace je proti směru hodinových ručiček. Je-li $a_{21} < 0$, rotace je po směru hodinových ručiček. Což plyne z rovnic (18) a z faktu, že z podmínky (20) plyne $a_{12}a_{21} < 0$.

$$\frac{(trA)^2}{4} < \det A.$$

$$\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} < a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(a_{11} + a_{22})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 < 4a_{11}a_{22} - 4a_{12}a_{21}$$

$$a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 < -4a_{12}a_{21}$$

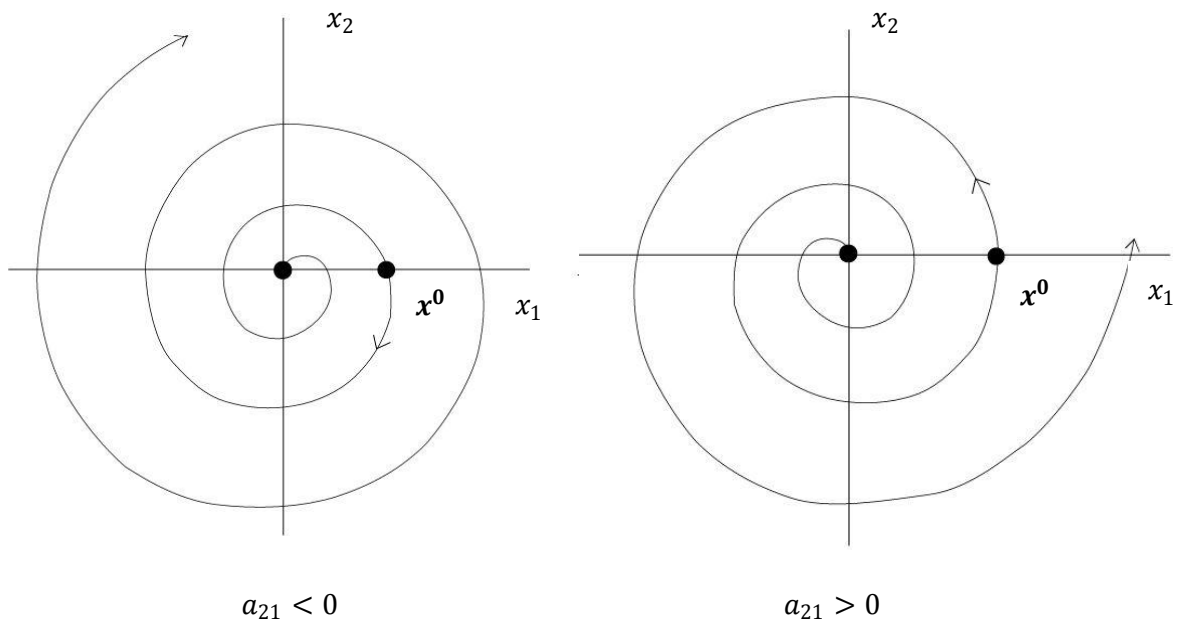
$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$$

Jelikož výraz $(a_{11} - a_{22})^2$ je vždy kladný, potom musí platit

$$4a_{12}a_{21} < 0$$

$$a_{12}a_{21} < 0.$$

Čímž jsme danou podmínku dokázali.



Obr. 7

Směr rotace zdůvodníme takto. Zvolme počáteční podmínku $\mathbf{x}^0 = (1,0)$. Potom z druhé rovnice v (18) dostáváme

$$\dot{x}_2(0) = a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 = a_{21}.$$

Funkce $x_2(t)$ proto v bodě 0 roste, pokud $a_{21} > 0$ a klesá, pokud $a_{21} < 0$.

Výlevka

Výlevka je dána podmínkou $\det A > 0, \operatorname{tr} A < 0$. V tomto případě má systém $\dot{x} = Ax$ ekvilíbrio $(0,0)$, přičemž se jedná o asymptoticky stabilní ekvilíbrio. Podle vzájemného vztahu $\det A$ a $\operatorname{tr} A$ dále rozlišujeme:

a) uzel – výlevka

Pro tuto situaci platí

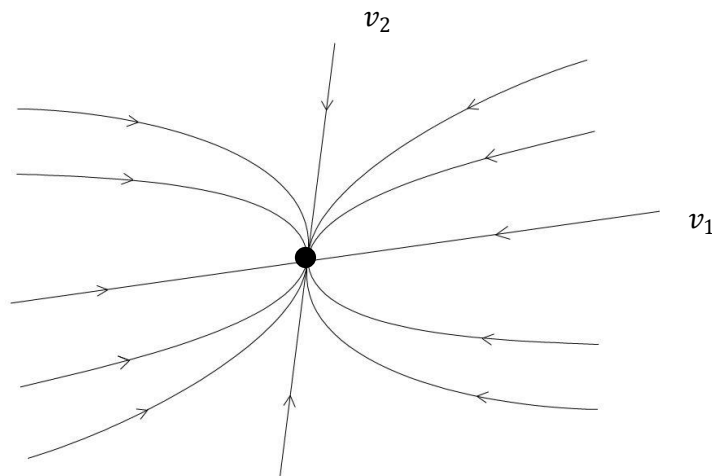
$$\det A < \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4}.$$

Existují zde dvě záporná (reálná) různá vlastní čísla λ_1 a λ_2 , pro něž zároveň platí, že $\lambda_1 < \lambda_2$ a k nim 2 lineárně nezávislé vlastní vektory v_1, v_2 . Jordanova kanonická matice vypadá následovně

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

a vlastní vektory v_1, v_2 jsou sloupce transformační matice P .

Příslušný fázový portrét vypadá následovně. (obr. 8)



Obr. 8

Všechny orbity jdou do počátku pro $t \rightarrow \infty$ a všechny orbity jdou do ∞ pro $t \rightarrow -\infty$ (přesně $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t, x^0)\| = \infty$). Jedná se o orbity různé od $(0,0)$. Všechny zakřivené orbity mají v $(0,0)$ tečný vektor v_2 . Dále fázový portrét obsahuje dvě přímky. Jedna má směr v_1 a druhá má směr v_2 .

b) uzel – výlevka

V tomto případě platí

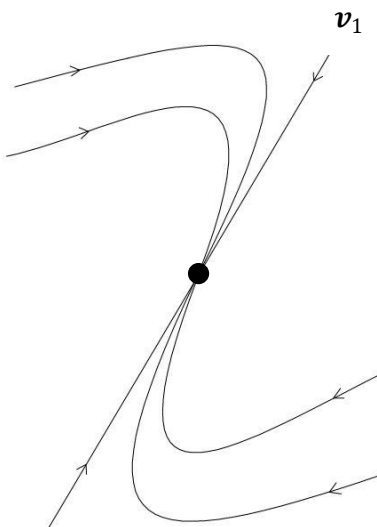
$$\det A = \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4}.$$

Tentokrát jsou vlastní čísla kladná a zároveň jsou si rovna.

Jestliže platí

$$h(A - \lambda I) = 1,$$

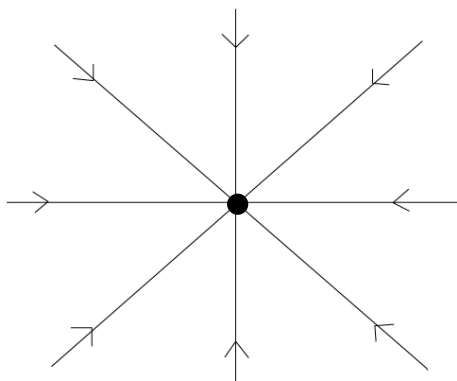
fázový portrét vypadá následovně. (obr. 9)



Obr. 9

Existuje jediný, až na násobek, vlastní vektor v_1 příslušný k vlastnímu číslu λ_1 . Je to tečný vektor ke všem zakřiveným orbitám.

V případě, že $h(A - \lambda I) = 0$, je každý vektor vlastní. (obr. 10)



Obr. 10

c) ohnisko - výlevka

Za podmínky

$$\frac{(\text{tr}A)^2}{4} < \det A,$$

pro vlastní čísla platí

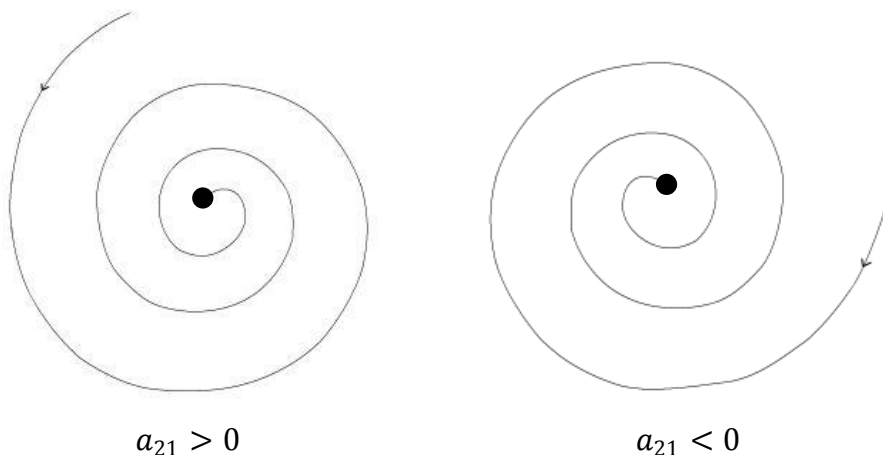
$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

a zároveň α a β musí splňovat následující podmínky

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < 0, \beta \neq 0.$$

V tomto případě reálné vlastní vektory neexistují.

Pro rotaci fázového portréту existují dvě možnosti. Rotace opět závisí na znaménku a_{21} v matici A . Jestliže $a_{21} > 0$ jde o rotaci proti směru hodinových ručiček. Jestliže však platí, že $a_{21} < 0$, jedná se o rotaci po směru hodinových ručiček. (obr. 11)



Obr. 11

Sedlo

Sedlo je dáno podmínkou $\det A < 0$. V tomto případě má systém $\dot{x} = Ax$ ekvilibrium $(0,0)$, jedná se o nestabilní kritický bod. Pro vlastní čísla platí

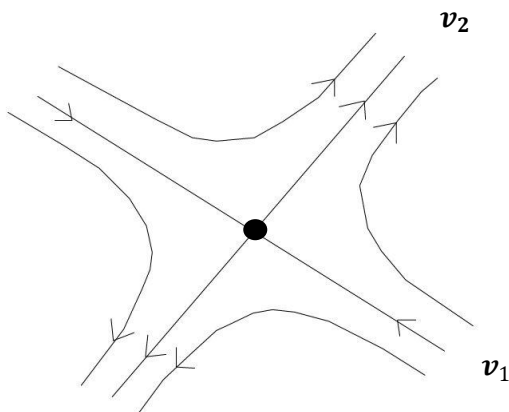
$$d_1 < 0 < d_2.$$

Jordanova kanonická matice vypadá takto

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

A existují dva nezávislé vlastní vektory v_1 a v_2 , což jsou sloupce transformační matice P .

Fázový portrét vypadá následovně. (obr. 12)



Obr. 12

Uvedené tři typy se týkají regulárních matic A , jejichž vlastní čísla jsou buď nenulová reálná, nebo komplexně sdružená s nenulovou reálnou částí. Takové matice se nazývají hyperbolické. Má-li matice ryze imaginární vlastní čísla nebo reálná vlastní čísla, z nichž aspoň jedno je nulové, pak se nazývá nehyperbolická. Typy fázových portrétů nehyperbolických matic zde nebudeme uvádět, protože se v následujícím ekonomickém modelu nevyskytují.

2 IS-LM ekonomický model

2.1 Historie

V této kapitole jsem čerpala z [4].

Tento model vznikl na ekonometrické konferenci v Oxfordu v září roku 1936. Roy Harrod, John R. Hicks, a James Meade zde prezentovali články popisující matematické modely, v nichž se pokoušeli shrnout teorii Johna Maynarda Keynesa a to Obecnou teorii zaměstnanosti, úroku a peněz. Hicks, který viděl rukopis Harrodova článku, vymyslel IS/LM model (dříve bylo používáno LL, ne LM). Později ho publikoval v "Mr. Keynes and the Classics: A Suggested Interpretation". Hicks později souhlasil s tím, že model postrádá důležité body z Keynesiánské teorie, mimo to také kritizoval velmi omezené možnosti použití a to pouze pomůcku pro teoretické účely. V podstatě kritizoval obecně rovnovážné metody takto: „Když se někdo zaměří na politické problémy, směřující do budoucnosti místo do minulosti, použití rovnovážných metod je pochybné.“ První problém spočívá v tom, že rovnovážný model představuje skutečnou a měnovou oblast samostatně, což se Keynes pokusil překonat. Kromě toho rovnovážný model ignoruje nejistotu, a přitom priorita likvidity dává smysl pouze v přítomnosti nejistoty. Likvidita nemá smysl bez předpokladu nejistoty. Přesto většina moderních makroekonomů vidí IS-IL model jako nejlepší první aproximaci pro porozumění reálného světa. I přes pochybnosti v některých kruzích je model rozsáhle používán a jeví se použitelný pro pochopení makroekonomické teorie. Je používán ve většině makroekonomických vysokoškolských knih.

2.2 Odvození modelu

V posledních dvou kapitolách jsem čerpala z [1].

Uvažujeme jednoduchou uzavřenou ekonomiku. IS-LM je model, v němž sledujeme vývoj dvou funkcí

$Y(t)$ národní důchod,

$r(t)$ úroky.

Tyto funkce se mění v čase a jejich okamžité změny vyjádříme pomocí prvních derivací

$$\dot{Y} = \frac{dY(t)}{d(t)}$$

$$\dot{r} = \frac{dr(t)}{d(t)}.$$

Je-li derivace \dot{Y} kladná, národní důchod Y roste, je-li záporná národní důchod Y klesá. Analogicky je-li derivace \dot{r} kladná, úroky r rostou, je-li záporná, úroky r klesají.

Předpokládáme, že změna národního důchodu $Y(t)$ závisí na vzájemném vztahu mezi souhrnnou nabídkou $S(t)$ a souhrnnou poptávkou $D(t)$

$$\dot{Y} = h(D - S) \quad (21)$$

kde h je koeficient, pro nějž platí $h > 0$. Dále pro jednoduchost klademe $h = 1$.

Jestliže poptávka (D) převyšuje nabídku (S), pak $\dot{Y} > 0$ a národní důchod roste. Jestliže je poptávka menší než nabídka, dostaneme $\dot{Y} < 0$, což znamená, že národní důchod klesá.

Dále uvažujeme, že souhrnná nabídka $D(t)$ je součtem spotřeby $C(t)$ a investic $I(t)$, tj.

$$D = C + I.$$

Rovnici (21) lze proto psát ve tvaru

$$\dot{Y} = C + I - S,$$

což je důvodem pro zkratku IS v názvu modelu. Písmena I a S jsou počáteční písmena anglických názvů sledovaných funkcí:

I - investment (investice),

S - saving, supply (úspory, souhrnná nabídka).

Spotřeba $C(t)$ je lineární funkcí národního důchodu $Y(t)$, tj.

$$C = cY,$$

kde $c \in (0,1)$ je koeficient tendence ke spotřebě.

Investice $I(t)$ jsou lineární funkcí úroků $r(t)$, tj.

$$I = -ar + I_0,$$

kde $a > 0$ je koeficient tendence k investování a I_0 jsou autonomní konstantní investice.

Také se domníváme, že souhrnná nabídka se rovná národnímu důchodu, tj.

$$S \equiv Y.$$

Uvedené předpoklady dosadíme do rovnice (21), přičemž položíme $h = 1$ a dostaneme

$$\dot{Y} = C + I - Y$$

$$\dot{Y} = cY - ar - Y + I_0$$

$$\dot{Y} = (c - 1)Y - ar + I_0$$

$$\dot{Y} = -(1 - c)Y - ar + I_0,$$

kde $1 - c = s$ je koeficient tendence k úsporám.

A nakonec dostaneme

$$\dot{Y} = -sY - ar + I_0 \quad (22)$$

Dále předpokládáme, že úrok $r(t)$ se mění v závislosti na poptávce po penězích $L(t)$. Zásoby peněz M zajišťuje centrální banka.

$$\dot{r} = m(L - M), \quad (23)$$

kde $m > 0$ je koeficient růstu úroku. Úroky v rovnici (23) rostou, pokud první derivace funkce r je kladná, pokud je první derivace záporná úroky klesají. To znamená, že úroky rostou, pokud je poptávka po penězích větší než zásoby v centrální bance a klesají, je-li poptávka menší než tyto zásoby.

V rovnici (23) vystupuje rozdíl $L - M$, což vysvětluje zkratku LM v názvu modelu. Písmena L a M jsou počáteční písmena anglických názvů sledovaných funkcí:

L - liquidity (poptávka po penězích, likvidita)

M - money supply (zásoby peněz v ekonomice).

Poptávka po penězích $L(t)$ je lineární funkcí národního důchodu $Y(t)$, tj.

$$L(t) = kY(t), \quad (24)$$

kde $k > 0$ je koeficient poptávky po penězích.

Dosadíme-li rovnici (24) do rovnice (23), m položíme pro jednoduchost rovno 1 a dostaneme

$$\dot{r} = kY - M. \quad (25)$$

Výsledkem je soustava dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y} &= -sY - ar + I_0 \\ \dot{r} &= kY - M \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

2.2.1 Užití teorie dynamických systémů

Odvozenou soustavu (26) můžeme vyšetřovat jako dynamický systém v rovině.

1. Nejprve nalezneme nulové body soustavy a to tak, že obě rovnice položíme rovny nule.

Dostáváme soustavu rovnic

$$\left. \begin{aligned} -sY - ar + I_0 &= 0, \\ kY - M &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Odtud dostaneme

$$Y = \frac{M}{k}.$$

Dále je

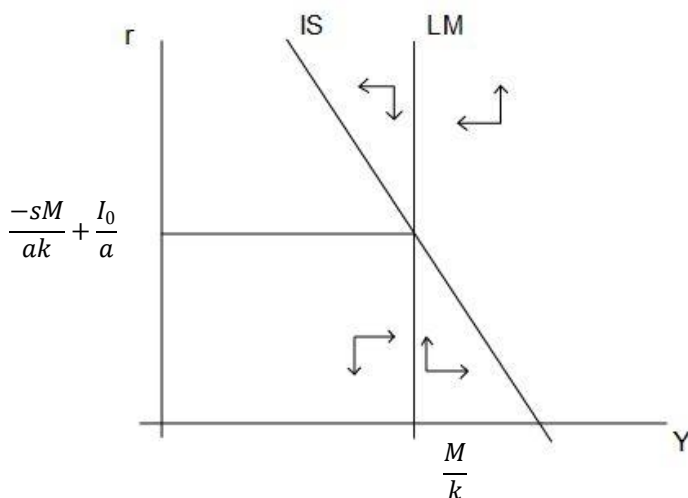
$$\begin{aligned} -s \frac{M}{k} - ar + I_0 &= 0, \\ -ar &= s \frac{M}{k} - I_0, \\ ar &= -s \frac{M}{k} + I_0, \end{aligned}$$

a odtud

$$r = -\frac{sM}{ak} + \frac{I_0}{a}.$$

Řešením této soustavy je ekvilibrium, tj. rovnovážný bod $\left(\frac{M}{k}, -\frac{sM}{ak} + \frac{I_0}{a}\right)$.

Tento bod je průsečíkem dvou přímek, IS-isokliny o rovnici $r = -\frac{s}{a}Y + \frac{I_0}{a}$ a LM-isokliny o rovnici $Y = \frac{M}{k}$ (obr. 13). Tyto isokliny dostaneme, pokud položíme nule pravou stranu v první rovnici nebo v druhé rovnici v (26).



Obr. 13

Zvolíme-li počáteční podmínku $(Y(0), r(0))$ na pravo od LM a nad IS, dostaneme $Y(0) < 0$ a $r(0) > 0$, což je vyjádřeno v grafu dvojicí šipek. Tak dostaneme hrubou informaci o chování funkcí $Y(t)$ a $r(t)$.

2. Určíme typ fázového portréту. Zavedeme substituci

$$Z(t) = Y(t) - \frac{M}{k}, \quad \rho(t) = r(t) + \frac{sM}{ak} - \frac{I_0}{a}.$$

Tím dostaneme soustavu

$$\left. \begin{aligned} -sZ - a\rho &= 0, \\ kZ &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Matice A soustavy (28) má tvar

$$A = \begin{pmatrix} -s & -a \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

přičemž soustava (28) má ekvilibrium $(0,0)$.

Determinant matice A je roven

$$\text{Det } A = -s \cdot 0 - k \cdot (-a) = k \cdot a > 0.$$

Pro stopu matice A platí

$$\text{tr}A = -s + 0 = -s < 0.$$

Tedy $(0,0)$ je vždy výlevkou, což znamená, že je asymptoticky stabilní. Totéž platí i pro původní soustavu (27), která má asymptoticky stabilní ekvilibrium $\left(\frac{M}{k}, \frac{-sM}{ak} + \frac{I_0}{a}\right)$.

Pomocí vlastních čísel získáme podrobnější informaci o fázovém portrétu.

Podle rovnice (19) dostáváme pro vlastní čísla matice A vztah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4ak}}{2}.$$

Je-li $s^2 > 4ak$, pak má A dvě záporná různá vlastní čísla a fázový portrét soustavy (28) je uzal-výlevka se dvěma lineárně nezávislými vlastními vektory.

Je-li $s^2 = 4ak$, pak má A dvojnásobné záporné vlastní číslo $\frac{-s}{2}$. Přitom

$$A + \frac{s}{2}I = \begin{pmatrix} -s & -a \\ k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{s}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{2} & -a \\ k & \frac{s}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(A + \frac{s}{2}I\right) = -\frac{s^2}{4} + ak = 0,$$

$$\text{tj. } h\left(A + \frac{s}{2}I\right) = 1.$$

Fázový portrét soustavy (28) je uzal-výlevka s jediným vlastním vektorem.

Je-li $s^2 < 4ak$, pak má A dvě komplexně sdružená vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm i \frac{\sqrt{4ak - s^2}}{2}$$

se zápornou reálnou složkou. Fázový portrét soustavy (28) je ohnisko-výlevka.

3. Nyní si za s , a a k zvolíme konkrétní čísla a určíme příslušné fázové portréty.

Případ I

Položme $s = 0,5$; $a = k = 0,2$. Pak

$$s^2 = 0,25, \quad 4ak = 0,16,$$

$$s^2 > 4ak.$$

Jedná se tedy o typ uzol-výlevka.

Matice A má v tomto případě tvar

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,2 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní si určíme stopu a determinant matice A a poté také vlastní čísla.

$$\text{tr}A = -0,5, \quad \det A = 0,04,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,25 - 0,16}}{2},$$

$$\lambda_1 = -0,1, \quad \lambda_2 = -0,4.$$

Jordanova kanonická matice a transformační matice mají tvar:

$$J = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix}.$$

Určíme matici P z rovnice

$$AP = PJ.$$

$$\begin{pmatrix} -0,5 & -0,2 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,5p_1 - 0,2p_2 & -0,5r_1 - 0,2r_2 \\ 0,2p_1 & 0,2r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1p_1 & -0,4r_1 \\ -0,1p_2 & -0,4r_2 \end{pmatrix}$$

$$-0,5p_1 - 0,2p_2 = -0,1p_1,$$

$$-0,5r_1 - 0,2r_2 = -0,4r_1,$$

$$0,2p_1 = -0,1p_2,$$

$$0,2r_1 = -0,4r_2,$$

$$p_1 = -1, \quad p_2 = 2, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -1.$$

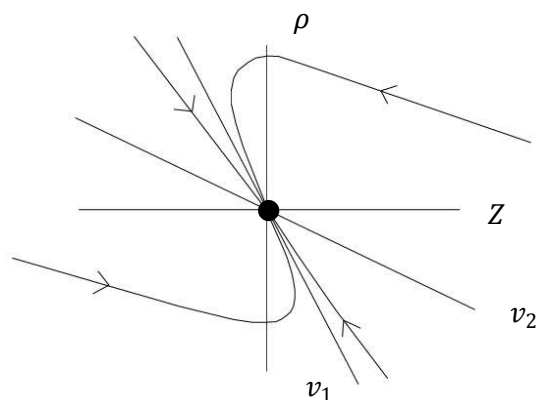
Matice P poté dostaneme ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a její sloupce určují vlastní vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 příslušné vlastním číslům λ_1 a λ_2 . (obr. 14)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Obdobně budeme postupovat i v následujícím případě.



Obr. 14

Případ II

Položme $k = a = 0,2$; $s = 0,4$. Pak

$$s^2 = 0,16, \quad 4ak = 0,16,$$

$$s^2 = 4ak.$$

Jedná se o typ uzal-výlevka.

Matice A má tvar

$$A = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále určíme determinant a stopu matice A a vlastní čísla.

$$\text{tr}A = -0,4, \quad \det A = 0,04,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,4 \pm \sqrt{0,16 - 0,16}}{2},$$

$$\lambda_{1,2} = -0,2.$$

Jordanova kanonická matice má nyní tvar

$$J = \begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Transformační matici P určíme opět z rovnice

$$AP = PJ.$$

$$\begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -0,4p_1 - 0,2p_2 & -0,4r_1 - 0,2r_2 \\ 0,2p_1 & 0,2r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2p_1 & p_1 - 0,2r_1 \\ -0,2p_2 & p_2 - 0,2r_2 \end{pmatrix}$$

$$-0,4p_1 - 0,2p_2 = -0,2p_1,$$

$$-0,4r_1 - 0,2r_2 = p_1 - 0,2r_1,$$

$$0,2p_1 = -0,2p_2,$$

$$0,2r_1 = p_2 - 0,2r_2,$$

$$-0,2p_1 - 0,2p_2 = 0,$$

$$-0,2r_1 - 0,2r_2 = p_1,$$

$$0,2p_1 = -0,2p_2,$$

$$0,2r_1 = p_2 - 0,2r_2,$$

$$p_1 = -1, \quad p_2 = 1.$$

$$-0,2r_1 - 0,2r_2 = -1,$$

$$0,2r_1 = 1 - 0,2r_2 \Rightarrow r_1 = 5 - r_2,$$

$$-0,2(5 - r_2) - 0,2r_2 = -1,$$

$$-0,4r_2 = 0,$$

$$r_2 = 0,$$

$$r_1 = 5.$$

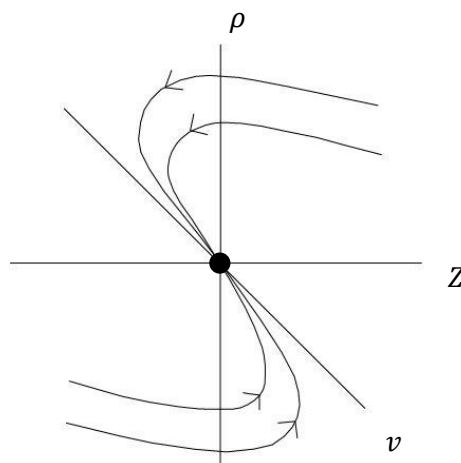
Matice P má následující tvar.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a její první sloupec určuje jediný vlastní vektor

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

příslušný vlastnímu číslu $\lambda_{1,2}$. (obr. 15)



Obr. 15

Případ III

V posledním případě si zvolíme $k = 0,4$; $a = 0,2$ a $s = 0,4$. Potom

$$s^2 = 0,16, \quad 4ak = 0,32,$$

$$s^2 < 4ak.$$

Je to typ ohnisko-výlevka.

Matice A má v tomto případě tvar

$$A = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme determinant a stopu matice A a následně vlastní čísla.

$$\text{tr}A = -0,4, \quad \det A = 0,08,$$

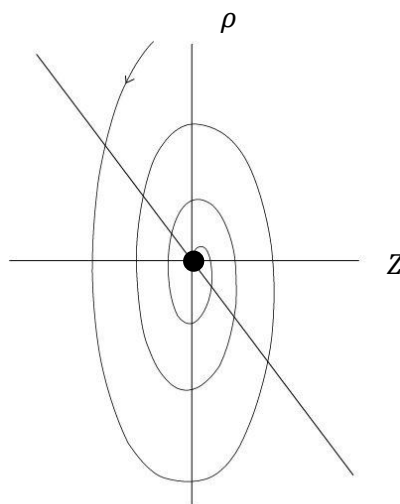
$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,4 \pm \sqrt{0,16 - 0,32}}{2},$$

$$\lambda_{1,2} = -0,2 \pm 0,2i.$$

Jordanova kanonická matice má zde tvar

$$J = \begin{pmatrix} -0,2 & -0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou komplexně sdružená a neexistuje zde žádný vlastní vektor. (obr. 16)



Obr. 16

V případech I a II pro libovolnou podmínku $Y(0)$ a $r(0)$ národní důchod $Y(t)$ a úroky $r(t)$ konvergují k ekvilibriu $\left(\frac{M}{k}, \frac{-sM}{ak} + \frac{I_0}{a}\right)$. Od jistého okamžiku $t_0 > 0$ konvergují obě funkce monotónně. Ve třetím případě funkce $Y(t)$ a $r(t)$ oscilují kolem ekvilibria, tj. konvergence není u žádné z nich monotónní.

2.2.2 Užití teorie diferenciálních rovnic

Soustavu (26) můžeme převést také na diferenciální rovnici 2. řádu. A to tak, že rovnici $\dot{Y} = -sY - ar$ podruhé zderivujeme, úpravou vznikne rovnice

$$\ddot{Y} = -s\dot{Y} - a\dot{r}$$

a poté za \dot{r} dosadíme druhou rovnici soustavy (26) a dostaneme

$$\ddot{Y} = -s\dot{Y} - a(kY - M),$$

nebo

$$\ddot{Y} + s\dot{Y} + akY = aM.$$

Zde dostaneme informaci o chování funkce $Y(t)$.

Nejprve si vyřešíme homogenní rovnici

$$\ddot{Y} + s\dot{Y} + akY = 0.$$

Charakteristickou rovnici dostaneme ve tvaru

$$\lambda^2 + s\lambda + ak = 0,$$

$$D = s^2 - 4ak,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4ak}}{2}.$$

A. Necht' $s^2 - 4ak > 0$. Pak λ_1 a λ_2 jsou různá záporná reálná čísla a podle věty 5 dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Dále víme, že aM je konstantní funkce a že první a druhá derivace konstantní funkce je rovna nule a potom pro partikulární řešení dané rovnice platí

$$akY = aM$$

a tedy

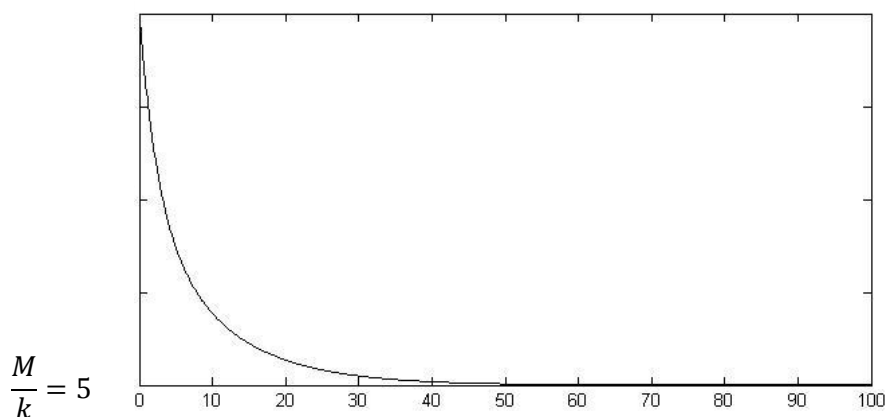
$$Y = \frac{M}{k}.$$

Viz. také věta 8 pro $n = 0$ a $k = 0$.

Obecné řešení má pak tvar

$$Y(t) = \frac{M}{k} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Tedy zvolíme-li parametry s, a, k jako v případě I ($s = 0,5; a = k = 0,2$) a $M = c_1 = c_2 = 1$, dostaneme následující graf. (obr. 17)



Obr. 17

Graf ukazuje průběh národního důchodu Y pro $t \rightarrow \infty$. Vidíme, že funkce $Y(t)$ monotónně klesá k ekvilibriu

$$\frac{M}{k} = \frac{1}{0,2} = 5,$$

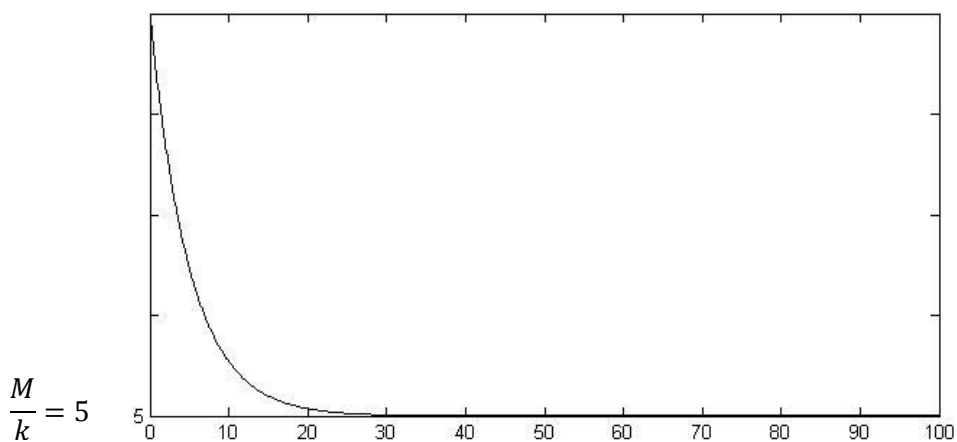
$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{k} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{k} + c_1 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} + c_2 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = \frac{M}{k}.$$

B. Necht' $s^2 - 4ak = 0$.

Pak dostaneme jeden dvojnásobný kořen. Řešení má podle věty 6 tvar

$$Y(t) = \frac{M}{k} + c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Také v této poslední situaci si za s, a, k navolíme hodnoty jako v případě II ($s = 0,4; a = k = 0,2$) a za M, c_1, c_2 opět číslo 1 a dostaneme následující graf. (obr. 18)



Obr. 18

Tentokrát je situace obdobná jako v prvním případě. Funkce $Y(t)$ konverguje monotónně k ekvilibriu 5.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{k} + c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{k} + c_1 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} + c_2 \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{\lambda t} = \\ &= \frac{M}{k} + 0 + c_2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\lambda t}} = \frac{M}{k} + c_2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda t} \lambda} = \frac{M}{k} + 0 = \frac{M}{k} \end{aligned}$$

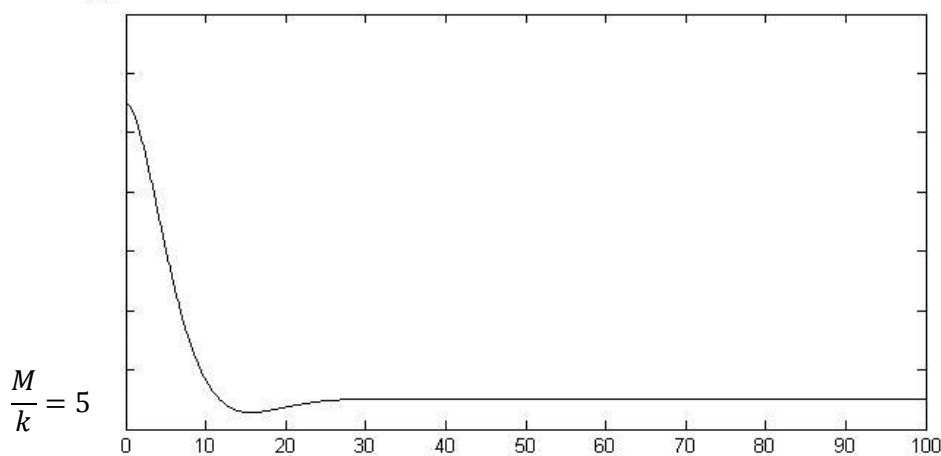
C. Necht' $s^2 - 4ak < 0$.

Pak dostaneme dvojici komplexně sdružených kořenů se zápornou reálnou částí. Řešení má podle věty 7 tvar

$$Y(t) = \frac{M}{k} + e^{-\frac{st}{2}} (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)$$

kde $\beta \equiv \frac{1}{2} \sqrt{4ak - s^2}$, $\alpha = -\frac{s}{2}$.

Tentokrát navolíme parametry s, a, k jako v případě III ($s = 0,4; a = 0,2; k = 0,4$) a M, c_1, c_2 položíme opět rovno 1. Poté tedy dostaneme graf. (obr. 19)



Obr. 19

V tomto případě funkce $Y(t)$ pro $t \rightarrow \infty$ osciluje kolem ekvilibria

$$\frac{M}{k} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

Oscilace jsou příliš malé, proto nejsou v grafu příliš patrné.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{k} + e^{-\frac{st}{2}} (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{k} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{st}{2}} \cdot \right. \\ &\cdot (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t) \left. \right) = \frac{M}{k} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{st}{2}}} (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t) = \frac{M}{k} + 0 = \frac{M}{k} \end{aligned}$$

Závěr

Tato bakalářská práce popisuje IS-LM ekonomický model. V úvodní kapitole uvádím výběr potřebné teorie diferenciálních rovnic a dynamických systémů, aplikovanou dále v konstrukci IS-LM modelu.

Následující kapitola je věnována samotnému IS-LM modelu. Nejprve stručnému seznámení s jeho historií, dále jeho matematickému odvození a v závěrečné části vyšetřuji chování národního důchodu a úroků nejprve z pohledu dynamických systémů a poté také z hlediska diferenciálních rovnic.

Celá práce je doplněna pro větší názornost ilustračními obrázky, k jejichž vytvoření jsem použila program Zoner Callisto 5. Grafy v závěrečné části Užití teorie diferenciálních rovnic jsou vykresleny pomocí matematického softwaru Maple 12.

Tato práce mi pomohla pochopit princip IS-LM modelu a tím také jeho praktické využití v oblasti ekonomiky.

Literatura

- [1] Pierre, N. V. Tu, Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] Kalas, J., Ráb, M., Obyčejné diferenciální rovnice, 1. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [3] Kuben, J., Obyčejné diferenciální rovnice, 1. vydání, Univerzita Palackého, Olomouc, 1995.
- [4] IS/LM model, dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/IS-LM_model, [citováno 5.2.2010].
- [5] Hale, J., Koçak, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, New York, 1991.