Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Existence kritických bodů pro systémy reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor s jednostrannou podmínkou

Bakalářská práce

Jan Žilavý

Školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2021

Žilavý J., 2021: Existence kritických bodů pro systémy reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor s jednostrannou podmínkou [Existence of critical points of reaction-diffusion system of activator-inhibitor type with unilateral condition, Bachelor's thesis in Czech]– 45 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
The objective of the bachelor's thesis is to find critical points of reaction-diffusion system of activator-inhibitor type on the one-dimensional domain. One unilateral and two linear interior conditions are considered one by one along with pure Neumann boundary conditions.

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracoval pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích, dne 13. dubna 2021

Jan Žilavý

Poděkování

Děkuji svému školiteli Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za cenné připomínky, nápady a rady při konzultacích. Děkuji za veškerý čas, který mi s klidem a trpělivostí věnoval.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Fyzikální představa

Představme si pole, na kterém žije kolonie hrabošů. Uvažujme hladovou liščí smečku, která si toto pole zvolila za své loviště. Přežijí někteří hraboši? Dokáží si najít na poli bezpečné útočiště?

V experimentálním postupu bychom pole rozdělili do několika bloků a zkoumali počet dravců (lišek) a počet jejich kořistí (hrabošů) v jednotlivých blocích. Nicméně v této práci se budu, podobně jako mnoho mých předchůdců, zabývat matematickým popisem tohoto jevu. Tím může být právě systém reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor (1.6). Jde o systém dvou difúzních rovnic druhého řádu.

Pole z představy si zjednodušme do jedné dimenze, konkrétně na interval $(0, \ell)$, kde ℓ je nějaké kladné reálné číslo. Také nebudeme zkoumat časový průběh a interakce lišek a hrabošů z úvodní představy. Podstatný bude konečný, stacionární stav. V této podobě má systém tvar

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 u_N''(x) + f(u_N, v_N), \\ 0 &= d_2 v_N''(x) + g(u_N, v_N). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Zanedbejme na chvíli difúzní členy. Předpokládejme, že existuje prostorově homogenní, stacionární, stabilní řešení $(\bar{u}, \bar{v})$ soustavy bez difúzních členů. Platí tedy

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \tag{1.2}$$

a také

$$\bar{u}''(x) = \bar{v}''(x) = 0. \tag{1.3}$$

Aby toto řešení dávalo fyzikální smysl, předpokládejme navíc $\bar{u}, \bar{v} > 0$. Substituujeme nyní funkce u_N, v_N jako

$$\begin{aligned} u_N &= u + \bar{u} \\ v_N &= v + \bar{v}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Použijeme navíc označení Jakobiho matice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{u},\bar{v})}{\partial u} & \frac{\partial f(\bar{u},\bar{v})}{\partial v} \\ \frac{\partial g(\bar{u},\bar{v})}{\partial u} & \frac{\partial g(\bar{u},\bar{v})}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

a rozvineme funkce $f(u + \bar{u}, v + \bar{v})$ a $g(u + \bar{u}, v + \bar{v})$ do Taylorova rozvoje kolem řešení $(\bar{u}, \bar{v})$

$$\begin{aligned} f(u + \bar{u}, v + \bar{v}) &= f(\bar{u}, \bar{v}) + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v), \\ g(u + \bar{u}, v + \bar{v}) &= g(\bar{u}, \bar{v}) + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v). \end{aligned}$$

Z (1.1), (1.3) a převodních vztahů (1.4) nyní můžeme odvodit

$$u_N''(x) = u''(x),$$
$$v_N''(x) = v''(x).$$

Linearizací soustavy (1.1) odebereme všechny členy, které obsahují mocniny druhého řádu a vyšších řádů. Získáme soustavu dvou homogenních lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned} d_1u''(x) + b_{11}u(x) + b_{12}v(x) = 0 \\ d_2v''(x) + b_{21}u(x) + b_{22}v(x) = 0 \end{aligned} \quad x \in (0, \ell). \tag{1.6}$$

Tato soustava bude výchozí pro všechny výpočty v této práci.

Funkce $v(x)$ zde představuje počet lišek v bodě x a funkce $u(x)$ počet hrabošů v bodě x. Aby se skutečně jednalo o model dravce a kořisti (tedy o systém typu aktivátor-inhibitor), potřebujeme podmínky pro koeficienty $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$.

Na okamžik vyženeme z pole všechny lišky. Zůstanou zde jenom hraboši, kteří se začnou přemnožovat. Čím více bude na poli hrabošů, tím více se budou množit. Pak se ale některá z lišek vrátí a objeví, že je na poli spousta potravy. Pozve celou svou rodinu na hostinu. Čím více lišek na poli bude, tím více sní hrabošů. Nakonec na poli zůstane tak málo hrabošů, že se lišky přesunou na jiné místo. A pro hraboše je pole zase bezpečnější a cyklus může začít znovu.

Z předchozí úvahy je patrné, že pro matici B potřebujeme následující znaménkové předpoklady:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Jak bude patrné z výpočtů v následujících kapitolách, stejné výsledky získáme i pro systémy typu substrate-depletion, pro které má matice B znaménkové předpoklady

$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Tyto matice ale neodpovídají naší fyzikální představě dravce a kořisti.

Zároveň chceme, aby $(\bar{u}, \bar{v})$ bylo stabilní řešení, tedy takový stav, do kterého se řešení po malém vychýlení vrátí zpátky. Z Ruth-Hurwitzovy věty víme, že řešení je stabilní, právě když stopa matice B bude záporná a determinant kladný

$$Tr(B) < 0, \quad Det(B) > 0.$$

Parametry difúze d_1, d_2 v systému (1.6) budeme uvažovat kladné.

Přidejme navíc k naší představě řeku obtékající naše pole, kterou hraboši ani lišky nepřeplavou. Budou tedy uzavřeni a ponecháni svému osudu na této louce.

Tento předpoklad budeme realizovat Neumannovými nulovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \\ u'(\ell) &= 0, \\ v'(0) &= 0, \\ v'(\ell) &= 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

které zajišťují nulový tok hranicí. Neumannovy okrajové podmínky jsou splněny jako jednostranné derivace.

Definice 1 *Dvakrát spojitě diferencovatelné funkce* (u, v) *na intervalu* $(0, \ell)$*, které řeší systém* (1.6) *s podmínkami* (1.9)*, budeme nazývat* ***řešení úlohy bez překážky****.*

Poznámka 1 *Ukázali jsme, že řešení* (u, v) *linearizované soustavy* (1.6), (1.9) *reprezentují pouze odchylky od kladného prostorově homogenního řešení* $(\bar{u}, \bar{v})$*. Tedy i záporné hodnoty* u *a* v*, které se můžou v řešeních linearizované soustavy vyskytovat, dávají dobrý fyzikální smysl.*

Zvolili jsme předpoklady takové, aby řešení $(\bar{u}, \bar{v})$ bylo stabilní pro soustavu bez difúzních členů. Musíme dávat pozor na intuitivní představu, že difúzní členy zhlazují řešení. Pro jednu difúzní rovnici tato představa funguje bez výjimek. Jak ale objevil Alan Turing [3], pro soustavu difúzních rovnic tato představa platit nemusí. Difúze naopak může způsobit ztrátu stability prostorově homogenního řešení $(\bar{u}, \bar{v})$. Stabilitu místo něj převezme jiné, prostorově nehomogenní řešení. Oblast koeficientů difúze tak můžeme rozdělit na dvě části, na oblast stability a oblast nestability prostorově homogenního řešení $(\bar{u}, \bar{v})$.

Budeme uvnitř pole uvažovat hraboší noru. V noře se vždy bude nacházet dostatek jedinců příslušného druhu. Nikdy nezůstane prázdná.

Přidejme k podmínkám (1.9) ještě jednu z podmínek uvnitř intervalu

$$u(x_0) \geq 0, \quad x_0 \in (0, \ell) \tag{1.10}$$

nebo

$$v(x_0) \geq 0, \quad x_0 \in (0, \ell). \tag{1.11}$$

Podmínkou (1.10) říkáme, že koncentrace hrabošů v bodě x_0 neklesne pod hodnotu $\bar{u}$. Podobně, podmínkou (1.11) říkáme, že koncentrace lišek v bodě x_0 neklesne pod hodnotu $\bar{v}$.

Takováto překážka rozdělí interval $(0, \ell)$ na dva podintervaly $(0, x_0)$ a (x_0, ℓ) a systém (1.6), (1.9) tak budeme zkoumat jako dva systémy

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} d_1 u_L''(x) + b_{11} u_L(x) + b_{12} v_L(x) = 0 \\ d_2 v_L''(x) + b_{21} u_L(x) + b_{22} v_L(x) = 0 \end{matrix} \quad x \in (0, x_0), \\ &\begin{matrix} d_1 u_P''(x) + b_{11} u_P(x) + b_{12} v_P(x) = 0 \\ d_2 v_P''(x) + b_{21} u_P(x) + b_{22} v_P(x) = 0 \end{matrix} \quad x \in (x_0, \ell). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Oba systémy jsou přitom spojeny přechodovými podmínkami, které jsou dány hladkostí řešení (u, v).

Definice 2 *Dvojici funkcí* (u, v)*, která splňuje*

$$\begin{aligned} &u \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell) \cap C([0, \ell]), \\ &v \in C^2(0, \ell) \end{aligned} \tag{1.13}$$

a (1.9), (1.10) *a systém* (1.12)*, budeme nazývat* ***řešení úlohy s překážkou pro u****.*

Dvojici funkcí (u, v), která splňuje

$$\begin{aligned} &u \in C^2(0, \ell), \\ &v \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell) \cap C([0, \ell]) \end{aligned} \tag{1.14}$$

a (1.9), (1.11) a systém (1.12), budeme nazývat ***řešení úlohy s překážkou pro v****.*

Poznámka 2 *Uvažujme podmínku (1.11). Máme tři možnosti, jak může řešení v takové situaci vypadat. Funkce v může mít v bodě x_0 pouze nezápornou hodnotu. Pokud je tato hodnota navíc kladná, pak platí $v \in C^2(0, \ell)$. Takové řešení bude navíc i řešením úlohy bez překážky. Pokud má funkce v v tomto bodě hodnotu 0 a pokud je diferencovatelná, tak jde opět o speciální případ řešení úlohy bez překážky. Konečně máme i případ, kdy funkce v není diferencovatelná v bodě x_0. V tomto případě musí nutně platit $v(x_0) = 0$ a $v'(x_0^-) > v'(x_0^+)$. Tyto úvahy plynou z formulace naší fyzikální úlohy pomocí tzv. variační nerovnice, kterou se ale v této práci zabývat nebudeme. Obdobné tvrzení platí i pro druhou podmínku (1.10). Ve třetí kapitole si ukážeme, že každé řešení úlohy bez překážky, pokud ho opatříme správným znaménkem, je také řešením úlohy s právě jednou z překážek.*

Značení 1 *V celé práci budeme pro zjednodušení označovat podmínku (1.10) jako* ***překážka pro u*** *a (1.11) jako* ***překážka pro v****.*

Systém (1.6) s nulovými Neumannovými okrajovými podmínkami (1.9) bez některé z překážek budeme označovat jako ***úloha bez překážky****.*

Systém (1.12) s nulovými Neumannovými okrajovými podmínkami (1.9) a s překážkou pro u budeme značit ***úloha s překážkou pro u***

Systém (1.12) s nulovými Neumannovými okrajovými podmínkami (1.9) a s překážkou pro v budeme značit ***úloha s překážkou pro v***

Poznámka 3 *Vzhledem k linearitě okrajové úlohy (1.6), (1.9) platí, že libovolný násobek řešení je opět řešení. Naproti tomu pouze nezáporný násobek řešení úlohy s překážkou je opět řešením stejné úlohy.*

Poznámka 4 *Pro všechny dvojice parametrů difúze $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ je dvojice funkcí $(u, v) : u \equiv 0, v \equiv 0$ triviálním řešením všech úloh uvažovaných v této práci.*

Definice 3 *Dvojici parametrů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$, pro kterou existuje netriviální řešení úlohy bez překážky budeme říkat* ***kritický bod úlohy bez překážky****.*

Dvojici parametrů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$, pro kterou existuje netriviální řešení úlohy s překážkou budeme říkat ***kritický bod úlohy s překážkou****.*

Uvažujme také uvnitř pole plot, který hraboši nedokáži přelézt ani podhrabat. Lišky tento plot dokáží přeskočit. Nebo naopak si můžeme představit, že se doprostřed pole zřítila skála. Lišky tuto překážku nedokáží zdolat, ale hraboši si najdou skulinu mezi balvany.

Ve čtvrté a páté kapitole budeme pro tuto představu uvažovat systém (1.6), (1.9) s jednou z podmínek

$$u'(x_0^-) = u'(x_0^+) = 0 \tag{1.15}$$

nebo

$$v'(x_0^-) = v'(x_0^+) = 0 \tag{1.16}$$

a umožníme zároveň nespojitost příslušné funkce v bodě x_0.

Poznámka 5 *Podmínky* (1.15), (1.16) *jsou lineární. Přenásobení řešení libovolnou reálnou konstantou nezmění nulovost derivací a tedy libovolný násobek řešení bude opět řešením stejné úlohy.*

Definice 4 *Dvojici funkcí* (u, v), *která splňuje* (1.15) *a*

$$u \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell),$$

$$v \in C^2(0, \ell),$$

a která řeší systém (1.12) *s podmínkami* (1.9) *budeme nazývat* ***řešení úlohy s podmínkou pro derivaci u****.*

Dvojici funkcí u, v, *která splňuje* (1.16) *a*

$$u \in C^2(0, \ell),$$

$$v \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell),$$

a která řeší systém (1.12) *s podmínkami* (1.9) *budeme nazývat* ***řešení úlohy s podmínkou pro derivaci v****.*

Poznámka 6 *Všimněme si, že řešení úlohy s podmínkou pro derivaci nemusí být spojité v bodě* x_0*.*

Poznámka 7 *V celé práci budeme hledat souvislé množiny kritických bodů a až na jednu výjimku na vybrané přímce se nebudeme zabývat singulárními případy, kde množinou kritických bodů jsou izolované body.*

Většina grafů v práci je vykreslena pomocí programu Octave 5.1.0. V jedné sekci kapitoly shrnutí jsou pro porovnání použity i grafy z programu AUTO. Ve všech obrázcích v návaznosti na Pavla Koubu [1] a Moniku Pšenicovou [2] uvažujeme matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ve všech numerických výpočtech uvažujeme $\ell = \pi$. Polohu překážky x_0 budeme měnit.

Často budeme v práci využívat koeficienty

$$A, B, C, D, A_L, B_L, C_L, D_L, A_P, B_P, C_P, D_P.$$

Nebudeme to u všech výrazů zmiňovat, ale vždy předpokládáme, že jde o reálné koeficienty.

Kapitola 2

Příprava výpočtů

Co se nám bude hodit

2.1 Úloha čtvrtého řádu

Obdobně jako Pavel Kouba [1] a Monika Pšenicová [2] budeme kritické body a řešení systémů hledat převedením soustavy dvou diferenciálních rovnic druhého řádu na jednu rovnici čtvrtého řádu. Řešení této rovnice pak budeme hledat ve tvaru e^{rx}. Z druhé rovnice soustavy (1.6) si vyjádříme funkci

$$u(x) = -\frac{b_{22}v(x) + d_2 v''(x)}{b_{21}}. \tag{2.1}$$

Dosazením do první rovnice soustavy získáme diferenciální rovnici čtvrtého řádu. Tu ještě vynásobíme nenulovým číslem $-b_{21}$

$$d_1 d_2 v''''(x) + (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)v''(x) + det(B)v(x) = 0. \tag{2.2}$$

Odpovídající charakteristická rovnice má tvar

$$d_1 d_2 r^4 + (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)r^2 + det(B) = 0, \quad r \in \mathbb{C}.$$

Provedeme substituci $r^2 = \omega$ a vyřešíme kvadratickou rovnici

$$d_1 d_2 \omega^2 + (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)\omega + det(B) = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$\omega_{1,2} = \frac{-(b_{11}d_2 + b_{22}d_1) \pm \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1 d_2 det(B)}}{2d_1 d_2}. \tag{2.3}$$

Následně získáme obecně komplexní kořeny původní charakteristické rovnice v podobě

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\omega_1}, \\ r_2 &= \sqrt{\omega_2}, \\ r_3 &= -\sqrt{\omega_1} = -r_1, \\ r_4 &= -\sqrt{\omega_2} = -r_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mějme na paměti, že všechny tyto kořeny závisí na dvojici parametrů

$$(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Pomocí (2.1) také ztransformujeme z (1.9) podmínky pro funkci u na tvar

$$u'(0) = -\frac{b_{22}v'(0) + d_2 v'''(0)}{b_{21}} = 0,$$

$$u'(\ell) = -\frac{b_{22}v'(\ell) + d_2 v'''(\ell)}{b_{21}} = 0.$$

Protože podle (1.9) je $v'(0) = v'(\ell) = 0$, musí také platit $v'''(0) = v'''(\ell) = 0$. Dohromady ztransformované podmínky pro *úlohu bez překážky* mají tvar

$$v'(0) = v'(\ell) = v'''(0) = v'''(\ell) = 0. \tag{2.5}$$

Budeme odlišovat dva případy.

1.
$$\sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1 d_2 det(B)} \neq 0 \tag{2.6}$$

V tomto případě $\omega_1 \neq \omega_2$. Zvolíme komplexní fundamentální systém

$$\{e^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{-r_2 x}\}. \tag{2.7}$$

2.
$$\sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1 d_2 det(B)} = 0 \tag{2.8}$$

Zde platí $\omega_1 = \omega_2$.
Pro tento případ můžeme zvolit fundamentální systém

$$\{e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, xe^{-r_1 x}\}. \tag{2.9}$$

Lze ukázat, že dvojice parametrů (d_1, d_2), pro které platí (2.8), leží na dvou přímkách s kladnou směrnicí [1, str. 25]. Tyto přímky mají tvar

$$d_2^{1,2} = \frac{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}{b_{11}^2} d_1 \tag{2.10}$$

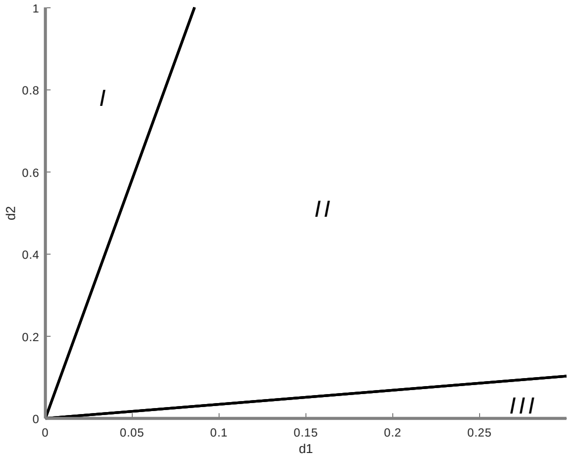
a rozdělují první kvadrant na tři sektory (Obr. 2.1).

Poznámka 8 *Protože tato dvojice přímek má v rovině (d_1, d_2) míru 0, nebudeme se tímto případem podrobně zabývat. Nicméně v případě systému bez překážky si ukážeme kritické body i na těchto přímkách.*

Z práce Pavla Kouby [1, str.27] také známe vztahy mezi sektory a ω_1, ω_2.
V Sektoru I jsou $\omega_{1,2} \in \mathbb{R}^-$
V Sektoru II jsou $\omega_{1,2} \in \mathbb{C}$
V Sektoru III jsou $\omega_{1,2} \in \mathbb{R}^+$.

Značení 2 *Pro zjednodušení výpočtů zavedeme podobně jako Monika Pšenicová [2, str. 11] funkce:*

$$\begin{aligned} C_1(x) &= e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}, \\ C_2(x) &= e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}, \end{aligned} \tag{2.11}$$



Obrázek 2.1: **Schéma sektorů.**

Tyto funkce budeme souhrnně označovat funkce „C“. Od Moniky Pšenicové také převezmeme funkce

$$\begin{aligned} S_1(x) &= e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}, \\ S_2(x) &= e^{r_2 x} - e^{-r_2 x}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

které označíme funkce „S“. Nakonec budeme používat i

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(r_1^2 + \frac{b_{22}}{d_2} \right), \\ R_2 &= \left(r_2^2 + \frac{b_{22}}{d_2} \right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Těmto funkcím budeme říkat funkce „R“.

Poznámka 9 *Pamatujme, že všechny výše uvedené výše funkce závisí na parametrech difúze* (d_1, d_2) *skrze funkce* $r_1(d_1, d_2)$, $r_2(d_1, d_2)$.

2.2 Vlastnosti funkcí „*R*“ a kořenů charakteristické rovnice

Věta 1 *Pro funkce „R“ platí*

$$R_i \neq 0, \ \ pro \ i \in \{1, 2\}. \tag{2.14}$$

Důkaz: Větu dokážeme sporem. Počítejme:

$$\begin{aligned} & R_i = 0 \iff \omega_i = r_i^2 = -\frac{b_{22}}{d_2}, \\ & \omega_1 = \frac{-(b_{11}d_2 + b_{22}d_1) + \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)}}{2d_1d_2}, \\ & \omega_2 = \frac{-(b_{11}d_2 + b_{22}d_1) - \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)}}{2d_1d_2}, \\ & \frac{-(b_{11}d_2 + b_{22}d_1) \pm \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)}}{2d_1d_2} = -\frac{b_{22}}{d_2}. \end{aligned}$$

Rovnost vynásobíme nenulovým číslem $2d_1d_2$ a dále upravíme

$$\begin{aligned}
&-(b_{11}d_2 - b_{22}d_1) \pm \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)} = 0,\\
&-(b_{11}d_2 - b_{22}d_1) \pm \sqrt{(b_{11}d_2 - b_{22}d_1)^2 + 4d_1d_2(b_{12}b_{21})} = 0,\\
&\pm \sqrt{(b_{11}d_2 - b_{22}d_1)^2 + 4d_1d_2(b_{12}b_{21})} = (b_{11}d_2 - b_{22}d_1).
\end{aligned}$$

Tato rovnost platí pro jedno ze znamének, právě když $4d_1d_2b_{12}b_{21} = 0$. Jenže to z předpokladů (1.7) a $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ neplatí nikdy. Dokázali jsme že $R_1 \neq 0$ a $R_2 \neq 0$ pro všechna $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$.

□

Věta 2 *Pro kořeny charakteristické rovnice platí:*

$$r_i \neq 0, \ \textit{pro}\ i \in \{1, 2\}. \tag{2.15}$$

Důkaz: Tyto nerovnosti ukážeme zcela analogicky důkazu Věty 2.1. Předpokládejme $r_i = 0$. Víme, že $r_i = 0 \iff \omega_i = 0$. Z toho máme

$$\begin{aligned}
&\omega_i = \frac{-(b_{11}d_2 + b_{22}d_1) \pm \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)}}{2d_1d_2} = 0,\\
&-(b_{11}d_2 + b_{22}d_1) \pm \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)} = 0,\\
&\pm \sqrt{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2det(B)} = (b_{11}d_2 + b_{22}d_1).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Rovnost nastane pro jedno ze znamének, právě tehdy když $4d_1d_2det(B) = 0$. To je ale ve sporu s předpoklady $det(B) > 0$ a $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Proto $r_1 \neq 0$ a $r_2 \neq 0$ pro všechna $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$.

□

2.3 Vlastnosti funkcí „*C*“

V této sekci budeme zkoumat vlastnosti funkcí

$$\begin{aligned}
C_1(x_0) &= e^{r_1x_0} + e^{-r_1x_0},\\
C_1(\ell - x_0) &= e^{r_1(\ell - x_0)} + e^{-r_1(\ell - x_0)},\\
C_2(x_0) &= e^{r_2x_0} + e^{-r_2x_0},\\
C_2(\ell - x_0) &= e^{r_2(\ell - x_0)} + e^{-r_2(\ell - x_0)}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

V některých situacích budeme hledat řešení našich okrajových úloh v závislosti na nulovosti těchto čtyř funkcí. Připomeňme, že i tyto funkce jsou závislé na hodnotách r_1, r_2 a tedy i na parametrech d_1, d_2. Z Koubovy práce [1, *Sekce 2.6, str. 5-16*] víme, že pro případ (2.6) jsou množiny dvojic (d_1, d_2), které splňují následující dvojice rovností, izolované body

$$\begin{aligned}
&C_1(x_0) = 0 \text{ a současně } C_2(x_0) = 0,\\
&C_1(x_0) = 0 \text{ a současně } C_2(\ell - x_0) = 0,\\
&C_1(\ell - x_0) = 0 \text{ a současně } C_2(x_0) = 0,\\
&C_1(\ell - x_0) = 0 \text{ a současně } C_2(\ell - x_0) = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ze stejné sekce Koubovy práce [1, *str. 13, 14, Tvrzení 2.6.11*] také víme, že pokud $C_1(x_0) = C_1(\ell - x_0) = 0$, pak $S_1(\ell) = 0$. Analogicky, pokud $C_2(x_0) = C_2(\ell - x_0) = 0$, pak $S_2(\ell) = 0$. Množina bodů $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$, které splňují tyto rovnosti, je sjednocením hyperbol

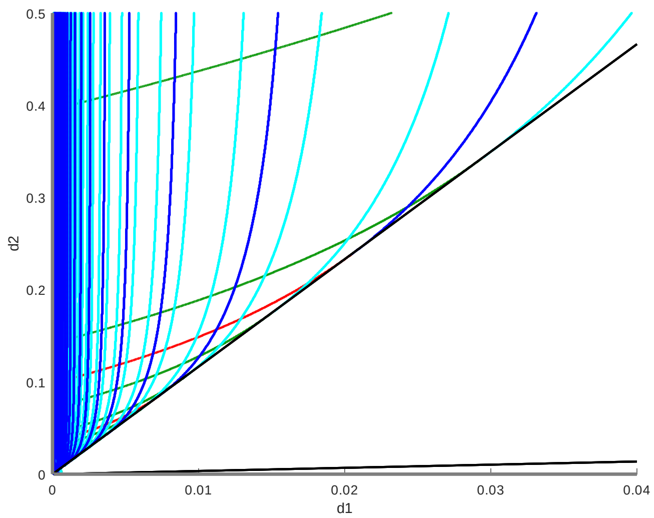
$$H_n = \left\{ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+ |\ d_2 = \frac{det(B) - \kappa_n d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_n - d_1 \kappa_n^2} \right\}, \kappa_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, n \in \mathbb{N}, \tag{2.19}$$

kde $j, k, n \in \mathbb{N}$ splňují

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(2k-1)\ell}{2(j+k-1)}, \\ n &= j + k - 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Je důležité si všimnout, že $S_1(\ell) = 0$ platí vždy pouze pro část hyperboly H_n pod bodem dotyku této hyperboly s hranicí sektorů I a II. Pro část hyperboly nad tímto bodem platí $S_2(\ell) = 0$. Obě části lze vidět na Obr. 2.4. Pokud vyjádření (2.20) neexistuje pro žádné j, k, n, pak neexistuje bod, ve kterém by platilo $C_1(x_0) = C_1(\ell - x_0) = 0$ nebo $C_2(x_0) = C_2(\ell - x_0) = 0$.

Vše shrnuje Obr. 2.2. Všimněme si, že zelené a červené (nebo modré a azurové) křivky se neprotínají v žádném bodě. Pokud bychom ale měli překážku v bodě, který lze vyjádřit jako (2.20), pak by se některé ze zelených křivek shodovaly s červenými a na ně navazující tmavě modré a azurové křivky by se také shodovaly. Dále můžeme vidět hladký přechod mezi křivkami $C_1(x_0) = 0$ a $C_2(x_0) = 0$ (a také $C_1(\ell - x_0) = 0$ a $C_2(\ell - x_0) = 0$). Bod, kde se toto stane leží na hranici sektorů *I* a *II*. V tomto bodě platí $\omega_1 = \omega_2$ a tedy $r_1 = r_2$, což je případ (2.8)



Obrázek 2.2: **Vztahy mezi funkcemi „C“.** *Zelená křivka reprezentuje funkci $C_1(x_0) = 0$. Červená odpovídá funkci $C_1(\ell - x_0) = 0$. Azurová funkci $C_2(x_0) = 0$ a tmavě modrá funkci $C_2(\ell - x_0) = 0$. Křivky se protínají pouze v izolovaných bodech. Tento obrázek je vykreslen pro $\ell = \pi$ a $x_0 = \frac{2}{3}\pi$. Pro takové x_0 nenajdeme vyjádření* (2.20).

2.4 Vlastnosti funkcí „S“

Ukažme si podobné vlastnosti i pro funkce

$$
\begin{aligned}
S_1(x_0) &= e^{r_1 x_0} - e^{-r_1 x_0},\\
S_1(\ell - x_0) &= e^{r_1(\ell - x_0)} - e^{-r_1(\ell - x_0)},\\
S_2(x_0) &= e^{r_2 x_0} - e^{-r_2 x_0},\\
S_2(\ell - x_0) &= e^{r_2(\ell - x_0)} - e^{-r_2(\ell - x_0)}.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Poznámka 10 *Množiny bodů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$, ve kterých platí jedna z následujícíh čtyř dvojic rovností jsou množiny izolovaných bodů*

$$
\begin{aligned}
S_1(x_0) = 0 \ &\textit{a současně}\ S_2(x_0) = 0,\\
S_1(x_0) = 0 \ &\textit{a současně}\ S_2(\ell - x_0) = 0,\\
S_1(\ell - x_0) = 0 \ &\textit{a současně}\ S_2(x_0) = 0,\\
S_1(\ell - x_0) = 0 \ &\textit{a současně}\ S_2(\ell - x_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Tuto vlastnost můžeme pozorovat z Obr. 2.3 a Obr.2.4.

Věta 3 *Jestliže platí současně rovnosti $S_1(x_0) = 0$ a $S_1(\ell - x_0) = 0$, pak platí $S_1(\ell) = 0$.*
Jestliže platí současně rovnosti $S_2(x_0) = 0$ a $S_2(\ell - x_0) = 0$, pak platí $S_2(\ell) = 0$.

Důkaz: Rovnosti $S_1(x_0) = 0$ a $S_1(\ell - x_0) = 0$ můžeme ekvivalentně přepsat jako:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{n\pi}{x_0} i, \quad n \in \mathbb{N},\\
r_1 &= \frac{m\pi}{\ell - x_0} i, \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Dejme dohromady obě vyjádření

$$
\begin{aligned}
\frac{n\pi}{x_0} i &= \frac{m\pi}{\ell - x_0} i,\\
n(\ell - x_0) &= m x_0,
\end{aligned}
$$

$$
x_0 = \frac{n\ell}{m+n}. \tag{2.22}
$$

Dosadíme zpátky a označíme $m + n = k$

$$
r_1 = \frac{n\pi}{\frac{n\ell}{m+n}} i = \frac{k\pi}{\ell} i. \tag{2.23}
$$

Pavel Kouba [1, *Tvrzení 2.6.1, str. 6*] ukázal, že tato rovnost platí, právě když $S_1(\ell) = 0$. Důkaz druhé části je analogický.

□

Poznámka 11 *Podle Pavla Kouby [1, Tvrzení 2.6.4, str. 9] leží body splňující $S_1(\ell) = 0$ na hyperbolách*

$$
H_k = \left\{ (d_1, d_2) | d_2 = \frac{det(B) - \kappa_k d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_k - d_1 \kappa_k^2} \right\}, \kappa_k = \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^2. \tag{2.24}
$$

Aby navíc platilo $S_1(x_0) = 0$ a $S_1(\ell - x_0) = 0$, potřebujeme $k, m, n \in \mathbb{N}$ splňující $k = m+n$ a $x_0 = \frac{n\ell}{m+n}$, pokud takové vyjádření existuje. Všimněme si, že hyperboly (2.19) *a* (2.24) *se liší pouze vyjádřením koeficientu k. Hyperboly* (2.24) *lze podobně jako v předchozí sekci rozdělit na 2 části (Obr.2.4) a to na části pod a nad bodem dotyku příslušné hyperboly s hranicí sektorů I a II.*

Pavel Kouba [1, *str. 13, Tvrzení 2.6.10*] také ukazuje následující větu:

Věta 4 *Rovnosti $C_1(\ell) = 0$ a $S_1(\ell) = 0$ nemůžou platit současně.*

Důkaz: Rozepišme a upravme obě rovnosti:

$$0 = S_1(\ell) = e^{r_1\ell} - e^{-r_1\ell} \iff e^{2r_1\ell} = 1,$$

$$0 = C_1(\ell) = e^{r_1\ell} + e^{-r_1\ell} \iff e^{2r_1\ell} = -1.$$

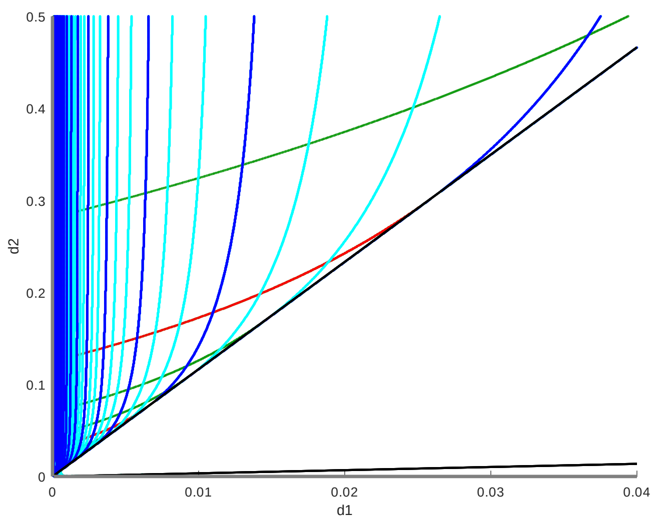
Vidíme, že nemůžou nastat obě rovnosti zároveň.

$\square$

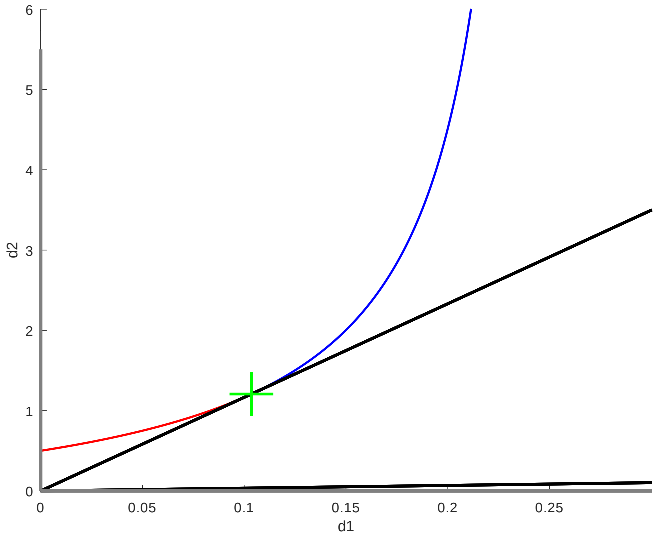
Poznámka 12 *Analogická věta platí i pro dvojice funkcí*

$$C_2(\ell) \text{ a } S_2(\ell),$$
$$C_1(x_0) \text{ a } S_1(x_0),$$
$$C_2(x_0) \text{ a } S_2(x_0).$$

Na Obr. 2.3 můžeme pozorovat vztahy mezi funkcemi „S“. Zvolili jsme $x_0 = \frac{3}{4}\pi$. Tento zlomek určitě můžeme vyjádřit jako (2.22). Jedním takovým vyjádřením je $m = 1, n = 3$. Některé hyperboly jsou tedy totožné. Tyto splývající hyperboly tvoří právě množinu hyperbol H_k z Poznámky 11, kde $k = m+n$ splňuje (2.22). To ale z obrázku nepoznáme.



Obrázek 2.3: **Vztahy mezi funkcemi „S“.** *Kořeny $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ funkce $S_1(x_0)$ jsou zobrazeny zeleně. Kořeny funkce $S_1(\ell - x_0)$ červeně, $S_2(x_0)$ azurově a $S_2(\ell - x_0)$ tmavě modře. Obrázek je vykreslený pro $\ell = \pi$ a $x_0 = \frac{3}{4}\pi$.*



Obrázek 2.4: **Hyperbola** H_2**.** *Bod, kde se tato hyperbola dotkne hranice sektorů I a II rozděluje hyperbolu na dvě části. Vlevo od tohoto bodu jde o množinu bodů, kde platí* $S_1(\ell) = 0$*. Vpravo od tohoto bodu platí* $S_2(\ell) = 0$*. Na hranici sektorů platí* $\omega_1 = \omega_2$*.*

Kapitola 3

Systém s překážkou pro u

Hraboši mají kde bydlet

Přestože chceme řešit *úlohu s překážkou*, měli bychom začít *úlohou bez překážky*. Tato řešení se nám v dalším postupu budou hodit.

3.1 Systém bez překážky

3.1.1 Nenulový diskriminant charakteristické rovnice

Pavel Kouba [1, *str. 8-11*] i Monika Pšenicová [2, *str. 8-9*] ve svých pracech ukázali, že pro *úlohu bez překážky* a případ (2.6), najdeme množiny kritických bodů

$$H_n = \left\{ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+ | d_2 = \frac{det(B) - \kappa_n d_1 b_{22}}{b_{11}\kappa_n - d_1 \kappa_n^2} \right\}, \kappa_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

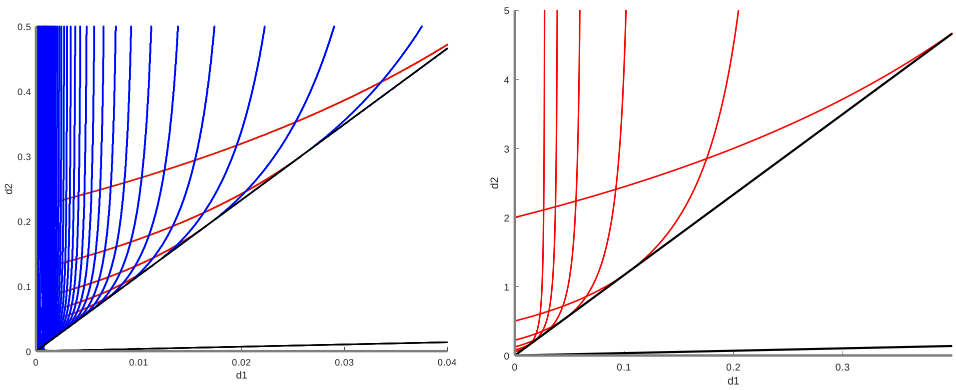
Jde o stejný tvar hyperbol jako v (2.19) a (2.24), rozdíl je pouze v koeficientu n, zde je n libovolné přirozené. Připomeňme si znovu, že hyperboly H_n se skládají z kořenů $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2_+$ funkcí $S_1(\ell)$ a $S_2(\ell)$. Máme 3 možnosti pro tyto kořeny. Jestliže platí $S_1(\ell) = 0$ a $S_2(\ell) \neq 0$, je příslušné netriviální řešení tvaru

$$\begin{aligned} u(x) &= AC_1(x), \\ v(x) &= A\frac{b_{11} - d_1\kappa_n}{b_{12}} C_1(x), \end{aligned} \qquad A \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Pokud platí $S_1(\ell) \neq 0$ a $S_2(\ell) = 0$, řešení je tvaru

$$\begin{aligned} u(x) &= CC_2(x), \\ v(x) &= C\frac{b_{11} - d_1\kappa_n}{b_{12}} C_2(x), \end{aligned} \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Je třeba poznamenat, že každá hyperbola H_n se v jednom bodě dotýká hranice sektorů I a II, tedy na přímce $d_2 = \frac{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} + 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}{b_{11}^2} d_1$. V těchto izolovaných bodech musíme použít fundamentální systém z případu (2.8). Budeme se tímto případem zabývat v Sekci 3.1.2. Pokud se nenacházíme na hranici sektorů a platí obě rovnosti $S_1(\ell) = 0$ a $S_2(\ell) = 0$, nacházíme se v průsečíkách hyperbol uvnitř sektoru *I*. Řešení má v těchto



Obrázek 3.1: **Hyperboly.** *Červené křivky levého obrázku jsou kritické body, ve kterých platí $S_1(\ell) = 0$. V modrých bodech platí $S_2(\ell) = 0$. Dohromady tyto křivky tvoří hyperboly H_n, které jsou v menším měřítku na pravém obrázku. Na pravém obrázku je vykresleno pro přehlednost pouze prvních 6 hyperbol.*

bodech tvar

$$\begin{aligned} u(x) &= AC_1(x) + CC_2(x), \\ v(x) &= \frac{b_{11} - d_1\kappa_n}{b_{12}} \left(AC_1(x) + CC_2(x)\right), \end{aligned} \qquad A, C \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Poznámka 13 *Ve všech případech platí $v(x) = \alpha(d_1, n)u(x)$, kde $\alpha(d_1, n) > 0$*

Značení 3 *Každá hyperbola H_n* (3.1) *se na nějaké své části nachází vpravo od všech ostatních hyperbol H_n. Sjednocení všech těchto částí hyperbol budeme nazývat* ***Obálka hyperbol****.*

Poznámka 14 *Alan Turing [3] ukázal, že obálka hyperbol je právě hranicí mezi oblastí stability a nestability konstantního řešení $(\bar{u}, \bar{v})$.*

3.1.2 Nulový diskriminant charakteristické rovnice

Podívejme se nejdříve na případ (2.8), kterému věnujeme celou Sekci 3.1.2. S parametry difúze se tedy omezujeme pouze na přímky (2.10). Vyjděme z rovností (2.3) a (2.4). Pro nulový diskriminant charakteristické rovnice platí $r_1 = r_2$. Řešení $v(x)$ očekáváme ve tvaru

$$v(x) = Ae^{r_1 x} + Bxe^{r_1 x} + Ce^{-r_1 x} + Dxe^{-r_1 x}, \tag{3.5}$$

kde A, B, C, D jsou reálné koeficienty. V podmínkách (2.5) počítáme s derivacemi třetího řádu

$$\begin{aligned} v'(x) &= Ar_1e^{r_1x} + B(e^{r_1x} + xr_1e^{r_1x}) - Cr_1e^{-r_1x} + D(e^{-r_1x} - xr_1e^{-r_1x}), \\ v''(x) &= Ar_1^2e^{r_1x} + Br_1((2e^{r_1x} + xr_1e^{r_1x})) + Cr_1^2e^{-r_1x} - Dr_1((2e^{-r_1x} - xr_1e^{-r_1x})), \\ v'''(x) &= Ar_1^3e^{r_1x} + Br_1^2(3e^{r_1x} + xr_1e^{r_1x}) - Cr_1^3e^{-r_1x} + Dr_1^2((3e^{-r_1x} - xr_1e^{-r_1x})). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Po dosazení do podmínek (2.5) získáme

$$\begin{aligned} &(A - C)r_1 + B + D = 0, \\ &(A - C)r_1^3 + 3(B + D)r_1^2 = 0, \\ &Ar_1e^{r_1\ell} + B(e^{r_1\ell} + \ell r_1e^{r_1\ell}) - Cr_1e^{-r_1\ell} + D(e^{-r_1\ell} - \ell r_1e^{-r_1\ell}) = 0, \\ &Ar_1^3e^{r_1\ell} + Br_1^2(3e^{r_1\ell} + \ell r_1e^{r_1\ell}) - Cr_1^3e^{-r_1\ell} + Dr_1^2(3e^{-r_1\ell} - \ell r_1e^{-r_1\ell}) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Z prvních dvou rovnic si můžeme vyjádřit podmínky v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} r_1 & 1 \\ r_1^3 & 3r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - C \\ B + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Determinant matice $\left(\begin{smallmatrix} r_1 & 1 \\ r_1^3 & 3r_1^2 \end{smallmatrix}\right)$je roven $2r_1^3$. Z Věty 2 víme, že r_1 nikdy není rovno nule. Máme tedy nenulový determinant a jediné řešení této soustavy je nulové řešení. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} A &= C, \\ B &= -D. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Z toho si můžeme upravit druhou dvojici podmínek. Navíc poslední podmínku (3.7) můžeme vydělit nenulovým číslem r_1^2

$$\begin{aligned} Ar_1S_1(\ell) + B[(1 + \ell r_1)e^{r_1\ell} - (1 - \ell r_1)e^{-r_1\ell}] = 0, \\ Ar_1S_1(\ell) + B[(3 + \ell r_1)e^{r_1\ell} - (3 - \ell r_1)e^{-r_1\ell}] = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tuto soustavu budeme řešit sčítací metodou. K druhému řádku přičteme (-1)násobek řádku prvního

$$2BS_1(\ell) = 0. \tag{3.11}$$

Pokud $S_1(\ell) \neq 0$, pak bychom získali pouze nulové koeficienty A, B. Takové řešení nechceme. Musí tedy být

$$S_1(\ell) = 0.$$

To platí právě, když

$$\omega_1 = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

jak ukázal Pavel Kouba [1, *str. 6, Tvrzení 2.6.1*]. Pokud $B \neq 0$, potom z (3.10) musí platit

$$(1 + \ell r_1)e^{r_1\ell} - (1 - \ell r_1)e^{-r_1\ell} = 0.$$

To ještě můžeme přepsat jako

$$S_1(\ell) + \ell r_1 C_1(\ell) = 0.$$

Protože $r_1 \neq 0, \ell \neq 0, S_1(\ell) = 0$, získáváme

$$C_1(\ell) = 0.$$

Z Věty 4 ale víme, že nemůžou nastat obě rovnosti zároveň. Musí tedy platit $B = 0$ a z (3.9) i $D = 0$.

Zbývá tedy určit koeficienty A a C. Připomeňme, že uvažujeme případ (2.8). Z (2.3) a (3.11) plyne

$$\frac{b_{11}d_2 + b_{22}d_1}{2d_1d_2} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \tag{3.12}$$

odkud vyjádříme d_2 explicitně:

$$\left(2d_1\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - b_{11}\right)d_2 = b_{22}d_1.$$

Je-li výraz v závorce nulový, nenajdeme žádné $d_1 > 0$ splňující $b_{22}d_1 = 0$. Proto musí být

$$\left(2d_1\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - b_{11}\right) \neq 0$$

a tedy

$$d_2 = \frac{b_{22}d_1}{2d_1\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - b_{11}}. \tag{3.13}$$

Dosadíme za d_2 vyjádření (2.10)

$$\frac{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}{b_{11}^2}d_1 = \frac{b_{22}d_1}{2d_1\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - b_{11}}.$$

Protože $d_2 \neq 0$, můžeme vyjádřit d_1 explicitně

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2b_{22}}{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2. \tag{3.14}$$

Získali jsme dvě množiny izolovaných kritických bodů (d_1, d_2), kde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2b_{22}}{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2, \\ d_2 &= \frac{b_{22}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2b_{22}}{b_{11}b_{22}-2b_{12}b_{21}\pm2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{b_{11}^2b_{22}}{b_{11}b_{22}-2b_{12}b_{21}\pm2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}\right)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Podívejme se podrobněji na znaménka těchto izolovaných bodů. Vyjdeme z vyjádření (3.14).

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2b_{22}}{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2, \\ \frac{2d_1}{b_{11}}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 &= \left(\frac{2b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}\right), \\ \frac{2d_1}{b_{11}}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 &= 2\sqrt{det(B)}\left(\frac{\sqrt{det(B)} \pm \sqrt{-b_{12}b_{21}}}{det(B) \pm 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)} - b_{12}b_{21}}\right), \\ \frac{2d_1}{b_{11}}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 &= 2\sqrt{det(B)}\left(\frac{\sqrt{det(B)} \pm \sqrt{-b_{12}b_{21}}}{\left(\sqrt{det(B)} \pm \sqrt{-b_{12}b_{21}}\right)^2}\right), \end{aligned}$$

A protože

$$det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < -b_{12}b_{21},$$

platí také

$$\sqrt{det(B)} < \sqrt{-b_{12}b_{21}}.$$

Pokud tedy uvažujeme případ

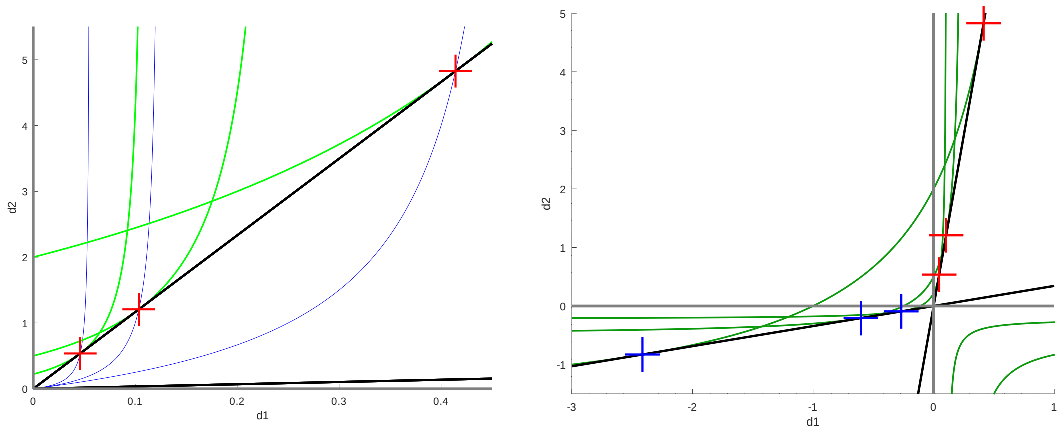
$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2b_{22}}{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} - 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2,$$

získáme záporné parametry d_1, které ale nechceme. Proto uvažujme pouze množinu kritických bodů, pro které platí

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2 b_{22}}{b_{11}b_{22} - 2b_{12}b_{21} + 2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2, \\ d_2 &= \frac{b_{22}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}^2 b_{22}}{b_{11}b_{22}-2b_{12}b_{21}+2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}} + b_{11}\right)\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{b_{11}^2 b_{22}}{b_{11}b_{22}-2b_{12}b_{21}+2\sqrt{-b_{12}b_{21}det(B)}}\right)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Pro tyto kritické body existuje řešení ve tvaru (3.5), kde $A = C, B = D = 0$:

$$\begin{aligned} v(x) &= AC_1(x), \\ u(x) &= -\frac{b_{22}AC_1(x) + d_2 A r_1^2 C_1(x)}{b_{21}} = -AC_1(x)\left(\frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$



Obrázek 3.2: **Izolované kritické body na hranici sektorů I a II.** *Body označené červenými křížky jsou kritické body. Modré křivky splňují (3.13). Zelené křivky jsou hyperboly (3.1). Můžeme si všimnout, že každý kritický bod leží v průniku všech tří typů křivek. Pro přehlednost je vykreslený jen malý počet hyperbol. Na pravém obrázku vykreslujeme situaci i pro záporné hodnoty parametrů d_1, d_2, které ovšem pro difúzní rovnici nedávají smysl.*

3.2 Systém s překážkou

Analogicky k postupu Pavla Kouby [1], který rozebírá *úlohu s překážkou pro v*, se budeme zabývat *úlohou s překážkou pro u* pro případ (2.6). Protože situace (2.6) nenastává pouze pro dvojici přímek (2.10), je pro představu, jak vypadá množina kritických bodů, dostačující. Dovolíme, aby podmínka (1.10) způsobila nediferencovatelnost funkce u v bodě x_0

$$\begin{aligned} &u \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell) \cap C([0, \ell]) \\ &v \in C^2(0, \ell). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pokud řešení u nebude hladké v bodě x_0 musí nutně platit $u(x_0) = 0$, jak jsme zmínili v Poznámce 2 v úvodní kapitole. Pro funkci v bude stále platit $v \in C^2([0, \ell])$. Rozdělme interval $(0,\ell)$ na podintervaly $(0,x_0)$ a (x_0,ℓ) a označme u_L, v_L řešení na intervalu $(0,x_0)$ a u_P, v_P řešení na intervalu (x_0,ℓ).Budeme tedy řešit *úlohu s překážkou pro u* ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&d_1u''(x) + b_{11}u(x) + b_{12}v(x) = 0,\\
&d_2v''(x) + b_{21}u(x) + b_{22}v(x) = 0,
\end{aligned}\right. \quad x \in (0,x_0) \text{ a } x \in (x_0,\ell)\\
&u'(0) = 0,\\
&u'(\ell) = 0,\\
&v'(0) = 0,\\
&v'(\ell) = 0,\\
&u(x_0) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Uvažujeme tedy systémy (1.12). Z vlastností (3.18) funkcí u, v získáme podmínky

$$
\begin{aligned}
&u_L'(0) = v_L'(0) = u_P'(\ell) = v_P'(\ell) = 0,\\
&u_L(x_0^-) = u_P(x_0^+) = 0,\\
&v_L(x_0^-) = v_P(x_0^+),\\
&v_L'(x_0^-) = v_P'(x_0^+).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Soustavu rovnic na jednotlivých intervalech převedeme na rovnice čtvrtého řádu a ztransformujeme podmínky (3.20) (analogicky k (2.2) a (2.5))

$$
\begin{aligned}
u_L(x) &= -\frac{b_{22}v_L(x) + d_2v_L''(x)}{b_{21}},\\
u_P(x) &= -\frac{b_{22}v_P(x) + d_2v_P''(x)}{b_{21}},
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_1d_2v_L''''(x) + (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)v_L''(x) + det(B)v_L(x) = 0, \quad x \in (0,x_0),\\
&d_1d_2v_P''''(x) + (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)v_P''(x) + det(B)v_P(x) = 0, \quad x \in (x_0,\ell),
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_L'''(0) = v_L'(0) = v_P'''(\ell) = v_P'(\ell) = 0,\\
&v_L''(x_0^-) = -\frac{b_{22}v_L(x_0^-)}{d_2},\\
&v_P''(x_0^+) = -\frac{b_{22}v_P(x_0^+)}{d_2},\\
&v_L(x_0^-) = v_P(x_0^+),\\
&v_L'(x_0^-) = v_P'(x_0^+).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Aby se řešení lépe počítalo, budeme ho hledat ve tvaru

$$v_L(x) = e^{rx} \text{ a } v_P(x) = e^{r(\ell - x)}.$$

Charakteristická rovnice bude pro obě rovnice stejná. Fundamentální systémy budou mít tvar

$$
\begin{aligned}
FS_L &= \{e^{r_1x}, e^{-r_1x}, e^{r_2x}, e^{-r_2x}\},\\
FS_P &= \{e^{r_1(\ell-x)}, e^{-r_1(\ell-x)}, e^{r_2(\ell-x)}, e^{-r_2(\ell-x)}\}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Samotná řešení tedy hledáme ve tvaru

$$
\begin{aligned}
v_L(x) &= A_Le^{r_1x} + B_Le^{-r_1x} + C_Le^{r_2x} + D_Le^{-r_2x},\\
v_P(x) &= A_Pe^{r_1(\ell-x)} + B_Pe^{-r_1(\ell-x)} + C_Pe^{r_2(\ell-x)} + D_Pe^{-r_2(\ell-x)},
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

kde A_L až $D_P \in \mathbb{R}$. V podmínkách jsou derivace až do řádu 3

$$\begin{aligned}
v_L'(x) &= A_L r_1 e^{r_1 x} - B_L r_1 e^{-r_1 x} + C_L r_2 e^{r_2 x} - D_L r_2 e^{-r_2 x},\\
v_P'(x) &= -A_P r_1 e^{r_1(\ell - x)} + B_P r_1 e^{-r_1(\ell - x)} - C_P r_2 e^{r_2(\ell - x)} + D_P r_2 e^{-r_2(\ell - x)},\\
v_L''(x) &= A_L r_1^2 e^{r_1 x} + B_L r_1^2 e^{-r_1 x} + C_L r_2^2 e^{r_2 x} + D_L r_2^2 e^{-r_2 x},\\
v_P''(x) &= A_P r_1^2 e^{r_1(\ell - x)} + B_P r_1^2 e^{-r_1(\ell - x)} + C_P r_2^2 e^{r_2(\ell - x)} + D_P r_2^2 e^{-r_2(\ell - x)},\\
v_L'''(x) &= A_L r_1^3 e^{r_1 x} - B_L r_1^3 e^{-r_1 x} + C_L r_2^3 e^{r_2 x} - D_L r_2^3 e^{-r_2 x},\\
v_P'''(x) &= -A_P r_1^3 e^{r_1(\ell - x)} + B_P r_1^3 e^{-r_1(\ell - x)} - C_P r_2^3 e^{r_2(\ell - x)} + D_P r_2^3 e^{-r_2(\ell - x)}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Dosadíme je nyní do čtyř okrajových podmínek (3.23) a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}
A_L r_1^3 - B_L r_1^3 + C_L r_2^3 - D_L r_2^3 &= 0,\\
A_L r_1 - B_L r_1 + C_L r_2 - D_L r_2 &= 0,\\
A_P r_1^3 - B_P r_1^3 + C_P r_2^3 - D_P r_2^3 &= 0,\\
A_P r_1 - B_P r_1 + C_P r_2 - D_P r_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Tu přepíšeme do maticové formy

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_L - B_L \\ C_L - D_L \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_P - B_P \\ C_P - D_P \end{pmatrix} = 0.$$

Tyto dvě soustavy se stejnou maticí $R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix}$ mají nenulová řešení, právě tehdy když její determinant je nulový

$$det(R) = r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1).$$

Víme, že r_1 ani r_2 nejsou nulová (Věta 2) a protože řešíme případ (2.6), je $det(R)$ nenulový. Musí tedy platit

$$\begin{aligned}
A_L &= B_L,\\
C_L &= D_L,\\
A_P &= B_P,\\
C_P &= D_P.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Vyjádříme zbylé čtyři přechodové podmínky (3.23) a navíc využijeme předcházejících rovností (3.28). Dostaneme homogenní soustavu čtyř rovnic pro neznámé A_L, C_L, A_P, C_P.

$$\begin{aligned}
&A_L R_1 C_1(x_0) + C_L R_2 C_2(x_0) = 0,\\
&A_P R_1 C_1(\ell - x_0) + C_P R_2 C_2(\ell - x_0) = 0,\\
&A_L r_1 S_1(x_0) + C_L r_2 S_2(x_0) + A_P r_1 S_1(\ell - x_0) + C_P r_2 S_2(\ell - x_0) = 0,\\
&A_L C_1(x_0) + C_L C_2(x_0) - A_P C_1(\ell - x_0) - C_P C_2(\ell - x_0) = 0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

což lze maticově zapsat jako $M\vec{\alpha} = \vec{o}$, kde $\vec{\alpha} = (A_L, A_P, C_L, C_P)^T \in \mathbb{R}^4$ a $\vec{o}$ je nulový vektor. Protože hledáme netriviální řešení, budeme zjišťovat, kdy je determinant matice M nulový.

K výpočtu determinantu použijeme postupně pro matici 4×4 i pro matice 3×3 Laplaceův rozvoj podle prvního řádku

$$\begin{aligned}
|M| &= \begin{vmatrix} R_1C_1(x_0) & R_2C_2(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1C_1(\ell-x_0) & R_2C_2(\ell-x_0) \\ r_1S_1(x_0) & r_2S_2(x_0) & r_1S_1(\ell-x_0) & r_2S_2(\ell-x_0) \\ C_1(x_0) & C_2(x_0) & -C_1(\ell-x_0) & -C_2(\ell-x_0) \end{vmatrix} \\
&= R_1C_1(x_0) \begin{vmatrix} 0 & R_1C_1(\ell-x_0) & R_2C_2(\ell-x_0) \\ r_2S_2(x_0) & r_1S_1(\ell-x_0) & r_2S_2(\ell-x_0) \\ C_2(x_0) & -C_1(\ell-x_0) & -C_2(\ell-x_0) \end{vmatrix} \\
&\quad - R_2C_2(x_0) \begin{vmatrix} 0 & R_1C_1(\ell-x_0) & R_2C_2(\ell-x_0) \\ r_1S_1(x_0) & r_1S_1(\ell-x_0) & r_2S_2(\ell-x_0) \\ C_1(x_0) & -C_1(\ell-x_0) & -C_2(\ell-x_0) \end{vmatrix} \\
&= R_1C_1(x_0) \Bigg((R_2C_2(\ell-x_0)) \begin{vmatrix} r_2S_2(x_0) & r_1S_1(\ell-x_0) \\ C_2(x_0) & -C_1(\ell-x_0) \end{vmatrix} \\
&\quad - R_1C_1(\ell-x_0) \begin{vmatrix} r_2S_2(x_0) & r_2S_2(\ell-x_0) \\ C_2(x_0) & -C_2(\ell-x_0) \end{vmatrix} \Bigg) \\
&\quad - R_2C_2(x_0) \Bigg((R_2C_2(\ell-x_0)) \begin{vmatrix} r_1S_1(x_0) & r_1S_1(\ell-x_0) \\ C_1(x_0) & -C_1(\ell-x_0) \end{vmatrix} \\
&\quad - R_1C_1(\ell-x_0) \begin{vmatrix} r_1S_1(x_0) & r_2S_2(\ell-x_0) \\ C_1(x_0) & -C_2(\ell-x_0) \end{vmatrix} \Bigg) = g_1(d_1, d_2).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

K výpočtu determinantů matic 2×2 lze použít Sarrusovo pravidlo. Pro přehlednost uvedené výrazy ponecháme ve tvaru s determinanty. Hodnotu determinantu matice M jsme označili jako $g_1(d_1, d_2)$, abychom zdůraznili jeho závislost na parametrech d_1, d_2. Abychom mohli najít nenulové koeficienty $\vec{\alpha}$, potřebujeme d_1, d_2, pro která $g_1(d_1, d_2) = 0$. Příslušnou matici soustavy M můžeme zapsat také blokově

$$M = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & K_4 \\ K_5 & K_6 & K_7 & K_8 \\ K_9 & K_{10} & K_{11} & K_{12} \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Potom platí

$$\begin{aligned} g(d_1, d_2) = K_1[&K_4(K_6K_{11} - K_{10}K_7) - K_3(K_6K_{12} - K_{10}K_8)] \\ &-K_2[K_4(K_5K_{11} - K_9K_7) - K_3(K_5K_{12} - K_9K_8)]. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Přepišme si rovnosti (3.29) ekvivalentně do tvaru

$$C_LC_2(x_0) = -A_L\frac{R_1}{R_2}C_1(x_0), \tag{3.33}$$

$$C_PC_2(\ell - x_0) = -A_P\frac{R_1}{R_2}C_1(\ell - x_0), \tag{3.34}$$

$$A_Lr_1S_1(x_0) + C_Lr_2S_2(x_0) + A_Pr_1S_1(\ell - x_0) + C_Pr_2S_2(\ell - x_0) = 0, \tag{3.35}$$

$$A_LC_1(x_0) = A_PC_1(\ell - x_0). \tag{3.36}$$

Chtěli bychom v ideálním případě vyjádřit všechny koeficienty jako násobky jednoho z nich. K tomu ale musíme ověřovat nenulovost dělitelů. Připomeňme, že jednotlivé funkce závisí na parametrech difúze. V následující úvaze zanedbáme případy, kdy jde pouze o izolované body (d_1, d_2). Budeme se tedy zabývat případy, kdy

- platí právě jedna z rovností
$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= 0, \\ C_1(\ell - x_0) &= 0, \\ C_2(x_0) &= 0, \\ C_2(\ell - x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

- platí $C_i(x_0) = C_i(\ell - x_0) = 0$, $C_j(x_0) \neq 0$, $C_j(\ell - x_0) \neq 0$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$

  Poznámka 15 *V tomto vyjádření máme na mysli, že index i je právě jedna hodnota z množiny $\{1, 2\}$ a index j je příslušná druhá hodnota ze stejné množiny. Pro každý index tedy uvažujeme pouze jednu hodnotu, ne obě zároveň.*

- neplatí ani jedna rovností (3.37).

3.2.1 Platí právě jedna z rovností

Tato sekce rozebírá případy, kdy platí právě jedna z rovností (3.37).

Z podmínek (3.28) a (3.33)–(3.36) můžeme spočítat, že pokud platí právě jedna z rovností $C_1(x_0) = 0$, $C_1(\ell - x_0) = 0$, $C_2(x_0) = 0$, $C_2(\ell - x_0) = 0$, pak vždycky najdeme pouze triviální řešení. Tedy že všechny koeficienty A_L až D_P budou nulové.

Postup ukážeme pro případ $C_1(x_0) = 0$, ostatní případy jsou analogické. Ve výpočtech využíváme poznatky z druhé kapitoly.

Postupně z podmínek (3.33), (3.36), (3.34) a (3.35) získáváme

$$\begin{aligned} C_L &= 0, \\ A_P &= 0, \\ C_P &= 0, \\ A_L r_1 S_1(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Předpokládáme $C_1(x_0) = 0$ a proto z Poznámky 12 a Věty 4 $S_1(x_0) \neq 0$ a tedy $A_L = 0$. Našli jsme pouze triviální řešení. Nezískali jsme v tomto případě žádné kritické body.

3.2.2 Platí právě dvě rovnosti

Uvažujeme situace, kdy

$$C_i(x_0) = C_i(\ell - x_0) = 0, C_j(x_0) \neq 0, C_j(\ell - x_0) \neq 0, \quad (i, j) = (1, 2) \text{ nebo } (2, 1)$$

Z Poznámky 12 a Věty 4 plyne, že $S_i(x_0) \neq 0$ a $S_i(\ell - x_0) \neq 0$.

Pro $(i, j) = (1, 2)$ z podmínek (3.33)–(3.35) postupně získáme

$$\begin{aligned} C_L &= 0, \\ C_P &= 0, \\ A_L r_1 S_1(x_0) + A_P r_1 S_1(\ell - x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Abychom našli netriviální řešení, potřebujeme aby alespoň jeden z členů A_L, A_P byl nenulový. Všimněme si, že $r_1 S_1(x_0)$ i $r_1 S_1(\ell - x_0)$ jsou nenulové výrazy. Pokud by tedy jeden z členů A_L, A_P byl nulový, pak by nutně z podmínky (3.38) byl nulový i druhý. Uvažujme tedy $A_L \neq 0$. Potom z podmínky (3.38) také víme, že $A_P = -\frac{S_1(x_0)}{S_1(\ell - x_0)} A_L \neq 0$. Máme tedy splněné podmínky (3.28), (3.33)–(3.36) a tedy i (3.23). Postupným vyjádřením jednotlivých koeficientů z (3.28),(3.33)–(3.36) můžeme určit řešení

$$\begin{aligned} v_L &= A_L C_1(x), \\ u_L &= -A_L \frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(x), \\ v_P &= -A_L \frac{S_1(x_0)}{S_1(\ell - x_0)} C_1(\ell - x), \\ u_P &= A_L \frac{S_1(x_0)}{S_1(\ell - x_0)} \frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(\ell - x). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Poznámka 16 *Všimněme si, že $C_1'(x) = r_1 S_1(x)$ a $S_1'(x) = r_1 C_1(x)$.*

Můžeme tedy spočítat, že jednostranné derivace u_L a u_P v bodě x_0 jsou rovny výrazu

$$-A_L r_1 S_1(x_0) \frac{(b_{22} + d_2 r^2)}{b_{21}}.$$

Protože řešíme případ $C_1(x_0) = C_1(\ell - x_0) = 0$ a protože $C_1''(x) = r_1^2 C_1(x)$, platí $u_L''(x_0) = u_P''(x_0) = 0$. Získáváme, že $u'' \in C(0, \ell)$ a tedy $u \in C^2(0, \ell)$. Tento případ je tedy speciálním případem *úlohy bez překážky.*

Stejným postupem pro $(i, j) = (2, 1)$ bychom získali tvar řešení

$$\begin{aligned} v_L &= C_L C_2(x), \\ u_L &= -C_L \frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(x), \\ v_P &= -C_L \frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} C_2(\ell - x), \\ u_P &= C_L \frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} \frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(\ell - x) \end{aligned} . \tag{3.40}$$

I zde platí $v \in C^2(0, \ell)$ a proto máme opět *řešení úlohy bez překážky.* Jak je popsáno v sekci 2.3, řešení (3.39), (3.40) se vyskytují na příslušných částech hyperbol H_n tvaru (2.19), kde $j, k, n \in \mathbb{N}$ splňují (2.20). Konkrétně řešení (3.39) se vyskytuje vlevo od dotyku hyperboly s hranicí sektorů I a II a napravo od tohoto bodu dotyku jsou řešení (3.40).

3.2.3 Neplatí ani jedna z rovností

Podívejme se, jak to je, pokud neplatí ani jedna z rovností $C_1(x_0) = 0$, $C_1(\ell - x_0) = 0$, $C_2(x_0) = 0$, $C_2(\ell - x_0) = 0$. Z podmínky (3.33) vyjádříme:

$$C_L = -\frac{C_1(x_0)}{C_2(x_0)} \frac{R_1}{R_2} A_L. \tag{3.41}$$

Z podmínky (3.34) máme:

$$C_P = -\frac{C_1(\ell - x_0)}{C_2(\ell - x_0)} \frac{R_1}{R_2} A_P. \tag{3.42}$$

Z podmínky (3.36):

$$A_P = \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} A_L. \tag{3.43}$$

Vraťme se k determinantu (3.30) matice M, který jsme vyjádřili funkcí $g_1(d_1, d_2)$. Hledané kritické body odpovídají bodům, pro které $g_1(d_1, d_2) = 0$. Determinant matice soustavy (3.30) je nulový, právě když některý z řádků matice je lineární kombinací ostatních řádků. Podmínky (3.29) jsme ekvivalentními úpravami převedli na tvar (3.35), (3.41), (3.42) a (3.43). Z toho plyne, že pokud se nacházíme v kritickém bodě, podmínka (3.35) je lineární kombinací podmínek (3.41), (3.42) a (3.43), ty jsou totiž lineárně nezávislé. Získali jsme tedy vztahy mezi všemi hledanými koeficienty. Můžeme nyní určit řešení

$$\begin{aligned}
v_L(x) &= A_L \left(C_1(x) - \frac{C_1(x_0)}{C_2(x_0)} \frac{R_1}{R_2} C_2(x) \right), \\
u_L(x) &= -A_L \left(\frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(x) - \frac{C_1(x_0)}{C_2(x_0)} \frac{R_1}{R_2} \frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(x) \right), \\
v_P(x) &= A_L \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} \left(C_1(\ell - x) - \frac{C_1(\ell - x_0)}{C_2(\ell - x_0)} \frac{R_1}{R_2} C_2(\ell - x) \right), \\
u_P(x) &= -A_L \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} \left(\frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(\ell - x) - \frac{C_1(\ell - x_0)}{C_2(\ell - x_0)} \frac{R_1}{R_2} \frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(\ell - x) \right).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Taková řešení splňují pro vhodné znaménko koeficientu A_L nerovnost $u'(x_0^-) > u'(x_0^+)$, tedy $u \notin C^2(0, \ell)$ a proto (u, v) nejsou zároveň *řešením úlohy bez překážky.*

Ačkoliv byly výpočty v mnohých částech analogické výpočtům Pavla Kouby [1, *5. kapitola*] pro *překážku pro v*, můžeme si všimnout významného rozdílu. Všechny kritické body *úlohy s překážkou pro u* leží v sektoru I nebo na jeho hranici. Pavel Kouba vypočítal množinu kritických bodů pro *úlohu s překážkou pro v* [1, str. 60]. Tuto množinu ale nyní umíme zobrazit přesněji, proto ji v kapitole 6 pro porovnání vykreslíme. *Úloha s překážkou pro v* má proti *úloze s překážkou pro u větev* kritických bodů, která prochází sektory *II* a *III*. Tuto větev můžeme také pozorovat v kapitole 6 na Obr. 6.3.

Vraťme se ještě k původní jednostranné úloze a nerovnosti.

Věta 5 *Netriviální řešení úlohy s překážkou pro u existuje v kritických bodech, které leží buď na hyperbolách H_n (3.1) a nebo na křivkách určenými rovnicí $g_1(d_1, d_2) = 0$. Pokud zvolíme kritický bod ležící na jedné z hyperbol H_n (3.1), potom je řešení úlohy s překážkou zároveň i řešením úlohy bez překážky. Pokud zvolíme kritický bod (d_1, d_2) takový, že $g_1(d_1, d_2) = 0$ a přitom $(d_1, d_2) \notin H_n$, potom jde o řešení úlohy s překážkou, ale už to není řešení úlohy bez překážky.*

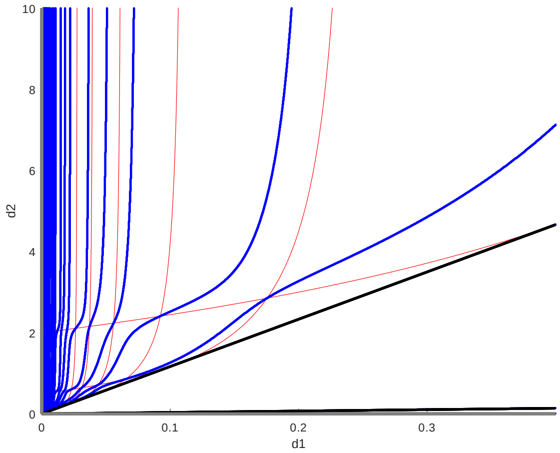
Důkaz: Uvažujme přechodovou podmínku $u(x_0) \geq 0$. V libovolném bodě $(d_1, d_2) \in H_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ existuje prostorově nehomogenní *řešení úlohy bez překážky* tvaru (3.2).

Pokud toto řešení zároveň splňuje $u(x_0) > 0$, potom jde i o *řešení úlohy s překážkou pro u.* Pokud *řešení úlohy bez překážky* zároveň splňuje $u(x_0) = 0$, potom to je i *řešení úlohy s překážkou pro u* takové, že $g_1(d_1, d_2) = 0$ a jde o případ rozebíraný v Sekci 3.2.2. Pokud by pro *řešení úlohy bez překážky* platilo $u(x_0) < 0$, potom toto řešení vynásobíme zápornou konstantou. Získáme nové řešení, které navíc splňuje přechodovou podmínku $u(x_0) > 0$. Opět jsme získali *řešení úlohy s překážkou pro u.* Tím jsme ošetřili všechny případy, kdy *řešení úlohy s překážkou* je zároveň *řešením úlohy bez překážky*. Dokážeme tedy libovolné *řešení úlohy bez překážky* vynásobit vhodnou konstantou, aby toto řešení bylo zároveň *řešením úlohy s překážkou*. Pokud nejde o *řešení úlohy bez překážky*, musí platit $g_1(d_1, d_2) = 0$ a zároveň už nejde o případ 3.2.2. V takovém případě je funkce u v bodě x_0 nediferencovatelná a pro vhodný násobek platí $u'(x_0^-) > u'(x_0^+)$, jak jsme zmínili v Poznámce 2.

□

Poznámka 17 *Obdobné tvrzení platí i pro úlohu s překážkou pro v.*

Poznámka 18 *Pokud bychom uvažovali více než jednu překážku, nemohli bychom úvahu o vhodném násobku z důkazu použít.*



Obrázek 3.3: **Kritické body úlohy s překážkou pro u.** *Kritické body úlohy s překážkou pro u leží na hyperbolách* (3.1) *(červeně) a na křivkách vyjádřených funkcí* $g(d_1, d_2) = 0$ *(modře). Obrázek zobrazuje situaci pro* $\ell = \pi, x_0 = \frac{2}{3}\pi$. *Tento zlomek nemůžeme vyjádřit ve tvaru* (2.20) *a proto najdeme pouze izolované průsečíky modrých a červených křivek. V tomto případě tedy (zanedbáme-li izolované body) jsou řešení v kritických bodech náležících modrým křivkám řešeními úlohy s překážkou pro u a nejsou řešeními úlohy bez překážky. Naopak řešení v kritických bodech náležících červeným křivkám jsou zároveň řešeními úlohy bez překážky a nesplňují rovnost* $g_1(d_1, d_2) = 0$.

Poznámka 19 *Získané výsledky jsou v souladu s pozorováním Milana Kučery [4].*

Kapitola 4

Nulová derivace pro u

Hraboši se nedostanou za plot.

Uvažujme opět *úlohu bez překážky*, ke které přidáme podmínku $u'(x_0) = 0$. V tomto bodě povolíme, aby funkce u byla nespojitá

$$\begin{aligned} &u \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell), \\ &v \in C^2(0, \ell). \end{aligned}$$

Obdobně jako ve třetí kapitole budeme uvažovat systémy (1.12) Potom celá okrajová úloha bude mít tvar

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &d_1 u''(x) + b_{11} u(x) + b_{12} v(x) = 0 \\ &d_2 v''(x) + b_{21} u(x) + b_{22} v(x) = 0 \end{aligned}\right. \quad x \in (0, x_0) \cup (x_0, \ell), \\ &u'(0) = 0, \\ &u'(\ell) = 0, \\ &v'(0) = 0, \\ &v'(\ell) = 0, \\ &u'(x_0^+) = u'(x_0^-) = 0, \\ &v(x_0^-) = v(x_0^+), \\ &v'(x_0^-) = v'(x_0^+). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Navíc převedeme soustavu na rovnice čtvrtého řádu (2.2) a ztransformujeme všechny podmínky. Získáme úlohu

$$\begin{aligned} &d_1 d_2 v_L''''(x) + (b_{11} d_2 + b_{22} d_1) v_L''(x) + det(B) v_L(x) = 0, \quad x \in (0, x_0), \\ &d_1 d_2 v_P''''(x) + (b_{11} d_2 + b_{22} d_1) v_P''(x) + det(B) v_P(x) = 0, \quad x \in (x_0, \ell), \end{aligned} \tag{4.2}$$

s okrajovými a přechodovými podmínkami

$$\begin{aligned} &v_L'''(0) = v_L'(0) = v_P'''(\ell) = v_P'(\ell) = 0, \\ &v_L'''(x_0^-) = -\frac{b_{22} v_L'(x_0^-)}{d_2}, \\ &v_P'''(x_0^+) = -\frac{b_{22} v_P'(x_0^+)}{d_2}, \\ &v_L(x_0^-) = v_P(x_0^+), \\ &v_L'(x_0^-) = v_P'(x_0^+). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Proti (3.23) se nám změnily pouze rovnosti související s překážkou.

Poznámka 20 *Protože uvažujeme pouze $u'(x_0^+) = u'(x_0^-) = 0$, jde o lineární úlohu.*

Analogicky ke třetí kapitole budeme hledat řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} v_L(x) &= A_L e^{r_1 x} + B_L e^{-r_1 x} + C_L e^{r_2 x} + D_L e^{-r_2 x}, \\ v_P(x) &= A_P e^{r_1(\ell - x)} + B_P e^{-r_1(\ell - x)} + C_P e^{r_2(\ell - x)} + D_P e^{-r_2(\ell - x)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ze třetí kapitoly víme, že první čtyři podmínky ze (4.3) můžeme upravit a získáme rovnosti

$$\begin{aligned} A_L &= B_L, \\ C_L &= D_L, \\ A_P &= B_P, \\ C_P &= D_P. \end{aligned}$$

Využijme tyto vztahy a dosaďme je do druhé čtveřice podmínek z (4.3)

$$\begin{aligned} &A_L r_1 R_1 S_1(x_0) + C_L r_2 R_2 S_2(x_0) = 0, \\ &A_P r_1 R_1 S_1(\ell - x_0) + C_P r_2 R_2 S_2(\ell - x_0) = 0, \\ &A_L r_1 S_1(x_0) + C_L r_2 S_2(x_0) + A_P r_1 S_1(\ell - x_0) + C_P r_2 S_2(\ell - x_0) = 0, \\ &A_L C_1(x_0) + C_L C_2(x_0) - A_P C_1(\ell - x_0) - C_P C_2(\ell - x_0) = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Můžeme si všimnout, že matice této soustavy má opět blokové schéma (3.31). Dosaďme tedy do (3.32) a označme determinant matice M jako $g_2(d_1, d_2)$:

$$\begin{aligned} g_2(d_1, d_2) = r_1 R_1 S_1(x_0) \Bigg(& (r_2 R_2 S_2(\ell - x_0)) \begin{vmatrix} r_2 S_2(x_0) & r_1 S_1(\ell - x_0) \\ C_2(x_0) & -C_1(\ell - x_0) \end{vmatrix} \\ & - (r_1 R_1 S_1(\ell - x_0)) \begin{vmatrix} r_2 S_2(x_0) & r_2 S_2(\ell - x_0) \\ C_2(x_0) & -C_2(\ell - x_0) \end{vmatrix} \Bigg) \\ - (r_2 R_2 S_2(x_0)) \Bigg(& (r_2 R_2 S_2(\ell - x_0)) \begin{vmatrix} r_1 S_1(x_0) & r_1 S_1(\ell - x_0) \\ C_1(x_0) & -C_1(\ell - x_0) \end{vmatrix} \\ & - (r_1 R_1 S_1(\ell - x_0)) \begin{vmatrix} r_1 S_1(x_0) & r_2 S_2(\ell - x_0) \\ C_1(x_0) & -C_2(\ell - x_0) \end{vmatrix} \Bigg). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Položme nyní $g_2(d_1, d_2) = 0$. Nulové body jsou právě kritickými body *úlohy s podmínkou pro nulovou derivaci u* v bodě $x_0 \in (0, \ell)$. Tyto kritické body jsou vykresleny na Obr. 5.1.

Pro nalezení příslušných netriviálních řešení (u, v) upravme podmínky (4.5) do tvaru

$$A_L r_1 R_1 S_1(x_0) = -C_L r_2 R_2 S_2(x_0), \tag{4.7}$$

$$A_P r_1 R_1 S_1(\ell - x_0) = -C_P r_2 R_2 S_2(\ell - x_0), \tag{4.8}$$

$$\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) r_2 S_2(x_0) C_L + \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) r_2 S_2(\ell - x_0) C_P = 0, \tag{4.9}$$

$$A_L C_1(x_0) + C_L C_2(x_0) - A_P C_1(\ell - x_0) - C_P C_2(\ell - x_0) = 0. \tag{4.10}$$

Podobně jako v předchozí kapitole se nyní podívejme na tři různé případy.

- Platí právě jedna z rovností $S_1(x_0) = 0$, $S_1(\ell - x_0) = 0$, $S_2(x_0) = 0$, $S_2(\ell - x_0) = 0$.
- Platí $S_i(x_0) = S_i(\ell - x_0) = 0, S_{3-i}(x_0) \neq 0$, $S_{3-i}(\ell - x_0) \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$.
- Platí $S_1(x_0) \neq 0$, $S_1(\ell - x_0) \neq 0$, $S_2(x_0) \neq 0$, $S_2(\ell - x_0) \neq 0$.

4.1 Platí právě jedna z rovností

V této sekci uvažujeme případy, kdy platí právě jedna z rovností

$$
\begin{aligned}
S_1(x_0) &= 0, \\
S_1(\ell - x_0) &= 0, \\
S_2(x_0) &= 0, \\
S_2(\ell - x_0) &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Ukážeme postup pro jeden ze čtyř případů, pro další se postupuje analogicky. Ve všech čtyřech případech získáme pouze triviální řešení. Řešme tedy případ $S_2(\ell - x_0) = 0$. Z podmínky (4.8) získáme, že A_P musí být nutně nulové. Podobně z podmínky (4.9) máme, že $C_L = 0$. To platí, protože stále řešíme případ (2.6). Tedy $r_1 \neq r_2$ a tedy $R_1 \neq R_2$. Člen $\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) r_2 S_2(x_0)$ je tedy nenulový. Dosadíme-li $C_L = 0$ do podmínky (4.7), získáme $A_L = 0$. Dosazením do poslední podmínky (4.10) získáme $C_P C_2(\ell - x_0) = 0$. Protože ale nemůžou nastat rovnosti $S_2(\ell - x_0) = 0$ a $C_2(\ell - x_0) = 0$ zároveň, musí nutně být $C_P = 0$. Našli jsme tedy pouze triviální řešení. V postupu jsme používali tvrzení ze sekce 2.2. Proto pokud platí právě jedna z rovností (4.11), najdeme pouze triviální řešení.

4.2 Platí právě dvě rovnosti

Rozebereme případ, kdy $S_i(x_0) = S_i(\ell - x_0) = 0$ a $S_j(x_0) \neq 0, S_j(\ell - x_0) \neq 0$ pro jednu dvojici $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Začněme s $i = 1$. Potom z Věty 3 a z podmínek (4.7), (4.8) máme $C_L = C_P = 0$. Dosazením do (4.10) získáme $A_P = \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} A_L$. Získali jsme vztahy pro koeficienty A_L až D_P splňující všechny podmínky (4.3). Z Věty 3 a z Obr. 2.4 víme, že kritické body splňující $S_1(x_0) = S_1(\ell - x_0) = 0$ leží na částech hyperbol H_k z (2.24), kde $k = m + n$ a $m, n \in \mathbb{N}$ splňují (2.22).

Z podmínek $S_2(x_0) = S_2(\ell - x_0) = 0$ získáme druhou část stejných hyperbol. V prvním případě je řešení tvaru

$$
\begin{aligned}
v_L &= A_L C_1(x), \\
u_L &= -A_L \frac{(b_{22} + d_2 r_1^2)}{b_{21}} C_1(x), \\
v_P &= A_L \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} C_1(\ell - x), \\
u_P &= -A_L \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} \frac{(b_{22} + d_2 r_1^2)}{b_{21}} C_1(\ell - x).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Ve druhém případě má řešení tvar

$$
\begin{aligned}
v_L &= C_L C_2(x), \\
u_L &= -C_L \frac{(b_{22} + d_2 r_2^2)}{b_{21}} C_2(x), \\
v_P &= C_L \frac{C_2(x_0)}{C_2(\ell - x_0)} C_2(\ell - x), \\
u_P &= -C_L \frac{C_2(x_0)}{C_2(\ell - x_0)} \frac{(b_{22} + d_2 r_2^2)}{b_{21}} C_2(\ell - x).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Poznámka 21 *Všimněme si, že hodnoty $u_L(x_0)$ a $u_P(x_0)$ jsou stejné. Můžeme také spočítat, že $u''_L(x_0^-) = u''_P(x_0^+)$. Navíc předpokládáme $u'_L(x_0^-) = u'_P(x_0^+) = 0$ a tedy $u \in C^2(0,\ell)$. Protože můžeme funkce $S_i(x)$ a $C_i(x)$ derivovat podle Poznámky 16 a protože uvažujeme $S_i(x_0) = S_i(\ell - x_0) = 0$ pro jeden index $i \in \{1,2\}$, platí navíc $v'_L(x_0) = v'_P(x_0) = 0$. Řešení tvaru (4.13) jsou tedy zároveň řešením úlohy bez překážky.*

4.3 Neplatí ani jedna z rovností

Ukažme si vztahy pro koeficienty, které nesplňují ani jednu z rovností

$$
\begin{aligned}
S_1(x_0) &= 0,\\
S_1(\ell - x_0) &= 0,\\
S_2(x_0) &= 0,\\
S_2(\ell - x_0) &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Podmínky (4.7), (4.8) a (4.9) můžeme tedy ještě upravit

$$
\begin{aligned}
A_L &= -C_L \frac{r_2 R_2 S_2(x_0)}{r_1 R_1 S_1(x_0)},\\
A_P &= -C_P \frac{r_2 R_2 S_2(\ell - x_0)}{r_1 R_1 S_1(\ell - x_0)},\\
C_P &= -\frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} C_L.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Podobně jako v předchozí kapitole, protože se nacházíme v bodech, kde je determinant (4.6) soustavy (4.5) nulový, poslední podmínka (4.10) bude lineární kombinací předchozích. Řešení (u, v) tedy bude mít tvar

$$
\begin{aligned}
v_L(x) &= C_L \left(C_2(x) - \frac{r_2 R_2 S_2(x_0)}{r_1 R_1 S_1(x_0)} C_1(x) \right),\\
u_L(x) &= -C_L \left(\frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(x) - \frac{r_2 R_2 S_2(x_0)}{r_1 R_1 S_1(x_0)} \frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(x) \right),\\
v_P(x) &= -C_L \frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} \left(C_2(\ell - x) - \frac{r_2 R_2 S_2(\ell - x_0)}{r_1 R_1 S_1(\ell - x_0)} C_1(\ell - x) \right),\\
u_P(x) &= C_L \frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} \left(\frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(\ell - x) - \frac{r_2 R_2 S_2(\ell - x_0)}{r_1 R_1 S_1(\ell - x_0)} \frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(\ell - x) \right).
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Poznámka 22 *Tato řešení pro $C_L \neq 0$ nesplňují $u_L(x_0^-) = u_P(x_0^+)$ a proto nejde o řešení úlohy bez překážky.*

Kritické body *úlohy s podmínkou pro derivaci u* jsou vykresleny v následující Kapitole na Obr. 5.1. Můžeme pozorovat i větev jdoucí doprava skrz sektory *II* a *III*. Na Obr. 6.10 pozorujeme profil řešení z této větve. Můžeme si všimnout nespojistosti funkce u v bodě x_0 a změny znaménka funkce u v tomto bodě.

Kapitola 5

Nulová derivace pro v

Lišky neprojdou přes překážku.

K *úloze bez překážky* nyní přidáme podmínku $v'(x_0) = 0$, ale povolíme, aby funkce v nebyla v tomto bodě spojitá. Chápeme tedy tuto podmínku jako $v'(x_0^-) = v'(x_0^+) = 0$. Tedy

$$
\begin{aligned}
&u(x) \in C^2(0, \ell),\\
&v(x) \in C^2(0, x_0) \cap C^2(x_0, \ell).
\end{aligned}
$$

Potom okrajová úloha bude mít tvar

$$
\begin{aligned}
&d_1 u''(x) + b_{11} u(x) + b_{12} v(x) = 0,\\
&d_2 v''(x) + b_{21} u(x) + b_{22} v(x) = 0,\\
&u'(0) = 0,\\
&u'(\ell) = 0,\\
&v'(0) = 0,\\
&v'(\ell) = 0,\\
&v'(x_0^-) = v'(x_0^+) = 0,\\
&u(x_0^-) = u(x_0^+),\\
&u'(x_0^-) = u'(x_0^+).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Obdobně jako v předcházejících úlohách si rozdělíme interval $(0, \ell)$ na dva intervaly a budeme uvažovat soustavy (1.12). Řešení budeme hledat v každém intervalu zvlášť. Budeme ho hledat opět ve tvaru (3.25). Převeďme znovu soustavu na rovnice čtvrtého řádu (2.2) a ztransformujme podmínky na tvar

$$
\begin{aligned}
&v_L'''(0) = v_L'(0) = v_P'''(\ell) = v_P'(\ell) = 0,\\
&v_L'(x_0^-) = v_P'(x_0^+) = 0,\\
&v_L'''(x_0^-) = v_P'''(x_0^+),\\
&b_{22} v_L(x_0^-) + d_2 v_L''(x_0^-) = b_{22} v_P(x_0^-) + d_2 v_P''(x_0^-).
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Podobně jako ve čtvrté kapitole tedy jde o lineární úlohu. První čtyři podmínky jsou stejné, jako v předchozích úlohách, platí proto

$$
\begin{aligned}
A_L &= B_L,\\
C_L &= D_L,\\
A_P &= B_P,\\
C_P &= D_P.
\end{aligned}
$$

Z dalších podmínek z (5.2) pak máme soustavu

$$\begin{aligned}
&A_L r_1 S_1(x_0) + C_L r_2 S_2(x_0) = 0,\\
&A_P r_1 S_1(\ell - x_0) + C_P r_2 S_2(\ell - x_0) = 0,\\
&A_L r_1^3 S_1(x_0) + C_L r_2^3 S_2(x_0) + A_P r_1^3 S_1(\ell - x_0) + C_P r_2^3 S_2(\ell - x_0),\\
&A_L R_1 C_1(x_0) + C_L R_2 C_2(x_0) - A_P R_1 C_1(\ell - x_0) - C_P R_2 C_2(\ell - x_0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Ta je stejného typu jako (3.29). Pro výpočet kritických bodů tedy použijeme blokové schéma (3.31) a rozvoje matice podle prvního řádku (3.32). Dostáváme tak determinant v podobě

$$\begin{aligned}
g_3(d_1, d_2) = r_1 S_1(x_0) \Bigg(&(r_2 S_2(\ell - x_0)) \begin{vmatrix} r_2^3 S_2(x_0) & r_1^3 S_1(\ell - x_0) \\ R_2 C_2(x_0) & -R_1 C_1(\ell - x_0) \end{vmatrix} \\
- (r_1 S_1(\ell - x_0)) &\begin{vmatrix} r_2^3 S_2(x_0) & r_2^3 S_2(\ell - x_0) \\ R_2 C_2(x_0) & -R_2 C_2(\ell - x_0) \end{vmatrix} \Bigg) \\
- (r_2 S_2(x_0)) \Bigg(&(r_2 S_2(\ell - x_0)) \begin{vmatrix} r_1^3 S_1(x_0) & r_1^3 S_1(\ell - x_0) \\ R_1 C_1(x_0) & -R_1 C_1(\ell - x_0) \end{vmatrix} \\
- (r_1 S_1(\ell - x_0)) &\begin{vmatrix} r_1^3 S_1(x_0) & r_2^3 S_2(\ell - x_0) \\ R_1 C_1(x_0) & -R_2 C_2(\ell - x_0) \end{vmatrix} \Bigg).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Kritické body budou právě kořeny rovnice $g_3(d_1, d_2) = 0$.
Upravme (5.3) do tvaru

$$A_L r_1 S_1(x_0) = -C_L r_2 S_2(x_0), \tag{5.5}$$

$$A_P r_1 S_1(\ell - x_0) = -C_P r_2 S_2(\ell - x_0), \tag{5.6}$$

$$(\omega_2 - \omega_1)\, r_2 S_2(x_0) C_L + (\omega_2 - \omega_1)\, r_2 S_2(\ell - x_0) C_P = 0, \tag{5.7}$$

$$A_L C_1(x_0) + C_L C_2(x_0) - A_P C_1(\ell - x_0) - C_P C_2(\ell - x_0) = 0. \tag{5.8}$$

Stejným postupem jako v předchozích kapitolách nyní vyjádříme jednotlivé koeficienty. Protože postup je zřetelný z předchozích dvou úloh, popíšeme ho stručněji.

Pokud platí právě jedna z rovností (4.11), pak najdeme pouze triviální řešení.

Pokud platí $S_1(x_0) = S_1(\ell - x_0) = 0$ a $S_2(x_0) \neq 0, S_2(\ell - x_0) \neq 0$, potom $A_P = \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} A_L$ a $C_L = C_P = 0$. Řešení jsou tvaru

$$\begin{aligned}
v_L &= A_L C_1(x),\\
u_L &= -A_L \frac{(b_{22} + d_2 r_1^2)}{b_{21}} C_1(x),\\
v_P &= A_L \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} C_1(\ell - x),\\
u_P &= -A_L \frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)} \frac{(b_{22} + d_2 r_1^2)}{b_{21}} C_1(\ell - x).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Pokud $S_2(x_0) = S_2(\ell - x_0) = 0$, pak

$$\begin{aligned}
v_L &= C_L C_2(x), \\
u_L &= -C_L \frac{(b_{22} + d_2 r_2^2)}{b_{21}} C_2(x), \\
v_P &= C_L \frac{C_2(x_0)}{C_2(\ell - x_0)} C_2(\ell - x), \\
u_P &= -C_L \frac{C_2(x_0)}{C_2(\ell - x_0)} \frac{(b_{22} + d_2 r_2^2)}{b_{21}} C_2(\ell - x).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Vyjádříme si nyní koeficienty A_L, A_P a C_P pomocí C_L pro případ, kdy neplatí žádná z uvažovaných rovností (4.11)

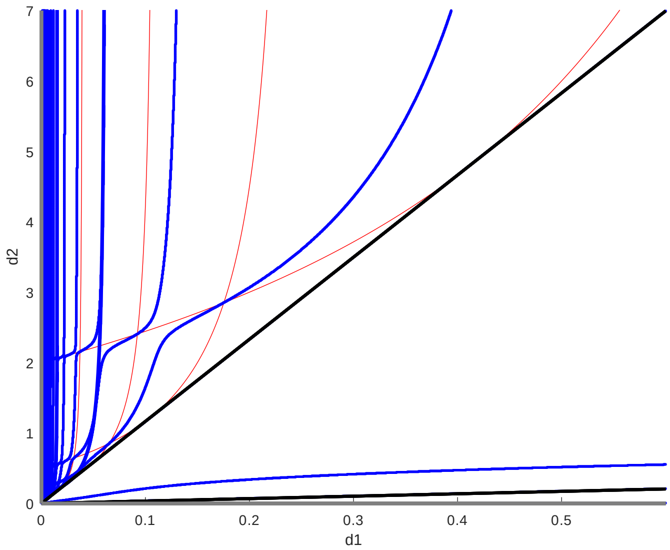
$$\begin{aligned}
A_L &= -\frac{r_2 S_2(x_0)}{r_1 S_1(x_0)} C_L, \\
A_P &= -\frac{r_2 S_2(\ell - x_0)}{r_1 S_1(\ell - x_0)} C_P, \\
C_P &= -\frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} C_L.
\end{aligned}$$

Řešení má tvar

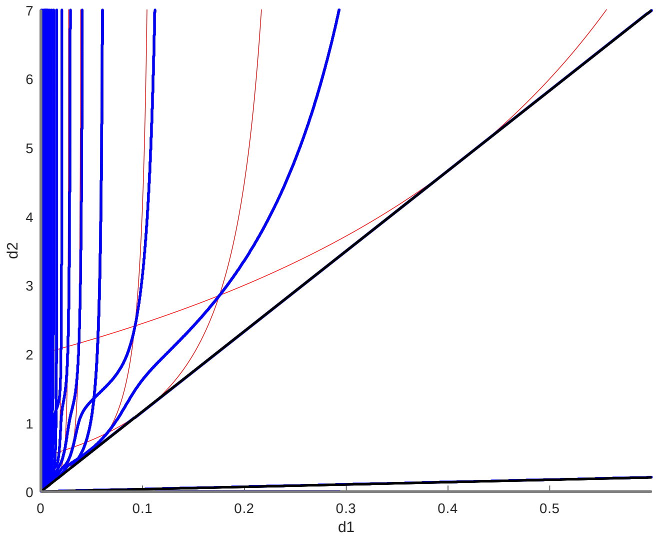
$$\begin{aligned}
v_L(x) &= C_L \left(C_2(x) - \frac{r_2 S_2(x_0)}{r_1 S_1(x_0)} C_1(x) \right), \\
u_L(x) &= -C_L \left(\frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(x) - \frac{r_2 S_2(x_0)}{r_1 S_1(x_0)} \frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(x) \right), \\
v_P(x) &= -C_L \frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} \left(C_2(\ell - x) - \frac{r_2 S_2(\ell - x_0)}{r_1 S_1(\ell - x_0)} C_1(\ell - x) \right), \\
u_P(x) &= C_L \frac{S_2(x_0)}{S_2(\ell - x_0)} \left(\frac{b_{22} + d_2 r_2^2}{b_{21}} C_2(\ell - x) - \frac{r_2 S_2(\ell - x_0)}{r_1 S_1(\ell - x_0)} \frac{b_{22} + d_2 r_1^2}{b_{21}} C_1(\ell - x) \right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Můžeme nyní na Obr. 5.1 a Obr. 5.2 porovnat množiny kritických bodů *úloh s podmínkou pro nulovou derivaci* ve vybraném bodě $x_0 = \frac{3}{4}\pi$. Tento podíl můžeme vyjádřit jako (2.22). Proto se v množině kritických bodů objevují i hyperboly H_k (2.24). Pro koeficient k platí $k = m + n$, kde m, n splňují $x_0 = \frac{n\ell}{m+n}$. V tomto případě tedy $k = 4c, c \in \mathbb{N}$. Jde o případy, které jsme řešili v Sekci 4.2 a na stranách 31, 32. Na Obr. 5.1 si všimněme větve v sektoru *II*. Tato větev někde překročí hranici sektorů *II* a *III* a dostane se tedy do sektoru *III*.

Poznámka 23 *Vidíme rozdíl v existenci větve kritických bodů jdoucí doprava. Pokud se ještě vrátíme k úlohám s překážkou rozebíraným ve třetí kapitole, můžeme si všimnout, že funkce u a v se prohodily vzhledem k existenci větve jdoucí doprava. Větev jdoucí doprava existuje pro úlohu s překážkou pro v a pro úlohu s podmínkou pro derivaci u. V dalších úlohách rozebíraných v této práci tato větev neexistuje. Dále můžeme pozorovat, že všechny další větve se nachází nalevo od obálky hyperbol.*



Obrázek 5.1: **Kritické body úlohy s nulovou derivací pro u.** *Obrázky na této stránce jsou vykresleny pro* $\ell = \pi$ *a* $x_0 = \frac{3}{4}\pi$. *Modře jsou vykresleny kritické body* $g_2(d_1, d_2) = 0$ *pro* g_2 *z* (4.6). *Červeně jsou vykresleny hyperboly* H_n (3.1). *Hyperboly* H_k (2.24) *jsou řešením rovnice* $g_2(d_1, d_2) = 0$. *Proto modré hyperboly* $H_k = H_{4c}, c \in \mathbb{N}$ *překrývají červené hyperboly.*



Obrázek 5.2: **Kritické body úlohy s nulovou derivací pro v.** *Mezi modrými křivkami můžeme rozpoznat i hyperboly* $H_k = H_{4c}, c \in \mathbb{N}$ (2.24), *pro které je řešení této úlohy dokonce spojité. Stejně jako na Obr.* (5.1) *je výskyt těchto hyperbol v množině kritických bodů podmíněn dobře vyjadřitelným místem překážky* (2.22), *jak je popsáno v sekci 2.4, zejména v Poznámce 11.*

Kapitola 6

Shrnutí

V předchozích kapitolách jsme studovali úlohy s různými podmínkami. Našli jsme odpovídající množiny kritických bodů a jim příslušná netriviální řešení. V této kapitole si pro ilustraci některá řešení vykreslíme. Pro úplnost přidáme kritické body a vybraná řešení úlohy s *překážkou pro v*, které ve své práci [1, *str. 52-62*] rozebírá Pavel Kouba.

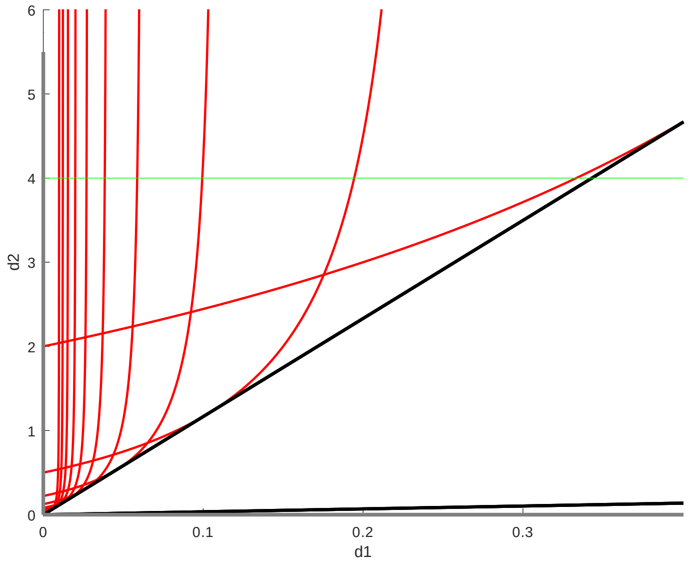
Všechny kritické body, které v této kapitole zmiňujeme, jsou pouze přibližné. Získali jsme je numerickým výpočtem jako kořeny rovnice $g_i(d_1, d_2) = 0$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ v závislosti na úloze. Spojitou oblast parametrů d_1, d_2, tedy první kvadrant, jsme diskretizovali. Nejdříve jsme pro každý parametr určili interval, pro který řešení budeme vykreslovat. Tento interval jsme rozdělili na 1200 bodů a v nich vypočítávali funkční hodnoty funkce g_i. Pro takový počet bodů dokážeme řešení vykreslit dostatečně přesně. Vždy jsme zvolili pevné d_1 nebo d_2 a uvažovali jsme funkci g_i jako funkci jedné proměnné $g_i(d_2)$ nebo $g_i(d_1)$. Protože funkce g_i je spojitá, můžeme body, ve kterých se mění znaménko označit jako kritické body.

Často vykreslujeme řešení v kritických bodech na řezu d_2. Postupujeme tak, že začneme v nejpravějším kritickém bodu a postupujeme doleva. U jednostranných úloh s *překážkou pro u* (*překážkou pro v*) vykreslujeme pouze ta řešení, pro která platí $u(x_0) = 0$, ($v(x_0) = 0$) a vynecháváme řešení, ve kterých je $u(x_0) > 0$ ($v(x_0) > 0$), protože jde o případy, které jsou zároveň řešením úlohy bez překážky.

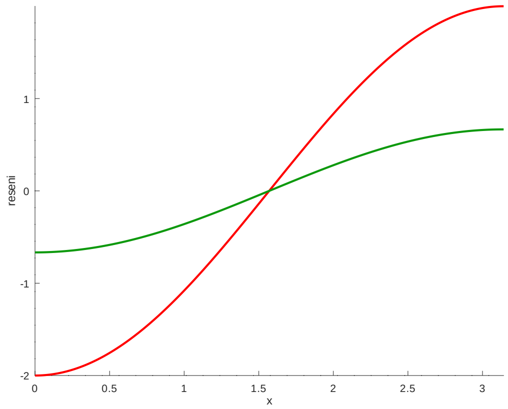
Ve všech grafech řešení vytvořených pomocí *octave* je složka u červená a složka v zelená. Ve druhé sekci této kapitoly počítáme navíc profily řešení i pomocí programu AUTO. Zde má každý obrázek svou vlastní legendu.

6.1 Úloha bez překážky

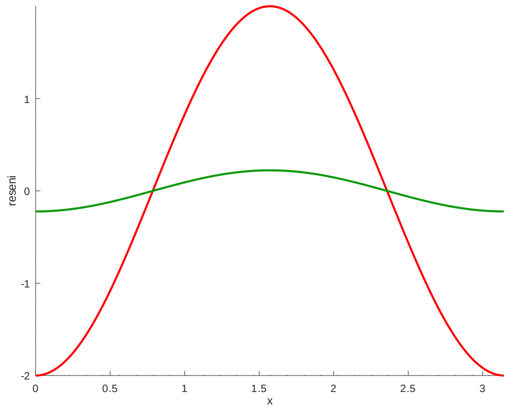
Ve třetí kapitole jsme zmínili, že kritické body *úlohy bez překážky* leží na hyperbolách H_n tvaru (3.1), jak píší ve svých pracích Pavel Kouba [1, str. 9-11] i Monika Pšenicová [2, str. 8-9]. Řešení, která jsou tvaru (3.2), (3.3), (3.4), (3.17) se liší podle toho, v jaké části hyperboly H_n se parametry difúze nachází. V všech čtyřech případech platí, že funkce v je kladným násobkem funkce u. Poznamenejme pro úplnost, že každá hyperbola má pro $d_1 > 0$ i svou druhou větev, která je ale celá pod osou $d_2 = 0$, proto ji neuvažujeme.



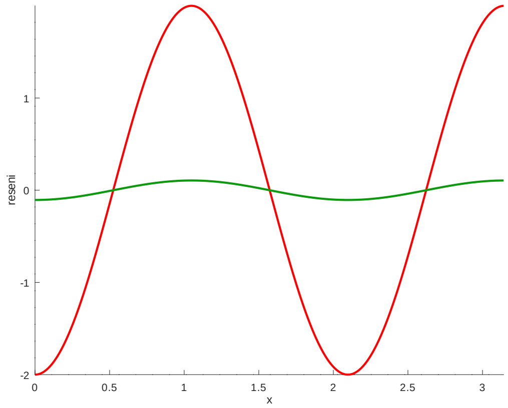
Obrázek 6.1: **Kritické body** (3.1) **úlohy bez překážky (červeně).** *Vykresleno je prvních 10 hyperbol.* $\ell = \pi$.



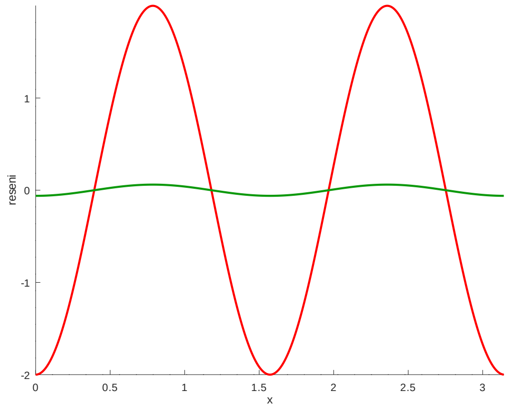
(a) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.33337, 4)$.



(b) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.1945, 4)$.



(c) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.09946, 4)$.



(d) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.05874, 4)$.

Obrázek 6.2: **Profily prostorově nehomogenních řešení (**u **červené,** v **zelené)** *ve vybraných bodech na zvoleném řezu* $d_2 = 4$ *pro úlohu bez překážky.* $\ell = \pi$.

6.2 Úloha s překážkou pro v

Začněme okrajovou úlohou s *překážkou pro* v, kterou jsme v této práci nerozebírali. Pavel Kouba [1, str. 60] ukázal, že množinu kritckých bodů tvoří kořeny rovnice $g_0(d_1, d_2) = 0$, kde

$$g_0(d_1,d_2) = r_1\left(S_1(x_0) + S_1(\ell - x_0)\frac{C_1(x_0)}{C_1(\ell - x_0)}\right) - r_2\frac{R_{1V}}{R_{2V}}C_1(x_0)\left(\frac{S_2(\ell - x_0)}{C_2(\ell - x_0)} + \frac{S_2(x_0)}{C_2(x_0)}\right),$$

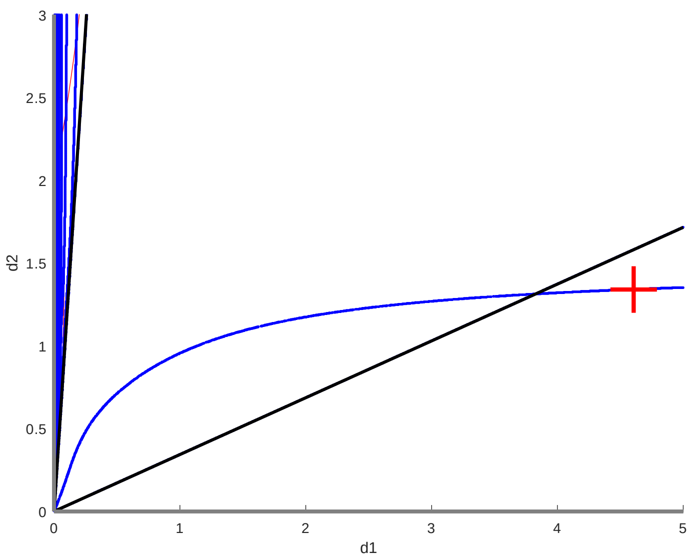
společně s hyperbolami H_n (3.1). V tomto vyjádření značíme

$$R_{1V} = r_1^2 + \frac{b_{11}}{d_1}, \quad R_{2V} = r_2^2 + \frac{b_{11}}{d_1}.$$

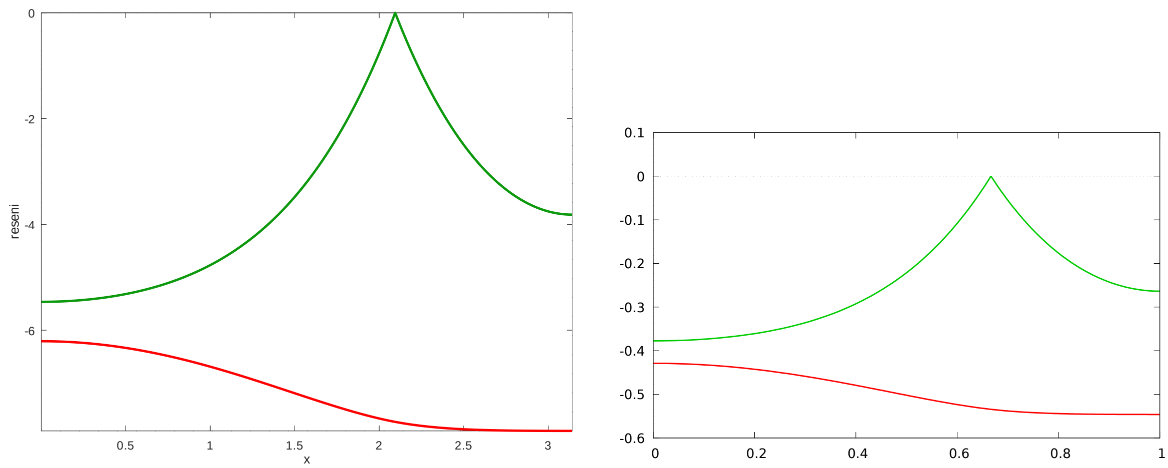
Analytické vyjádření řešení najdeme v diplomové práci Pavla Kouby [1, *str. 58, 60 a 61*].

Do této sekce navíc přidáme pro ilustraci i grafy získané programem AUTO. Můžeme tedy porovnat dva různé postupy. V programu octave numericky hledáme kořeny rovnice $g_0(d_1,d_2) = 0$. Vybereme některé z nich a pomocí analytického vyjádření vykreslíme dvojici řešení (u,v) v příslušném bodě. V programu AUTO proti tomu vždy řešíme okrajovou úlohu prvního řádu pro 4 neznámé funkce a jejich první derivace.

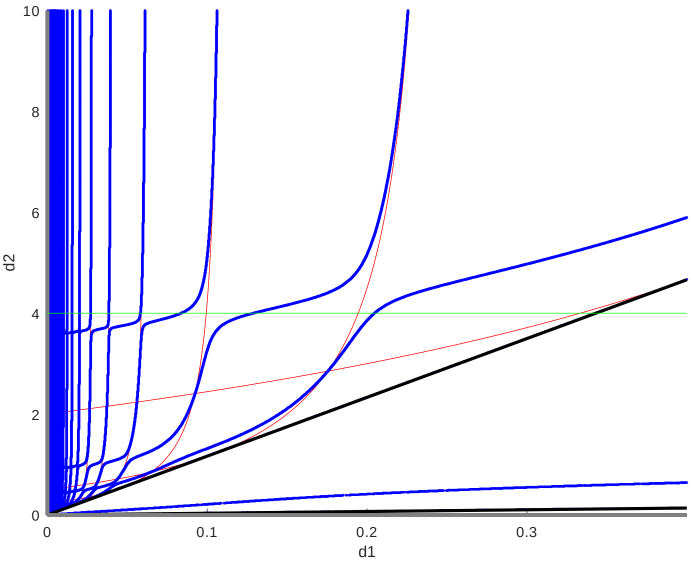
Zvolili jsme překážku v bodě $x_0 = \frac{2}{3}\pi$. Díky symetrii nalezneme stejné kritické body i pro překážku v bodě $x_0 = \frac{1}{3}\pi$



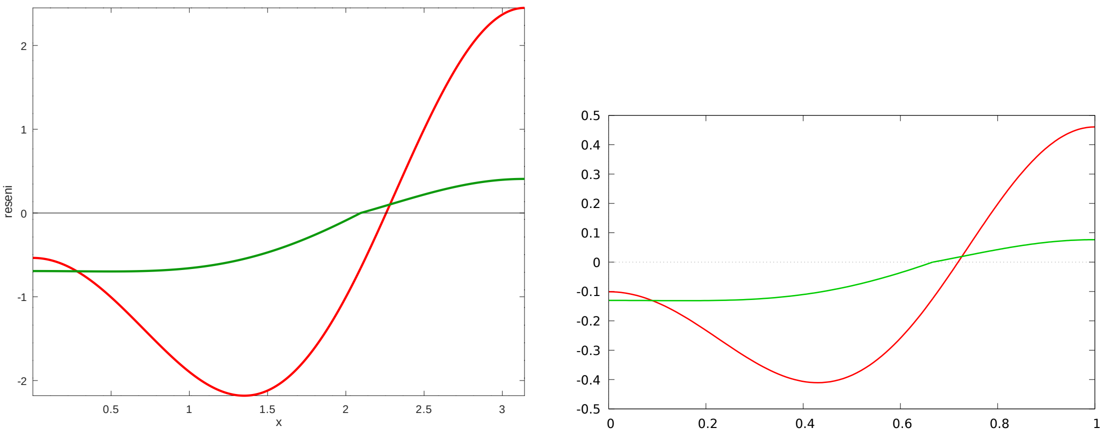
Obrázek 6.3: **Pravá větev kritických bodů *úlohy s překážkou pro* v (modře).** $\ell = \pi, x_0 = \frac{2}{3}\pi$.



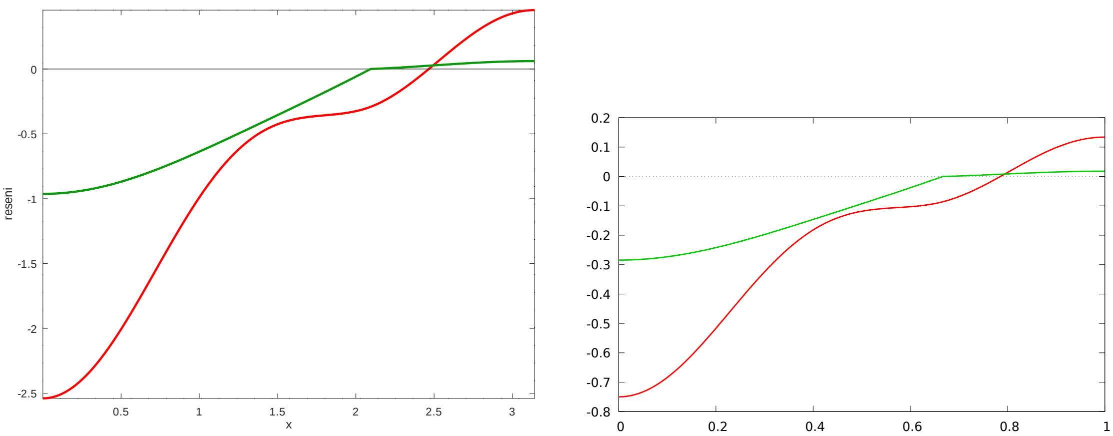
Obrázek 6.4: **Profil řešení v kritickém bodu** $(d_1,d_2) = (4.60610, 1.34)$ **(**u **červené,** v **zelené).** *Tento kritický bod je vyznačen křížkem na Obr. 6.3.* $\ell = \pi, x_0 = \frac{2}{3}\pi$. *Vlevo je profil získaný analyticky tak, jak ho dokázal vyjádřit Pavel Kouba [1, str. 61].*



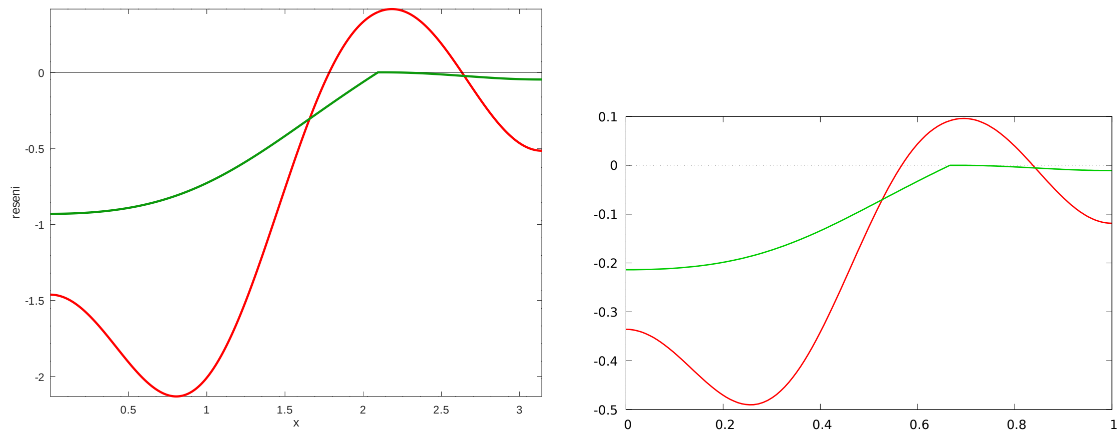
Obrázek 6.5: **Kritické body pro *úlohu s překážkou pro v*.** *Modře jsou vykresleny body splňující $g_0(d_1, d_2) = 0$. Červeně jsou hyperboly H_n (3.1), ve kterých najdeme hladké řešení splňující $v(x_0) > 0$ a které je zároveň řešením úlohy bez překážky. $\ell = \pi, x_0 = \frac{2}{3}\pi$.*



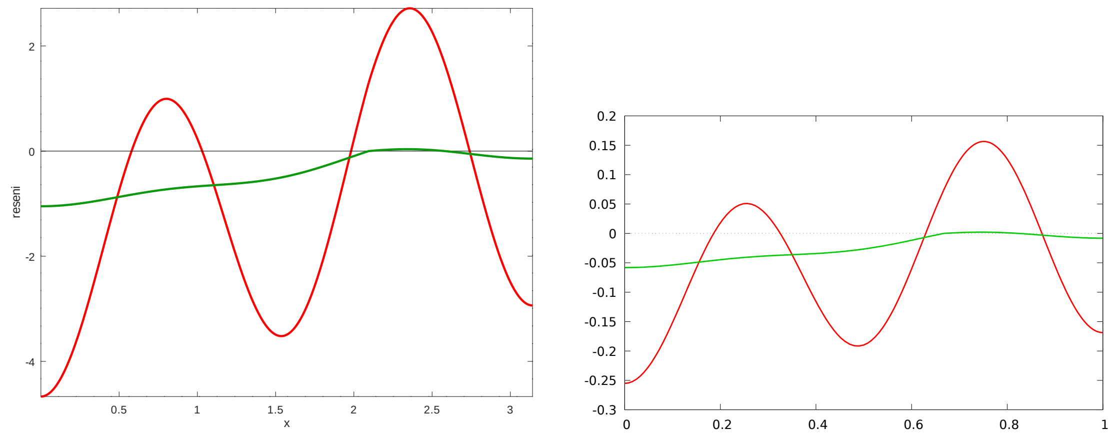
(a) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.20473, 4)$.



(b) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.12922, 4)$.



(c) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.08386, 4)$**.**



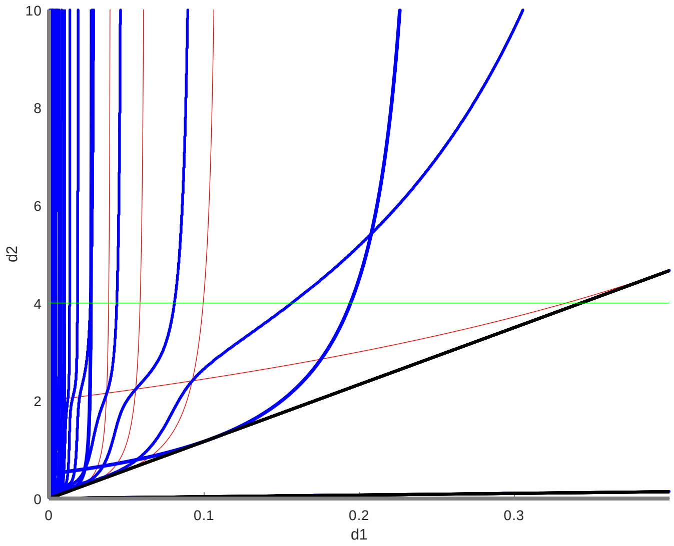
(d) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.05818, 4)$**.**

Obrázek 6.6: **Profily řešení ve vybraných bodech na zvoleném řezu** $d_2 = 4$ **pro *úlohu s překážkou pro*** v **(**u **červené,** v **zelené).** *V levém sloupci jsou profily řešení numericky nalezené pomocí programu Octave 5.1.0, v pravém sloupci pomocí programu AUTO.* $\ell = \pi, x_0 = \frac{2}{3}\pi$.

6.3 Úloha s překážkou pro u

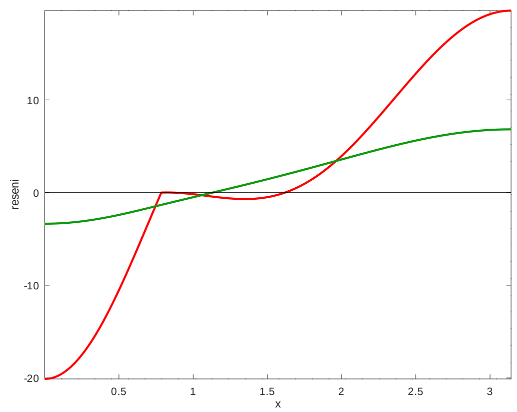
Spočítali jsme, že množina kritických bodů pro *úlohu s překážkou pro u* je tvořena kořeny funkce $g_1(d_1, d_2) = 0$ a hyperbolami (3.1), kde funkce $g_1(d_1, d_2)$ má tvar (3.30). Zvolili jsme $\ell = \pi$ a překážku v bodě $x_0 = \frac{1}{4}\pi$. Připomeňme, že jde o jednostrannou úlohu.

Množinu kritických bodů můžeme rozdělit na 2 typy. V kritických bodech prvního typu je příslušné řešení hladké. Takové kritické body se nacházejí na hyperbolách H_n (3.1). V kritických bodech druhého typu je příslušné řešení nediferencovatelné v bodě x_0, V takovém případě platí $g_1(d_1, d_2) = 0$. Existují ale dvojice parametrů d_1, d_2 splňující $g_1(d_1, d_2) = 0$, ve kterých je řešení opět hladké. Takové dvojice leží na hyperbolách H_n (2.19), kde j, k, n splňují (2.20). Jde tedy o podmnožinu kritických bodů prvního typu. Kritické body obou typů můžeme pozorovat na Obr. 6.7. Kritické body prvního typu jsou zároveň kritickými body *úlohy bez překážky*.

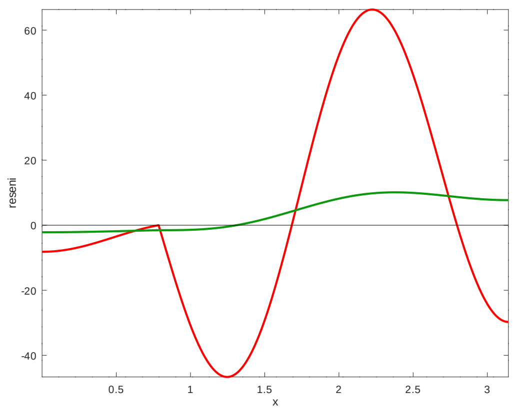


Obrázek 6.7: **Kritické body úlohy s *překážkou pro u*.** *Modře jsou vykresleny body splňující* $g_1(d_1, d_2) = 0$. *Červeně jsou vykresleny hyperboly* H_n (3.1). $\ell = \pi$, $x_0 = \frac{1}{4}\pi$.

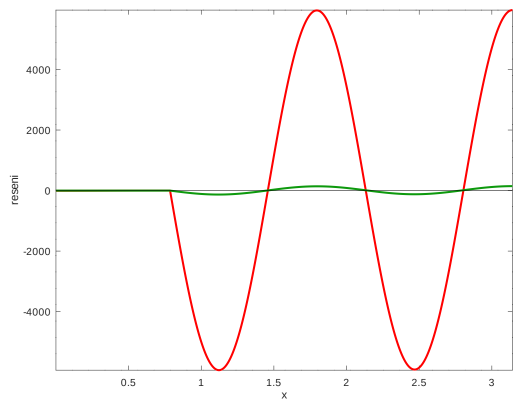
(a) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.1945, 4)$.



(b) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.15666, 4)$.



(c) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.08074, 4)$.



(d) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.04354, 4)$.

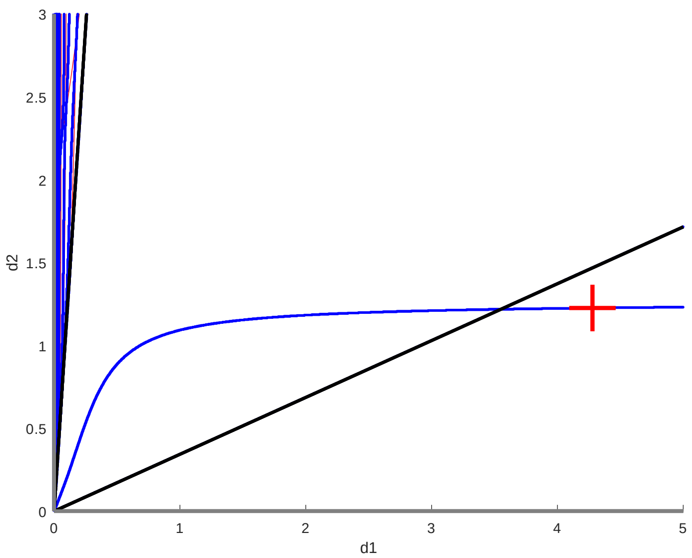
Obrázek 6.8: **Profily řešení ve vybraných bodech na zvoleném řezu** $d_2 = 4$ **pro *úlohu s překážkou pro u*** **(*u* červeně, *v* zeleně).** $\ell = \pi$, $x_0 = \frac{1}{4}\pi$.

6.4 Úloha s nulovou derivací pro u

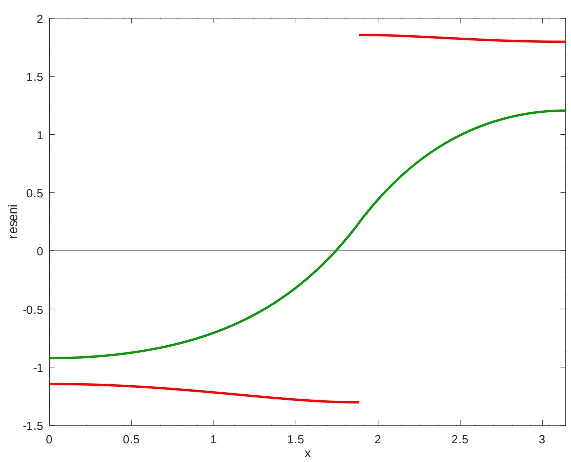
Zvolíme $\ell = \pi$ a $x_0 = \frac{3}{5}\pi$. Kritické body jsou kořeny funkce $g_2(d_1, d_2) = 0$, kde $g_2(d_1, d_2)$ má tvar (4.6).

Rovnost $g_2(d_1, d_2) = 0$ splňují i body ležící na hyperbolách H_k (2.24), kde $k = m+n$, pro které lze x_0 vyjádřit jako $x_0 = \frac{n\ell}{m+n}$, přičemž $k, m, n \in \mathbb{N}$. V závislosti na zvoleném kritickém bodu má příslušné řešení tvar (4.12) nebo (4.13). Toto řešení je v obou složkách spojité. Pokud uvažujeme bod splňující $g_2(d_1, d_2) = 0$, který neleží na žádné z hyperbol H_k, potom funkce u není spojitá a řešení je tvaru (4.16).

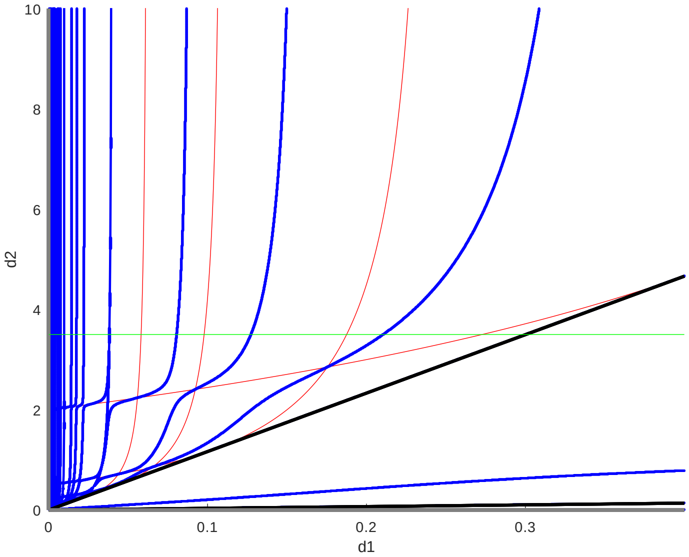
Pro tuto úlohu jsme našli i větev kritických bodů procházející sektory *II* a *III*, jak můžeme pozorovat na Obr. 6.9.



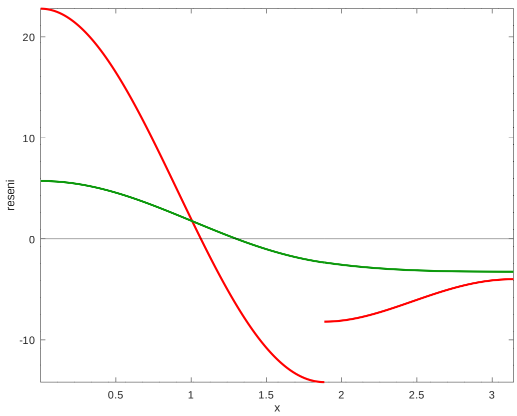
Obrázek 6.9: **Pravá větev kritických bodů *úlohy s podmínkou pro derivaci* u (modře).** *Našli jsme, podobně jako v úloze s překážkou pro v, větev procházející sektory II a III.* $\ell = \pi, x_0 = \frac{3}{5}\pi$.



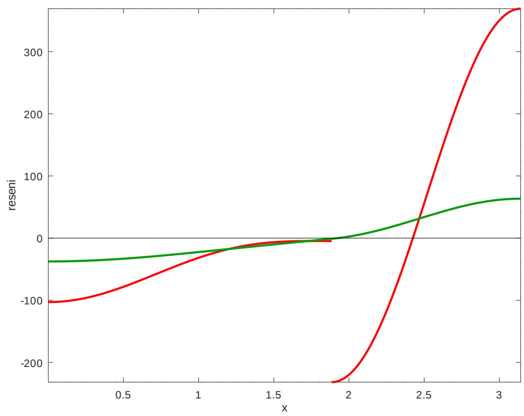
Obrázek 6.10: **Profil řešení v kritickém bodu** $(d_1, d_2) = (4.27858, 1.22608)$ **ležícím na větvi procházející sektory *II* a *III* (u červené, v zelené).** *Tento bod je křížkem vyznačen na Obr. 6.9.* $\ell = \pi, x_0 = \frac{3}{5}\pi$.



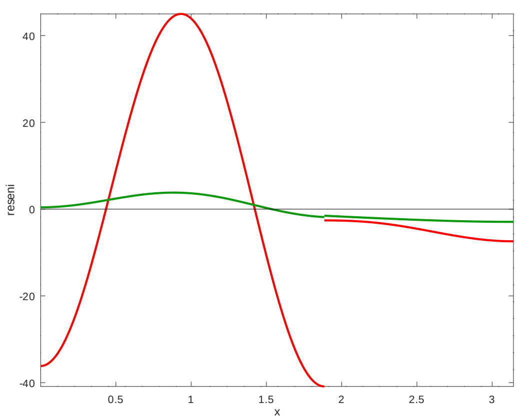
Obrázek 6.11: **Kritické body *úlohy s podmínkou pro derivaci* u (modře).** *Červeně jsou opět znázorněny hyperboly H_n (3.1), které ale obecně nejsou kritickými body úlohy s podmínkou pro derivaci u. $\ell = \pi, x_0 = \frac{3}{5}\pi$.*



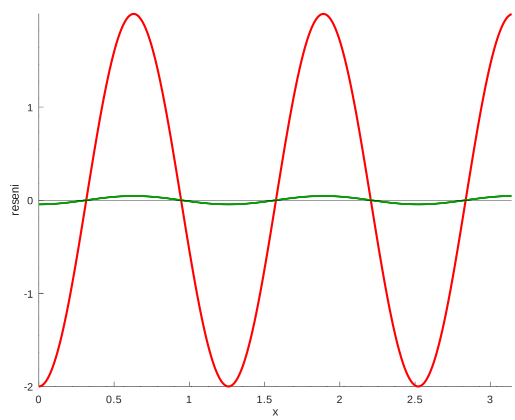
(a) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.21049, 3.5)$.



(b) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.12721, 3.5)$.



(c) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.08041, 3.5)$.



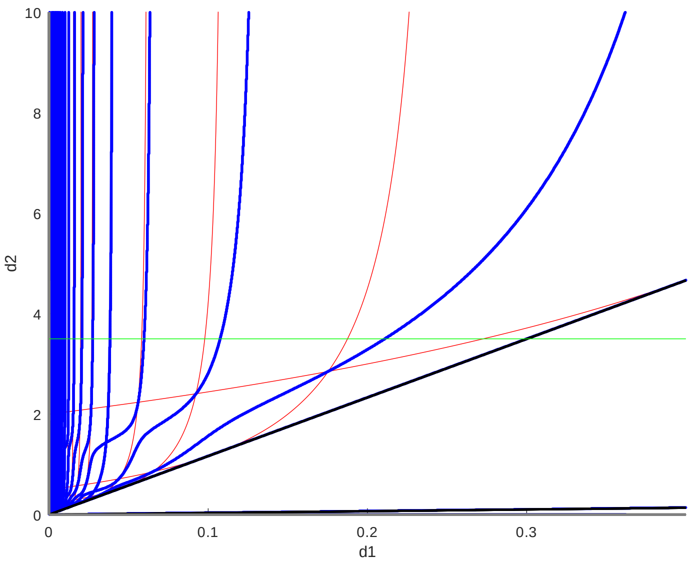
(d) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.03825, 3.5)$.

Obrázek 6.12: **Profily řešení ve vybraných bodech na zvoleném řezu $d_2 = 3.5$ pro *úlohu s podmínkou pro derivaci* u (u červené, v zelené). $\ell = \pi, x_0 = \frac{3}{5}\pi$.**

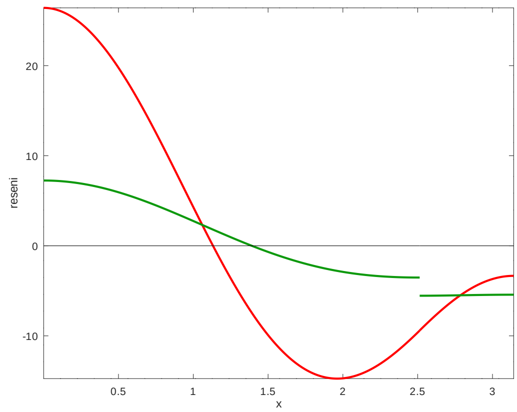
6.5 Úloha s nulovou derivací pro v

Všechny kritické body pro tuto podmínku se nachází pouze v sekotru I. Zvolili jsme $\ell = \pi$ a překážku v bodě $x_0 = \frac{4}{5}\pi$.

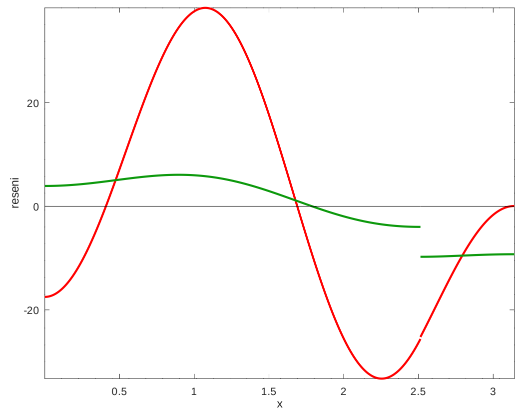
Množina bodů (d_1, d_2), které splňují $g_3(d_1, d_2) = 0$, kde g_3 je tvaru (5.4), je množina kritických bodů. Kritické body ležící na hyperbolách H_k (2.24), kde $k = m+n$, pro které lze x_0 vyjádřit jako $x_0 = \frac{n\ell}{m+n}$, přičemž $k, m, n \in \mathbb{N}$, také splňují rovnost $g_3(d_1, d_2) = 0$. V těchto případech nalezneme spojité řešení tvaru (5.9) nebo (5.10). Pokud uvažujeme bod nenáležící hyperbolám H_k, dostaneme řešení tvaru (5.11), ve kterém je funkce v nespojitá.



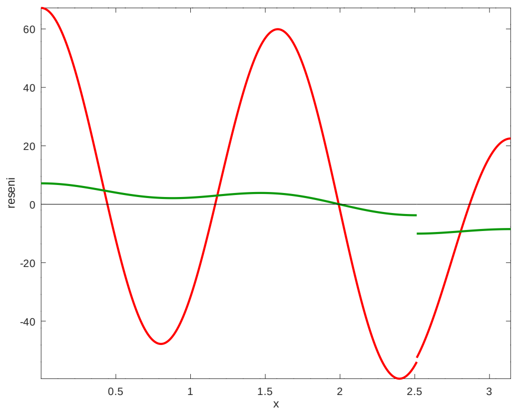
Obrázek 6.13: **Kritické body *úlohy s podmínkou pro nulovou derivaci* v (modře).** *Červeně jsou hyperboly H_n (3.1), které obecně nejsou řešením úlohy s podmínkou pro derivaci v. Jsou zde pouze pro lepší názornost, kde se modré křivky nacházejí. $\ell = \pi, x_0 = \frac{4}{5}\pi$.*



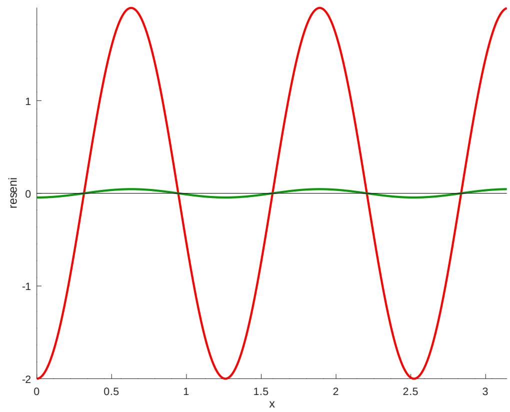
(a) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.21097, 3.5)$.



(b) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.10746, 3.5)$.



(c) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.05962, 3.5)$**.**



(d) (u, v) **pro kritický bod** $(d_1, d_2) = (0.0385, 3.5)$**.**

Obrázek 6.14: **Profily řešení ve vybraných bodech na zvoleném řezu** $d_2 = 3.5$ **pro** ***úlohu s podmínkou pro derivaci*** v **(**u **červené,** v **zelené).** $\ell = \pi, x_0 = \frac{4}{5}\pi$**.**

Kapitola 7

Závěr

V práci jsme matematicky popisovali model dravce a kořisti pomocí soustavy dvou difúzních rovnic s Neumannovými okrajovými podmínkami. Hledali jsme prostorově nehomogenní stacionární řešení linearizované úlohy v závislosti na difúzních paramatrech d_1, d_2. Navíc jsme ve zvoleném bodě intervalu přidávali různá omezení pro funkční hodnoty nebo derivace řešení. Ve všech případech jsme nalezli množinu kritických bodů, pro které existovalo prostorově nehomogenní řešení. V *úloze s překážkou pro v* a v *úloze s podmínkou pro derivaci u* existuje větev kritických bodů, která prochází sektory *II* a *III*. Tato větev se zdá být neomezená pro d_1 a omezená pro d_2. Takovou větev jsme v ostatních úlohách uvažovaných v této práci nenašli. Nalezli jsme také profily prostorově nehomogenních řešení v námi zvolených kritických bodech. Celou prací nás provázela fyzikální představa lišek a hrabošů, která usnadnila porozumění různým podmínkám.

Literatura

[1] Pavel Kouba, *Existence netriviálního řešení pro systémy reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor v závislosti na parametru*, České Budějovice, 2015, diplomová práce (Mgr.), Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Přírodovědecká fakulta.

[2] Monika Pšenicová, *Newtonova okrajová úloha pro systém reakce-difúze typa aktivátor-inhibitor s parametrem*, České Budějovice, 2018, bakalářská práce, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Přírodovědecká fakulta.

[3] Alan Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Philosophical Transactions od the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641., pp. 37-72, 1952.

[4] Milan Kučera, *Reaction-diffusion systems: bifurcation and stabilizing effect of conditions given by inclusions*, Pergamon, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 27, No. 3, pp. 249-260, 1996.

[5] J. Kurzweil, *Obyčejné diferenciální rovnice: Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru*, Praha, 1978, SNTL, 1. vydání, 418 s.

[6] S. Míka, A. Kufner, *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, Praha, 1981, SNTL, 1. vydání, 88 s.