

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Numerické metody řešení algebraických
rovníc



Vypracoval:	Jan Mikulík
Studijní program:	B0114A170003 Matematika pro vzdělávání
Studijní obor:	Matematika pro vzdělávání / Informatika pro vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc. RNDr. Petra Emanovského, Ph.D., a že jsem v seznamu literatury uvedl všechny zdroje, z nichž jsem čerpal.

V Olomouci dne 9. května 2023

.....
Jan Mikulík

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Doc. RNDr. Petru Emanovskému, Ph.D., za všechny cenné rady, připomínky a čas, který mi při tvorbě této práce věnoval. Z celého srdce děkuji své přítelkyni a rodině za trpělivost a podporu během celého studia.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Jan Mikulík
Název práce	Numerické metody řešení algebraických rovnic
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2023
Abstrakt	Tato bakalářská práce se zabývá numerickými metodami řešení algebraických rovnic. Teoretická část je rozdělena do tří částí. V první části jsou představeny základní pojmy z teorie polynomů a funkcí. V druhé části naleznete krátké pojednání o algebraických rovnicích. Třetí část obsahuje popis vymezení a počtu kořenů polynomu. Následně jsou rozebrány jednotlivé numerické metody pro hledání kořenů. Čtvrtá kapitola se skládá z deseti řešených příkladů. Součástí práce je také soubor vytvořený v MS Excel, kde jsou všechny příklady řešeny.
Klíčová slova	numerická metoda, algebraická rovnice, polynom, kořen polynomu
Počet stran	50
Počet volných příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Jan Mikulík
Title	Numerical methods for solving algebraic equations
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.
The year of presentation	2023
Abstract	This bachelor's thesis deals with numerical methods for solving algebraic equations. The theoretical part is divided into three parts. The first part introduces basic concepts from the theory of polynomials and functions. The second part provides a brief discussion of algebraic equations. The third part describes the determination and number of roots of a polynomial, followed by an analysis of individual numerical methods for finding roots. The fourth chapter consists of ten solved examples. The thesis also includes a file created in MS Excel, in which all examples are solved.
Keywords	numerical method, algebraic equation, polynomials, root of the polynomial
Number of pages	50
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod	7
1 Základní pojmy	8
1.1 Polynomy	8
1.2 Funkce	14
2 Algebraické rovnice	15
3 Numerické metody	17
3.1 Vymezení a počet kořenů	17
3.2 Numerické metody pro hledání reálných kořenů	19
3.2.1 Metoda bisekce	19
3.2.2 Metoda regula falsi	21
3.2.3 Metoda sečen	23
3.2.4 Newtonova metoda	25
3.2.5 Metoda prosté iterace	27
3.3 Numerické metody pro hledání imaginárních kořenů	28
3.3.1 Newtonova metoda	28
3.3.2 Bairstowova metoda	29
4 Příklady	31
Závěr	49
Literatura	50

Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou numerické metody řešení algebraických rovnic. Má jít o shrnutí několika často používaných metod společně se sbírkou řešených příkladů. Cílem je vytvořit text vhodný především pro studenty, ve kterém naleznou základní přehled týkající se dané problematiky. Není kladen důraz na teoretické odvozování jednotlivých metod, ale především na jejich praktické použití.

Teoretická část se skládá ze tří kapitol. V první se zavádějí základní pojmy z oblasti polynomů a funkcí. Tyto mají posloužit především jako sjednocení terminologie a uvědomění si vlastností, které se při řešení vhodně využívají. V druhé kapitole je zaveden pojem algebraické rovnice a krátké pojednání o něm. Třetí kapitola je již věnována samotnému řešení pomocí numerických metod. Nejprve je vysvětleno, jak určit počet (reálných) kořenů polynomu a taky vymezení intervalu, na kterém leží. Následně, v druhé a třetí části, jsou již představeny konkrétní numerické metody pro hledání těchto kořenů. Každá z nich je doplněna o jeden řešený příklad, na kterém je ukázáno praktické použití v MS Excelu.

Praktická část je obsažena ve čtvrté kapitole. V ní čtenář nalezne sbírku řešených příkladů kombinující poznatky z teoretické části. Každý příklad je (jakožto i příklady ilustrační z třetí kapitoly) doplněn o samostatný list v excelovém souboru, který naleznete na přiloženém CD.

Kapitola 1

Základní pojmy

V první kapitole budeme definovat základní pojmy, na které se budeme následně odkazovat. Zároveň zmíníme konkrétní věty a tvrzení, z nichž vycházíme při řešení algebraických rovnic i u konkrétních numerických metod. Kapitola je rozdělena do podkapitol, které nám poskytnou stručné shrnutí pojmů nejdříve z algebry a poté z matematické analýzy. Oba tyto přístupy budeme při řešení konkrétních příkladů vhodně kombinovat.

1.1 Polynomy

S polynomy se setkávají studenti již na základní škole, aniž by podrobněji zkoumali jejich vlastnosti. Právě ty nám při hlubším studiu ukazují spoustu možností, jak s polynomy pracovat a co všechno o nich můžeme říct po pouhém prvním pohledu. Právě tímto se v následujícím odstavci budeme zabírat. Níže uvedené věty nebudeme v tomto textu dokazovat. V případě zájmu si může student důkaz jednotlivých vět vyzkoušet v rámci cvičení. Správnost si může ověřit např. v (Krutský, 1998).

Definice 1.1.1

Funkci $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in T$, $a_n \neq 0$, nazveme *polynom jedné proměnné nad tělesem T* . Čísla a_0, a_1, \dots, a_n nazýváme *koefficienty polynomu*. Jednotlivé polynomy budeme značit $f(x)$, $g(x)$, atd. Přírozené číslo n nazveme *stupeň polynomu*, zapisujeme $\text{st}f(x) = n$.

Tělesem T zmíněným v první definici budeme vždy rozumět *číselné těleso*.

Definice 1.1.2 (Marvan, 2001)

Nechť jsou dány polynomy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ nad číselným tělesem T .

- Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ se rovnají, $f(x) = g(x)$, právě když platí $f(a) = g(a) \forall a \in T$.
- Součet polynomů $f(x)$ a $g(x)$ je polynom $f(x) + g(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$, kde $c_i = a_i + b_i$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Platí $k = \text{st}(f(x) + g(x)) = \max\{\text{st}f(x), \text{st}g(x)\}$.

- Součin polynomů $f(x)$ a $g(x)$ je polynom $f(x) \cdot g(x) = k_p x^p + k_{p-1} x^{p-1} + \dots + k_1 x + k_0$, kde $p = \text{st}f(x) + \text{st}g(x)$ a $c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$, pro $k = 0, 1, \dots, p$.

Všechny následující definice a věty kapitoly 1.1 vycházejí z (Krutský, 1998).

Věta 1.1.1

Polynomy nad číselným tělesem T tvoří obor integrity $(T[x], +, \cdot)$ polynomů jedné proměnné x (nad T).

Dělitelnost a vlastnosti kořenů

Nyní známe definici polynomu a víme, že polynomy, se kterými budeme pracovat, tvoří obor integrity (spolu s operacemi sčítání a násobení polynomů). Student si může sám v rámci cvičení ověřit, že takto vytvořená struktura opravdu oborem integrity je. V následující podkapitole si stručně rozebereme, kdy je polynom *dělitelný* jiným polynomem a poté se zaměříme na konkrétní vlastnosti jeho kořenů. Ty se nám můžou při řešení algebraických rovnic hodit, pokud budeme například chtít nějaké kořeny odhadnout.

Definice 1.1.2

Mějme polynomy $f(x), g(x) \in T[x]$. O těchto polynomech řekneme, že $f(x)$ *dělí* $g(x)$, právě když existuje polynom $h(x) \in T[x]$, pro který platí $g(x) = f(x) \cdot h(x)$. Fakt, že polynom $f(x)$ dělí polynom $g(x)$, zapisujeme symbolicky $f(x) \mid g(x)$.

Věta 1.1.2

Nechť $f(x), g(x)$ jsou polynomy z $T[x]$, přičemž $g(x)$ je nenulový a platí $f(x) \mid g(x)$. Potom $\text{st}f(x) \leq \text{st}g(x)$.

Na tomto místě připomenu tzv. *Euklidův algoritmus*. Je možné, že se s ním studenti setkali již při dřívějším studiu. Tento algoritmus slouží k nalezení největšího společného dělitele, dále jen NSD. Tento algoritmus lze aplikovat nejen na čísla, ale stejným způsobem i na polynomy. Praktické využití tohoto algoritmu naleznete níže v pojednání o *vícenásobných kořenech*.

Definice 1.1.3

Mějme číselné těleso T a čísla $a, b \in T$, přičemž $b \neq 0$ a $|b| \leq |a|$. Provedeme-li postupně dělení se zbytkem za předpokladu, že $r_i \neq 0$ pro $i = 0, 1, \dots, k$ a $r_{k+1} = 0$, získáme následující soustavu vztahů:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1; |r_1| < |b| \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2; |r_2| < |r_1| \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3; |r_3| < |r_2| \\ &\dots \\ r_{k-3} &= r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}; |r_{k-1}| < |r_{k-2}| \\ r_{k-2} &= r_{k-1} \cdot q_k + r_k; |r_k| < |r_{k-1}| \\ r_{k-1} &= r_k \cdot q_{k+1} + r_{k+1}; r_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Postup popsany výše uvedenými formulami se nazývá *Euklidův algoritmus*, nebo také algoritmus postupného dělení. Pro největší společný dělitel dvou čísel a, b tedy platí $\text{NSD}(a, b) = r_k$.

Největším společným dělitelem dvou čísel je tedy poslední nenulový zbytek v jejich postupném dělení.

Pro zbytek této práce je důležitým pojmem *kořen polynomu*, který s dělitelností úzce souvisí. Jejich vzájemný vztah určuje tzv. *Bezoutova věta*, kterou vzápětí vyslovíme.

Definice 1.1.4

Prvek $c \in T' \supseteq T$, kde T' je nadtělesem tělesa T , nazveme *kořen polynomu* $f(x) \in T[x]$, právě když platí $f(c) = 0$.

Věta 1.1.3 (Bezoutova věta)

Nechť je dán nenulový polynom $f(x) \in T[x]$ a prvek $c \in T$. Takový prvek c je *kořenem polynomu* $f(x)$, právě když platí $(x - c) \mid f(x)$.

Věta 1.1.4

Mějme polynom $f(x) \in T[x]$. Pokud je prvek c jeho kořenem, pak lze tento polynom rozložit následujícím způsobem: $f(x) = (x - c) \cdot g(x)$, přičemž $\text{st} f(x) = \text{st} g(x) + 1$.

Definice 1.1.5

Lineární polynom $(x - c)$ popsany ve větě výše nazýváme *kořenový činitel příslušný ke kořeni* c .

Teď už máme představu o tom, co znamená pojem *kořen polynomu*. Možná je viditelná souvislost mezi *kořenem polynomu* a *řešením rovnice*, alespoň tak, jak to intuitivně vnímáme na základě toho, co je známo ze základní a střední školy. Všechno ještě blíže specifikujeme a definujeme v druhé kapitole. Nyní si uvedeme několik vět, které pojednávají o vlastnostech kořenů. Nejdříve ovšem budeme potřebovat jeden pojem, kterým je *derivace polynomu*.

Definice 1.1.6

Mějme polynom n -tého stupně $f(x)$ nad T , kde $n \in \mathbb{N}$. Tento polynom je ve tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. *Derivací polynomu* $f(x)$ rozumíme polynom $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1$.

Definice 1.1.7

Nechť je dán polynom $f(x) \in T[x]$ a přirozené číslo k . Prvek $c \in T' \supseteq T$, kde T' je nadtělesem tělesa T , nazveme *k -násobný kořen polynomu* $f(x)$, jestliže platí: $(x - c)^k \mid f(x) \wedge (x - c)^{k+1} \nmid f(x)$.

Věta 1.1.5

Je-li prvek $c \in T$ k -násobným kořenem nenulového polynomu $f(x) \in T[x]$ stupně alespoň 1, pak pro $k > 1$ je také $(k - 1)$ -násobným kořenem první derivace $f'(x)$ daného polynomu.

Věta 1.1.6

Prvek $c \in T$ je k -násobným kořenem polynomu $f(x) \in T[x]$ stupně alespoň 1, právě když je zároveň kořenem polynomů $f'(x)$, ..., $f^{(k-1)}(x)$ a není kořenem polynomu $f^{(k)}(x)$.

Věta 1.1.7

Má-li nenulový polynom $f(x) \in T[x]$ alespoň jeden vícenásobný kořen, pak jsou polynomy $f(x)$ a $f'(x)$ soudělné.

Věta 1.1.8

Je-li polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ soudělný se svou první derivací, pak má alespoň jeden vícenásobný kořen.

Věta 1.1.9

Nechť $f(x)$ je polynom stupně alespoň 1 nad tělesem \mathbb{C} . Potom lze najít polynom $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ takový, že má stejné kořeny jako $f(x)$, ale samé jednoduché.

Díky výše uvedeným větám získáváme návod, jak takový polynom $g(x)$ najít. Této metodě se říká *odstranění vícenásobných kořenů*. K nalezení takového polynomu nám stačí dva kroky:

- Nalezneme největšího společného dělitele $D(x)$ polynomů $f(x)$ a $f'(x)$. K tomuto využíváme Eukleidův algoritmus zmíněný výše.
- Provedeme dělení $f(x) : D(x) = g(x)$. Takto získaný polynom $g(x)$ má tedy stejné kořeny jako $f(x)$, ale samé jednoduché.

Tímto postupem se můžeme elegantně zbavit vícenásobnosti a hledat kořeny polynomu nižšího stupně.

Definice 1.1.8

Těleso T nazveme *algebraicky uzavřeným*, právě když má každý polynom $f(x) \in T[x]$ stupně alespoň 1 v tomto tělese alespoň jeden kořen.

Pojem *algebraicky uzavřeného tělesa* potřebujeme k vyslovení následující věty. Jde o tzv. *Základní větu algebry* a jde o jeden z nejpodstatnějších algebraických pojmů. K její formulaci můžeme využít čtyři ekvivalentní výroky. Dále je ve větě zmíněno těleso komplexních čísel, znalost této algebraické struktury předpokládám. Pro zájemce o nahlédnutí do různých důkazů této věty doporučuji (Čechová, 2013).

Věta 1.1.10 (Základní věta algebry)

- Každý polynom s komplexními koeficienty stupně alespoň 1 má alespoň jeden komplexní kořen.
- Každý polynom $f(x)$ nad tělesem komplexních čísel stupně alespoň 1 má v \mathbb{C} rozklad tvaru $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$, kde $a \neq 0$ a c_1, c_2, \dots, c_n jsou kořeny polynomu.
- Ireducibilní polynomy v $\mathbb{C}[x]$ jsou právě polynomy stupně 1.
- Těleso komplexních čísel je algebraicky uzavřené.

Krátce si připomeňme jeden pojem z oboru komplexních čísel. Komplexní číslo můžeme psát ve tvaru $z = a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla a i je tzv. imaginární jednotka. Číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu z je číslo $\bar{z} = a - bi$. Tento pojem zmiňuji kvůli jedné vlastnosti. Pokud má totiž polynom nad reálnými čísly komplexní kořen z , pak je jeho kořenem i komplexní číslo \bar{z} . Z toho můžeme odvodit také, že počet imaginárních kořenů daného polynomu je vždy sudý. A zároveň pokud je polynom lichého stupně, pak musí mít alespoň jeden kořen reálný.

Na závěr se speciálně podíváme ještě na polynomy s celočíselnými koeficienty.

Věta 1.1.11 (o racionálních kořenech)

Nechť je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ polynom stupně alespoň jedna, jehož všechny koeficienty jsou celá čísla. Nechť je dále číslo $r = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla, $q \neq 0$, kořenem polynomu $f(x)$. Potom platí $p \mid a_0$, $q \mid a_n$. Dále platí $(p - cq) \mid f(c)$, kde c je libovolné celé číslo a $f(c) \neq 0$. Občas se tato podmínka uvádí ještě ve speciálních tvarech $(p - q) \mid f(1)$, resp. $(p + q) \mid f(-1)$, pokud $f(1) \neq 0$, resp. $f(-1) \neq 0$.

Hornerovo schéma

Závěrem první kapitoly se podívejme blíže na *Hornerovo schéma*. Jde o algoritmus pojmenovaný po W. G. Hornerovi, který jej na začátku 19. století popsal. Jedná se o efektivní způsob, jak provádět nejen dělení polynomů (ovšem pouze ve specifickém tvaru), ale také zjišťování hodnoty polynomu v daném bodě.

Věta 1.1.12

Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně alespoň 1 nad komutativním tělesem T , nechť $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ je podíl a r je zbytek po dělení polynomu $f(x)$ polynomem $(x - c)$, kde $c \in T$. Pak platí: $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$, ..., $b_0 = a_1 + cb_1$, $r = a_0 + cb_0$. Je-li $r = 0$, pak c je kořenem polynomu.

Takto popsaný výpočet můžeme uspořádat do tabulky následujícím způsobem.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
c		cb_{n-1}	cb_{n-2}	...	cb_2	cb_1	cb_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_1	b_0	$r = f(c)$

Příklad

S použitím Hornerova schématu vydělte polynom $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ polynomem $(x - 1)$.

	1	-5	8	-4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0

Pomocí předchozí věty vytvoříme tabulku a vidíme, že podíl zadaných polynomů je $x^2 - 4x + 4$ a zbytek $r = f(1) = 0$, tedy 1 je kořenem polynomu $f(x)$.

Cvičení

1. Určete největší společný dělitel polynomů $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ a $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$.
2. Najděte kořeny polynomu $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$. Použijte znalosti z věty o racionálních kořenech.
3. Rozložte polynom $2x^3 + 17x^2 + 40x + 16$ na kořenové činitele. Alespoň jeden z kořenů je celočíselný.

4. Odstraňte vícenásobné kořeny polynomu $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.
5. Najděte kořeny polynomu $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72$ víte-li, že má jeden kořen trojnásobný a jeden dvojnásobný.
6. Pomocí Hornerova schématu vydělte polynom $4x^5 + 8x^4 + 19x^3 - 29x^2 + 18x + 18$ lineárními polynomy $x - 1$, $x + 1$ a $x - 3$. Je některý z nich kořenovým činitelem zadaného polynomu?

1.2 Funkce

Podkapitola 1.2 shrnuje nejzákladnější pojmy vztahující se k matematické analýze, které budou pro nás dále potřebné. Smyslem je zamyslet se nad tím, jaká je souvislost mezi kořenem polynomu a nulovým bodem funkce. Jistě vás napadne, že polynomiální funkce nabývá hodnoty 0 právě v bodech, jež jsou kořeny daného polynomu. Níže uvedené definice slouží především k pochopení Bolzano-Cauchyho věty, která se využívá např. při numerické metodě půlení intervalu (viz 3.2.1).

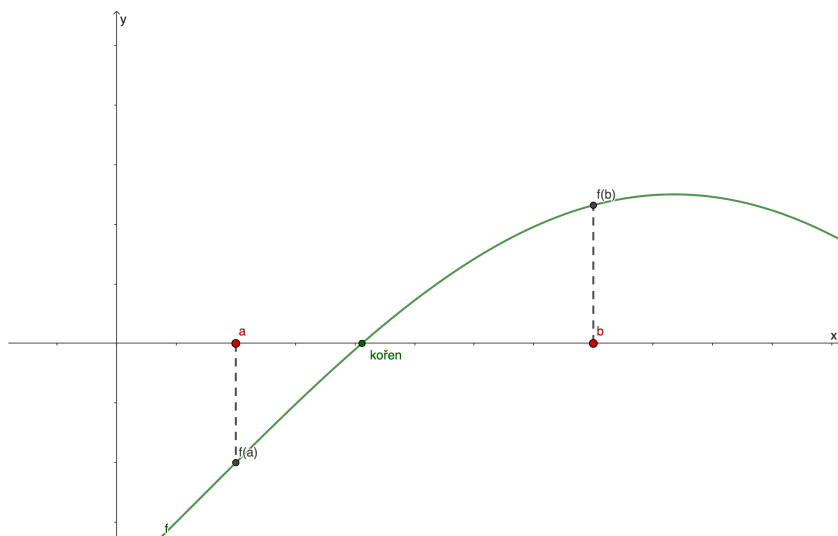
K vyslovení věty v této podkapitole se předpokládá znalost základních matematických pojmů, jako je třeba funkce. Zároveň nebudeme popisovat pojmy jako je definiční obor, vlastnosti funkcí, atd. Prostor věnujeme pouze tomu, co je nutně potřeba znát k řešení algebraických rovnic.

Formulace nadcházející věty vychází z (Trávníček, 2017).

Věta 1.2.1 (Bolzano-Cauchyho)

Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ takové, že $f(\xi) = 0$.

Hlavní myšlenka spočívá v tom, že pokud stanovíme interval, o kterém víme, že v jednom krajním bodě se funkce nachází pod osou x a v druhém krajním bodě je nad osou x , tak díky její spojitosti musí někde mezi těmito body osu x (alespoň jednou) protnout. Právě tento bod nabývá hodnoty $y = 0$, a tedy je kořenem polynomu, kterým je funkce zadána. V našem případě se budeme zabývat pouze funkcemi polynomiálními. Výhodou je, že takové funkce jsou spojitě vždy.



Obrázek 1.1

Kapitola 2

Algebraické rovnice

Ve druhé kapitole zavedeme základní pojmy z oblasti algebraických rovnic. Všechny tři uvedené definice i věta vycházejí z (Krutský, 1998).

Definice 2.1

Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n , kde $a_n \neq 0$. Algebraickou rovnicí stupně n rozumíme rovnici ve tvaru $f(x) = 0$.

Řešit algebraickou rovnicí $f(x) = 0$ vlastně znamená nalézt všechny kořeny polynomu $f(x)$. Víme, že to jsou všechny takové prvky c , pro které platí $f(c) = 0$. Všechny tyto prvky potom nazveme řešením dané rovnice. Rovnice nemusí být vždy zadána s 0 na jedné straně, ale obecněji $g(x) = h(x)$. Jelikož lze takovou rovnici vždy převést na tvar $(f(x) =) g(x) - h(x) = 0$, můžeme zápis $f(x) = 0$ považovat za tzv. obecný tvar algebraické rovnice.

Pokud budeme mluvit o rovnicích, nebudeme x nazývat proměnnou, nýbrž neznámou. Abychom mohli zavést pojem *řešitelnosti algebraických rovnic*, potřebujeme definovat binomické rovnice.

Definice 2.2

Rovnice tvaru $x^n - a = 0$, kde $a \in T$, $a \neq 0$, $n \geq 1$ se nazývá binomická rovnice. Řešení rovnice se nazývá n -tá odmocnina z a .

Tyto rovnice lze řešit pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, tedy do libovolného stupně, a v oboru komplexních čísel mají vždy právě n různých řešení. Rovnice $x^n - 1 = 0$ má v komplexních číslech těchto n řešení $\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}$, pro $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Definice 2.3

Nechť $f(x)$ je nenulový polynom nad tělesem $T \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že rovnice $f(x) = 0$ je algebraicky řešitelná, právě když existuje konečná posloupnost binomických rovnic $y^{n_1} - b_1 = 0$, $y^{n_2} - b_2 = 0$, ..., $y^{n_k} - b_k = 0$ taková, že

- koeficient i -té rovnice b_i , $i = 1, 2, \dots, k$, je prvek, který vznikne provedením konečného počtu racionálních operací na koeficienty polynomu $f(x)$ a řešení předcházejících rovnic
- každé řešení rovnice $f(x) = 0$ určíme provedením konečného počtu racionálních operací na koeficienty polynomu $f(x)$ a na řešení rovnic výše.

Posloupnost binomických rovnic se nazývá *řetězec algebraické řešitelnosti* rovnice $f(x)=0$.

Zmiňované racionální operace jsou: $+$, $-$, \cdot a $:$.

Věta 2.1

Algebraicky řešitelná je každá algebraická rovnice stupně čtyři a nižšího.

Často musíme hledat řešení algebraických rovnic vyšších stupňů a , dle znění věty výše, s algebraickou řešitelností zde nepochodíme. Ačkoliv třeba existují speciální typy rovnic, pro které máme univerzální řešení i při vyšším stupni, není to dostatečné. Dále můžeme využívat poznatků z první kapitoly a danému polynomu odstranit vícenásobné kořeny, případně najít jeho racionální kořeny, ani to však nemusí stačit. Jednou z možností, jak tento problém řešit jsou numerické metody řešení algebraických rovnic. Těm se budeme věnovat ve zbytku textu. Obvykle probíhá toto řešení ve dvou krocích. Odstranění vícenásobných kořenů a určení intervalů, ve kterých leží právě jeden hledaný kořen (kapitola 3.1) a aproximace onoho kořenu (kapitola 3.2).

Kapitola 3

Numerické metody

3.1 Vymezení a počet kořenů

V této podkapitole popíšu možnosti, jak při hledání kořenů polynomu vymezi intervaly, ve kterých tyto kořeny leží a jak určit jejich počet. Tyto metody představují efektivní způsob, jak při určování kořenů začít. Hned následující věta jasně a jednoduše udává, kde se kořeny vyskytují.

Věta 3.1.1 (Horová, 2004)

Nechť $A = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$, $B = \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|)$, kde a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $a_0 a_n \neq 0$, jsou koeficienty polynomu $f(x) \in T[x]$. Pak pro všechny kořeny ξ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, polynomu f platí:

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_0|}$$

Poznámka

Nechť c_1, \dots, c_m je posloupnost reálných čísel různých od nuly.

Řekneme, že pro dvojici c_k, c_{k+1} nastává *znaménková změna*, pokud $c_k c_{k+1} < 0$.

Řekneme, že dvojice c_k, c_{k+1} *zachovává znaménko*, jestliže $c_k c_{k+1} > 0$.

Definice 3.1.1 (Horová, 2004)

Posloupnost reálných polynomů $P = P_0, P_1, \dots, P_m$ se nazývá *Sturmovou posloupností* příslušnou polynomu P , jestliže:

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0 , pak $\text{sign}P_1(\xi) = -\text{sign}P'_0(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m-1$, $P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0$, jestliže α je reálný kořen polynomu P_i .
- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

První podmínku můžeme splnit pomocí metody odstranění vícenásobných kořenů, tedy vydělením polynomu P největším společným dělitelem polynomů P a P' (viz str. 12).

Uvedu nyní postup, jak tedy *Sturmovu posloupnost* vytvořit. Je dán polynom P stupně n , jehož všechny reálné kořeny jsou jednoduché (pokud by nebyly, lze řešit, jak je psáno výše).

Položme $P_0(x) = P(x)$ a $P_1(x) = -P'(x)$. Další polynomy P_{i+1} získáme dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i . Takový polynom P_{i+1} je zbytek po dělení s opačným

znaménkem. Lze vidět jistou souvislost s Euklidovým algoritmem. Protože stupně polynomů každým krokem klesají, musí tento algoritmus skončit nejvýše po n krocích. Poslední polynom v sestrojené posloupnosti je tedy zároveň největším společným dělitelem polynomů P_0 a P_1 . Jelikož máme splněnou podmínku jednoduchosti reálných kořenů polynomu P , pak P a P' nemají žádné společné reálné kořeny, tedy P_m nemá reálné kořeny.

Následující věta nám ukazuje praktické využití *Sturmovy posloupnosti* k nalezení intervalů, ve kterých leží reálné kořeny zadaného polynomu.

Věta 3.1.2 (Sturmova) (Horová, 2004)

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Věta 3.1.3 (Budán-Fourierova) (Budán-Fourier theorem)

Počet kořenů algebraické rovnice $f(x) = 0$ ležících v intervalu (a, b) , kde $a < b$, je roven (nebo o sudé číslo menší) číslu $\tau = t_1 - t_2$, kde t_1 je počet znaménkových změn v posloupnosti funkčních hodnot derivací polynomu $f(x)$ v bodě a , tedy $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ a t_2 je počet znaménkových změn ve stejné posloupnosti, ovšem v bodě b .

Věta 3.1.4 (Descartova) (Horová, 2004)

Počet kladných kořenů polynomu P (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů a_0, \dots, a_n , nebo o sudé číslo menší.

Jsou-li všechny koeficienty a_0, \dots, a_n různé od nuly, pak počet záporných kořenů je roven počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo o sudé číslo menší.

Zatímco první tři věty určovaly hranici a počet kořenů jasně, následující věta slouží pouze k odhadu, i ten můžeme ale využívat. Jelikož pojednáváme o reálných kořenech, tak uvažujeme v první části Descartovy věty počet těchto kořenů případně o sudý počet menší. V tomto dovětku jsou obsaženy kořeny komplexní, které se objevují vždy ve dvojicích (jak bylo uvedeno v první kapitole).

Příklad

Určete hranice reálných kořenů a odhadněte počet kladných a záporných kořenů polynomu $2x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 2x + 2$.

Řešení

$$A = \max(2, 3, 6, 3, 2) = 6, \quad B = \max(2, 2, 3, 6, 2) = 6.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1 + \frac{6}{|2|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{6}{|2|} = 4$$

Posloupnost koeficientů polynomu: 2, -2, -3, 6, 3, 2, znaménkové změny jsou 2.

Kladné kořeny mohou být 2 nebo žádný. Záporný kořen mohou být 3 nebo 1.

3.2 Numerické metody pro hledání reálných kořenů

3.2.1 Metoda bisekce

Metoda bisekce (česky metoda půlení intervalu) představuje jednu ze základních a nej-jednodušších metod určování kořene rovnice ve tvaru $f(x) = 0$. Pracujeme s intervalem $\langle a, b \rangle$, na němž má rovnice (po separaci) právě jeden reálný kořen.

Podívejme se tedy na přesný postup. Máme dán interval $\langle a, b \rangle$, na němž platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Podle *Bolzano-Cauchyho věty* existuje c takové, že $f(c) = 0$.

Označme $a_1 = a$, $b_1 = b$, $s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

Pokud $f(s_1) = 0$, pak je s_1 hledaný kořen.

Pokud $f(s_1) < 0$, pak leží kořen v intervalu $\langle s_1, b_1 \rangle$ a označíme $a_2 = s_1$, $b_2 = b_1$.

Pokud $f(s_1) > 0$, pak leží kořen v intervalu $\langle a_1, s_1 \rangle$ a označíme $a_2 = a_1$, $b_2 = s_1$.

Opakováním tohoto postupu získáme posloupnost intervalů

$\langle a_1, b_1 \rangle \supset \langle a_2, b_2 \rangle \supset \dots \supset \langle a_n, b_n \rangle$.

Pro délku těchto intervalů platí $b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$, pro $k = 1, 2, \dots$

Pro všechny tyto krajní body intervalů a kořen c platí nerovnost

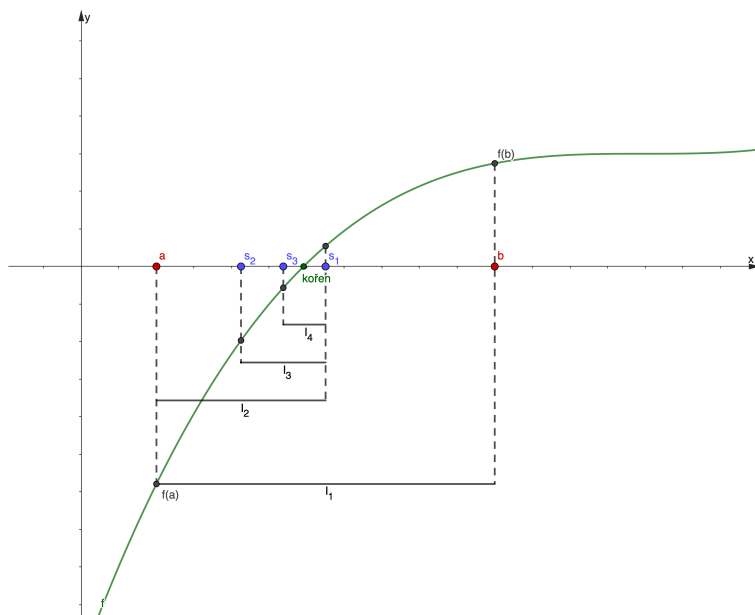
$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq c \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.

Jako podmínku zastavení budeme nejčastěji používat moment, kdy velikost intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ klesne pod zadanou odchylku ϵ . Další možností může být určení konkrétního počtu iterací. Někdy se rovněž využívá podmínka $|f(x_k)| < \epsilon$.

Celý princip lze formulovat větou vycházející z (Horová, 2004).

Věta 3.2.1

Nechť $f \in \langle a, b \rangle$, $f(a)f(b) < 0$ a nechť má f v intervalu $\langle a, b \rangle$ jediný kořen c . Pak metoda bisekce generuje posloupnost $s_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, která konverguje ke kořenu c a aproximuje kořen takto: $|s_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$.



Obrázek 3.1

Na obrázku je princip ilustrován.

Ukázkový příklad 1

Ukažme si praktické řešení příkladu touto metodou. Budeme hledat záporné řešení rovnice $x^2 - 2 = 0$. Jelikož jde o numerické určení hodnoty odmocniny ze dvou, můžeme jako počáteční interval zvolit $\langle -2, -1 \rangle$, kde jistě leží. Jako podmínku ukončení zvolíme počet 10 iterací, jde nám zejména o ukázkou postupu, nikoliv o určení co nejpřesnějšího výsledku. V prvním sloupci budeme pro orientaci zaznamenávat číslo iterace. Další tři sloupce představují (v tomto pořadí) levý krajní bod intervalu, jeho střed a pravý krajní bod. V následujících sloupcích budeme zaznamenávat jejich funkční hodnoty.

Tabulka je v Excelu vytvořená pomocí funkcí v něm obsažených. Střed intervalu určujeme jako průměr odpovídajících hodnot a a b . Funkční hodnoty tvoříme pomocí matematických výpočtů přímo v dané buňce. Všechny následující řádky jsou pak tvořeny automaticky. Nové krajní body intervalu jsou určeny pomocí funkce KDYZ, a to přesně způsobem popsáním výše. V případě levého krajního bodu to bude vypadat takto: KDYZ $f(a) \cdot f(s) > 0$, pak novým levým krajním bodem bude střed, jinak zůstává bod neměnný.

Vše je možné si v příložených souborech proklikat.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	-2,00000	-1,50000	-1,00000	2,00000	0,25000	-1,00000	0,50000
2	-1,50000	-1,25000	-1,00000	0,25000	-0,43750	-1,00000	0,25000
3	-1,50000	-1,37500	-1,25000	0,25000	-0,10938	-0,43750	0,12500
4	-1,50000	-1,43750	-1,37500	0,25000	0,06641	-0,10938	0,06250
5	-1,43750	-1,40625	-1,37500	0,06641	-0,02246	-0,10938	0,03125
6	-1,43750	-1,42188	-1,40625	0,06641	0,02173	-0,02246	0,01563
7	-1,42188	-1,41406	-1,40625	0,02173	-0,00043	-0,02246	0,00781
8	-1,42188	-1,41797	-1,41406	0,02173	0,01064	-0,00043	0,00391
9	-1,41797	-1,41602	-1,41406	0,00510	0,00510	-0,00043	0,00195
10	-1,41602	-1,41504	-1,41406	0,00510	0,00234	-0,00043	0,00098

Nalezli jsme řešení $x = -1,415$ s přesností 0,001 (po zaokrouhlení).

Výhodami této metody je jednoduchý princip, a tedy i jednoduchá implementace. Zároveň tato metoda vždy konverguje. Konverguje však velmi pomalu, což je nejvýraznější nevýhodou. Pokud v daném intervalu leží více kořenů, najdeme takto pouze jeden. K tomu už umíme ale přistupovat díky poznatkům z předchozí podkapitoly a intervaly jednoznačně určit.

3.2.2 Metoda regula falsi

Metoda regula falsi se podobá bisekci, ovšem namísto středu intervalu $\langle a, b \rangle$ pokládá za zkoumaný bod průsečík sečny grafu funkce (procházející body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$) a osy x .

Na začátku máme opět interval $\langle a, b \rangle$ s vlastností $f(a) \cdot f(b) < 0$ a body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. Pomyslně sestrojíme sečnu procházející těmito body, která má rovnici $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. X-ovou souřadnici průsečíku s osou x určíme vztahem $p = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$.

Označme $a_1 = a$, $b_1 = b$, $p_1 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1-a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}$.

Pokud by bylo $f(p) = 0$, pak jsme našli hledaný kořen, jinak bude mít $f(p)$ stejné znaménko jako $f(a)$ nebo $f(b)$.

Pokud bude $\text{sgn} f(p) = \text{sgn} f(a)$, bude číslo p novým levým krajním bodem intervalu, označíme $a_2 = p_1$, $b_2 = b_1$.

V opačném případě bude platit $\text{sgn} f(p) = \text{sgn} f(b)$ a průsečík bude novým pravým krajním bodem, označíme $a_2 = a_1$, $b_2 = p_1$.

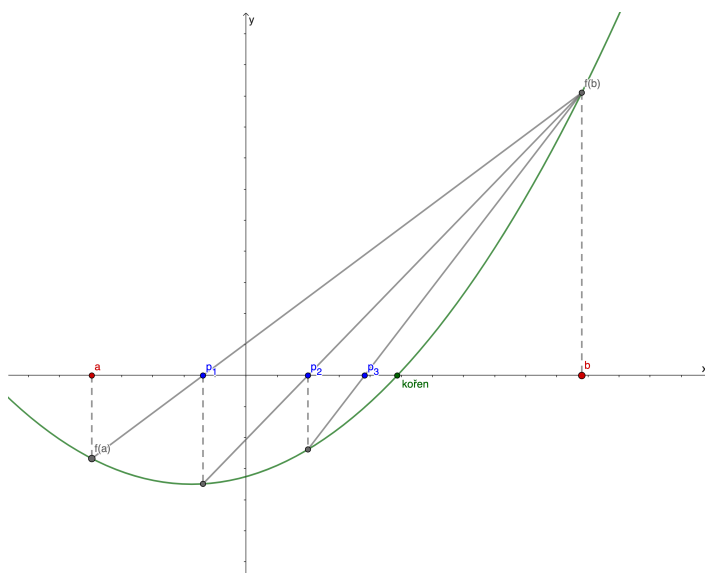
Opakováním tohoto postupu generujeme posloupnost p_1, p_2, \dots, p_n .

Kritéria pro ukončení jsou stejná jako při metodě bisekce. Některý z průsečíků může být kořenem, počet iterací dosáhne předem daného počtu nebo bude hodnota $|p_k - p_{k+1}|$ nižší než předem daná odchylka.

Všechny uvedené myšlenky opět zformuluji do věty vycházející z (Horová, 2004).

Věta 3.2.2

Nechť $f \in \langle a, b \rangle$, $f(a)f(b) < 0$ a nechť má f v intervalu $\langle a, b \rangle$ jediný kořen c . Pak posloupnost $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ určená metodou regula falsi konverguje pro libovolné počáteční aproximace $a', b' \in \langle a, b \rangle$, $f(a') \cdot f(b') < 0$ ke kořenu $c \in \langle a, b \rangle$.



Obrázek 3.2

Obrázek znázorňuje, jak by probíhaly první tři iterace této metody.

Ukázkový příklad 2

Ukažme si nyní, jak řešit příklady metodou regula falsi v Excelu. První a druhý sloupec budou tvořit krajní body výchozího intervalu, které budou následně nahrazeny krajními body nových intervalů. Do třetího sloupce zadáme souřadnici průsečíku podle vzorce vypsaneho výše. Následně budeme ještě potřebovat funkční hodnotu v průsečíku p . Pomocí té následně tvoříme nové intervaly přesně podle předpisu.

Pro ilustraci použijeme stejný příklad jako v předchozí kapitole. Pokusíme se co nejpřesněji určit hodnotu odmocniny ze dvou. Jako podmínku pro zastavení nepoužijeme tentokrát počet iterací, ale odchylku (tedy rozdíl hodnot odpovídajících průsečíku p_k a průsečíku p_{k+1} , který by vzniknul další iterací). Položme ji rovnu 0,001. Opět začínáme na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$.

k	a_k	b_k	p_k	$f(p_k)$	ϵ_k
1	-2,00000	-1,00000	-1,33333	-0,22222	0,0952
2	-1,33333	-1,00000	-1,42857	0,04082	0,0148
3	-1,33333	-1,42857	-1,41379	-0,00119	0,0004
4	-1,41379	-1,42857	-1,41421	-0,00001	

Rozdíl p_3 a p_4 je 0,00042, což je ostře méně než naše zadaná odchylka, tedy můžeme za nalezené řešení prohlásit číslo $-1,414$ (po zaokrouhlení není vidět rozdíl mezi třetím a čtvrtým průsečíkem, máme na mysli samozřejmě p_3).

Je vidět, že se stejnou přesností jsme našli kořen již při třetí iteraci. To ale obecně neplatí, v některém případě může konvergovat pomaleji. Její výhodou zůstává snadná implementace a také to, že vždy konverguje. Konvergence je ale při vyšších požadavcích a náročnějších vstupních podmínkách také poměrně pomalá. Stejně jako metoda bisekce rovněž určuje v daném intervalu jen jeden kořen.

3.2.3 Metoda sečen

Tato metoda využívá aproximaci derivace funkce. S tím souvisí i to, že jde o metodu dvoukrokovou, tedy používáme při ní vždy dvě naposledy vypočítané hodnoty (a stejně tak i dvě počáteční iterace).

K nalezení kořene používáme sečnu grafu jdoucí body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$. Čísla x_1 a x_2 jsme si opět na začátku zvolili jakožto krajní body intervalu, na kterém očekáváme kořen. Následující hodnotu vždy získáme jako průsečík sečny a osy x . Z rovnice pro sečnu ke grafu funkce a následného dosazení za y při hledání průsečíku se dá odvodit obecný iterační vzorec této metody. Pro $k = 1, 2, \dots$ má iterační vzorec tvar
$$x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} f(x_{k+1}).$$

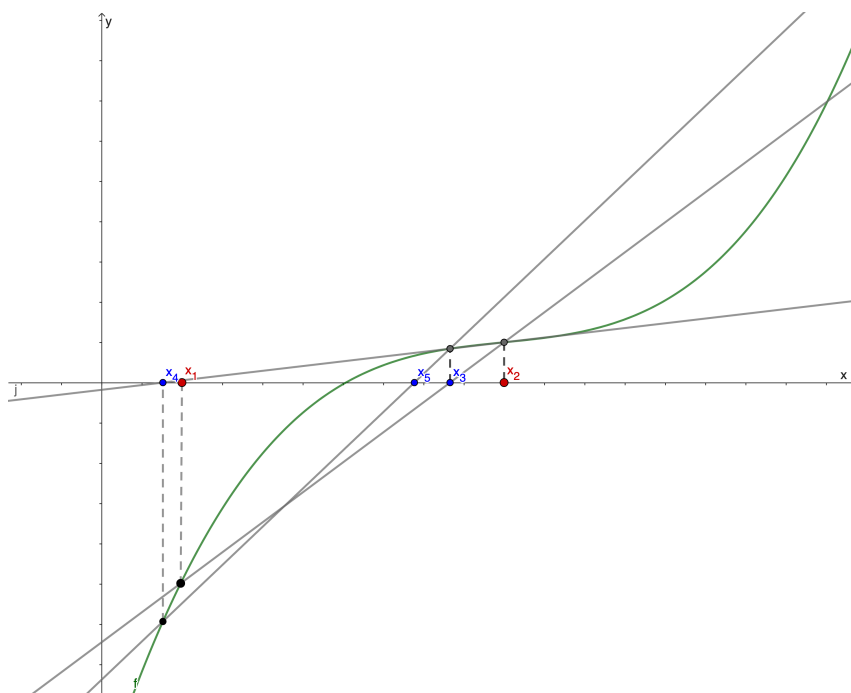
Formulovaná věta vychází z (Horová, 2004), kde lze najít i důkaz a pojednání o konvergenci této metody.

Věta 3.2.3

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen c a nechť derivace f' a f'' jsou spojité v okolí bodu c , přičemž $f'(c) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu c , pokud zvolíme počáteční aproximace x_1, x_2 dostatečně blízko bodu c .

Konvergence je tedy zajištěna při vhodně zvoleném a dostatečně malém počátečním intervalu. Toho můžeme dosáhnout např. užitím metody bisekce na začátku hledání kořenu. Jde o příklad, kdy se hodí metody uvedené v tomto textu kombinovat.

Na obrázku níže lze vidět prvních tři kroky této metody. Hodnoty x_1 a x_2 jsme si na začátku zvolili. Můžeme si všimnout, že získané x_4 se výrazně oddaluje od ostatních bodů. Kdybychom vyměnili očíslování prvních dvou námi zvolených hodnot, byl by vzniklý bod x_4 výrazně blíže hledanému kořenu. Tuto úvahu si rozmyslete, případně načrtněte do grafu.



Obrázek 3.3

Ukázkový příklad 3

Nyní k praktickému použití. Opět využijeme hledání kladného řešení rovnice $x^2 - 2 = 0$ s přesností 0,001. Jako počáteční interval vezmeme $(1; 2)$. Tato čísla rovnou použijeme jako první dvě aproximace, tedy položíme $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. V Excelu vytvoříme čtyřsloupcovou tabulku, kdy opět první sloupec bude označovat pořadové číslo iterace a poslední hodnotu odchylky ϵ_k . Definujeme ji jako $\epsilon_k = |x_k - x_{k+1}|$. Ve druhém sloupci počítáme aktuální hodnotu x_k . V prvních dvou řádcích vždy tuto hodnotu ručně vyplníme podle zadaného počátečního intervalu (tady je v tabulce pro přehlednost neuvádím). K výpočtu každé další hodnoty používáme iterační vzorec uvedený výše. Do třetího sloupce zanášíme odpovídající funkční hodnotu. Přístup k ní nám zjednoduší počítání nových iterací.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
3	1,33333	-0,22222	0,66667
4	1,41463	0,00119	0,01463
5	1,41421	-0,00001	0,00042

Vidíme, že u x_5 klesla hodnota ϵ_k pod naši zvolenou toleranci 0,001. Nalezené řešení je tedy $1,414 \pm 0,001$.

3.2.4 Newtonova metoda

Newtonova metoda je také zvana metodou tečen. Jak již název napovídá, budeme vždy hledat tečnu ke grafu funkce v daném bodě. Obecně je potřeba předpokládat existenci derivace na celém intervalu, kde řešení hledáme. Jelikož pracujeme pouze s polynomy, tato starost nám odpadá.

Princip je prostý. Zvolíme si počáteční číslo x_1 a hledáme tečnu ke grafu funkce jdoucí bodem $[x_1, f(x_1)]$. Průsečík tečny s osou x označíme jako x_2 . Pokračujeme hledáním tečny jdoucí bodem $[x_2, f(x_2)]$. Takto postupujeme dále až do dosažení dané podmínky zastavení.

Hodnota $f'(x_1)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě $[x_1, f(x_1)]$, tedy $f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, kde x_2 je průsečík tečny s osou x . Z tohoto výrazu dokážeme vyjádřit tento vzorec: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Obecně tedy Newtonova metoda používá pro výpočet následujících iterací (pro $k = 1, 2, \dots$) tento vzorec: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Newtonova metoda nemusí vždy konvergovat. Konvergenci určuje následující podmínka z (Fajmon, 2014).

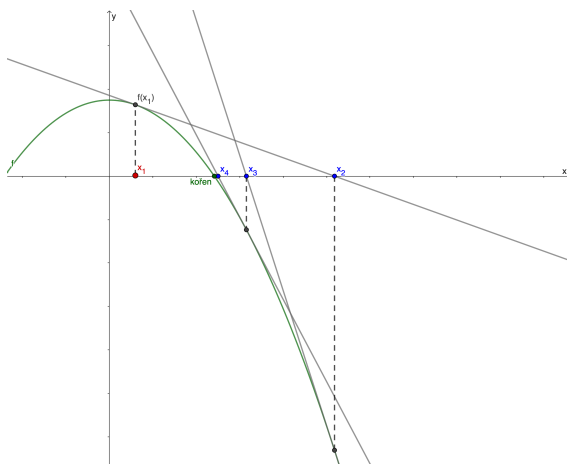
Věta 3.2.4.1 (Fourierova)

Nechť v intervalu $\langle a, b \rangle$ leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$ a nechť $f'(x)$ a $f''(x)$ jsou spojité a nemění znaménko na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zvolíme-li za počáteční aproximaci $x_1 \in \langle a, b \rangle$ tak, aby byla splněna podmínka $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$, Newtonova metoda bude konvergovat.

Uvedené myšlenky opět zformulujeme v následující větě vycházející z (Horová, 2004).

Věta 3.2.4.2

Nechť $c \in \langle a, b \rangle$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(c) \neq 0$. Potom existuje δ takové, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Newtonovou metodou konverguje k číslu c pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.



Obrázek 3.4

Na obrázku výše jsou ilustrovány první čtyři iterace (první hodnotu si volíme, další již vznikly aplikací metody).

Ukázkový příklad 4

Pro praktickou ukázkou opět použijeme řešení rovnice $x^2 - 2 = 0$, tentokrát budeme hledat řešení kladné. Za první iteraci zvolíme $x_1 = 2$ a ověříme konvergenci podle Fourierovy věty: $f(2) = 2$, $f'(2) = 1$, tedy $2 \cdot 1 > 0$. Metoda bude konvergovat. Dále potřebujeme vypočítat první derivaci funkce: $f'(x) = 2x$. V Excelu vytvoříme tabulku o třech sloupcích. V prvním budeme počítat iterace. V druhém sloupci bude aktuálně počítané x_k podle vzorce uvedeného výše. Do třetího sloupce vkládáme funkční hodnoty. Jako podmínku zastavení použijeme rozdíl dvou po sobě jdoucích iterací nižší než zadaná odchylka ϵ . Formálně pro nějaké k , při splnění $|x_k - x_{k+1}| < \epsilon$ bude výsledkem x_k . Zvolme si odchylku 0,001. Tabulka bude vypadat následovně.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	2,00000	2,00000	0,5000
2	1,50000	0,25000	0,0833
3	1,41667	0,00694	0,0025
4	1,41422	0,00001	0,0000
5	1,41421	0,00000	

Jelikož $|x_4 - x_5| = 0,00001 < 0,001$, tak můžeme řešením prohlásit $x = 1,41421$.

Největší nevýhodou Newtonovy metody je možnost její divergence. Ve složitějších případech nemusíme být schopni podmínku konvergence ověřit, přesto stojí tato metoda za použitím. Z hlediska rychlosti konvergence patří mezi nejvýhodnější.

Zdvojená Newtonova metoda

Jde o obdobu Newtonovy metody, která má iterační vzorec mírně upravený a vypadá takto: $x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Formálním doplněním je tato věta, která stejně jako popis níže, vychází z (Stoer, 1983).

Věta 3.2.4.3

Nechť $f(x)$ je reálný polynom, $\text{st}f(x) \geq 2$ má všechny kořeny $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ reálné. Nechť ξ_1 je největší kořen $f'(x)$, $c_1 \geq \xi_1 \geq c_2$. Pro $\text{st}f(x) = 2$ předpokládejme $c_1 > c_2$. Pak pro každé $z > c_1$ jsou čísla $z' = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$, $y = z - 2 \frac{f(z)}{f'(z)}$, $y' = y - \frac{f(y)}{f'(y)}$ definována a platí pro ně $\xi_1 < y$, $c_1 \leq y' \leq z'$.

Prakticky postupujeme stejně jako v případě klasické Newtonovy metody, jen s odlišným iteračním předpisem. Mohou nastat dva případy:

Pokud mají všechny hodnoty $f(x_k)$ stejné znaménko, tedy $f(x_0) \cdot f(x_k) \geq 0$ pro všechna k , pak x_k konverguje k c_1 , a to rychleji než Newtonovou metodou.

Jinak existuje nějaké j , pro které $f(x_0) \cdot f(x_j) < 0$ a dojde k tzv. přestřelení:

$x_0 > x_1 > \dots > x_{j-1} > c_1 > x_j > \xi_1 > c_2$. Dále potom pokračujeme klasickou Newtonovou metodou s počáteční iterací x_j .

3.2.5 Metoda prosté iterace

Metoda prosté iterace je založena na převodu původní rovnice $f(x)=0$ na ekvivalentní tvar $x = g(x)$. Takových nových tvarů může být samozřejmě několik, od jejich tvaru se potom odvíjí konvergence metody i její rychlost. Úkolem je poté najít pevný bod této nové funkce.

Jen připomenou, že pevný bod je takový bod, který se v zadaném zobrazení zobrazuje sám na sebe. Při řešení zvolíme počáteční bod jako nultou iteraci a každý další následující získáme jako funkční hodnotu jeho předchůdce, tedy $x_{k+1} = g(x_k)$. Při volbě funkce g je potřeba ověřit podmínky uvedené ve větě níže, aby metoda konvergovala. Zároveň je v bodě II) uveden formální popis. Věta vychází z (Daněk).

Věta 3.2.5 (postačující podmínky konvergence)

Předpokládejme, že funkce $g(x)$ je na intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a platí:

a) $\forall x \in \langle a,b \rangle: g(x) \in \langle a,b \rangle$

b) $\exists q \in \langle 0,1 \rangle: |g(y)-g(x)| \leq q |x-y|$

Potom

I) v intervalu $\langle a,b \rangle$ existuje právě jeden kořen c rovnice $x = g(x)$

II) posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ určena vztahem $x_k = g(x_{k-1})$ konverguje pro každé $x_0 \in \langle a,b \rangle$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = c$.

Je-li funkce $\varphi(x)$ diferencovatelná, lze druhou podmínku nahradit podmínkou:

$$\exists q \in \langle 0,1 \rangle: |g'(x)| \leq q \quad \forall x \in \langle a,b \rangle.$$

Tuto podmínku budeme v příkladech používat, jelikož naše funkce budou (na daných intervalech) vždy diferencovatelné.

Ukázkový příklad 5

Praktické použití si ukážeme na příkladě určování kladného řešení rovnice $x^2 - x - 15 = 0$. Řešení budeme hledat na intervalu $\langle 4,5 \rangle$. Odchylku zvolíme $\epsilon = 0,001$. Výpočet zastavíme tedy ve chvíli, kdy $|x_k - x_{k+1}| \leq \epsilon$. Jako iterační funkci vyjádříme $x^2 = x + 15$, tedy $x = \pm\sqrt{x+15}$. Jelikož hledáme kladné řešení, položíme $g(x) = \sqrt{x+15}$. Ověříme první část podmínky. Musí platit $\forall x \in \langle 4,5 \rangle: 4 \leq \sqrt{x+15} \leq 5$, po umocnění a úpravě získáme $1 \leq \sqrt{x+15} \leq 10$. To zřejmě platí pro všechna x z daného intervalu. Ověříme druhou podmínku, tedy zda platí $\forall x \in \langle 4,5 \rangle: |g'(x)| < 1$. Po zderivování obdržíme $|\frac{1}{2\sqrt{x+15}}| < 1$. Výraz v absolutní hodnotě bude vždy kladný, můžeme ji odstranit. Po vynásobení (kladným výrazem $2\sqrt{x+15}$) dostaneme nerovnost $1 < 2\sqrt{x+15}$. Tu můžeme umocnit a po úpravě získáme $-\frac{59}{4} < x$, což platí pro všechna $x \in \langle 4,5 \rangle$. Tabulku v Excelu tvoříme (kromě číslování iterace) dvouslupcovou - v prvním sloupci má místo vždy i -tá iterace, v druhém ta následující. Jak je uvedeno výše, iterace získáváme postupným vkládáním získané hodnoty do předpisu iterační funkce.

k	x_k	$g(x_k)$	ϵ_k
1	4,50000	4,41588	0,08412
2	4,41588	4,40635	0,00953
3	4,40635	4,40526	0,00108
4	4,40526	4,40514	0,00012

Platí $|x_4 - x_5| = 0,00012 < 0,001$, tedy hledaným řešením je 4,40526.

3.3 Numerické metody pro hledání imaginárních kořenů

3.3.1 Newtonova metoda

Ještě jednou se vraťme k Newtonově metodě (kapitola 3.2.4). Jelikož grafy komplexních funkcí komplexní proměnné mají také tečny, je Newtonova metoda použitelná i pro nalezení komplexních kořenů.

Postupujeme stejně jako při hledání reálných kořenů, jen jsme nuceni počítat s komplexními čísly. Nejdůležitější rozdíl spočítá ve zvolení komplexní počáteční aproximace (tedy komplexního čísla s nenulovou imaginární složkou). Pravidla pro konvergenci naleznete např. v (Wiersma, 2016).

Iterační vzorec pro výpočet Newtonovy metody: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, pro $k = 1, 2, \dots$

Příklady budeme opět chtít řešit v Excelu. Než se podíváme na konkrétní řešení, uvedu několik funkcí, které se nám budou hodit:

Komplexní číslo tvaru $z = u + iv$ zadáme pomocí =COMPLEX(u;v).

Součet dvou komplexních čísel: =IMSUM(Z1;Z2).

Rozdíl dvou komplexních čísel: =IMSUB(Z1;Z2).

Součin dvou komplexních čísel: =IMPRODUCT(Z1;Z2).

Podíl dvou komplexních čísel: =IMDIV(Z1;Z2).

Další funkce a podrobnější popis můžete najít na support.microsoft.com.

Ukázkový příklad 6

Vyzkoušíme najít řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$. Máme tedy $f(x) = x^2 + 1$ a $f'(x) = 2x$. Jako první iteraci vybereme $x_1 = 1 + i$. Iterační vzorec bude v tomto případě tvaru $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + 1}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k - \frac{1}{x_k})$. Tabulka bude stejná jako v případě hledání reálných kořenů - v prvním sloupci číslujeme iteraci, v druhém píšeme aktuální hodnotu x_k a ve třetím sledujeme jeho funkční hodnotu $f(x_k)$.

k	x_k	$f(x_k)$
1	$1 + i$	$1 + 2i$
2	$0.25 + 0.75i$	$0,5 + 0,375i$
3	$-0.075 + 0.975i$	$0,055 - 0,14625i$
4	$0.001716 + 0.997304i$	$0,005388 + 0,003422i$
5	$-4.641846E-06 + 1.000002i$	$-4,320964E-06 - 9,283713E-06i$
6	$-1.002868E-11 + 1,000002i$	$1,688005E-11 - 2,005737E-11i$
7	$8.463657E-23 + i$	$1,693006E-22i$
8	i	0

V osmé iteraci jsme našli přesné řešení. Můžeme vidět, že jeho funkční hodnota je rovna 0. Zároveň můžeme řešením prohlásit číslo komplexně sdružené $-i$.

3.3.2 Bairstowova metoda

V této kapitole si uvedeme i jednu metodu na hledání imaginárních kořenů algebraické rovnice. Jak uvidíte, od předchozích metod se bude významně lišit. Její podstatou je nalezení kvadratického trojčlenu, který dělí zadaný polynom. Princip popisu této metody pochází z (Skoták, 2017).

Mějme polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a hledáme polynom $D(x) = x^2 + rx + s$. Naším úkolem je nyní určit hodnoty koeficientů r, s tak, aby polynom $D(x)$ dělil polynom $f(x)$. Jeho kořeny pak snadno spočítáme jako kořeny kvadratické rovnice.

Polynom tedy rozkládáme takto: $f(x) = D(x)f_{n-2}(x) + R(x)$, kde $f_{n-2}(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_3 x + b_2$, $R(x) = b_1(x + r) + b_0$. Za první iteraci volíme $D_1(x) = x^2 + r_1 x + s_1$. My se snažíme polynom vydělit beze zbytku, tedy tak, aby $R(x) = 0$. Tento problém se dá řešit jako soustava rovnic Newtonovou metodou. Další iterace hledaného kvadratického trojčlenu $D(x)$ je $D_1(x) = x^2 + r_2 x + s_2$, kde $r_2 = r_1 + h$ a $s_2 = s_1 + j$. Hodnoty čísel h a j obdržíme vyřešením soustavy rovnic. Uvedenou soustavu a detailnější odvození naleznete v (Skoták, 2017). My se opět zaměříme spíše na praktickou stránku.

Polynomy $f_{n-2}(x)$ a $R(x)$ jsou výsledky dělení polynomů, dá se tedy použít zobecněného Hornerova schématu. Níže si ukážeme, jak s ním budeme pracovat. Princip je podobný jako při použití zmíněném v kapitole 1.1, jen se v tomto případě používá tzv. dvojí dělení. Podrobnější popis lze nalézt např. v (Míka, 1985).

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_{n-3}	a_2	a_1	a_0
$-r$		$-rb_n$	$-rb_{n-1}$...	$-rb_4$	$-rb_3$	$-rb_2$	
$-s$			$-sb_n$...	$-sb_5$	$-sb_4$	$-sb_3$	$-sb_2$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_3	b_2	$A = b_1$	$B = b_0$
$-r$		$-rc_n$	$-rc_{n-1}$...	$-rc_4$			
$-s$			$-sc_n$...	$-sc_5$	$-sc_4$		
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	...	$a = c_3$	$b = c_2$		

Ve schématu jsou již vyznačeny hodnoty, které nás dále budou především zajímat. Po vyplnění tedy vytvoříme soustavu rovnic:

$$(ar - b)h - aj = -A,$$

$$ash - bj = -B.$$

Následně ji vyřešíme pro neznámé h a j , které použijeme pro aktualizaci hodnot r a s . V další iteraci budeme tedy pracovat s polynomem $x^2 + (r + h)x + (s + j)$. Takto pokračujeme až do dosažení zadané přesnosti. Pro zvolenou přesnost ϵ do momentu, kdy rozdíly dvou po sobě jdoucích hodnot r_k a s_k klesnou pod ϵ .

Ukázkový příklad 7

Ukažme si opět postup řešení na konkrétním příkladu. Máme za úkol nalézt řešení rovnice $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ pomocí této metody. Za počáteční hodnoty zvolíme $r_1 = -1$, $s_1 = 1$ a odchylku $\epsilon = 0,01$. Pomocí zobecněného Hornerova schématu vypočteme:

	1	-5	10	-10	4
1		1	-4	5	
-1			-1	4	-5
	1	-4	5	-1	-1
1		1			
-1			-1		
	1	-3	4		

Nyní můžeme sestavit soustavu rovnic: $-h + 3j = 1$, $-3h - 4j = 1$. Odsud získáme řešení $h = -0,5385$, $j = 0,1538$. Pomocí něj aktualizujeme hodnoty: $r_2 = -1 - 0,5385$, $s_2 = 1 + 0,1538$. S novými hodnotami takto postupujeme dále až do dosažení požadované odchylky. V tabulce níže uvádím posloupnost těchto hodnot. Vyjma řešení soustavy rovnic je vše opět generováno pomocí funkcí v Excelu, jsou tam vytvořena schémata i soustavy rovnic pro všechny iterace. Soustavu rovnic jsem řešil pomocí programu Wolfram Alpha.

k	r_k	s_k
1	-1	1
2	-1,5385	1,1538
3	-2,067	1,6229
4	-2,295	2,4383
5	-2,0612	2,0091
6	-1,9963	1,9955
7	-2	2

Lze vidět, že při sedmé iteraci klesla odchylka sousedních hodnot $|r_7 - r_6|$, $|s_7 - s_6|$ pod naši zadanou hodnotu, tímto tedy náš výpočet končí. Nalezli jsme polynom $x^2 - 3x + 2$. Když provedeme dělení polynomu $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$ nalezeným polynomem, obdržíme polynom $x^2 - 2x + 2$. Nyní máme dva kvadratické polynomy, jejichž kořeny snadno vypočteme. Řešením zadané rovnice jsou tedy čísla 1, 2 (kořeny polynomu $x^2 - 3x + 2$) a $1 \pm i$ (kořeny polynomu $x^2 - 2x + 2$).

Při hledání kvadratického trojčlenu s komplexními kořeny, které jsou tedy zároveň kořeny zadaného polynomu, se opravdu obejdeme bez užití komplexní aritmetiky. Tu využíváme až při řešení kvadratické rovnice. Při použití této metody samozřejmě záleží na stupni původního polynomu. Hledání jeho vhodného dělitele můžeme tedy opakovat i vícekrát v závislosti na tom, polynom jakého stupně po vydělení obdržíme.

Kapitola 4

Příklady

Příklad 1

Vyřešte rovnici $x^3 - 3x + 1 = 0$ metodou bisekce s odchylkou nejvýše 0,0001.

Najdeme interval, kde leží všechny kořeny polynomu:

$$\frac{1}{1+\frac{3}{|1|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{3}{|1|}, \text{ tedy tyto kořeny leží v intervalu } \langle -4; -\frac{1}{4} \rangle \cup \langle \frac{1}{4}; 4 \rangle.$$

Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou danému polynomu $f(x)$:

$$f_0(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f_1(x) = -3x^2 + 3$$

$$f_2(x) = 2x - 1$$

$$f_3(x) = -\frac{9}{4}$$

Sestavíme tabulku pro vymezení reálných kořenů.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	-	-	-	-	0
∞	+	-	+	-	3
0	+	+	-	-	1
-1	+	0	-	-	1
-2	-	-	-	-	0
1	-	0	+	-	2
2	+	-	+	-	3

Z tabulky můžeme vyčíst:

$$W(\infty) - W(-\infty) = 3 \Rightarrow 3 \text{ reálné kořeny}$$

$$W(\infty) - W(0) = 2 \Rightarrow 2 \text{ kladné kořeny}$$

$$W(-1) - W(-2) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle -2, -1 \rangle$$

$$W(1) - W(0) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 0, 1 \rangle$$

$$W(2) - W(1) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 1, 2 \rangle$$

V následujících tabulkách je metoda bisekce postupně aplikována na všechny tři zjištěné intervaly.

Metoda bisekce na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	-2,00000	-1,50000	-1,00000	-1,00000	2,12500	3,00000	0,50000
2	-2,00000	-1,75000	-1,50000	-1,00000	0,89063	2,12500	0,25000
3	-2,00000	-1,87500	-1,75000	-1,00000	0,03320	0,89063	0,12500
4	-2,00000	-1,93750	-1,875005	-1,00000	-0,46069	0,03320	0,06250
5	-1,93750	-1,90625	-1,87500	-0,46069	-0,20816	0,03320	0,03125
6	-1,90625	-1,89063	-1,87500	-0,20816	-0,08609	0,03320	0,01563
7	-1,89063	-1,88281	-1,87500	-0,08609	-0,02610	0,03320	0,00781
8	-1,882813	-1,87891	-1,87500	-0,02610	0,00364	0,03320	0,00391
9	-1,88281	-1,88086	-1,87891	-0,02610	-0,01121	0,00364	0,00195
10	-1,88086	-1,87988	-1,87891	-0,01121	-0,00378	0,00364	0,00098
11	-1,87988	-1,87939	-1,87891	-0,00378	-0,00007	0,00364	0,00049
12	-1,87939	-1,87915	-1,87891	-0,00007	0,00178	0,00364	0,00024
13	-1,87939	-1,87927	-1,87915	-0,00007	0,00086	0,00178	0,00012
14	-1,87939	-1,87933	-1,87927	-0,00007	0,00039	0,00086	0,00006

Metoda bisekce na intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	0,00000	0,50000	1,00000	1,00000	-0,37500	-1,00000	0,50000
2	0,00000	0,25000	0,50000	1,00000	0,26563	-0,37500	0,25000
3	0,25000	0,37500	0,50000	0,26563	-0,07227	-0,37500	0,12500
4	0,25000	0,31250	0,37500	0,26563	0,09302	-0,07227	0,06250
5	0,31250	0,34375	0,37500	0,09302	0,00937	-0,07227	0,03125
6	0,34375	0,35938	0,37500	0,00937	-0,03171	-0,07227	0,01563
7	0,34375	0,35156	0,35938	0,00937	-0,01124	-0,03171	0,00781
8	0,34375	0,34766	0,35156	0,00937	-0,00095	-0,01124	0,00391
9	0,34375	0,34570	0,34766	0,00937	0,00421	-0,00095	0,00195
10	0,34570	0,34668	0,34766	0,00421	0,00163	-0,00095	0,00098
11	0,34668	0,34717	0,34766	0,00163	0,00034	-0,00095	0,00049
12	0,34717	0,34741	0,34766	0,00034	-0,00031	-0,00095	0,00024
13	0,34717	0,34729	0,34741	0,00034	0,00002	-0,00031	0,00012
14	0,34729	0,34735	0,34741	0,00002	-0,00014	-0,00031	0,00006

Metoda bisekce na intervalu $\langle 1,2 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	1,00000	1,50000	2,00000	-1,00000	-0,12500	3,00000	0,50000
2	1,50000	1,75000	2,00000	-0,12500	1,10938	3,00000	0,25000
3	1,50000	1,62500	1,75000	-0,12500	0,41602	1,10938	0,12500
4	1,50000	1,56250	1,62500	-0,12500	0,12720	0,41602	0,06250
5	1,50000	1,53125	1,56250	-0,12500	-0,00339	0,12720	0,03125
6	1,53125	1,54688	1,56250	-0,00339	0,06077	0,12720	0,01563
7	1,53125	1,53906	1,54688	-0,00339	0,02841	0,06077	0,00781
8	1,53125	1,53516	1,53906	-0,00339	0,01244	0,02841	0,00391
9	1,53125	1,53320	1,53516	-0,00339	0,00451	0,01244	0,00195
10	1,53125	1,53223	1,53320	-0,00339	0,00056	0,00451	0,00098
11	1,53125	1,53174	1,53223	-0,00339	-0,00142	0,00056	0,00049
12	1,53174	1,53198	1,53223	-0,00142	-0,00043	0,00056	0,00024
13	1,53198	1,53210	1,53223	-0,00043	0,00006	0,00056	0,00012
14	1,53198	1,53204	1,53210	-0,00043	-0,00018	0,00006	0,00006

Hledaná řešení jsou

$$x_1 = -1,87933 \pm 0,00006, \quad x_2 = 0,34735 \pm 0,0001, \quad x_3 = 1,53204 \pm 0,0001.$$

Příklad 2

Určete kladná reálná řešení rovnice $3x^3 - 8x^2 - 1 = 0$. Porovnejte počet kroků metody regula falsi a metody bisekce nutných k dosažení výsledku s odchylkou nejvýše 0,0001.

Najdeme interval, kde leží všechny kořeny polynomu:

$$\frac{1}{1+\frac{8}{|3|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{3}{|-1|}, \text{ tedy tyto kořeny leží v intervalu } \langle -4; -\frac{3}{11} \rangle \cup \langle \frac{3}{11}; 4 \rangle.$$

Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou danému polynomu $f(x)$:

$$f_0(x) = f(x) = 3x^3 - 8x^2 - 1$$

$$f_1(x) = -f'(x) = -9x^2 + 16x$$

$$f_2(x) = -(f_0(x) \bmod f_1(x)) = 128x + 27 \text{ (vynásobeno 27)}$$

$$f_3(x) = -(f_1(x) \bmod f_2(x)) = 61857 \text{ (vynásobeno 16384)}$$

Sestavíme tabulku pro vymezení reálných kořenů.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	-	-	-	+	1
∞	+	-	+	+	2
0	-	0	+	+	1
1	-	+	+	+	1
2	-	-	+	+	1
3	+	-	+	+	2

Z tabulky můžeme vyčíst:

$$W(\infty) - W(-\infty) = 1 \Rightarrow 1 \text{ reálný kořen}$$

$$W(\infty) - W(0) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kladný kořen}$$

$$W(3) - W(2) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 2,3 \rangle$$

V první tabulce je využita metoda regula falsi na intervalu $\langle 2,3 \rangle$.

k	a_k	b_k	p_k	$f(p_k)$
1	2,00000	3,00000	2,52941	-3,63444
2	2,52941	3,00000	2,67642	-0,79047
3	2,67642	3,00000	2,70551	-0,14692
4	2,70551	3,00000	2,71083	-0,02649
5	2,71083	3,00000	2,71178	-0,00475
6	2,71178	3,00000	2,71195	-0,00085

V druhé tabulce je využita metoda bisekce taktéž na intervalu $\langle 2,3 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	2,00000	2,50000	3,00000	-9,00000	-4,12500	8,00000	0,50000
2	2,50000	2,75000	3,00000	-4,12500	0,89063	8,00000	0,25000
3	2,50000	2,62500	2,75000	-4,12500	-1,86133	0,89063	0,12500
4	2,62500	2,68750	2,75000	-1,86133	-0,54858	0,89063	0,06250
5	2,68750	2,71875	2,75000	-0,54858	0,15494	0,89063	0,03125
6	2,68750	2,70313	2,71875	-0,54858	-0,20081	0,15494	0,01563
7	2,70313	2,71094	2,71875	-0,20081	-0,02394	0,15494	0,00781
8	2,71094	2,71484	2,71875	-0,02394	0,06525	0,15494	0,00391
9	2,71094	2,71289	2,71484	-0,02394	0,02059	0,06525	0,00195
10	2,71094	2,71191	2,71289	-0,02394	-0,00169	0,02059	0,00098
11	2,71191	2,71240	2,71289	-0,00169	0,00945	0,02059	0,00049
12	2,71191	2,71216	2,71240	-0,00169	0,00388	0,00945	0,00024
13	2,71191	2,71204	2,71216	-0,00169	0,00110	0,00388	0,00012
14	2,71191	2,71198	2,71204	-0,00169	-0,00030	0,00110	0,00006

V obou případech jsem zaokrouhloval na 5 desetinných míst. V Excelu si můžete počet desetinných míst zvýšit a podívat se, kde se nalezená řešení liší. Jejich funkční hodnoty jsou totiž různé.

Využili jsme metodu regula falsi a s přesností 0,0001 jsme našli řešení $x = 2,71195$. Bylo k tomu potřeba 6 iterací.

Metoda bisekce našla při stejném počátečním intervalu řešení $x' = 2,71198$, ovšem až při 14. iteraci.

Příklad 3

Vyřešte rovnici $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = 0$ metodou bisekce s odchylkou nejvýše 0,001.

Nalezneme hranice kořenů:

$$\frac{1}{1+\frac{5}{|1|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{5}{|1|}, \text{ tedy tyto kořeny leží v intervalu } \langle -6; -\frac{1}{6} \rangle \cup \langle \frac{1}{6}; 6 \rangle.$$

Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou danému polynomu $f(x)$:

$$f_0(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x + 3$$

$$f_1(x) = -4x^3 - 6x^2 + 10x - 4$$

$$f_2(x) = 13x^2 - 17x - 10$$

$$f_3(x) = 164x + 267$$

$$f_4(x) = -1402193$$

Sestavíme tabulku pro vymezení reálných kořenů.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$W(x)$
$-\infty$	+	+	+	-	-	1
-6	+	+	+	-	-	1
-1	-	-	+	+	-	2
0	+	-	-	+	-	3
1	+	-	-	+	-	3
6	+	-	+	+	-	3
∞	+	-	+	+	-	3

Z tabulky můžeme vyčíst:

$$W(\infty) - W(-\infty) = 2 \Rightarrow 2 \text{ reálné kořeny}$$

$$W(\infty) - W(0) = 0 \Rightarrow \text{žádný kladný kořen}$$

$$W(0) - W(-\infty) = 2 \Rightarrow 2 \text{ záporné kořeny}$$

$$W(-1) - W(0) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle -1, 0 \rangle$$

$$W(-1) - W(-6) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle -6, -1 \rangle$$

V Excelu dle předpisu vytvoříme dvě tabulky, ve kterých bude prováděna metoda bisekce. V první tabulce hledáme kořen z intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ a následně v druhé z intervalu $\langle -6, -1 \rangle$.

Z praktických důvodů jsem zaokrouhlil všechny mezivýsledky na tři desetinná místa. Podrobnější údaje jsou uvedeny v odpovídajícím příloženém excelovém souboru.

Metoda bisekce na intervalu $\langle -1, 0 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	-1,000	-0,500	0,000	-9,000	-2,438	1,000	0,500
2	-0,500	-0,250	0,000	-2,438	-0,340	1,000	0,250
3	-0,250	-0,125	0,000	-0,340	0,418	1,000	0,125
4	-0,250	-0,188	-0,125	-0,340	0,062	0,418	0,063
5	-0,250	-0,219	-0,188	-0,340	-0,133	0,062	0,031
6	-0,219	-0,203	-0,188	-0,133	-0,034	0,062	0,016
7	-0,203	-0,195	-0,188	-0,034	0,0146	0,062	0,008
8	-0,203	-0,199	-0,195	-0,034	-0,010	0,015	0,004
9	-0,199	-0,197	-0,195	-0,010	0,003	0,015	0,002
10	-0,199	-0,198	-0,197	-0,010	-0,004	0,003	0,001

Metoda bisekce na intervalu $\langle -6, -1 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	-6,000	-3,500	-1,000	661,000	-9,938	-9,000	2,500
2	-6,000	-4,750	-3,500	661,000	163,910	-9,938	1,250
3	-4,750	-4,125	-3,500	163,910	48,574	-9,938	0,625
4	-4,125	-3,813	-3,500	48,574	13,514	-9,938	0,313
5	-3,813	-3,656	-3,500	13,514	0,487	-9,938	0,156
6	-3,656	-3,578	-3,500	0,487	-5,032	-9,938	0,078
7	-3,656	-3,617	-3,578	0,487	-2,352	-5,032	0,039
8	-3,656	-3,637	-3,617	0,487	-0,952	-2,352	0,020
9	-3,656	-3,646	-3,637	0,487	-0,238	-0,952	0,010
10	-3,656	-3,651	-3,646	0,487	0,124	-0,238	0,005
11	-3,651	-3,649	-3,646	0,124	-0,057	-0,238	0,002
12	-3,651	-3,650	-3,649	0,124	0,033	-0,057	0,001
13	-3,651	-3,650	-3,649	0,033	-0,012	-0,057	0,001

Můžete si všimnout shodné odchylky v předposledním i posledním řádku, to je dáno právě zaokrouhlováním. Nás zajímá výsledek až z posledního řádku, jelikož až tam je odchylka nižší než 0,001, tedy vyhovující našemu zadání.

Nalezli jsme řešení $x_1 = -0,198 \pm 0,001$ a $x_2 = -3,65 \pm 0,001$.

Příklad 4

Určete řešení rovnice $x^5 - 4x + 2 = 0$ s využitím Newtonovy metody s odchylkou nejvýše 0,001.

Najdeme, na jakém intervalu leží reálné kořeny:

$$\frac{1}{1+\frac{4}{|x|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{4}{|x|}, \text{ tedy tyto kořeny leží v intervalu } \langle -3; -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{1}{3}; 3 \rangle.$$

Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou danému polynomu $f(x)$:

$$f_0(x) = x^5 - 4x + 2$$

$$f_1(x) = -5x^4 + 4$$

$$f_2(x) = 16x - 10$$

$$f_3(x) = -13259$$

Sestavíme tabulku pro vymezení reálných kořenů.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	-	-	-	-	0
∞	+	-	+	-	3
0	+	+	-	-	1
1	-	-	+	-	2
-2	-	-	-	-	0
2	+	-	+	-	3

Z tabulky můžeme vyčíst:

$$W(\infty) - W(-\infty) = 3 \Rightarrow 3 \text{ reálné kořeny}$$

$$W(0) - W(-2) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle -2, 0 \rangle$$

$$W(1) - W(0) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 0, 1 \rangle$$

$$W(2) - W(1) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 1, 2 \rangle$$

Nyní následují tabulky s výpočty jednotlivých kořenů. Výpočet zastavujeme, když hodnota ϵ_k klesne pod zadanou hodnotu 0,001.

Hledání řešení na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. Za první iteraci volíme střed tohoto intervalu.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	1,5000	3,5938	0,1686
2	1,3314	0,8577	0,0732
3	1,2581	0,1198	0,0141
4	1,2441	0,0039	0,0005

Nalezené řešení je $1,2441 \pm 0,001$.

Hledání řešení na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Jako první iteraci opět volíme střed intervalu.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	0,5000	0,0313	0,0085
2	0,5085	0,0001	0,0000

Nalezené řešení je $0,5085 \pm 0,001$.

Hledání řešení na intervalu $\langle -2, 0 \rangle$. Z praktických důvodů jako první iteraci tentokrát volíme hodnotu -2 (viz excelový soubor).

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	-2,0000	-22,0000	0,2895
2	-1,7105	-5,8015	0,1495
3	-1,5610	-1,0251	0,0399
4	-1,5211	-0,0590	0,0026
5	-1,5185	-0,0002	0,0000

Nalezené řešení je $-1,5185 \pm 0,001$.

Takto jsme našli tři reálná řešení zadané rovnice. Jelikož jde o rovnici 5. stupně, tak zbývají ještě dva, komplexně sdružené. Pokud postupně podělíme polynom $x^5 - 4x + 2$ lineárními dvojčleny $(x - 1,2441)$, $(x - 0,5085)$ a $(x + 1,5185)$, obdržíme kvadratický trojčlen. Ten můžeme řešit jako kvadratickou rovnici - obdržené kořeny jsou $-0,1168 \pm 1,4384i$.

Řešení rovnice $x^5 - 4x + 2 = 0$ jsou:
 $1,2441 \pm 0,001$, $0,5085 \pm 0,001$, $-1,5185 \pm 0,001$, $-0,1168 \pm 1,4384i$.

Příklad 5

Určete řešení rovnice $x^5 - 4x + 2 = 0$. Nejprve nalezněte komplexně sdružené kořeny polynomu, zbylé kořeny poté nalezněte pomocí metody sečen. Řešení hledejte s odchylkou nejvýše 0,001.

Využijeme poznatky získané při řešení předchozího příkladu. Reálné kořeny jsou tři a leží v intervalech $\langle -2, 0 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 1, 2 \rangle$. Pro nalezení komplexního kořenu využijeme Newtonovu metodu s počáteční komplexní aproximací.

Níže je tabulka pro nalezení komplexního kořenu. Jak vidíte, jako počáteční aproximaci jsme museli zvolit číslo s nenulovou komplexní složkou.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	$2i$	$2,0000 + 24i$	$0,02632 + 0,3158i$
2	$-0,0263 + 1,6842i$	$1,0471 + 6,7814i$	$0,04177 + 0,1846i$
3	$-0,0681 + 1,4996i$	$0,5576 + 1,4298i$	$0,03959 + 0,0595i$
4	$-0,1077 + 1,4401i$	$0,1408 + 0,0885i$	$0,0091 + 0,0018i$
5	$-0,1168 + 1,4383i$	$0,0015 - 0,0021i$	$0,0000 - 0,0001i$

Nalezli jsme kořen $-0,1168 + 1,4383i \pm (0,001 + 0,001i)$. Podle věty o komplexních kořenech, je kořenem i číslo komplexně sdružené $-0,1168 - 1,4383i$.

Dále následují tabulky pro hledání reálných kořenů. První dvě iterace můžete vidět přímo v excelových souborech. Jsou jimi vždy krajní body intervalů, na kterých kořen hledáme. Výjimkou je opět poslední případ, kde kvůli konvergenci ke správnému kořenu používáme jako první dvě aproximace čísla -2 a $-1,9$. Jak by to vypadalo pro hodnoty -2 a 0 , si můžete prohlédnout v excelovém souboru.

Metoda sečen na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
3	1,0370	-0,9487	0,0339
4	1,0709	-0,8750	0,4026
5	1,4735	3,0527	0,3129
6	1,1606	-0,5365	0,0468
7	1,2074	-0,2636	0,0452
8	1,2526	0,0731	0,0098
9	1,2428	-0,0065	0,0008

Nalezli jsme řešení $1,2428 \pm 0,001$.

Metoda sečen na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
3	0,6667	-0,5350	0,3835
4	0,2832	0,8691	0,2374
5	0,5206	-0,0440	0,0114
6	0,5091	-0,0023	0,0006

Nalezli jsme řešení $0,5091 \pm 0,001$.

Metoda sečen na intervalu $\langle -2,0 \rangle$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
3	-1,6783	-4,6026	0,0966
4	-1,5817	-1,5723	0,0501
5	-1,5315	-0,3002	0,0118
6	-1,5197	-0,0270	0,0012
7	-1,5185	-0,0005	0,0000

Nalezli jsme řešení $-1,5185 \pm 0,001$.

Nalezená řešení zadané rovnice jsou přibližně $-0,1168 \pm 1,4383i$; $1,2428 \pm 0,001$; $0,5091 \pm 0,001$ a $-1,5185 \pm 0,001$.

Příklad 6

Najděte řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Použijte Bairstowovu metodu s odchylkou nejvýše 0,001. Za počáteční hodnoty zvolte $r_1 = -1$, $s_1 = 1$.

Máme zadány úvodní hodnoty $r_1 = -1$, $s_1 = 1$. Vytvoříme zobecněné Hornerovo schéma s těmito výchozími hodnotami podle postupu popsaném v kapitole 3.3.2.

	1	1	1	1	1
1		1	2	2	
-1			-1	-2	-2
	1	2	2	1	-1
-1		1			
1			-1		
	1	3	1		

Odpovídající soustava rovnic má tvar $-4h - 3j = -1$, $3h - j = 1$. Řešením této rovnice je dvojice $(h, j) = (0,3077; -0,0769)$. V druhé iteraci tedy pokračujeme s $r_2 = -0,6923$, $s_2 = 0,9231$. Takto pokračujeme dále, dokud hodnoty h , j neklesnou pod 0,001.

Zobecněná Hornerova schémata pro jednotlivé iterace jsou přehledně vypsány v excelovém souboru. Níže v tabulce můžeme vidět, jak se vyvíjí hodnoty r_k a s_k .

k	r_k	s_k
1	-1	1
2	-0,6923	0,9231
3	-0,6139	0,9848
4	-0,618	1

Nalezli jsme $r = -0,618$ a $s = 1$, tedy hledaný polynom je tvaru $x^2 - 0,618x + 1$. Tímto polynomem dělíme polynom na levé straně rovnice, tedy $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Po dělení obdržíme (se zanedbatelným zbytkem) $x^2 + 1,618x + 1$.

Nyní již zbývá jen určit kořeny těchto dvou kvadratických trojčlenů:

Kořeny polynomu $x^2 - 0,618x + 1$ jsou $0,309 \pm 0,951i$.

Kořeny polynomu $x^2 + 1,618x + 1$ jsou $0,809 \pm 0,5878i$.

Nalezená řešení zadané rovnice jsou přibližně $-0,809 \pm 0,5878i$ a $0,309 \pm 0,951i$.

Příklad 7

Pomocí metody prosté iterace najděte řešení rovnice $x^6 - x^3 - 1 = 0$, které leží na intervalu $\langle 0,2 \rangle$ s odchylkou nejvýše 0,001.

Prvním úkolem při řešení je nalezení vhodné iterační funkce $g(x)$. Z polynomu $x^6 - x^3 - 1 = 0$ můžeme vyjádřit $x^6 = x^3 + 1$, a tedy $x = \sqrt[6]{x^3 + 1}$. Položme $g(x) = \sqrt[6]{x^3 + 1}$. Ověříme podmínky konvergence. Pro první podmínku musí platit $0 \leq \sqrt[6]{x^3 + 1} \leq 2$, po umocnění na šestou získáváme $0 \leq x^3 + 1 \leq 64$, což jistě platí pro všechna $x \in \langle 0,2 \rangle$. Dále má platit $|g'(x)| = \left| \frac{x^2}{2(x^3 + 1)^{5/6}} \right| < 1$. Tato nerovnost platí pro všechna $x > -0,879$, tedy i pro všechna x z našeho zkoumaného intervalu. Jelikož iterační funkce splňuje obě podmínky, lze ji použít a hledat její pevný bod. Kdybychom zvolili například funkci $g(x) = \sqrt[3]{x^6 - 1}$, pak narazíme na problém již při ověřování první podmínky konvergence. Tato funkce totiž na intervalu $\langle 0,2 \rangle$ nabývá hodnot $\langle -1,3,979 \rangle$.

Níže je uvedena tabulka iterací do dosažení podmínky zastavení.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	1,0000	1,1225	0,0358
2	1,1225	1,1582	0,0109
3	1,1582	1,1691	0,0034
4	1,1691	1,1725	0,0034
5	1,1725	1,1735	0,0010
6	1,1735	1,1738	0,0003

Nalezli jsme pevný bod funkce $g(x)$ na zadaném intervalu : $1,1735 \pm 0,001$. Toto číslo je zároveň řešením rovnice $x^6 - x^3 - 1 = 0$ na $\langle 0,2 \rangle$.

Příklad 8

Jedno řešení rovnice $-x^6 + x^5 - x^2 - x + 1 = 0$ leží na intervalu $\langle -4, 0 \rangle$. Najděte ho pomocí metod bisekce, regula falsi, sečen a tečen s odchylkou nejvýše 0,0001. Porovnejte počet iterací nutných k dosažení požadovaného výsledku.

Ze zadání víme, že na intervalu $\langle -4, 0 \rangle$ leží právě jedno řešení dané rovnice. Postupně tedy jen aplikujeme metody na tento interval.

Metoda bisekce na $\langle -4, 0 \rangle$.

k	a_k	s_k	b_k	$f(a_k)$	$f(s_k)$	$f(b_k)$	ϵ_k
1	-4,0000	-2,0000	0,0000	-5131,0000	-97,0000	1,0000	2,00000
2	-2,0000	-1,0000	0,0000	-97,0000	-1,0000	1,0000	1,00000
3	-1,0000	-0,5000	0,0000	-1,0000	1,2031	1,0000	0,50000
4	-1,0000	-0,7500	-0,5000	-1,0000	0,7722	1,2031	0,25000
5	-1,0000	-0,8750	-0,7500	-1,0000	0,1477	0,7722	0,12500
6	-1,0000	-0,9375	-0,8750	-1,0000	-0,3445	0,1477	0,06250
7	-0,9375	-0,9063	-0,8750	-0,3445	-0,0803	0,1477	0,03125
8	-0,9063	-0,8906	-0,8750	-0,0803	0,0380	0,1477	0,01563
9	-0,9063	-0,8984	-0,8906	-0,0803	-0,0201	0,0380	0,00781
10	-0,8984	-0,8945	-0,8906	-0,0201	0,0092	0,0380	0,00391
11	-0,8984	-0,8965	-0,8945	-0,0201	-0,0054	0,0092	0,00195
12	-0,8965	-0,8955	-0,8945	-0,0054	0,0020	0,0092	0,00098
13	-0,8965	-0,8960	-0,8955	-0,0054	-0,0017	0,0020	0,00049
14	-0,8960	-0,8958	-0,8955	-0,0017	0,0001	0,0020	0,00024
15	-0,8960	-0,8959	-0,8958	-0,0017	-0,0008	0,0001	0,00012
16	-0,8959	-0,8958	-0,8958	-0,0008	-0,0003	0,0001	0,00006

Nalezli jsme řešení $-0,8958 \pm 0,0001$.

Metoda regula falsi na $\langle -4, -1 \rangle$. Levý krajní bod volíme odlišný, abychom jako výsledek neobdrželi řešení z jiného intervalu. Jak by to dopadlo, kdybychom interval nechali beze změny, můžete vyzkoušet v odpovídajícím excelovém souboru.

k	a_k	b_k	p_k	$f(p_k)$	ϵ_k
1	-4,0000	-1,00000	-0,9994	-0,9930	0,08285
2	-0,9994	-1,00000	-0,9166	-0,1633	0,01628
3	-0,9166	-1,0000	-0,9003	-0,0341	0,00352
4	-0,9003	-1,0000	-0,8968	-0,0074	0,00077
5	-0,8968	-1,0000	-0,8960	-0,0016	0,00017
6	-0,8960	-1,0000	-0,8958	-0,0004	0,00004

Nalezli jsme řešení $-0,8958 \pm 0,0001$.

Metoda sečen na $\langle -4, -1 \rangle$. Levý krajní bod změněn ze stejného důvodu jako výše.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
3	-0,9994	-0,9930	0,08285
4	-0,9166	-0,1633	0,01630
5	-0,9003	-0,0339	0,00427
6	-0,8960	-0,0016	0,00021
7	-0,8958	0,0000	0,00000

Nalezli jsme řešení $-0,8958 \pm 0,0001$.

Newtonova metoda s počáteční iterací -2 , jakožto střed intervalu $\langle -4,0 \rangle$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	-2,0000	-97,0000	0,35273
2	-1,6473	-32,1752	0,28757
3	-1,3597	-10,4556	0,22392
4	-1,1358	-3,1909	0,15244
5	-0,9833	-0,8072	0,07234
6	-0,9110	-0,1180	0,01470
7	-0,8963	-0,0040	0,00054
8	-0,8958	0,0000	0,00000

Nalezli jsme řešení $-0,8958 \pm 0,0001$.

Všechny čtyři metody nám poskytly totožné řešení. Jak vidno, nejméně efektivní je dle očekávání metoda bisekce. Ostatní tři metody jsou z hlediska počtu iterací srovnatelné (liší se o jednotky, kdežto bisekce jich má dvojnásobně víc). U metod regula falsi a sečen jsme se ale setkali s komplikací volby počátečních iterací.

Příklad 9

Nalezněte reálná řešení rovnice $x^6 - x^3 - x^2 + 0,1 = 0$ s odchylkou nejvýše 0,001. Využijte metodu sečen, regula falsi, prosté iterace a Newtonovu.

Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou danému polynomu $f(x)$:

$$f_0(x) = x^6 - x^3 - x^2 + 0,1$$

$$f_1(x) = -6x^5 + 3x^2 + 2x$$

$$f_2(x) = 3x^3 + 4x^2 - 0,6 \text{ (vynásobeno 6)}$$

$$f_3(x) = -16,02x^2 - 3,6x + 2,13 \text{ (zaokrouhleno)}$$

$$f_4(x) = 3,49x + 1,58 \text{ (vynásobeno 10 a zaokrouhleno)}$$

$$f_4(x) = -0,48 \text{ (zaokrouhleno)}$$

Sestavíme tabulku pro vymezení reálných kořenů.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$W(x)$
$-\infty$	+	+	-	-	-	-	1
∞	+	-	+	-	+	-	5
-1	+	+	+	-	-	-	1
-0,5	-	-	+	-	-	-	2
0	+	+	-	+	+	-	3
0,3	-	+	-	-	+	-	4
1	-	-	+	-	+	-	4
2	+	-	+	-	+	-	5

Z tabulky můžeme vyčíst:

$$W(\infty) - W(-\infty) = 3 \Rightarrow 4 \text{ reálné kořeny}$$

$$W(-0,5) - W(-1) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle -1, 0,5 \rangle$$

$$W(0) - W(-0,5) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle -0,5, 0 \rangle$$

$$W(0,3) - W(0) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 0, 0,3 \rangle$$

$$W(2) - W(1) = 1 \Rightarrow 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 1,2 \rangle$$

Níže jsou tabulky s hledáním konkrétních řešení na zjištěných intervalech.

Metoda sečen na $\langle -1, 0,5 \rangle$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
3	-0,599	0,002	0,0068
4	-0,592	0,000	0,0004

Nalezli jsme řešení $-0,592 \pm 0,001$.

Metoda regula falsi na $\langle -0,5, 0 \rangle$.

k	a_k	b_k	p_k	$f(p_k)$	ϵ_k
1	-0,500	0,000	-0,457	-0,004	0,0189
2	-0,457	0,000	-0,438	-0,001	0,0035
3	-0,438	0,000	-0,435	0,000	0,0004

Nalezli jsme řešení $-0,435 \pm 0,001$.

Na řadě je metoda prosté iterace. Za iterační funkci zvolíme $g(x) = \sqrt{x^6 - x^3 + 0,1}$. Ověříme podmínky konvergence. Zprv musí platit $0 \leq \sqrt{x^6 - x^3 + 0,1} \leq 0,3$. Po umocnění získáváme $0 \leq x^6 - x^3 + 0,1 \leq 0,09$, můžete ověřit, že toto platí pro všechna

$x \in \langle 0, 0,3 \rangle$. Zadruhé požadujeme $|g'(x)| = \left| \frac{6x^5 - 3x^2}{2\sqrt{x^6 - x^3 + 0,1}} \right| < 1$. To platí pro všechna kladná $x < 0,395$, tedy pro všechna x z námi zkoumaného intervalu. Zvolená iterační funkce splňuje obě podmínky konvergence, můžeme hledat pevný bod.

k	x_k	$g(x_k)$	ϵ_k
1	1,000	0,316	0,0528
2	0,316	0,263	0,0231
3	0,263	0,286	0,0089
4	0,286	0,278	0,0089
5	0,278	0,281	0,0036
6	0,281	0,280	0,0014
7	0,280	0,280	0,0006

Nalezli jsme řešení $0,28 \pm 0,001$.

Na závěr Newtonova metoda. Jako počáteční aproximaci volíme střed zkoumaného intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy hodnotu 1,5.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	1,500	5,866	0,1638
2	1,336	1,621	0,0925
3	1,244	0,331	0,0308
4	1,213	0,029	0,0032
5	1,210	0,000	0,0000

Nalezli jsme řešení $1,21 \pm 0,001$.

Zadaná rovnice má 4 reálná řešení. Jsou jimi $-0,591 \pm 0,001$; $-0,434 \pm 0,001$; $0,28 \pm 0,001$ a $1,21 \pm 0,001$.

Příklad 10

Najděte řešení rovnice $x^5 + 3x - 2 = 0$ s odchylkou nejvýše 0,001, víte-li, že polynom na levé straně má pouze jeden reálný kořen. Využijte Newtonovu metodu.

Vycházíme-li z informace, že existuje pouze jeden reálný kořen, pak víme, že ostatní 4 kořeny jsou komplexní (po dvou komplexně sdružené). Naším prvním úkolem bude najít interval, ve kterém kořen leží. Využijeme věty 3.1.1. Podle ní pro hledané x platí: $\frac{1}{1+\frac{3}{x}} \leq |x| \leq 1 + \frac{1}{2}$. Zajímají nás tedy intervaly $\langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4} \rangle$ a $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \rangle$.

Pro krajní body můžeme nyní vyzkoušet jejich hodnotu po dosazení do příslušného polynomu $f(x) = x^5 + 3x - 2$. Podle věty 1.2.1 se budou na intervalu, ve kterém leží kořen, střídát znaménka.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= -\frac{451}{32}, \\ f\left(-\frac{1}{4}\right) &= -\frac{2817}{1024}, \\ f\left(\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1279}{1024}, \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{323}{32}. \end{aligned}$$

Reálný kořen polynomu $f(x)$ hledáme tedy na intervalu $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \rangle$.

Newtonova metoda s počáteční iterací $x_1 = 1$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	1,000	2,000	0,2500
2	0,750	0,487	0,1064
3	0,644	0,041	0,0107
4	0,633	0,000	0,0001

Nalezli jsme řešení $0,633 \pm 0,001$.

Newtonova metoda pro hledání komplexních kořenů. Startujeme s iterací $1 + i$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	$1 + i$	$-3 - i$	$0,1765 + 0,0588i$
2	$0,824 + 0,941i$	$-0,867 + 0,072i$	$0,0843 - 0,0390i$
3	$0,739 + 0,980i$	$-0,031 + 0,162i$	$0,0096 + 0,0158i$
4	$0,749 + 0,996i$	$0,001 - 0,006i$	$0,0004 + 0,0005i$

Nalezli jsme řešení $0,749 + 0,996i$. Spolu s ním má samozřejmě rovnice jako řešení i číslo komplexně sdružené $0,749 - 0,996i$.

Ještě jednou Newtonova metoda, tentokrát s první iterací $-1 - i$.

k	x_k	$f(x_k)$	ϵ_k
1	$-1 - i$	$-1 + i$	$0,0588 - 0,0588i$
2	$-1,059 - 0,941i$	$-0,146 - 0,130i$	$0,0061 + 0,0096i$
3	$-1,065 - 0,951i$	$0,002 + 0,003i$	$0,0001 + 0,0002i$

Nalezli jsme řešení $-1,065 - 0,951i$, s ním současně i $-1,065 + 0,951i$.

Zadaná rovnice má řešení $0,749 \pm 0,996i$; $-1,065 \pm 0,951i$ a $0,633 \pm 0,001$.

Závěr

Tato práce se zabývala numerickými metodami řešení algebraických rovnic. Cílem bylo vytvořit text, který by mohl sloužit jako studijní opora nejen pro studenty vysokých škol, kteří se v rámci svého studia s tímto tématem setkají, ale i pro zájemce z řad žáků středních škol.

Výsledkem je soupis zásadních definic, které jsou pro tuto problematiku potřebné, dále přehled sedmi konkrétních numerických metod a v neposlední řadě také sbírka řešených příkladů. V prvních dvou kapitolách jsou zavedeny základní definice a věty z oblasti teorie polynomů, funkcí a algebraických rovnic, které jsou základními kameny při snaze o porozumění dané problematice. V první části třetí kapitoly byly představeny základní metody zjišťování počtů a lokalizace (reálných) kořenů polynomů. V druhé části je popsáno a na příkladech ilustrováno pět základních a nejspíše nejpoužívanějších numerických metod pro hledání reálných kořenů. V poslední části třetí kapitoly nalezneme dvě metody pro hledání kořenů komplexních, jde spíše o rozšiřující část a její hlavní přínos může být také v nastínění použití komplexní aritmetiky v programu Excel. Čtvrtá kapitola obsahuje sbírku příkladů řešených téměř bezvýhradně právě v Excelu.

Za svůj hlavní přínos považuji vytvoření přehledného materiálu, který se dlouze nezabývá teoretickým odvozováním a dokazováním daných vět. Text především sází na představení hlavních myšlenek a následné praktické použití, tedy popis toho, jak pomocí MS Excel dané příklady vyřešit. Dalším přínosem by mohla být tvorba vlastních ilustrací v teoretické části, ale především kompletní sbírka autorských příkladů využívající všechny zmíněné numerické metody.

Numerických metod pro hledání kořenů polynomů, potažmo pro řešení (nejen) algebraických rovnic, je celá řada. Dají se rovněž mezi sebou kombinovat a cest k jejich využití je tedy velmi mnoho. Zaměřil jsem se speciálně na ty, které se dají označit za běžně používané a také je jejich implementace uživatelsky přívětivá a nevyžaduje hlubší infromatické znalosti. Přeji čtenářům spoustu úspěchů při studiu tohoto tématu a doufám, že jim text bude ku pomoci.

Práce je vysázena v programu \LaTeX , obrázky jsou autorské a vytvořeny v programu Geogebra. Jak je uvedeno výše, při řešení příkladů byl využit program MS Excel.

Literatura

- [1] KRUTSKÝ, F., 1998. *Algebra I*. 2. vydání. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého. ISBN 80-7067-929-8.
- [2] ČECHOVÁ, P., 2013. *Základní věta algebry a její důkazy*. Brno. Diplomová. Masarykova univerzita.
- [3] TRÁVNÍČEK, S., P. CALÁBEK a J. ŠVRČEK, 2017. *Matematická analýza I a II (pro učitelské obory)*. Online. Olomouc . Dostupné z: <https://kag.upol.cz/data/upload/20/MAI+II.pdf> [citováno 2023-05-01].
- [4] MARVAN, M. *Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001: 15. Polynomy*. Online. Dostupné z: <https://www.slu.cz/math/cz/knihovna/docs/algebra1/15.-polynomy/>. Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě. [citováno 2023-05-01].
- [5] Budan-Fourier theorem. *Encyclopedia of Mathematics*. Online. Dostupné z: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Budan-Fourier_theorem [citováno 2022-04-20].
- [6] HOROVÁ, I. a J. ZELENKA, 2004. *Numerické metody*. 2. rozšířené vydání. Brno: Masarykova univerzita v Brně. ISBN 80-210-3317-7.
- [7] FAJMON, B., I. HLAVIČKOVÁ a M. NOVÁK, 2014. *Matematika 3*. Online. VUT Brno. Dostupné z: http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/texty/BMA3/CZ/BMA3_plna_verze_CZ.pdf [citováno 2022-08-15].
- [8] DANĚK, J. *Nelineární rovnice*. Online. Dostupné z: https://home.zcu.cz/~danek/DATA/WWW_STRANKY/soubory/nelinearni_rovnice.pdf [citováno 2022-08-16].
- [9] STOER, J. a R. BULIRSCH, 1983. *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer. ISBN 978-0387904207.
- [10] WIERSMA, A.G., 2016. *The Complex Dynamics of Newton's Method*. Bakalářská. University of Groningen.
- [11] MÍKA, S., 1985. *Numerické metody algebry*. 2. vyd. Praha: SNTL.
- [12] SKOTÁK, P., 2017. *Numerické metody pro nalezení kořenů polynomů*. Brno. Bakalářská. Masarykova univerzita.