UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Tomáš Smolka

Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika ve výuce na 2. stupni základních škol

Olomouc 2024 Vedoucí práce: Mgr. Jan Wossala, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a uvedl jsem v ní veškerou literaturu a ostatní informační zdroje, které jsem použil.

V Olomouci dne …………….. Podpis……………………..

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce panu Mgr. Janu Wossalovi, Ph.D. za odborné vedení závěrečné práce, inspiraci, vstřícný přístup a poskytování rad. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a kamarádům za jejich podporu.

Jméno a příjmení:	Tomáš Smolka
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jan Wossala, Ph.D.
Rok obhajoby:	2024

Název práce:	Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika ve výuce na 2. stupni základních škol
Název v angličtině:	Combinatorics, probability and statistics in teaching at 2nd level of primary schools
Zvolený typ práce:	Aplikační
Anotace práce:	Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části jsou vysvětleny základní pojmy, jsou uvedené vzorce a vypočítané vzorové úlohy z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky. Je zmíněno zařazení kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky v Rámcovém vzdělávacím programu základních škol. V praktické části jsou vybrané úlohy pro užití ve výuce na 2. stupni a následně řešené.
Klíčová slova:	Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika, základní pojmy, 2. stupeň ZŠ, vybrané úlohy.
Anotace v angličtině:	The thesis is divided into theoretical and practical parts. The theoretical part explains the basic concepts, gives formulas and sample problems from combinatorics, probability and statistics. The inclusion of combinatorics, probability and statistics in the Framework Curriculum of Primary Schools is mentioned. In the practical part, selected problems for use in the teaching of 2nd level and subsequently solved.
Klíčová slova v angličtině:	Combinatorics, probability, statistics, basic concepts, 2nd grade elementary school, selected problems.
Přílohy vázané v práci:	0
Rozsah práce:	58 stran
Jazyk práce:	Čeština

Obsah

Úvod ... 7

TEORETICKÁ ČÁST ... 8

1. Kombinatorika ... 9

Základní pojmy kombinatoriky ... 9

1.1 Pravidlo součtu a součinu ... 9

1.1.1 Pravidlo součtu: ... 9

1.1.2 Pravidlo součinu: ... 10

1.2 Faktoriál ... 11

1.3 Variace bez opakování ... 12

1.4 Permutace bez opakování ... 13

1.5 Kombinace bez opakování ... 14

Základní pojmy kombinatoriky s opakováním ... 15

1.6 Variace s opakováním ... 15

1.7 Permutace s opakováním ... 16

1.8 Kombinace s opakováním ... 17

2. Pravděpodobnost ... 18

Základní pojmy pravděpodobnosti ... 18

2.1 Náhodné pokusy ... 18

2.2 Náhodné jevy ... 18

2.3 Klasická definice pravděpodobnosti – Laplaceovo schéma ... 19

2.4 Vlastnosti pravděpodobnosti ... 20

2.5 Nezávislost jevů ... 22

2.6 Podmíněná pravděpodobnost ... 24

3. Statistika ... 25

Základní pojmy statistiky ... 25

3.1 Statistický soubor, statistické jednotky, rozsah souboru ... 25

3.2 Statistický znak ... 25

3.3 Absolutní četnost ... 25

3.4 Relativní četnost ... 26

3.5 Rozdělení četností – grafické znázornění ... 27

3.6 Aritmetický průměr ... 29

3.7 Modus ... 30

3.8 Medián ... 30

4. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika ve výuce na 2. stupni ZŠ ... 32

4.1 Rámcové vzdělávací programy ... 32

4.2 Školní vzdělávací programy ... 32

4.3 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání ... 32

4.4 Matematika a její aplikace ... 32

4.5 Matematika a její aplikace na 2. stupni ... 33

PRAKTICKÁ ČÁST ... 34

5. Vybrané úlohy pro užití ve výuce na 2. stupni základních škol ... 35

5.1 Vybrané úlohy z kombinatoriky ... 35

5.2 Vybrané úlohy z pravděpodobnosti ... 43

5.3 Vybrané úlohy ze statistiky ... 49

Závěr ... 53

Seznam použitých matematických symbolů a značek: ... 54

Seznam použité literatury: ... 56

Internetové zdroje: ... 56

Seznam obrázků: ... 57

Seznam tabulek: ... 57

Seznam grafů: ... 58

Úvod

Kombinatorika a pravděpodobnost jsou oblasti matematiky, kterým se na základních školách příliš nevěnuje. Téma bakalářské práce „Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika ve výuce na 2.stupni ZŠ“ jsem si vybral z důvodu prohloubení a hlubšího pochopení této matematické oblasti.

Bakalářská práce je rozdělena na dvě části – teoretickou a praktickou. Cílem teoretické části je na základě studia literatury prezentovat základní definice a vzorce pro výpočty, doplněné o řešené úlohy, které pomohou k lepšímu pochopení daného tématu. Pro lepší názornost jsou v některých případech vypracovány obrázkově řešené úlohy nebo jsou barevně rozlišeny doplňované údaje do vzorců. Nejprve je práce věnována kombinatorice, která navazuje na pochopení pravděpodobnosti a na závěr statistice.
Dále je zmíněno zařazení kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky do Rámcového vzdělávacího programu základního vzdělávání.

Cílem praktické části je čtenářům prezentovat vybrané úlohy pro užití ve výuce na 2.stupni základních škol. V úlohách jsou uvedeny postupy, barevné znázornění a různé možnosti řešení kombinatorických, pravděpodobnostních a statistických úloh.
Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika podporuje logické myšlení, představivost a celkovou orientaci v běžném životě, proto by bylo dobré, aby žáci této matematické oblasti co nejlépe porozuměli.

TEORETICKÁ ČÁST

1. Kombinatorika

„Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáním a výběrem prvků z dané množiny, tj. tvořením konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi." (Blažková, Vaňurová in Novotná, 2012, s. 156) Od jiných matematických disciplín, se liší kombinatorika tím, že se zabývá jen konečnými množinami. To znamená, že se s nekonečnem v kombinatorice nesetkáme. Liší se i tím, že většinou nemáme možnost ověření správnosti výsledku, ke kterému jsme dospěli. Musíme spoléhat jen na svůj úsudek (Calda, Dupač, 1993).

Základní pojmy kombinatoriky

1.1 Pravidlo součtu a součinu

„Má.li každé pravidlo výjimku, pak kombinatorická pravidla jsou výjimkou, neboť žádnou výjimku nemají." (Calda, Dupač, 1993, s. 8)

K výpočtu kombinatorických úloh si většinou vystačíme s dvěma jednoduchými pravidly. Pravidlo součtu a součinu.

1.1.1 Pravidlo součtu:

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní (tzn. mají prázdný průnik), pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$. (Calda, Dupač, 1993, s. 9)

Uvedeme si jednoduchý příklad pro lepší pochopení a snadné vysvětlení pravidla součtu.

Příklad: Michal se potřebuje obléknout. Má na výběr ze 3 riflí a 4 kalhot. Kolika způsoby se může Michal obléknout?

Řešení: V tomto příkladu máme 2 množiny a to jsou: první množina jsou rifle (A_1) a druhá množina jsou kalhoty (A_2). Kde v množině A_1 máme 3 prvky a v množině A_2 máme 4 prvky. Sjednotíme-li (sečteme množiny) množiny $A_1 \cup A_2$ dostaneme výsledek:

$$3 + 4 = 7$$

Odpověď: Michal se může obléknout sedmi způsoby.

Obrázek 1: Rifle a kalhoty, zdroj: freepik.com

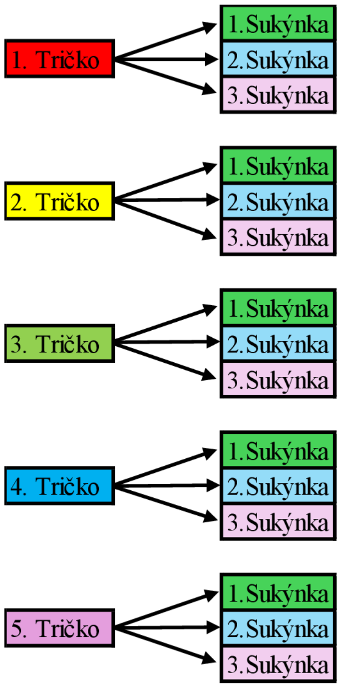
1.1.2 Pravidlo součinu:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat $n_1$způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$. (Calda, Dupač, 1993, s. 9)

Uvedeme si podobně jednoduchý příklad pro lepší pochopení a snadnější vysvětlení rozdílu, použitím aplikace pravidla součtu mezi pravidlem součinu.

Příklad: Anička má v šatníku 5 triček různých barev a 3 sukýnky různých barev. Kolika způsoby se může Anička obléknout tak, aby měla na sobě vždy jiný pár oblečení?

Řešení: V tomto příkladu máme 2 množiny a to jsou: první množina jsou trička (A) a druhá množina jsou sukýnky (B). Kde v množině A máme 5 prvků a v množině B máme 3 prvky. Každý prvek z množiny A můžeme libovolně přiřadit k libovolnému prvku z množiny B. To znamená $5 \cdot 3 = 15$



Obrázek 2: Ukázka řešení příkladu součinu, zdroj: autor

Odpověď: Anička má 15 způsobů, jak se obléknout.

Je vidět, že obě pravidla jsou skoro samozřejmá, což jim však neubírá na významu. Pomocí těchto pravidel budeme později odvozovat kombinatorické vzorce. Než se pustíme do variací, permutací a kombinací vysvětlíme si ještě symbol – „vykřičník“, který se nazývá **faktoriál**.

1.2 Faktoriál

Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}$$

$$n \in N$$

$n!$ (čteme: n faktoriál) (Calda, Dupač, 1993, s. 18)

Ukážeme si prvních 10 faktoriálů jako malou pomůcku pro výpočty a názornou ukázku, jak rychle čísla (dané možnosti) narůstají.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$$

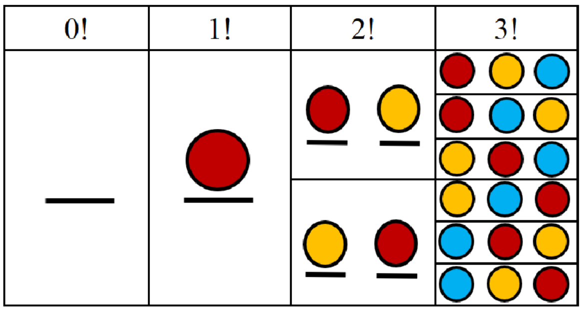
$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$$

Vysvětleme si proč 0! a 1! se rovná 1.

n! ve skutečnosti znamená, kolika způsoby můžeme seřadit n prvků.



Obrázek 3: Ukázka faktoriálu, zdroj: autor

Z obrázku můžeme vidět, že pokud máme **tři** prvky, máme 6 možností, jak je uspořádat (seřadit). Pokud máme **dva** prvky máme 2 možnosti a **jeden** prvek máme 1 možnost. V případě, že máme **nula** prvků, tak nemáme žádnou možnost, jak daný prvek seřadit, ale to je právě ta 1 možnost, jak daný prvek uspořádat (nijak). Proto $0! = 1$.

1.3 Variace bez opakování

Další z důležitých kombinatorických pojmů jsou variace.

k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje **nejvýše jednou**.

Počet $V(k, n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \ldots (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

(Calda, Dupač, 1993, s. 13-14)

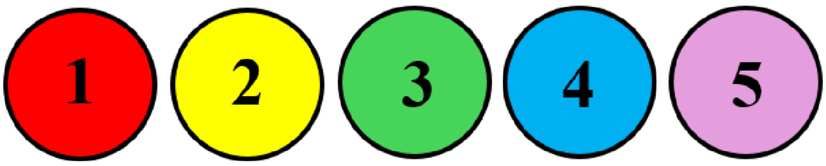
Máme n navzájem různých prvků a přirozené číslo k, $k \leq n$. Pro výběr prvního členu uspořádané k-tice máme n možností (zde může být libovolný člen z n prvků). Po prvním výběru máme na výběr druhého členu už jen n-1 možností (zde nemůže být člen, který jsme již vybrali na první místo). Po výběru prvního a druhého členu máme na výběr třetího členu už jen n-2 možností a tak dále, až pro výběr k-tého členu máme po výběru všech předchozích členů právě n-(k-1) možností. Lze to znázornit schematicky takto:

(Calda, Dupač, 1993, s. 13)

uspořádaná k-tice	1.člen	2.člen	…	(k-1)-ní člen	k-tý člen
možnosti výběru z n prvků	n	n-1	…	n-(k-2)	n-(k-1)

Tabulka 1: Variace bez opakování: zdroj: Calda, Dupač, 1993, s. 13

Příklad: Kolik přirozených trojciferných čísel můžeme vytvořit z číslic 1,2,3,4,5 pokud každá číslice se v daném čísle vyskytuje **pouze** jednou.



Obrázek 4: Čísla, zdroj: autor

Řešení: Příklad můžeme řešit podle pravidla součinu, které již známe, ale tento příklad je klasickým příkladem variace bez opakování. Jde o tříčlennou variaci z 5 prvků, kde můžeme použít vzorec: $\mathrm{V}(k,n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$, kde k značí velikost té skupiny (v našem případě trojciferná čísla), kterou chceme vytvořit a n je počet prvků, které máme na výběr (pět číslic – 1,2,3,4,5).

$$\mathrm{V}(k,n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$$

$$V(3,5) = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Odpověď: Můžeme vytvořit 60 přirozených trojciferných čísel.

1.4 Permutace bez opakování

Další z důležitých kombinatorických pojmů jsou permutace.

Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.
Jinak řečeno permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **právě jednou**.
Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků je

$$\boldsymbol{P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.}$$

$$P(n) = V(n,n) = n!$$

(Calda, Dupač, 1993, s. 17-18)

Permutace jsou zvláštní případ variací, kdy $\boldsymbol{n = k}$. Počet uspořádání konečného počtu prvků, kdy se každý prvek vyskytuje právě jednou, se nazývá **permutace bez opakování**.

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 232)

Příklad: Kolik přirozených čísel můžeme vytvořit z číslic 1,2,3,4,5 pokud každá číslice se musí v daném čísle vyskytnout **právě** jednou?

Řešení: Je jasné, že budeme hledat pěticiferná čísla ze zadaných číslic. Hledáme tedy kolik máme na každé pozici možností pro dosazení.

První číslici můžeme vybrat z 5 možností: (1,2,3,4,5). Vybereme si **např**. číslo 3.

3 _ _ _ _

Druhou číslici můžeme vybrat ze 4 možností: (1,2,4,5). Vybereme si **např**. číslo 5.

3 5 _ _ _

Třetí číslici můžeme vybrat ze 3 možností: (1,2,4). Vybereme si **např**. číslo 2.

3 5 2 _ _

Čtvrtou číslici můžeme vybrat ze 2 možností: (1,4). Vybereme si **např**. číslo 4.

3 5 2 4 _

Pátou číslici můžeme vybrat už jen z 1 možnosti: (1). Proto vybereme číslo 1.

3 5 2 4 1

Děláme tedy **permutace** z pěti prvků:

$$P(n) = n!$$

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Odpověď: Můžeme vytvořit 120 přirozených čísel, kde se právě každá z číslic vyskytuje právě jednou.

1.5 Kombinace bez opakování

k-**členná kombinace** z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše jednou**.

Počet K(*k*,*n*) všech *k*-členných kombinací z *n* prvků je

$$\boldsymbol{K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

$\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo (čteme *n* nad *k*) (Calda, Dupač, 1993, s. 25-27)

Kombinace se výrazně liší od variací a permutací tím, že nezáleží na pořadí prvků. Budeme ale opět požadovat, aby se žádný prvek neopakoval.

Příklad: Na šachový turnaj, kde hraje „každý s každým“ se přihlásilo pět hráčů. Tomáš, Honza, Michal, Jakub a Adam. Vypiš všechny možné zápasy a vypočítej pomocí vzorce, kolik zápasů se celkem odehrálo?

Řešení: Zde je nutné žáky upozornit na to, že v případě, že hraje „každý s každým“, nezáleží na pořadí a není nutné, aby např. Tomáš, který hrál s Honzou, chtěl opět hrát Honza s Tomášem.

Tomáš-Honza	---	---	---	---
Tomáš-Michal	Honza-Michal	---	---	---
Tomáš-Jakub	Honza-Jakub	Michal-Jakub	---	---
Tomáš-Adam	Honza-Adam	Michal-Adam	Jakub-Adam	---

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$K(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = \frac{10}{1} = 10$$

Odpověď: Odehrálo se celkem 10 zápasů.

Příklad: Máme 7 fotbalistů a 3 stejné fotbalové míče. Kolika způsoby lze rozdělit míče mezi fotbalisty za předpokladu, že 1 fotbalista dostane jen 1 míč?

Řešení: V tomto příkladu si vybíráme trojice ze 7 prvků (fotbalistů), kdy nezáleží na pořadí, v jakém jednotlivé prvky vybereme, protože daná trojice dostane stejný míč. Jedná se o kombinace bez opakování, takže dosadíme do vzorce.

$$K(3,7) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3! \cdot \cancel{4!}} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 35$$

Odpověď: Míče mezi fotbalisty lze rozdělit 35 způsoby.

Základní pojmy kombinatoriky s opakováním

1.6 Variace s opakováním

k-**členná variace s opakováním** z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše *k*-krát**.

Počet $V'(k,n)$ všech *k*-členných variací s opakováním z *n* prvků je

$$\boldsymbol{V'(k,n) = n^k}$$

Pro odvození vzorce se použije kombinatorické pravidlo součinu:

$$V'(k,n) = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

U variací bez opakování jsme zjišťovali počet výběrů prvků, kde záleželo na pořadí a kde se každý prvek vyskytoval **nejvýše jednou**. Jediný rozdíl u variací s opakováním je ten, že se mohou jednotlivé prvky ve výběru opakovat. (Calda, Dupač, 1993, s. 35-37)

Lze to znázornit schematicky takto:

uspořádaná *k*-tice	1.člen	2.člen	…	(*k-1*)-ní člen	*k*-tý člen
možnosti výběru z *n* prvků s neomezeným počtem	*n*	*n*	…	*n*	*n*

Tabulka 2: Variace s opakováním, zdroj: Calda, Dupač, 1993, s. 36

Použijeme podobný příklad jen s menší úpravou jako u variací bez opakování:

Příklad: Kolik přirozených trojciferných čísel můžeme vytvořit z číslic 1,2,3,4,5 pokud se číslice mohou opakovat.

Řešení: Jde o tříčlennou variaci z 5 prvků, kde můžeme použít vzorec: $V'(k,n) = n^k$ kde *k* značí velikost té skupiny (v našem případě trojciferná čísla), kterou chceme vytvořit a *n* je počet prvků, které máme na výběr (pět číslic – 1,2,3,4,5). Lze to řešit:

a) Podle pravidla součinu:

První číslici můžeme vybrat z 5 možností:

$$5\ \_\ \_$$

Druhou číslici můžeme vybrat opět z 5 možností:

$$5\ 5\ \_$$

Třetí číslici můžeme vybrat opět z 5 možností:

$$5\ 5\ 5$$

Výsledek: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) Podle vzorce:

$$V'(k,n) = n^k \rightarrow V'(3,5) = 5^3 = 125$$

Odpověď: Můžeme vytvořit 125 přirozených trojciferných čísel.

1.7 Permutace s opakováním

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **aspoň jednou**.

Počet $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots, k_n$-krát, je

$$\boldsymbol{P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!}} \text{ nebo } \boldsymbol{P'_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}}$$

(Calda, Dupač, 1993, s. 41-42; Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 232)

Příklad: Kolik různých pěticiferných čísel je možné vytvořit z čísel 7,8,9, pokud:
a) se číslice 7 vyskytuje dvakrát, číslice 8 dvakrát a číslice 9 jedenkrát?
b) se číslice 7 vyskytuje třikrát, číslice 8 jedenkrát a číslice 9 jedenkrát?

a)

Řešení: Budeme hledat pěticiferná čísla ze zadaných číslic. Protože máme 2x sedmičku, 2x osmičku a 1x devítku, může to vypadat následovně:

$$\underline{7}\ \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{8}\ \underline{9} \text{ nebo } \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{7} \text{ nebo } \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{9} \dots$$

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!} =$$

$$P'(2,2,1) = \frac{(2+2+1)!}{2!\,2!\,1!} = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = \frac{120}{4} = 30$$

Odpověď: Můžeme vytvořit 30 různých pěticiferných čísel.

b)

Řešení: Budeme hledat pěticiferná čísla ze zadaných číslic. Protože máme 3x sedmičku, 1x osmičku a 1x devítku, může to vypadat následovně:

$$\underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{9} \text{ nebo } \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7} \text{ nebo } \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{9}\ \underline{7} \dots$$

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!} =$$

$$P'(3,1,1) = \frac{(3+1+1)!}{3!\,1!\,1!} = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,1!\,1!} = \frac{20}{1} = 20$$

Odpověď: Můžeme vytvořit 20 různých pěticiferných čísel.

1.8 Kombinace s opakováním

k-**členná kombinace s opakováním** z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše k-krát**.

Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$\boldsymbol{K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}}$$

Obecně platí: $K'(k,n) = P'(k,n-1) = \frac{[k+(n-1)]!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$

(Calda, Dupač, 1993, s. 47-48)

Příklad: Máme fotbalistu a 3 různé barvy fotbalových míčů: červená, žlutá a bílá. Kolika způsoby si fotbalista může vybrat 5 míčů?

Obrázek 5: Fotbalista, zdroj: freepik.com

Řešení: V tomto příkladu si vybíráme pětice (k) ze 3 prvků (n), kdy nezáleží na pořadí, v jakém jednotlivé prvky vybereme. Fotbalista si vybírá 5 míčů, protože na výběr jsou jen 3 barvy, tak si musí vybrat danou barvu vícekrát, takže se jedná o kombinace s opakováním.

Dosadíme do vzorce:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k} =$$

$$K'(5,3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,2!} = \frac{42}{2} = \frac{21}{1} = 21$$

Odpověď: Fotbalista si může vybrat 21 způsoby pět míčů ze tří barev.

	červená	žlutá	bílá	Celkem
5				3
4+1				6
3+2				6
3+1+1				3
2+2+1				3
Možnosti	7	7	7	21

Obrázek 6: Ukázka řešení příkladu kombinace s opakováním, zdroj: autor
Fotbalové míče, zdroj: freepik.com

2. Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, která zkoumá náhodné pokusy a náhodné jevy. Pravděpodobnost je vlastně šance, že se stane nějaký jev. Matematická teorie pravděpodobnosti používá slova, jako jsou pravděpodobnost, naděje, šance. Jaká je pravděpodobnost, že zítra vyhraji v kartách? Jakou mám naději, že zítra potkám Elišku? Jaká je šance, že zítra porazím Petra? (Crilly, 2007)

Základní pojmy pravděpodobnosti

2.1 Náhodné pokusy

Náhodné pokusy jsou pokusy, které i při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům. Výsledky pokusů závisí nejen na předepsaných podmínkách, ale také na náhodě. Klasickými náhodnými pokusy jsou tah sportky, hod hrací kostkou, hod mincí, míchání karet….

U všech náhodných pokusů budeme předpokládat, že předem víme všechny možné výsledky, které mohou nastat. Výsledky se budou navzájem vylučovat (pokud nastane jeden, nemůže nastat druhý), ale zároveň jeden z nich nastane vždy (nenastane žádný jiný výsledek, než který jsme předpokládali).

Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu budeme značit Ω (Omega), její libovolný prvek písmenem ω. Ve školské matematice bude množina Ω vždy konečná.

(Calda, Dupač, 1993)

2.2 Náhodné jevy

Náhodný jev je podmnožina množiny všech možných **výsledků** náhodného pokusu, který značíme velkými písmeny: A, B, C…

Znalost přírodních zákonů nám umožňuje přesně předvídat, že pokud například vyhodíme minci směrem nahoru, můžeme si být jisti, že bude padat směrem dolů. Není ale možné přesně určit, kterou stranou tahle mince padne vzhůru. Panna nebo orel? To určuje náhoda. (Płocki, Tlustý 2007)

Obrázek 7: Mince, zdroj: freepik.com

2.3 Klasická definice pravděpodobnosti – Laplaceovo schéma

Nechť je dána konečná množina Ω jevů, které jsou stejně „možné“, jev A je libovolná podmnožina množiny Ω. Pravděpodobnost jevu A nazýváme číslo

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$$

kde m je počet prvků množiny A ($m \leq n$), n je počet prvků množiny Ω.

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 238)

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne číslo 3?

Řešení: Množina Ω jsou všechny možnosti, které mohou nastat při hodu kostkou: Ω = {1;2;3;4;5;6}. Množina A jsou možnosti, které chceme, aby nastaly. V našem případě je to jen jedna možnost a to číslo 3. A = {3}.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(3) = \frac{1}{6}$$

Odpověď: Při hodu kostkou padne číslo 3 s pravděpodobností $\frac{1}{6}$.

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo?

Řešení: Množina Ω jsou všechny možnosti, které mohou nastat při hodu kostkou: Ω = {1;2;3;4;5;6}. Množina A jsou možnosti, které chceme, aby nastaly. V našem případě jsou to všechna lichá čísla: A = {1;3;5}.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(1,3,5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

nebo:

$$P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{6}$$

Z toho vyplývá:

$$P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Odpověď: Při hodu kostkou padne liché číslo s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

2.4 Vlastnosti pravděpodobnosti

Pravidlo 1

Pro libovolnou množinu $\mathbf{A} \subset \Omega$ platí:

(čteme: množina **A** je podmnožinou množiny Omega)

a) Pravděpodobnost je vždy nezáporné číslo a pohybuje se mezi 0 a 1.

$$\boldsymbol{P(A) \in \langle 0; 1 \rangle}$$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011; Kyselová, Richtáriková, Žovincová, 2009, s. 149)

b) Jestliže jev A není výsledkem žádného náhodného pokusu, pak jev A nazýváme **nemožný**. $A = \emptyset$

(čteme: A je prázdná množina) ($\emptyset$ - množina, která neobsahuje žádný prvek)

$$\boldsymbol{P(A) = P(\emptyset) = 0}$$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 238; Kyselová, Richtáriková, Žovincová, 2009)

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo 7?

Řešení: Tato situace nemůže nastat, protože na hrací kostce jsou jen čísla: (1,2,3,4,5,6). Jev A je nemožný. $P(A) = 0$

Odpověď: Pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo 7 je nulová (nemožná).

c) Jestliže jev A je výsledkem každého náhodného pokusu, pak jev A nazýváme **jistý**. A = Ω

$$\boldsymbol{P(A) = P(\Omega) = 1}$$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 238; Kyselová, Richtáriková, Žovincová, 2009)

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo menší nebo rovno 6?

Řešení: Tato situace musí nastat, protože na hrací kostce jsou právě čísla: (1,2,3,4,5,6). Jev A je jistý. $P(A) = 1$

Odpověď: Pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo menší nebo rovno 6 je stoprocentní (jistá).

Obrázek 8: Hrací kostky, zdroj: freepik.com

Pravidlo 2

Pro libovolnou množinu **A** ⊂ Ω platí:

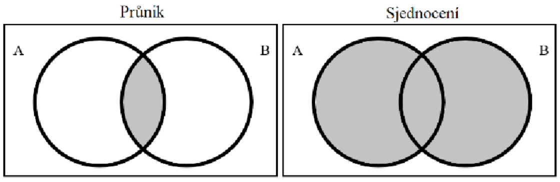
$$\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$$

Jevy **A, A´** nazýváme **opačné** ($\boldsymbol{A \cap A'} = \emptyset\ a\ \boldsymbol{A \cup A'} = \Omega$).

Jev **A´** se nazývá **doplněk jevu A vzhledem k množině Ω.**

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 239; Kyselová, Richtáriková, Žovincová, 2009)

(∩ - průnik, ∪ - sjednocení)



Obrázek 9: Grafické znázornění průniku a sjednocení dvou množin, zdroj: autor

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že na kostce **nepadne** číslo 2?

Řešení: Tento příklad vypočítáme pomocí opačného jevu A´. Chceme, aby nám padly čísla: (1,3,4,5,6), ale pro nás bude jednodušší si říct, že chceme, aby nám padla 2, o které již víme, že její pravděpodobnost při hodu kostky je $\frac{1}{6}$. Od všech jevů, které mohou nastat při hodu kostkou, odečteme $\frac{1}{6}$ (v našem případě číslo 2) a získáme jev, který potřebujeme.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že na kostce nepadne číslo 2 je $\frac{5}{6}$.

Pravidlo 3

Pro libovolné množiny **A** ⊂ Ω, **B** ⊂ Ω platí:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Kyselová, Richtáriková, Žovincová, 2009, s. 149)

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo (jev A) nebo číslo větší než 3 (jev B)?

Řešení: Máme množinu A = {1,3,5} a máme množinu B = {4,5,6}, použijeme vzorec pro sjednocení, kde musíme odečíst průnik (to jsou čísla, která se nachází v obou množinách, u nás je to číslo 5).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché nebo větší číslo než 3 je $\frac{5}{6}$.

Pravidlo 4

Pro libovolné množiny $\mathbf{A} \subset \Omega$, $\mathbf{B} \subset \Omega$ a $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ platí:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$$

Když $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, pak jevy nazýváme disjunktní (vzájemně neslučitelné – nemají žádný společný prvek).

Kyselová, Richtáriková, Žovincová, 2009, s. 149)

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo (jev A) nebo číslo 2 (jev B)?

Řešení: Máme množinu A = {1,3,5} a máme množinu B = {2}. Použijeme vzorec pro sjednocení. Průnik nemusíme odečítat, protože nemají žádný společný prvek.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo nebo číslo 2 je $\frac{2}{3}$.

2.5 Nezávislost jevů

Jevy A, B se nazývají nezávislé (jev A není závislý na jevu B a naopak), jestliže platí:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s.240)

Příklad: Máme červenou a zelenou kostku. Budeme předpokládat, že na červené kostce padne číslo 3 (jev A) a součet obou kostek bude 7 (jev B). Jsou tyto jevy nezávislé?

Řešení:

Máme dvě kostky (dva hody): Ω = 36 (6 · 6)

Jev A: na červené kostce padne číslo 3 = {(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6)} = výsledky pozitivní jevu A (6 možností).

Jev B: součet obou kostek bude 7 = {(6;1), (5;2), (4;3), (3;4), (2;5), (1;6)} = výsledky pozitivní jevu B (6 možností).

Když víme, že nám na červené kostce padlo číslo 3, potom pozitivní výsledek jevu B je kombinace (3;4).

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Odpověď: Jevy jsou na sebe nezávislé.

V případě nerovnosti jsou to jevy závislé. Uvedeme si na příkladu:

Příklad: Máme červenou a zelenou kostku. Budeme předpokládat, že na červené kostce padne číslo 3 (jev A) a součet obou kostek bude 8 (jev B). Jsou tyto jevy nezávislé?

Řešení:

Máme dvě kostky (dva hody): Ω = 36 (6 · 6)

Jev A: na červené kostce padne číslo 3 = {(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6)} = výsledky pozitivní jevu A (6 možností).

Jev B: součet obou kostek bude 8 = {(6;2), (5;3), (4;4), (3;5), (2;6)} = výsledky pozitivní jevu B (5 možností).

Když víme, že nám na červené kostce padlo číslo 3, potom pozitivní výsledek jevu B je kombinace (3;5).

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{5}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36}$$

Odpověď: Jevy nejsou na sebe nezávislé (jevy jsou závislé).

2.6 Podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že jev B již nastal, se nazývá **podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ jevu A.**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s.239)

Příklad: Máme červenou a zelenou kostku. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že na červené kostce padla 3 za podmínky, že padl součet 7?

Řešení:

Máme dvě kostky (dva hody): Ω = 36 (6 · 6)

Jev A: na červené kostce padla 3 = {(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6)} = výsledky pozitivní jevu A (6 možností).

Jev B: padl součet 7 = {(6;1), (5;2), (4;3), (3;4), (2;5), (1;6)} = výsledky pozitivní jevu B (6 možností).

Když víme, že nám na červené kostce padla 3, za podmínky, že padl součet 7, potom pozitivní výsledek je kombinace (3;4).

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{6}$$

Odpověď: Podmíněná pravděpodobnost, že na červené kostce padla 3 za podmínky, že padl součet 7 je $\frac{1}{6}$.

Obrázek 10: Hrací kostky, zdroj: freepik.com

3. Statistika

Statistika pracuje (podobně jako pravděpodobnost) s hromadnými jevy. Sbírá, zpracovává a vyhodnocuje údaje. Statistický soubor (např. občané Olomouce) obsahuje statistické jednotky (např. občany), u nichž se sledují statistické znaky (např. výše platu, počet dětí). Data se zaznamenávají do tabulek a zobrazují se grafy pomocí výpočetní techniky.

(Řídká, Blahunková, Chára, 2013)

Základní pojmy statistiky

3.1 Statistický soubor, statistické jednotky, rozsah souboru

Statistický soubor je konečná neprázdná množina získaná na základě statistického pozorování (zkoumání), jejíž prvky mají určité společné vlastnosti. Prvky této množiny jsou nazývány **statistické jednotky**. Statistickým souborem jsou např. žáci vybrané třídy, členové sportovního družstva. Počet všech prvků statistického souboru se nazývá **rozsah souboru,** který se značí písmenem **n, N**. Je to např. počet žáků vybrané třídy, počet členů sportovního družstva. (Vošický, 1996)

3.2 Statistický znak

Statistický znak je společná vlastnost prvků statistického souboru. Jednotlivé údaje znaku se nazývají **hodnoty znaku** a značí se: $x_1,\ x_2, \dots, x_n$.

Kvalitativní znak bývá vyjádřen slovním popisem (např. pohlaví, povolání, národnost, barva vlasů, …).

Kvantitativní znak bývá vyjádřen číslem (např. výška, váha, věk, počet žáků…).

(Vošický, 1996)

3.3 Absolutní četnost

Absolutní četnost je počet prvků dané třídy. Udává, kolikrát se v souboru vyskytuje hodnota daného znaku.

Označení (pro *k*-tou třídu): $\boldsymbol{n_k}, \boldsymbol{N_k}$

Součet počtu prvků jednotlivých tříd je roven rozsahu daného souboru.

$$\boldsymbol{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}$$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011)

3.4 Relativní četnost

Poměr počtu prvků dané třídy statistického souboru k rozsahu tohoto statistického souboru, se nazývá relativní četnost.

Označení (pro k-tou třídu): $\boldsymbol{c_k}$

$$\boldsymbol{c_k = \frac{n_k}{n}}$$

n_k – počet prvků k-té třídy

n – rozsah souboru (Janurová, Janura, Svoboda, 2011)

Příklad: Žáci třídy 7.B psali matematický test. Dostali následující známky:

Známka	1	2	3	4	5
Počet žáků (četnost) n_k	6	7	3	3	1

Tabulka 3: Známky třídy 7.B, zdroj: autor

Určete relativní četnost žáků, kteří získali: a) 1

b) 3

c) 5

Řešení: Abychom byli schopni vypočítat relativní četnost, musíme znát absolutní četnost (celkový počet žáků 7.B). Absolutní četnost vypočítáme tak, že sečteme všechny žáky.

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

$$6_1 + 7_2 + 3_3 + 3_4 + 1_5 = 20$$

Absolutní četnost (počet žáků 7.B) je 20 (n).

$$c_k = \frac{n_k}{n}$$

$$c_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\ \%$$

$$c_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\ \%$$

$$c_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\ \%$$

Odpověď: Relativní četnost žáků 7.B, kteří získali známku:

a) 1 je 0,3 (30 %)

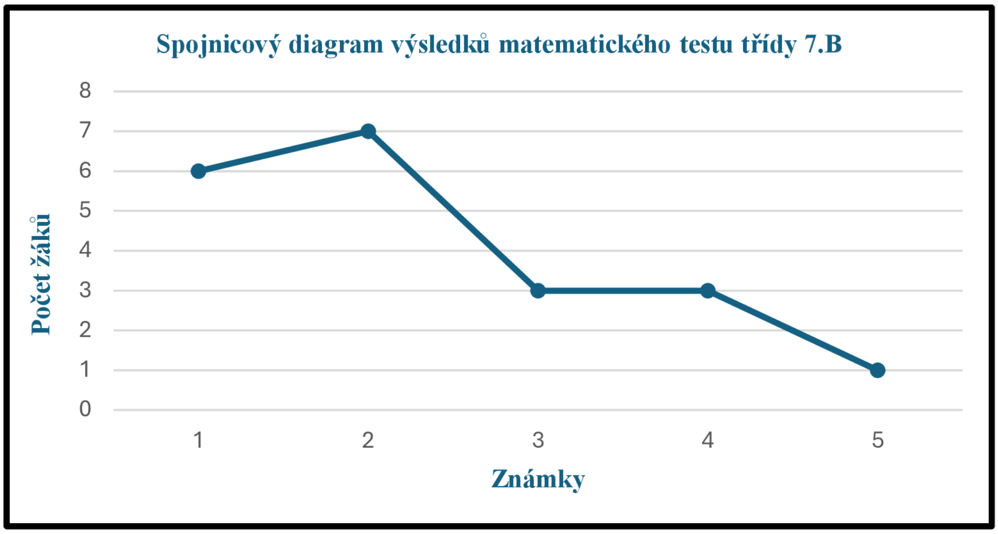
b) 3 je 0,15 (15 %)

c) 5 je 0,05 (5 %)

3.5 Rozdělení četností – grafické znázornění

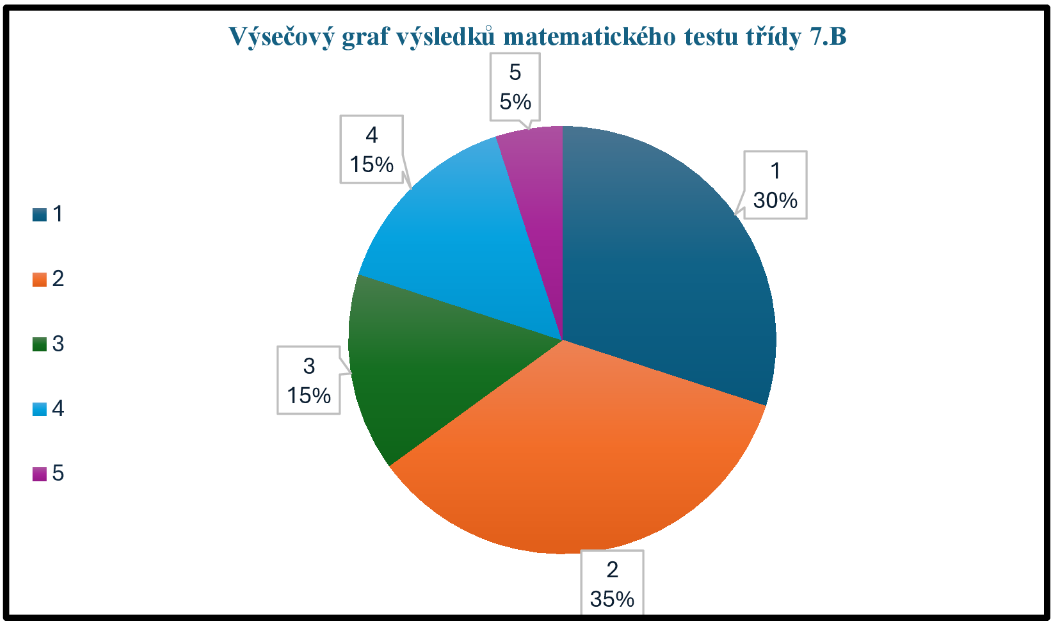
Rozdělení četností lze znázornit graficky.

Spojnicový diagram neboli **polygon četností** získáme spojením bodů úsečkami. První souřadnice je hodnota kvantitativního znaku (v našem případě známka 1-5), druhá souřadnice je odpovídající četnost (v našem případě počet žáků). (Calda, Dupač, 1993)



Graf 1: Spojnicový diagram, zdroj: autor

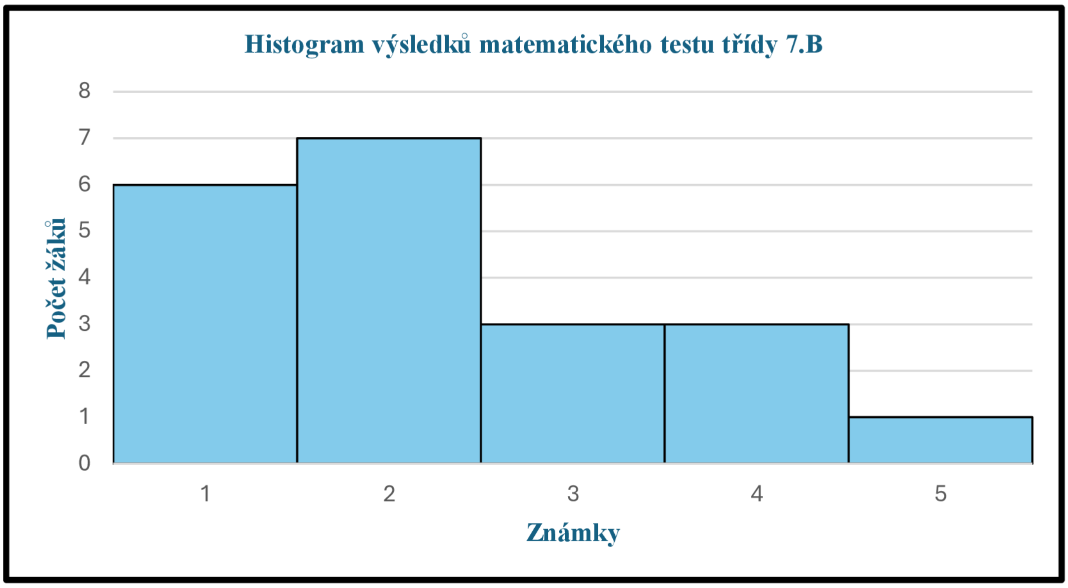
Kruhový diagram neboli **výsečový graf** znázorňuje rozdělení četností kvalitativního znaku. Různým hodnotám znaku odpovídají kruhové výseče, jejichž plošné obsahy jsou úměrné četnostem. Jednotlivé výseče jsou od sebe rozlišeny barvami nebo typem šrafování. (Calda, Dupač, 1993)



Graf 2: Výsečový graf, zdroj: autor

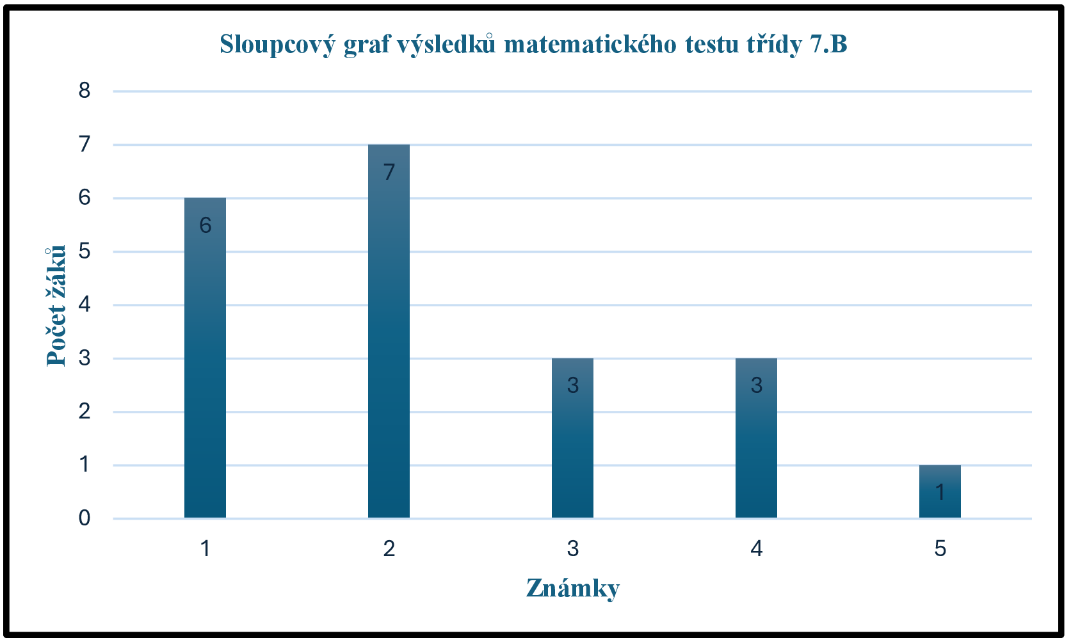
Histogram se používá pro zobrazení intervalového rozdělení četnosti. Délky intervalů vyjadřují šířky sloupců, výšky sloupců odpovídají četnostem. V případě, že intervaly nejsou stejně dlouhé, musí být četnostem rovna plocha obsahu sloupců, nikoli výška.

(Calda, Dupač, 1993)



Graf 3: Histogram, zdroj: autor

Dalším z mnoha grafů, které se používají, je **sloupcový graf**, který se od histogramu liší tím, že se sloupce navzájem nesmí dotýkat.



Graf 4: Sloupcový graf, zdroj: autor

3.6 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ kvantitativního znaku x je dán podílem součtu hodnot znaku a jejich počtu:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$\sum$ je symbol sumy

i – je index, který začíná hodnotou 1 a končí hodnotou *n*

x_i jsou jednotlivé členy, které sčítáme:

$x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ (Vošický, 1996)

Příklad: Žáci třídy 7.B psali matematický test. Dostali následující známky: 1,2,3,3,1,2,1,4,1,5,2,3,1,4,2,1,4,2,2,2. Určete aritmetický průměr těchto známek (průměrnou známku) z matematického testu třídy 7.B.

Řešení: Sečteme všechny prvky (známky) dohromady a podělíme celkovým počtem.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} =$$

$$= \frac{1+2+3+3+1+2+1+4+1+5+2+3+1+4+2+1+4+2+2+2}{20} =$$

$$= \frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2{,}3$$

$$\bar{x} = 2{,}3$$

Odpověď: Aritmetický průměr známek z matematického testu třídy 7.B je 2,3.

Počítáme-li aritmetický průměr z tabulky rozdělení četností, musíme ovšem každou hodnotu x_i násobit její četností, použijeme vzorec:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_k \cdot x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i$$

Uvedeme si stejný příklad, ale s použitím tabulky si ukážeme zjednodušení (zkrácení) výpočtu.

Příklad: Žáci třídy 7.B psali matematický test. Dostali následující známky:

Známka	1	2	3	4	5
Počet žáků (četnost) n_k	6	7	3	3	1

Tabulka 4: Známky třídy 7.B, zdroj: autor

Určete aritmetický průměr těchto známek (průměrnou známku) z matematického testu třídy 7.B.

Řešení:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_k \cdot x_n}{n} =$$

$$= \frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{20} = \frac{6 + 14 + 9 + 12 + 5}{20} = \frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2{,}3$$

$$\bar{x} = 2{,}3$$

Odpověď: Aritmetický průměr známek z matematického testu třídy 7.B je 2,3.

3.7 Modus

Hodnota znaku, která se mezi prvky statistického souboru vyskytuje nejčastěji, se nazývá modus.

Označení: **Mod (x)** nebo $\hat{x}$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 243)

3.8 Medián

Hodnota prostředního členu mezi prvky statistického souboru, uspořádanými podle velikosti, se nazývá medián. Je-li rozsah souboru n sudé číslo, je medián aritmetickým průměrem hodnot dvou středních prvků.

Označení: **Med (x)** nebo $\tilde{x}$

(Janurová, Janura, Svoboda, 2011, s. 243)

Příklad: Žáci třídy 6.A psali matematický test, ze kterého dostali tyto známky: 1,2,4,2,5,1,1,2,1,3,3,4,1,3,2,1,1,3,4,5,3. Určete modus a medián z těchto známek.

Řešení: Pro lepší přehlednost si uděláme tabulku, ze které jsme schopni lépe vyčíst modus (nejčastěji vyskytovaná hodnota z daných prvků) a medián (prostřední hodnota z daných prvků).

známka	1	2	3	4	5
četnost	7	4	5	3	2

Tabulka 5: Známky třídy 6.A, zdroj: autor

Z tabulky vidíme, že se nejčastěji vyskytuje známka 1, proto platí:

$$\hat{x} = 1$$

Při určení mediánu si seřadíme prvky (známky) souboru podle velikosti a určíme prostřední hodnotu: 1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,5,5

$$\overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{2}\ \overset{\rightarrow}{2}\ \overset{\rightarrow}{2}\ \tilde{2}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{4}\ \overset{\leftarrow}{4}\ \overset{\leftarrow}{4}\ \overset{\leftarrow}{5}\ \overset{\leftarrow}{5}$$

$$\tilde{x} = 2$$

Odpověď: Modus je známka 1 a medián je známka 2.

Uvedeme si další příklad, kde bude sudý počet prvků (známek).

Příklad: Žáci třídy 6.B psali matematický test, ze kterého dostali tyto známky: 1,2,4,2,5,1,1,2,1,3,3,4,1,3,2,1,1,3,4,5,3,5. Určete medián z těchto známek.

Řešení: Budeme postupovat stejným způsobem jako u minulého příkladu.

známka	1	2	3	4	5
četnost	7	4	5	3	3

Tabulka 6: Známky třídy 6.B, zdroj: autor

Při určení mediánu si seřadíme prvky (známky) souboru podle velikosti a určíme prostřední hodnotu: 1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,5,5,5

$$\overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{1}\ \overset{\rightarrow}{2}\ \overset{\rightarrow}{2}\ \overset{\rightarrow}{2}\ \overset{\longleftrightarrow}{2\ 3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{3}\ \overset{\leftarrow}{4}\ \overset{\leftarrow}{4}\ \overset{\leftarrow}{4}\ \overset{\leftarrow}{5}\ \overset{\leftarrow}{5}\ \overset{\leftarrow}{5}$$

Počet prvků (známek) je sudé číslo. Mediánem je aritmetický průměr dvou středních prvků (známek) 2 a 3.

$$\tilde{x} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

Odpověď: Medián těchto známek je 2,5.

4. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika ve výuce na 2. stupni ZŠ

4.1 Rámcové vzdělávací programy

Rámcové vzdělávací programy (RVP) vydává Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) po projednání s příslušnými ministerstvy. RVP tvoří obecně závazný rámec pro tvorbu školních vzdělávacích programů škol všech oborů vzdělání. V České republice byly zavedeny zákonem č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). RVP stanoví především konkrétní cíle, formy, délku a povinný obsah vzdělávání, organizační uspořádání, profesní profil, podmínky průběhu a ukončování vzdělávání, podmínky pro vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami, organizační podmínky, podmínky bezpečnosti a ochrany zdraví. (RVP 2017)

4.2 Školní vzdělávací programy

Školní vzdělávací program (ŠVP) je kurikulární dokument, který vytváří pedagogičtí zaměstnanci každé školy v České republice, na základě rámcových vzdělávacích programů, podle kterého se uskutečňuje vzdělávání na jednotlivých školách. Je vydáván a zveřejněn ředitelem školy na přístupném místě ve škole nebo školském zařízení a na internetových stránkách příslušné školy. Je volně dostupný komukoliv. (RVP 2017)

4.3 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávaní (RVP ZV) navazuje na Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání (RVP PV). RVP ZV je otevřený dokument, který se obnovuje podle měnících se potřeb společnosti, zkušeností učitelů a podle měnících se potřeb a zájmů žáků. Je rozdělen do 4 částí. Část A, B, C a D. Pro potřeby této bakalářské práce je klíčová část C, která obsahuje vzdělávací oblast – Matematika a její aplikace. (RVP ZV 2023)

4.4 Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především pro využití matematiky v reálném životě. Pomáhá získávat matematickou gramotnost, logické myšlení. Klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky. Žáci se učí využívat prostředky výpočetní techniky (např. kalkulačky, vhodné počítačové softwary, výukové programy) a to umožňuje přístup k matematice i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání a v rýsovacích technikách. Obor Matematika provází celé základní vzdělávání (je realizován ve všech ročnících) a vytváří žákům podmínky pro další úspěšné studium.

(RVP ZV 2023)

4.5 Matematika a její aplikace na 2. stupni

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 2. stupni je rozdělen na čtyři tematické okruhy:

Číslo a proměnná, kde si žáci osvojují aritmetické operace, učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná.

Učivo: dělitelnost přirozených čísel, celá čísla, desetinná čísla, zlomky, poměr, procenta, mocniny a odmocniny, výrazy a rovnice.

Závislosti, vztahy a práce s daty, kde se žáci učí rozpoznávat určité typy změn a závislosti, které jsou projevem běžných jevů reálného světa. Učí se, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít i nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů. Zkoumání těchto závislostí vede k pochopení pojmu funkce.

Učivo: závislosti a data, funkce.

Do tematického okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty je zařazena statistika.

Geometrie v rovině a v prostoru, zde se žáci učí znázorňovat geometrické útvary a geometricky modelovat reálné situace. Hledat podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás. Učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, vypočítat obvod a obsah a zdokonalovat svůj grafický projev.

Učivo: rovinné útvary, metrické vlastnosti v rovině, prostorové útvary, konstrukční úlohy.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jsou důležitou součástí matematického vzdělávání, při jejichž řešení nestačí jen znalosti a dovednosti školské matematiky, ale je potřeba uplatnit také logické myšlení, kombinační úsudek, prostorovou představivost. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost závisí na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování.

Učivo: číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie, logické a netradiční geometrické úlohy. (RVP ZV 2023)

Do tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy je zařazena kombinatorika a pravděpodobnost.

PRAKTICKÁ ČÁST

5. Vybrané úlohy pro užití ve výuce na 2. stupni základních škol

V teoretické části jsou vysvětleny základní pojmy kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky, jsou uvedeny vzorce pro výpočty (které byly odvozeny, vysvětleny na vzorových příkladech), se kterými budeme nyní pracovat v praktické části, která je věnována vybraným úlohám pro žáky 2. stupně základních škol. Všechny úlohy v praktické části (včetně obrázků) jsou zpracovány tak, aby je bylo možné vzít a rovnou takto použít.

5.1 Vybrané úlohy z kombinatoriky

Příklad: V cukrárně prodávají 15 druhů kopečkových zmrzlin a 4 druhy točené zmrzliny. Určete, kolik různých zmrzlin si můžeme koupit?

Řešení: množina $A_1 = 15$ kopečkových zmrzlin

množina $A_2 = 4$ točené zmrzliny

$$15 + 4 = 19$$

Odpověď: Můžeme si koupit 19 různých zmrzlin.

Příklad: Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Všechna přirozená dvojciferná čísla lze rozdělit do dvou skupin. První skupina obsahuje všechna dvojciferná čísla s různými číslicemi, kterých je 90. Druhá skupina obsahuje všechna dvojciferná čísla se stejnými číslicemi (11, 22, …, 99), kterých je 9. Počet dvojciferných čísel s různými číslicemi označíme p a to platí:

Počítáme pomocí pravidla součtu:

$$p + 9 = 90$$

Odečteme 9 od obou stran rovnice:

$$p + 9 - 9 = 90 - 9$$

$$p = 81$$

nebo

Dvojciferné číslo má 2 pozice. Na první pozici můžeme vybírat z 9 číslic (1-9), na druhé pozici opět z 9 (0-9, ale **nemůžeme** použít číslici, která je již na první pozici). A dostáváme stejný výsledek za použití kombinatorického pravidla součinu:

$$\underline{9} \cdot \underline{9} = 81$$

Odpověď: Počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou je 81. (Calda, Dupač, 1993)

Příklad: Kolik různých vět lze sestavit ze zadaných slov?

Tomáš/Honza/Jakub, umí/neumí, lyžovat/bruslit/plavat/běhat

a) vypiš všechny možnosti

b) použij pravidlo součinu

Řešení: a)

Tomáš umí lyžovat.	Honza umí lyžovat.	Jakub umí lyžovat.
Tomáš umí bruslit.	Honza umí bruslit.	Jakub umí bruslit.
Tomáš umí plavat.	Honza umí plavat.	Jakub umí plavat.
Tomáš umí běhat.	Honza umí běhat.	Jakub umí běhat.
Tomáš neumí lyžovat.	Honza neumí lyžovat.	Jakub neumí lyžovat.
Tomáš neumí bruslit.	Honza neumí bruslit.	Jakub neumí bruslit.
Tomáš neumí plavat.	Honza neumí plavat.	Jakub neumí plavat.
Tomáš neumí běhat.	Honza neumí běhat.	Jakub neumí běhat.

b)

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Odpověď: Lze sestavit 24 různých vět ze zadaných slov.

Příklad: Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, kde se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Máme deset číslic: (0 až 9). Na první pozici můžeme dosadit **devět** číslic: (1,2,3,4,5,6,7,8,9) 0 tam nemůže být, protože např. číslo 037 není trojciferné číslo. Na druhou pozici můžeme dosadit opět **devět** číslic, protože musíme odečíst tu číslici, kterou jsme již použili na první pozici, ale zároveň můžeme použít číslo 0. Na třetí pozici nám zbývá už jenom **osm** číslic, protože musíme odečíst ty dvě číslice, co jsme použili na prvních dvou místech.

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

Odpověď: Počet všech trojciferných přirozených čísel, kde se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou je 648.

V obou příkladech bylo použito pravidlo součinu.

Příklad: Na atletickém závodě běželo 10 běžců. Kolika způsoby může dopadnout obsazení stupňů vítězů?

Řešení: Hledáme trojice z 10 prvků.

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$
$$V(3,10) = 10(10-1)(10-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Obrázek 11: Stupeň vítězů, zdroj: freepik.com

Odpověď: Obsazení stupňů vítězů může dopadnout 720 způsoby.

Příklad: Fotbalisti mají za úkol přijít na fotbalový trénink, na kterém budou mít: tričko, šortky, štulpny a kopačky různé barvy, která se nesmí opakovat. Na výběr mají z šesti barev: červená, žlutá, zelená, modrá, bílá a černá.

a) Kolika způsoby se mohou fotbalisti obléknout?

b) Kolika způsoby se mohou fotbalisti obléknout v případě, že budou mít žluté kopačky?

c) Kolika způsoby se mohou fotbalisti obléknout v případě, že budou mít červené kopačky nebo červené tričko?

Řešení:

a) Vybíráme čtveřice z 6 prvků.

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$
$$V(4,6) = 6(6-1)(6-2)(6-4+1) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

b) Tentokrát máme danou barvu kopaček (žlutou). V tomto případě budeme počítat stejně, jen nehledáme čtveřice, ale trojice a máme o barvu méně.

$$V(3,5) = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

c) Z řešení b) již víme, že pokud máme danou barvu kopaček, máme 60 způsobů. Nyní máme určenou barvu kopaček nebo trička, proto se možnosti sčítají nebo násobí dvěma.

$$V(3,5) = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$60 \cdot 2 = 120 \rightarrow 60 + 60 = 120$$

Odpověď: a) Fotbalisti se mohou obléknout 360 způsoby.

b) Fotbalisti se mohou obléknout 60 způsoby v případě, že mají žluté kopačky.

c) Fotbalisti se mohou obléknout 120 způsoby v případě, že mají červené kopačky nebo červené tričko.

V obou příkladech se jedná o variace bez opakování.

Příklad: Kolik čtyřciferných sudých čísel lze vytvořit z číslic: (1,2,3,4) v případě, že se žádná číslice nebude opakovat?

Řešení: Žáci mají 3 způsoby, jak daný příklad počítat.

a) Vypsáním možností:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

b) Pomocí vzorce:

$$P(n) = n! \rightarrow P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Pomocí vzorce nám vyšel výsledek 24, protože jsme vypočítali všechny možnosti čtyřciferných čísel, které lze vytvořit z číslic: (1,2,3,4). My ale chceme jen sudá čtyřciferné čísla. Aby bylo číslo sudé musí končit sudou číslicí, v našem případě je to číslice 2 a 4. Proto musíme výsledek vydělit dvěma, protože máme 2 sudé a 2 liché číslice.

$$24 : 2 = 12$$

c) Pomocí vzorce:

Žáci si řeknou, že na konci čísla bude 2: $\_\,\_\,\_\,2$

$$P_2(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Máme 6 možností, jak vytvořit čtyřciferné číslo, aby končilo dvojkou.

Žáci si řeknou, že na konci čísla bude 4: $\_\,\_\,\_\,4$

$$P_4(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Máme 6 možností, jak vytvořit čtyřciferné číslo, aby končilo čtyřkou.

Výsledný výpočet bude vypadat následovně:

$$P(3) \cdot 2 = 3! \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{2}_{2,4} = 12$$

$$P_2(3) + P_4(3) = 6 + 6 = 12$$

Odpověď: Lze vytvořit 12 sudých čtyřciferných čísel.

Příklad: Určete, kolika způsoby můžeme vytvořit z 5 dívek a 7 chlapců šestičlenné volejbalové družstvo, jestliže:

a) nejsou stanoveny žádné omezující podmínky

b) v něm má být stejný počet dívek i chlapců

c) v něm má být **nejvýše** jedna dívka

Obrázek 12: Volejbalový míč, zdroj: freepik.com

Řešení:

a) Vybíráme šestičlenné družstvo z 12 lidí (5 dívek a 7 chlapců)

$$K(k,n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$K(6,12)=\binom{12}{6}=\frac{12!}{6!\cdot(12-6)!}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}=\frac{12\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}!}{\cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{6}!}=\frac{924}{1}=924$$

b) Vybíráme **tři** dívky z 5 a **tři** chlapce ze 7, které mezi sebou vynásobíme, protože kdybychom je sečetli, tak nezapočítáme všechny možné kombinace, které mohou nastat.

$$K=\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}!\cdot 2!}\cdot\frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}!}{\cancel{3}!\cdot \cancel{4}!}$$
$$=\frac{20}{2}\cdot\frac{35}{1}=\frac{700}{2}=\frac{350}{1}=350$$

c) Vybíráme šestičlenné družstvo, kde má být **nula** dívek nebo **jedna** dívka a zbytek chlapci.

0 dívek:

$$K_0(6,7)=\binom{7}{6}=\frac{7!}{6!\cdot(7-6)!}=\frac{7!}{6!\cdot 1!}=\frac{7\cdot \cancel{6}!}{\cancel{6}!\cdot 1}=\frac{7}{1}=7$$

1 dívka:

$$K_1=\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{5}=\frac{5!}{1!\,(5-1)!}\cdot\frac{7!}{5!\,(7-5)!}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{5\cdot \cancel{4}!}{1\cdot \cancel{4}!}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5}!}{\cancel{5}!\cdot 2!}=\frac{5}{1}\cdot\frac{42}{2}$$
$$=\frac{5}{1}\cdot\frac{21}{1}=\frac{105}{1}=105$$

$$K=K_0+K_1=7+105=112$$

Odpověď: a) Můžeme vytvořit 924 šestičlenných družstev v případě, že nemáme žádné omezující podmínky.

b) Můžeme vytvořit 350 šestičlenných družstev, kde je stejný počet dívek a chlapců.

c) Můžeme vytvořit 112 šestičlenných družstev, kde má být nejvýše jedna dívka.

Příklad: Eliška zapomněla čtyřmístný číselný kód od své šatní skříňky. Číslice v číselném kódu se mohou opakovat. Každé místo (pozice) má 10 možností (0-9).

a) Kolik je možností, jak otevřít skříňku, když si Eliška nepamatuje žádnou číslici?

b) Kolik je možností, jak otevřít skříňku v případě, že na první pozici je číslice 5?

c) Kolik je možností, jak otevřít skříňku v případě, že na první pozici je číslice 5 a na konci kódu je sudá číslice?

Řešení:

a) Na každé pozici máme 10 možností (0-9).

$$V'(k,n) = \mathrm{n}^k \rightarrow V'(4,10) = 10^4 = 10\,000$$

nebo pomocí pravidla součinu:

$$\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 10\,000$$

b) Na první pozici víme, že je číslice 5 a na dalších třech pozicích máme opět 10 možností (0-9).

$$\underbrace{\underline{1}}_{5} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}}_{V'(3,10)} = 1\,000$$

nebo

$$V'(3,10) = 10^3 = 1\,000$$

c) Na první pozici víme, že je číslice 5 a na poslední pozici je sudá číslice.

$$\underbrace{\underline{1}}_{5} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10}}_{V'(2,10)} \cdot \underbrace{\underline{5}}_{0,2,4,6,8} = 500$$

nebo

$$V'(2,10) \cdot 5 = 10^2 \cdot 5 = 100 \cdot 5 = 500$$

Odpověď:

a) V případě, že si Eliška nepamatuje žádnou číslici, je 10 000 možností, jak otevřít skříňku.

b) V případě, že je na první pozici číslice 5, je 1 000 možností, jak otevřít skříňku.

c) V případě, že je na první pozici číslice 5 a na konci kódu je sudá číslice, je 500 možností, jak otevřít skříňku.

Příklad: Anička má 4 černé, 2 žluté a 1 červený korálek.

a) Určete, kolika způsoby může Anička korálky navléknout?

b) Určete, kolika způsoby může Anička korálky navléknout, pokud chce mít červený korálek uprostřed?

c) Určete, kolika způsoby může Anička korálky navléknout, pokud chce mít černý korálek uprostřed?

d) Určete, kolika způsoby může Anička korálky navléknout, pokud nechce žluté korálky vůbec použít a červený chce mít uprostřed?

Řešení:

a)

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$$

$$P'(4,2,1) = \frac{(4+2+1)!}{4!\,2!\,1!} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}!}{\cancel{4}!\,2!\,1!} = \frac{210}{2} = \frac{105}{1} = 105$$

b) Anička chce, aby byl červený korálek uprostřed, tím pádem je jeho pozice daná. Počítáme stejně jako v případě a), akorát bez červeného korálku.

$$P'(4,2) = \frac{(4+2)!}{4!\,2!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}!}{\cancel{4}!\,2!} = \frac{30}{2} = \frac{15}{1} = 15$$

c) Anička chce, aby byl černý korálek uprostřed, tím pádem je jeho pozice daná. Počítáme stejně jako v případě a) akorát budeme mít o jeden černý korálek méně (ten který je uprostřed).

$$P'(3,2,1) = \frac{(3+2+1)!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}!\,2!\,1!} = \frac{120}{2} = \frac{60}{1} = 60$$

d) Anička nechce použít žluté korálky, tím pádem s korálky nebudeme počítat. Zároveň chce, aby červený korálek byl uprostřed (pozice červeného korálku je opět daná).

$$P'(4) = \frac{4!}{4!} = \frac{1}{1} = 1$$

Odpověď:

a) Anička může korálky navléknout 105 způsoby.

b) V případě, že chce mít Anička červený korálek uprostřed, může korálky navléknout 15 způsoby.

c) V případě, že chce mít Anička černý korálek uprostřed, může korálky navléknout 60 způsoby.

d) V případě, že Anička nechce použít žluté korálky a červený korálek chce mít uprostřed, může korálky navléknout 1 způsobem.

Příklad: Eliška, Anička a Lucinka se mají rozdělit o pět červených a čtyři modré růže.

a) Kolika různými způsoby se mohou dívky rozdělit, jestliže nemáme žádné omezení?

b) Kolika různými způsoby se mohou dívky rozdělit, jestliže má každá dostat, alespoň jednu červenou růži?

c) Kolika různými způsoby se mohou rozdělit, jestliže má Eliška dostat **právě** jednu růži?

Řešení: a)

$$K'(5,3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,2!} = \frac{42}{2} = \frac{21}{1} = 21$$

$$K'(4,3) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,2!} = \frac{30}{2} = \frac{15}{1} = 15$$

$$K' = K' \cdot K' = 21 \cdot 15 = 315$$

b) Každé děvče má dostat červenou růži, proto počítáme už jen se dvěma červenými.

$$K'(2,3) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1} = 6$$

$$K' = K' \cdot K' = 6 \cdot 15 = 90$$

c) Víme, že Eliška dostane **právě** jednu růži, proto s Eliškou nemusíme počítat a odečteme si jednu růži.

V případě, že Eliška dostane červenou růži:

$$K'(4,2) = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,1!} = \frac{5}{1} = 5$$

$$K'(4,2) = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,1!} = \frac{5}{1} = 5$$

$$K_E{}' = K' \cdot K' = 5 \cdot 5 = 25$$

V případě, že Eliška dostane modrou růži:

$$K'(5,2) = \binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,1!} = \frac{6}{1} = 6$$

$$K'(3,2) = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,1!} = \frac{4}{1} = 4$$

$$K_E{}' = K' \cdot K' = 6 \cdot 4 = 24$$

Sečteme možnosti, kdy Eliška dostane červenou nebo modrou růži:

$$K' = K_E{}' + K_E{}' = 25 + 24 = 49$$

Odpověď: a) Jestliže nemáme žádné omezení, dívky se mohou rozdělit 315 způsoby.

b) Jestliže má každá dostat alespoň jednu červenou růži, dívky se mohou rozdělit 90 způsoby.

c) Jestliže má Eliška dostat právě jednu růži, mohou se dívky rozdělit 49 způsoby.

5.2 Vybrané úlohy z pravděpodobnosti

Příklad: Honza se snaží uhodnout, na jaké číslo myslí jeho kamarád Tomáš. Tomáš mu poradil, že číslo, na které myslí, je liché, kladné, dvojciferné a menší než číslo 30. Jaká je pravděpodobnost, že Honza číslo uhodne?

Řešení: Nejprve si spočítáme, kolik máme lichých dvojciferných kladných čísel menších než číslo 30.

Na prvním místě můžeme mít: 1 nebo 2

Na druhém místě můžeme mít: 1,3,5,7,9

$$\underbrace{2}_{1,2} \cdot \underbrace{5}_{1,3,5,7,9}$$

$$\underline{2} \cdot \underline{5} = 10$$

$$P(A) = \frac{1}{10}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že Honza číslo uhodne je $\frac{1}{10}$.

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že ze 32 hracích karet vytáhneme jako první kartu eso?

Řešení: Mezi 32 kartami jsou 4 esa, proto pravděpodobnost bude vypadat následovně:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že vytáhneme jako první kartu eso je $\frac{1}{8}$.

Obrázek 13: Esa, zdroj: freepik.com

Příklad: Házíme 4x mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne **alespoň** 2x orel?

Řešení: Má nám padnout **alespoň** 2x orel, to znamená, že nám může padnout 2x, 3x nebo 4x. Pro nás bude jednodušší počítat, že nám padne **nejvýše** 1x, to znamená, že nám padne 0x nebo 1x.

orel = O

panna = P

A = alespoň 2x orel

A' = nejvýše 1x orel:

Obrázek 14: Mince, zdroj: freepik.com

0x orel = (P, P, P, P) = 1 možnost

1x orel = (O, P, P, P); (P, O, P, P); (P, P, O, P); (P, P, P, O) = 4 možnosti

hod mincí = 2 možnosti (panna nebo orel)

počet hodů = 4

Vzorec bude vypadat následovně:

$$P(A') = \frac{1+4}{2^4} = \frac{1+4}{16} = \frac{5}{16}$$

Od všech možností odečteme opačný jev A' a dostaneme výsledek, který potřebujeme:

$$\mathrm{P(A)} = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{16} = \frac{16}{16} - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že padne alespoň 2x orel je $\frac{11}{16}$.

Příklad: V rodině je 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že **alespoň** dva mají narozeniny ve stejný měsíc?

Řešení: Budeme počítat opačný jev (dva se nenarodí ve stejný měsíc).

Obrázek 15: Narozeninový dort, zdroj: freepik.com

$$1 \text{ měsíc } = \frac{1}{12} \text{ roku}$$

osoba = o

$$P(A') = \underbrace{\frac{\overbrace{12}^{1.o}}{12} \cdot \frac{\overbrace{11}^{2.o}}{12} \cdot \frac{\overbrace{10}^{3.o}}{12} \cdot \frac{\overbrace{9}^{4.o}}{12} \cdot \frac{\overbrace{8}^{5.o}}{12}}_{12 \text{ měsíců}} = \frac{95\,040}{248\,832} = \frac{55}{144}$$

Od všech možností odečteme opačný jev A' a dostaneme výsledek, který potřebujeme:

$$\mathrm{P(A)} = 1 - P(A') = 1 - \frac{55}{144} = \frac{144}{144} - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že alespoň 2 osoby mají narozeniny ve stejný měsíc je $\frac{89}{144}$.

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že ze 32 hracích karet vytáhneme červenou kartu nebo kartu s číslem 7?

Řešení: V balíčku je 32 karet, z toho je půlka červených a půlka černých $(16 + 16)$.
Balíček obsahuje 4 sedmičky (♥♠♦♣).
Musíme odečíst průnik (společné prvky), v našem případě: $7\heartsuit, 7\diamondsuit$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\overbrace{16}^{8*\heartsuit,8*\diamondsuit}}{32} + \frac{\overbrace{4}^{7\heartsuit,7\spadesuit,7\diamondsuit,7\clubsuit}}{32} - \frac{\overbrace{2}^{7\heartsuit,7\diamondsuit}}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že ze 32 hracích karet vytáhneme červenou kartu nebo kartu s číslem 7 je $\frac{9}{16}$.

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že ze 32 hracích karet vytáhneme červenou 7 nebo jakoukoliv černou kartu?

Řešení: V balíčku je 32 karet, z toho je půlka červených a půlka černých $(16 + 16)$.
Balíček obsahuje 4 sedmičky (♥♠♦♣).
Průnik nemusíme odečítat, protože nemají žádný společný prvek.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\overbrace{2}^{7\heartsuit,7\diamondsuit}}{32} + \frac{\overbrace{16}^{8*\spadesuit,8*\clubsuit}}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že ze 32 hracích karet vytáhneme červenou 7 nebo jakoukoliv černou kartu je $\frac{9}{16}$.

Obrázek 16: Hrací karty, zdroj: freepik.com

Příklad: Mladí manželé plánují rodinu se třemi dětmi. Pravděpodobnost narození chlapce je 50 % a narození dívky je také 50 %. Určete pravděpodobnost následujících jevů a zjistěte, jestli jsou tyto jevy na sebe závislé:

a) první se narodí dívka

b) druhý se narodí chlapec

c) všechny tři děti budou chlapci

Řešení: Abychom byli schopni vypočítat pravděpodobnost musíme si nejprve vypočítat všechny možnosti, které mohou nastat:

$$\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 8$$

a) První se narodí dívka:

$$\underline{1} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 4$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b) Druhý se narodí chlapec:

$$\underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{2} = 4$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Všechny tři děti budou chlapci

$$\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = 1$$

$$P(C) = \frac{1}{8}$$

Nyní zjistíme, jestli jsou jevy A, B na sebe závislé:

První se narodí dívka a druhý se narodí chlapec:

$$\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{2} = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Odpověď: Jevy A, B jsou na sebe nezávislé.

Nyní zjistíme, jestli jsou jevy A, C na sebe závislé:

První se narodí dívka a všechny tři děti budou chlapci:

Nemůže se první narodit dívka a zároveň chlapec (jevy se vzájemně vylučují), proto na první pozici máme nula možností:

$$\overset{1,1}{\underline{0}} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = 0$$

$$P(A \cap C) = \frac{0}{8} = 0$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$$

Odpověď: Jevy A, C nejsou na sebe nezávislé (jsou na sebe závislé).

Nyní zjistíme, jestli jsou jevy B, C na sebe závislé:

Druhý se narodí chlapec a všechny tři děti budou chlapci:

$$\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = 1$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$\frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$$

Odpověď: Jevy B, C nejsou na sebe nezávislé (jsou na sebe závislé).

Obrázek 17: Dívka a chlapec, zdroj: freepik.com

Příklad: Michal má dvě kostky. Jednu klasickou, na které jsou čísla 1,2,3,4,5,6 a druhou kostku falešnou, na které jsou samé 6.

Víme, že při hodu kostkou padlo sudé číslo. Jaká je pravděpodobnost, že Michal házel klasickou kostkou?

Řešení: Víme, že nastal jev B (padlo sudé číslo). Jev A je, že hodil klasickou kostkou.


Obrázek 18: Hrací kostky, zdroj: freepik.com

1,3,5 $\quad \underbrace{2,4,6}_{3} \quad \underbrace{6,6,6,6,6,6}_{6}$

Na klasické kostce máme 3 možnosti, jak nám může padnout sudé číslo a na falešné máme 6 možností, jak nám může padnout sudé číslo. Celkem máme 9 možností.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

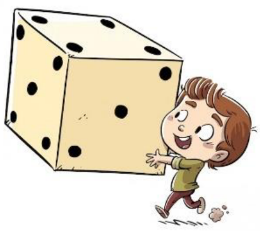
nebo

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že Michal házel klasickou kostkou je $\frac{1}{3}$.



Obrázek 19: Michal hází kostkou, zdroj: freepik.com

5.3 Vybrané úlohy ze statistiky

Příklad: Hráči fotbalového týmu vstřelili za sezónu následující počet gólů:

Počet gólů	0	1	3	5	10
Počet hráčů	2	8	4	5	1

Tabulka 7: Počet hráčů a vstřelených gólů, zdroj: autor

Určete relativní četnost všech hráčů, kteří vstřelili daný počet gólů.

Řešení: Abychom byli schopni vypočítat relativní četnost, musíme znát absolutní četnost (celkový počet hráčů). Absolutní četnost vypočítáme tak, že sečteme všechny hráče.

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

$$2_0 + 8_1 + 4_3 + 5_5 + 1_{10} = 20$$

Absolutní četnost (počet hráčů) je 20 (n).

$$c_k = \frac{n_k}{n}$$

$$c_0 = \frac{n_0}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\ \%$$

$$c_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \%$$

$$c_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\ \%$$

$$c_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$$

$$c_{10} = \frac{n_{10}}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\ \%$$

Odpověď: Relativní četnost všech hráčů, kteří vstřelili daný počet gólů:

0 gólů dalo 10 % hráčů

1 gól dalo 40 % hráčů

3 góly dalo 20 % hráčů

5 gólů dalo 25 % hráčů

10 gólů dalo 5 % hráčů

Obrázek 20: Nevstřelený gól, zdroj: freepik.com

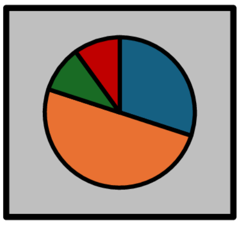
Příklad: Ve třídě je 20 žáků. Z toho:

6 žáků má nula sourozenců

10 žáků má jednoho sourozence

2 žáci mají dva sourozence

2 žáci mají tři sourozence



Graf 5: Četnost žáků, zdroj: autor

a) Vypočítejte relativní četnost žáků s daným počtem sourozenců

b) Zapiš zjištěnou četnost do grafu

c) Kolik má v průměru jeden žák sourozenců?

Řešení:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

$$6_0 + 10_1 + 2_2 + 2_3 = 20$$

Absolutní četnost (počet žáků) je 20 (n).

$$c_k = \frac{n_k}{n}$$

$$c_0 = \frac{n_0}{n} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\ \%$$

$$c_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$$

$$c_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\ \%$$

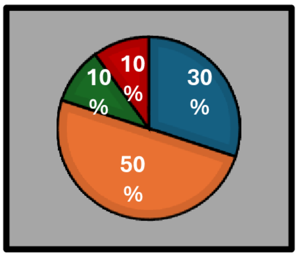
$$c_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\ \%$$

b) Z grafu můžeme vidět, že oranžová výseč je největší = 50 %. Zelená a červená výseč je stejná = 10 % (10 % zelená, 10 % červená). Modrá = zbylých 30 %.

c)

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_1 \cdot x_1 + \cdots n_1 \cdot x_1}{n} =$$

$$= \frac{6 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{20} = \frac{20}{20} = 1$$



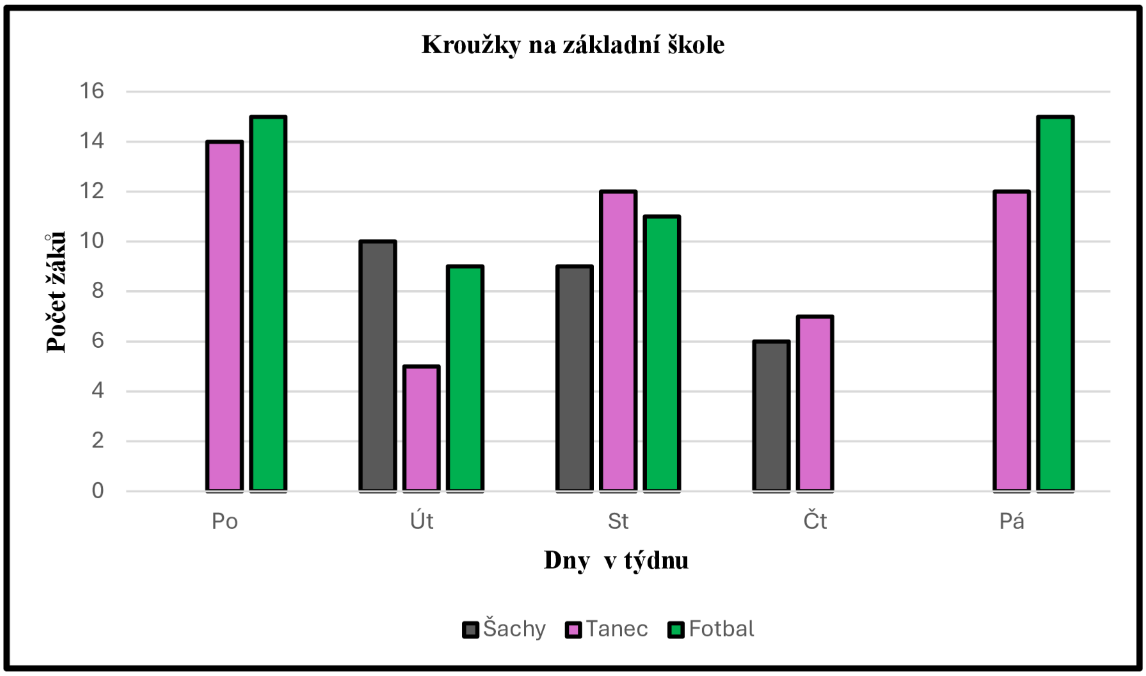
Graf 6: Četnost žáků, zdroj: autor

Odpověď: a) žáků s nula sourozencem je 30 %, žáků s jedním sourozencem je 50 %, žáků se dvěma sourozenci je 10 % a žáků se třemi sourozenci je 10 %.

b) Oranžová výseč je 50 %, zelená výseč je 10 %, červená výseč je 10 % a modrá výseč je 30 %.

c) V průměru má jeden žák jednoho sourozence.

Příklad: V grafu je zaznamenáno, kolik žáků chodí od pondělí do pátku do kroužků na základní škole:



Graf 7: Kroužky na základní škole, zdroj: autor

Z grafu vyčtěte hodnoty a vypočítejte aritmetický průměr, modus a medián u kroužků:

a) Šachy b) Tanec c) Fotbal

Řešení:

a)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{0 + 10 + 9 + 6 + 0}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\hat{x} = 0,0,6,9,10, = 0 \qquad \tilde{x} = \underset{0,0}{\longrightarrow} 6 \underset{9,10}{\longleftarrow} = 6$$

b)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{14 + 5 + 12 + 7 + 12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\hat{x} = 5,7,12,12,14 = 12 \qquad \tilde{x} = \underset{5,7}{\longrightarrow} 12 \underset{12,14}{\longleftarrow} = 12$$

c)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{15 + 9 + 11 + 0 + 15}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\hat{x} = 0,9,11,15,15 = 15 \qquad \tilde{x} = \underset{0,9}{\longrightarrow} 11 \underset{15,15}{\longleftarrow} = 11$$

Odpověď: a) U šachů je aritmetický průměr $\bar{x} = 5$, modus $\hat{x} = 0$ a medián $\tilde{x} = 6$.

b) U tance je aritmetický průměr $\bar{x} = 10$, modus $\hat{x} = 12$ a medián $\tilde{x} = 12$.

c) U fotbalu je aritmetický průměr $\bar{x} = 10$, modus $\hat{x} = 15$ a medián $\tilde{x} = 11$.

Příklad: Vypočítejte průměrnou mzdu, modus a medián sedmi pracovníků v těchto případech:

a)

Pracovník	A	B	C	D	E	F	G
Mzda (v tisících Kč)	18	20	30	20	25	17	24

Tabulka 8: Mzdy pracovníků, zdroj: Kuřina, 2009

b)

Pracovník	V	A	B	C	D	E	F
Mzda (v tisících Kč)	150	15	15	15	15	15	15

Tabulka 9: Mzdy pracovníků, zdroj: Kuřina, 2009

Řešení:

a)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{18 + 20 + 30 + 20 + 25 + 17 + 24}{7} = \frac{154}{7} = 22$$

$$\hat{x} = 20$$

$$\tilde{x} = \xrightarrow[17,18,20]{} 20 \xleftarrow[24,25,30]{}$$

b)

$$\bar{x} = \frac{150 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15}{7} = \frac{150 + 6 \cdot 15}{7} = \frac{240}{7} = 34{,}286$$

$$\hat{x} = 15$$

$$\tilde{x} = \xrightarrow[15,15,15]{} 15 \xleftarrow[15,15,150]{}$$

Výsledek průměrné mzdy, i když je správně vypočten, neodpovídá ani platům šesti podřízených pracovníků (ty jsou menší než poloviční), ani platu vedoucího (ten je více než čtyřnásobný). Výsledek průměru bývá přesnější, pokud hodnoty, které počítáme jsou přibližně stejné (mezi hodnotami nejsou veliké rozdíly).

Odpověď:

a) Průměrná mzda je 22 000 Kč, modus je 20 000 Kč a medián je 20 000 Kč.

b) Průměrná mzda je 34 286 Kč, modus je 15 000 Kč a medián je 15 000 Kč.

(Kuřina, 2009, s. 276-277)

Obrázek 21: Peníze, zdroj: freepik.com

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vysvětlení základních pojmů kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky. Na začátku bylo objasněno, co je kombinatorika, pravidlo součtu a součinu, faktoriál, variace, permutace, kombinace bez opakování/s opakováním. Dále bylo popsáno, co je pravděpodobnost, náhodné pokusy a náhodné jevy, vlastnosti pravděpodobnosti, závislost a nezávislost jevů a podmíněná pravděpodobnost. Bylo objasněno, co je statistika, statistický soubor, statistický znak, absolutní a relativní četnost. Bylo vyobrazeno rozdělení četností – grafické znázornění. Bylo vysvětleno, co je aritmetický průměr, modus a medián.

U všech oblastí byly prezentovány základní definice, postupy a vzorce potřebné ke správným výpočtům. Na jednoduchých příkladech bylo ukázáno, že lze úlohy řešit různými způsoby, v některých případech i bez použití vzorce. Příklady byly uváděny z běžného života, aby žáci měli představu, co počítají. Takové, aby jim tématem byly blízké, jako je například fotbal, fotbalové míče, góly, volejbal, šachy, tanec, korálky, růže, oblečení, zmrzliny, kostky, karty, čísla, známky, sourozenci. Postupy řešení byly doplněny textem, popř. barevně rozlišeny. V některých úlohách byly použity obrázky, část z nich znázorňují řešení příkladu, některé byly použity jen pro odlehčení, pobavení a zatraktivnění.

Hlavním cílem této práce byla snaha zaujmout čtenáře a především, aby čtenář porozuměl postupům řešených matematických úloh. U některých žáků není kombinatorika, pravděpodobnost a statistika zrovna oblíbené téma, ale pokud by tato bakalářská práce měla žákům pomoci k lepšímu pochopení nebo alespoň zamyšlení, tak cíl bakalářské práce byl splněn.

Seznam použitých matematických symbolů a značek:

$+$	plus, znak pro sčítání
$-$	minus, znak pro odčítání
$\cdot$	krát, znak pro násobení
$: \mid \frac{č}{j}$	děleno (lomeno), znak pro dělení
$=$	je rovno
$\neq$	není rovno
$\leq$	je menší nebo rovno než
$A \cup B$	sjednocení množin A, B, sjednocení jevů A, B
$A \cap B$	průnik množin A, B, průnik jevů A, B
$A \subset \Omega$	množina A je podmnožinou množiny Omega
$n!$	*n* faktoriál
$\in$	je prvkem
$V(k, n)$	variace *k*-té třídy z *n* prvků
$V'(k, n)$	variace s opakováním *k*-té třídy z *n* prvků
$P(n)$	permutace čísla *n*
$P'(n_1, n_2, \dots, n_k)$	permutace s opakováním z *n* prvků
$K(k, n)$	kombinace *k* prvků z *n* prvků

$K'(k,n)$	kombinace s opakováním *k* prvků z *n* prvků
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k
n^k	k-tá mocnina čísla n
Ω, ω	omega
$P(A)$	pravděpodobnost náhodného jevu A
$\emptyset$	množina, která neobsahuje žádný prvek
A	jev A
A´	jev opačný k jevu A
$P(A\|B)$	podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B
n, N	rozsah výběru, rozsah souboru
n_k	absolutní četnost k-té třídy
c_k	relativní četnost k-té třídy
$\bar{x}$	aritmetický průměr
$\sum$	suma
i	index
$\mathrm{Mod}(x), \hat{x}$	modus
$\mathrm{Med}(x), \tilde{x}$	medián

Seznam použité literatury:

BUDÍNOVÁ, Irena, Růžena BLAŽKOVÁ, Milena VAŇUROVÁ, Helena DURNOVÁ, 2016. *Úlohy z matematiky pro bystré a nadané děti prvního stupně ZŠ, jejich učitele a rodiče*. Brno: Edika. ISBN 978-80-266-1012-0.

CALDA, Emil a Václav DUPAČ, 1999. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 4. vyd. Učebnice pro střední školy. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-147-7

CRILLY, Tony, 2010. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát.* Praha: Slovart. ISBN 978-80-7391-409-7.

JANUROVÁ, Eva, Miroslav JANURA, Zdenek SVOBODA, 2011. *Matematika pro každého, aneb, Rychlokurz matematiky.* Olomouc: Rubico. ISBN 978-80-7346-122-5.

KUŘINA, František, Jana CACHOVÁ, 2009. *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*. Praha: Academia. ISBN 978-80-200-1743-7.

KYSELOVÁ, Darina, Soňa RICHTÁRIKOVÁ, Monika ŽOVINCOVÁ, 2009. *MATEMATIKA + ukázkové testy.* ENIGMA PUBLISHING: Nitra. ISBN 978-80-89132-68-3

NOVOTNÁ, Jiřina, 2012. *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách.* Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-6144-6.

PŁOCKI, Adam, Pavel TLUSTÝ, 2007. *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-330-1.

ŘÍDKÁ, Eva, Dana BLAHUNKOVÁ, Petr CHÁRA, 2018. *Příprava na státní maturitu.* 3. vyd. Praha: Fragment. ISBN 978-80-253-3767-7.

VOŠICKÝ, Zdeněk, 1999. *Matematika v kostce*. 2. vyd. V kostce (Fragment). Havlíčkův Brod: Fragment. ISBN 80-7200-333-X.

Internetové zdroje:

FREEPIK COMPANY, 7.3.2024. *Freepik*. Online. Dostupné z: https://www.freepik.com/. [citování 2024-03-07]

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY (MŠMT), 2022. *edu.cz*. Online. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/. [citování 2024-03-07]

Seznam obrázků:

Obrázek 1: Rifle a kalhoty, zdroj: freepik.com ... 9
Obrázek 2: Ukázka řešení příkladu součinu, zdroj: autor ... 10
Obrázek 3: Ukázka faktoriálu, zdroj: autor ... 11
Obrázek 4: Čísla, zdroj: autor ... 12
Obrázek 5: Fotbalista, zdroj: freepik.com ... 17
Obrázek 6: Ukázka řešení příkladu kombinace s opakováním, zdroj: autor ... 17
Obrázek 7: Mince, zdroj: freepik.com ... 18
Obrázek 8: Hrací kostky, zdroj: freepik.com ... 20
Obrázek 9: Grafické znázornění průniku a sjednocení dvou množin, zdroj: autor ... 21
Obrázek 10: Hrací kostky, zdroj: freepik.com ... 24
Obrázek 11: Stupeň vítězů, zdroj: freepik.com ... 37
Obrázek 12: Volejbalový míč, zdroj: freepik.com ... 39
Obrázek 13: Esa, zdroj: freepik.com ... 43
Obrázek 14: Mince, zdroj: freepik.com ... 44
Obrázek 15: Narozeninový dort, zdroj: freepik.com ... 44
Obrázek 16: Hrací karty, zdroj: freepik.com ... 45
Obrázek 17: Dívka a chlapec, zdroj: freepik.com ... 47
Obrázek 18: Hrací kostky, zdroj: freepik.com ... 48
Obrázek 19: Michal hází kostkou, zdroj: freepik.com ... 48
Obrázek 20: Nevstřelený gól, zdroj: freepik.com ... 49
Obrázek 21: Peníze, zdroj: freepik.com ... 52

Seznam tabulek:

Tabulka 1: Variace bez opakování: zdroj: Calda, Dupač, 1993, s. 13 ... 12
Tabulka 2: Variace s opakováním, zdroj: Calda, Dupač, 1993, s. 36 ... 15
Tabulka 3: Známky třídy 7.B, zdroj: autor ... 26
Tabulka 4: Známky třídy 7.B, zdroj: autor ... 30
Tabulka 5: Známky třídy 6.A, zdroj: autor ... 31
Tabulka 6: Známky třídy 6.B, zdroj: autor ... 31
Tabulka 7: Počet hráčů a vstřelených gólů, zdroj: autor ... 49
Tabulka 8: Mzdy pracovníků, zdroj: Kuřina, 2009 ... 52
Tabulka 9: Mzdy pracovníků, zdroj: Kuřina, 2009 ... 52

Seznam grafů:

Graf 1: Spojnicový diagram, zdroj: autor 27
Graf 2: Výsečový graf, zdroj: autor 27
Graf 3: Histogram, zdroj: autor........ 28
Graf 4: Sloupcový graf, zdroj: autor 28
Graf 5: Četnost žáků, zdroj: autor........ 50
Graf 6: Četnost žáků, zdroj: autor........ 50
Graf 7: Kroužky na základní škole, zdroj: autor........ 51