UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Asplundovy prostory

Vedoucí diplomové práce:
Doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.
Rok odevzdání: 2012

Vypracovala:
Bc. Jana Karasová
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně pod vedením Doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 12. prosince 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce Doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D. za obětavou spolupráci, trpělivost a čas, který mně věnoval při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za jejich podporu a pomoc po celou dobu studia.

Obsah

Použité značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\overline{M}$	uzávěr množiny M
int M	vnitřek množiny M
U	okolí bodu
E	Banachův prostor
E^*	duální Banachův prostor
$C(E)$	prostor spojitých funkcí na kompaktu E
x^*	prvek duálního Banachova prostoru
$x^*(y) = \langle x^*, y \rangle$	hodnota funkcionálu $x^* \in E^*$ v bodě $y \in E$
$df(x)$	Gâteauxův diferenciál funkce f v bodě x
$f'(x)$	Fréchetův diferenciál funkce f v bodě x
$\partial f(x)$	subdiferenciál funkce f v bodě x
$B^\circ(x, r)$	otevřená koule o středu x a poloměru r
$B(x, r)$	uzavřená koule o středu x a poloměru r
B_E	uzavřená jednotková koule v prostoru E
S_E	jednotková sféra v prostoru E
$D(T)$	definiční obor zobrazení T
$(E, \\|.\\|)$	Banachův prostor
(E^*, w^*)	duální Banachův prostor s w^*-topologií
$K(x^*; \alpha)$	uzavřený konvexní α-kužel
$S(x^*, A, \alpha)$	plátek neprázdné množiny A

Úvod

Matematika je velmi rozsáhly vědní obor, který se skládá z mnoha disciplín. Jednou z nich je i funkcionální analýza. Ta se zabývá především studiem prostorů funkcí a jejich vlastností. Mezi ně patří i Asplundovy prostory, kterým se věnuje tato diplomová práce.

V roce 1933 vyslovil polský matematik S. Mazur větu, která se o několik desítek let později stala základem pro vznik Asplundových prostorů. Přispěl k tomu také J. Lindenstrauss, který Mazurovu větu dokázal ještě dále rozšířit. Nakonec toto téma začal studovat Edgar Asplund a sepsal několik zajímavých příspěvků. Jedním z nich byla opět nová formulace Mazurovy věty, a také jeho základní výsledek - Asplundova věta. Právě její vyslovení je jeden z nejdůležitějších bodů této práce.

Cílem diplomové práce je tedy sepsat problematiku týkající se Asplundových prostorů, jejich příkladů a vlastností.

Práce obsahuje přípravnou kapitolu, v níž jsou připomenuty některé základní pojmy, které jsou použity v dalších částech. Druhá kapitola je věnována konvexním funkcím na Banachových prostorech, jejich gâteauxovské diferencovatelnosti a fréchetovské diferencovatelnosti, a také monotónním operátorům a jejich vlastnostem. Jsou v ní mimo jiné uvedeny dvě důležité věty, a to Mazurova věta a Preiss-Zajíčkova věta. Dále tuto kapitolu doplňuje i několik příkladů. V poslední třetí kapitole jsou shrnuty poznatky o Asplundových prostorech, ke kterým se dospělo na základě předchozí kapitoly, včetně Asplundovy věty a několika příkladů Asplundových prostorů.

V celé práci jsou konce uvedených příkladů označeny hvězdičkou $\bigstar$ a uvedené důkazy jsou ukončeny čtverečkem $\square$ na konci řádku.

1 Přípravná kapitola

V této kapitole si zadefinujeme některé základní pojmy, které budeme používat v dalším textu.

Definice 1.1. Metrický prostor se nazývá úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost je konvergentní posloupnost.

Definice 1.2. Normovaným lineárním prostorem rozumíme každý lineární prostor E nad tělesem reálných čísel, na kterém je definován funkcionál $\|.\| : E \to \mathbb{R}$, který nazýváme normou a který splňuje následující axiomy:

1) $\|x\| \geq 0 \ \ \forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E$,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$.

Poznámka 1.1. Každý normovaný lineární prostor je metrický prostor s metrikou definovanou formulí $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Potom Banachovým prostorem rozumíme každý normovaný lineární prostor, který je v příslušné metrice ρ úplný.

Definice 1.3. Nechť L je omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory E a F. Jeho norma je dána vztahem

$$\|L\| = \sup \left\{ \|Lx\|_F : \|x\|_E \leq 1 \right\}.$$

Prostor všech omezených lineárních zobrazení prostoru E do prostoru F značíme symbolem $\mathcal{L}(E, F)$, přičemž na něm uvažujeme právě definovanou normu.
Je-li F pole skalárů $\mathbb{R}$, píšeme místo $\mathcal{L}(E, F)$ krátce E^*. Potom prostor E^* nazýváme topologickým duálem prostoru E.

Poznámka 1.2. Je-li E normovaný lineární prostor, potom normu jeho duálu E^* někdy nazýváme duální normou.

Definice 1.4. Metrický prostor E se nazývá separabilní, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $M \subset E$ taková, že $\overline{M} = E$.

Definice 1.5. Algebra A nad tělesem reálných čísel je vektorový prostor, na kterém je definováno vnitřní násobení, které je asociativní, distributivní a platí pro něj

$$\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{R}, \quad a, b \in A.$$

Věta 1.1. (Stone-Weierstrassova). *Mějme E kompaktní prostor a* A *lineární podprostor $C(E)$. Pokud je* A *uzavřená podalgebra $C(E)$, která odděluje body E a obsahuje konstantní funkce, pak* $\mathrm{A} = C(E)$.

Důkaz: viz [8, strana 274]

Poznámka 1.3. Podmnožina G normovaného lineárního prostoru E je $w-$otevřená, jestliže ke každému $a \in G$ existuje $\epsilon > 0$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ tak, že platí

$$U(a, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \epsilon) := \{x \in E : |\varphi_j(x - a)| < \epsilon \text{ pro } j = 1, \ldots, n\} \subset G.$$

Sjednocení libovolného počtu $w-$otevřených množin i průnik konečného počtu $w-$otevřených množin je opět $w-$otevřená množina. Potom topologie utvořená z $w-$otevřených množin, jejich sjednocení a konečných průniků se nazývá slabá topologie neboli $w-$topologie na E.
Dále obdobně podmnožina G normovaného lineárního prostoru E^* je w^*-otevřená, jestliže ke každému $a \in G$ existuje $\epsilon > 0$ a $x \in E$ tak, že platí

$$U(a, x, \epsilon) := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^* : |\varphi_j(x - a)| < \epsilon \text{ pro } j = 1, \ldots, n\} \subset G.$$

Sjednocení libovolného počtu w^*-otevřených množin i průnik konečného počtu w^*-otevřených množin je opět w^*-otevřená množina. Potom topologie utvořená z w^*-otevřených množin, jejich sjednocení a konečných průniků se nazývá slabá s hvězdičkou topologie neboli w^*-topologie na E^*.

Poznámka 1.4. Množinu G nazveme množinou typu G_δ (nebo také G_δ – množinou), je-li průnikem spočetně mnoha otevřených množin.

Definice 1.6. Topologický prostor (E, τ) se nazývá Hausdorffův, pokud pro každé dva různé body x a y prostoru E, existují taková okolí U bodu x a V bodu y, že $U \cap V = \emptyset$.

Věta 1.2. (Hahn-Banachova). *Nechť M je podprostor reálného lineárního prostoru E, p sublineární funkcionál na E a f lineární funkcionál na M takový, že pro všechna $x \in M$*

$$f(x) \leq p(x).$$

Potom existuje lineární funkcionál F definovaný na celém prostoru E, rozšiřující funkcionál f tak, že

$$F(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in E.$$

Důkaz: viz [2, strana 179]

Věta 1.3. (Banach-Alaogluova). *Nechť E je Banachův prostor. Uzavřená jednotková koule $B_{E^*} := \{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ je w^*-kompaktní.*

Důkaz: viz [8, strana 65]

Poznámka 1.5. Množinu F nazveme množinou typu F_σ, může-li být napsána jako spočetné sjednocení uzavřených množin.

Věta 1.4. *Každá otevřená množina Banachova prostoru má Baireovu vlastnost. To znamená, že je-li M otevřená množina v Banachově prostoru a $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost otevřených hustých množin v M, pak $\cap_{n=1}^\infty G_n$ je hustá množina.*

Důkaz: viz [10, strana 14]

Poznámka 1.6. (Princip maximality). Axiom výběru je ekvivalentní s principem maximality. Ten říká, že máme-li množinu M uspořádanou relací $\leq$ tak, že každý řetězec je shora omezený, pak ke každému $m \in M$ existuje maximální prvek n množiny M takový, že $m \leq n$.

Princip maximality byl formulován i Zornem v podobě lemmatu, více o této problematice lze najít v literatuře, viz [3, strana $101 - 110$].

Lemma 1.1. (Zornovo). *Nechť M je neprázdná uspořádaná množina s vlastností, že každý její řetězec má horní závoru. Potom M má maximální prvek.*

Definice 1.7. Mějme neprázdnou množinu E, její prvek a a nechť $A \subset E$. Diracova míra δ_a na σ-algebře $P(E)$ všech podmnožin množiny E je dána předpisem

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } a \notin A, \\ \\ 1, & \text{pokud } a \in A. \end{cases}$$

2 Konvexní funkce, monotónní operátory

V této kapitole uvedeme některé vlastnosti konvexních funkcí a monotónní operátory. Tyto poznatky využijeme v hlavní části této práce týkající se Asplundových prostorů, a sice v příkladech nebo mohou být také potřebné při důkazech některých vět.

2.1 Konvexní funkce na reálných Banachových prostorech

Písmenem E označujeme reálný Banachův prostor, D je neprázdná otevřená konvexní podmnožina prostoru E a f je konvexní funkce na D, tedy $f : D \to \mathbb{R}$ a splňuje podmínku

$$f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

kde $x, y \in D$ a $0 < t < 1$. Když rovnost platí vždy, nazýváme f afinní funkcí.
Dále funkci $f : D \to \mathbb{R}$ nazýváme konkávní, když $-f$ je konvexní.
V dalším textu budeme studovat vlastnosti diferencovatelnosti konvexních funkcí, za předpokladu spojitosti.

Příklad 2.1.

- Norma funkce $f(x) = \|x\|$ je spojitá a konvexní na $D = E$. Jelikož $0 < t < 1$ platí, že $|t| = t$ a můžeme tedy psát
  $$\begin{aligned} t\|x\| + (1-t)\|y\| &= |t|\,\|x\| + |1-t|\,\|y\| = \|tx\| + \|(1-t)y\| \\ &\geq \|tx + (1-t)y\|. \end{aligned}$$
  Výše uvedená podmínka pro konvexní funkce je tedy splněna.

- Mějme funkci $a(x) = \langle x^*, x\rangle - b,\ a : E \to \mathbb{R},\ x^* \in E^*,\ b \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že tato funkce je konvexní, tj. splňuje podmínku
  $a[tx + (1-t)y] \leq ta(x) + (1-t)a(y)$.
  $$\begin{aligned} a[tx + (1-t)y] &= \langle x^*, tx + (1-t)y\rangle - b = \langle x^*, tx\rangle + \langle x^*, (1-t)y\rangle - b \\ &= t\langle x^*, x\rangle + (1-t)\langle x^*, y\rangle - b \\ &= t(\langle x^*, x\rangle - b) + (1-t)(\langle x^*, y\rangle - b) = ta(x) + (1-t)a(y). \end{aligned}$$

Podmínka pro konvexní funkce je tedy splněna a dokonce vidíme, že všude platí rovnost, proto daná funkce je afinní.

★

Poznámka 2.1. V dalším příkladě ukážeme, že konvexní funkcí na konečné množině je i suprémum z nějaké skupiny konvexních funkcí. Speciálně je-li A neprázdná, omezená podmnožina Banachova prostoru E, potom funkce

$$x \mapsto \sup \{\|x - y\| : y \in A\}$$

je spojitá a konvexní na E.

Příklad 2.2. Mějme E Banachův prostor a konvexní funkce $f_i : E \to \mathbb{R}$, pro každé $i \in I$, kde I je libovolná indexová množina. Ukažte, že také funkce

$$g(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

je konvexní.

Řešení: Jelikož f_i jsou konvexní funkce, pro každé $i \in I$ platí

$$f_i(tx + (1-t)y) \leq t f_i(x) + (1-t) f_i(y), \qquad \text{kde } 0 < t < 1.$$

Potom ale platí

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &= \sup_{i \in I} f_i(tx + (1-t)y) \leq \sup_{i \in I} \{t f_i(x) + (1-t) f_i(y)\} \\ &\leq \sup_{i \in I} t f_i(x) + \sup_{i \in I} (1-t) f_i(y) \\ &= t \sup_{i \in I} f_i(x) + (1-t) \sup_{i \in I} f_i(y) = tg(x) + (1-t)g(y), \end{aligned}$$

tudíž g je konvexní funkce.

★

Nyní uvedeme základní lemma, které je podstatné pro studium diferencovatelnosti konvexních funkcí.

Lemma 2.1. *Jestliže $x_0 \in D$, potom pro každé $x \in E$ směrová derivace zprava*

$$d^+ f(x_0)(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}$$

existuje a definuje sublineární funkcionál na E.

Důkaz: viz [12, strana 2]

Důležitá pro nás bude Gâteauxova diferencovatelnost, kterou budeme potřebovat pro definici slabého Asplundova prostoru, proto si ji nyní zadefinujeme.

Definice 2.1. Konvexní funkce f se nazývá gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x_0 \in D$, existuje-li pro každé $x \in E$ limita

$$df(x_0)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}.$$

Funkce $df(x_0)(x)$ se nazývá Gâteauxova derivace nebo Gâteauxův diferenciál funkce f v bodě x_0.

Tato definice požaduje existenci obou jednostranných limit a je z ní zřejmé, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když $-d^+ f(x_0)(-x) = d^+ f(x_0)(x)$ pro každé $x \in E$. Jelikož sublineární funkcionál p je lineární právě tehdy, když $p(-x) = -p(x)$ pro všechna x, je vidět, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když $x \mapsto d^+ f(x_0)(x)$ je lineární v x. Platí-li to, je $df(x_0)$ lineární funkcionál na E.

Příklad 2.3. Na Banachově prostoru $E := C([0, 1])$ je dána funkce

$$f : x_0 \mapsto \int_0^1 (x_0^2(t) - 2x_0(t))dt.$$

Zjistěte, zda je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0.
Budeme postupovat podle definice a danou funkci dosadíme do vzorce pro derivaci funkce f ve směru $x \in E$ a upravíme ji.

$$df(x_0)(x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 ((x_0 + \lambda x)^2 - 2(x_0 + \lambda x) - (x_0^2 - 2x_0))dt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (x_0^2 + 2x_0\lambda x + \lambda^2 x^2 - 2x_0 - 2\lambda x - x_0^2 + 2x_0)dt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \int_0^1 (2x_0 x + \lambda x^2 - 2x)dt = \int_0^1 (2x_0 x - 2x)dt.$$

Označíme-li $L : x \mapsto 2\int_0^1 (x_0 x - x)dt$, je vidět, že L je lineární funkcionál. Potom z odhadu

$$|Lx| \leq 2\int_0^1 |x_0 x - x|\, dt \leq 2 \max_{s\in[0,1]} |x(s)| \int_0^1 |x_0 - 1|\, dt = 2\,\|x\| \int_0^1 |x_0 - 1|\, dt$$

dostáváme omezenost, což znamená, že funkcionál L je spojitý. Tedy funkce f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0 a L je Gâteauxova derivace v bodě x_0.

★

Poznámka 2.2.

- Pro libovolné prvky x, y prostoru se skalárním součinem platí Schwarzova nerovnost

$$|(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

- Hilbertův prostor tvoří každý Banachův prostor, jehož norma splňuje pro každou dvojici x, y rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

  Naopak v Banachově prostoru, pro jehož normu platí rovnoběžníkové pravidlo, je norma odvozena ze skalárního součinu a platí

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

  Návod na dokázání těchto vztahů je uveden v literatuře [8, strana 7].

Příklad 2.4. Najděte Gâteauxův diferenciál v bodě x_0 pro druhou mocninu normy v reálném Hilbertově prostoru H. Máme tedy funkci

$$f(x) = \|x\|^2 = (x, x), \qquad \forall x \in H.$$

Dosadíme zadanou funkci do vzorce pro derivaci funkce f v bodě x_0 ve směru x.

$$\begin{aligned} df(x_0)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tx) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\|x_0+tx\|^2 - \|x_0\|^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\|x_0\|^2 + (x_0, tx) + (tx, x_0) + \|tx\|^2 - \|x_0\|^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t(x_0, x) + t(x_0, x) + |t|^2 \|x\|^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(2(x_0, x) + |t| \|x\|^2\right) = 2(x_0, x). \end{aligned}$$

Tedy $df(x_0)(x) = 2(x_0, x)$ je hledaný funkcionál. Pomocí Schwarzovy nerovnosti dostaneme odhad $|df(x_0)(x)| = |2(x_0, x)| \leq 2\|x_0\| \|x\|$, funkcionál je tedy omezený, tj. spojitý a je hledaným Gâteauxovým diferenciálem v bodě x_0.

★

Věta 2.1. *Je-li konvexní funkce f spojitá v $x_0 \in D$, potom je lokálně Lipschitzovská v x_0, tedy zde existuje $M > 0$ a $\delta > 0$ takové, že $B(x_0; \delta) \subset D$ a*

$$|f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\|,$$

kde $x, y \in B(x_0; \delta)$.

Důkaz: viz [12, strana 4]

Důsledkem této věty je, že je-li konvexní funkce f spojitá v bodě $x_0 \in D$, potom $d^+f(x_0)$ je spojitý sublineární funkcionál na E, a proto $df(x_0)$ (když existuje) je spojitý lineární funkcionál. Jinými slovy můžeme říct, že je-li f spojitá konvexní funkce, která je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě, její diferenciál je spojitý lineární funkcionál.

Nyní vyslovíme větu, kterou využijeme v dalších důkazech.

Věta 2.2. *Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce a x_0 je bod z množiny relativně vnitřních bodů množiny E. Potom existuje konečná směrová derivace $d^+ f(x_0)(h)$ pro všechna h z lineárního obalu množiny E.*

Důkaz: viz [6, strana 42]

V tomto důkazu je ukázáno, že funkce $\phi(t) = \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$ je na intervalu $(0, \delta)$ neklesající a zdola ohraničená, a tedy existuje konečná limita

$$\lim_{t \to 0^+} \phi(t) = d^+ f(x_0)(h).$$

Potom pro libovolné $h \in E$ a $t > 0$ platí

$$\lim_{s \to 0^+} \phi(s) = \inf_{s>0} \phi(s) \leq \phi(t). \tag{1}$$

Následuje věta, která říká, kdy je funkce gâteauxovsky diferencovatelná v bodě.

Věta 2.3. *Spojitá konvexní funkce f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x_0 \in D$ právě tehdy, když existuje jediný funkcionál x^* v prostoru E^* splňující*

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \qquad x \in D, \tag{2}$$

nebo ekvivalentně

$$\langle x^*, y \rangle \leq d^+ f(x_0)(y), \qquad y \in E. \tag{3}$$

Důkaz: Ukážeme, že vztahy (2) a (3) jsou ekvivalentní. Jestliže x^* splňuje vztah (2), potom pro libovolné $y \in E$ platí $x_0 + ty \in D$ pro dostatečně malé $t > 0$, a proto

$$t \langle x^*, y \rangle = \langle x^*, (x_0 + ty) - x_0 \rangle \leq f(x_0 + ty) - f(x_0),$$

což znamená, že x^* splňuje vztah (3). Naopak, když x^* splňuje vztah (3) a $x \in D$, položíme $y = x - x_0$. Potom $x_0 + t(x - x_0) \in D$ pokud $0 < t \leq 1$ a dostaneme

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \leq d^+ f(x_0)(x - x_0) \leq \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t},$$

přičemž poslední nerovnost vyplývá ze vztahu (1). Zvolením $t = 1$ dostaneme vztah (2). Celý důkaz viz [12, strana 5].

$\square$

Definice 2.2. Nechť f je konvexní funkce definovaná na konvexní množině C a $x \in C$. Subdiferenciál funkce f v bodě x je množina $\partial f(x)$ ze všech bodů $x^* \in E^*$ splňujících

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \text{pro } \forall y \in C.$$

S ohledem na větu 2.3. je spojitá konvexní funkce f gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je jednobodová množina.

Věta 2.4. *Je-li konvexní funkce f spojitá v bodě $x_0 \in D$, potom $\partial f(x_0)$ je neprázdná, konvexní a slabě kompaktní podmnožina prostoru E^*. Navíc zobrazení $x \to \partial f(x)$ je lokálně omezené v bodě x_0, tedy existuje $M > 0$ a okolí U bodu x_0 v množině D takové, že $\|x^*\| \leq M$, kde $x \in U$ a $x^* \in \partial f(x)$.*

Důkaz: Nejprve ukážeme, že subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je neprázdná množina. Víme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in D$. S využitím věty 2.3., definice 2.2. a použitím Hahn-Banachovy věty, dojdeme přímo k tomu, že subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je neprázdný: $d^+ f(x_0)$ je spojitý a sublineární, tedy existuje $x^* \in E^*$ tak, že

$$\langle x^*, y \rangle \leq d^+ f(x_0)(y), \quad \forall y \in E.$$

Nyní nahradíme y za $y - x_0$ a využijeme-li vztahu (1), přičemž položíme $t = 1$, dostaneme

$$\langle x^*, y - x_0 \rangle \leq d^+ f(x_0)(y - x_0) \leq f(x_0 + (y - x_0)) - f(x_0), \quad \forall y \in D.$$

Dále ukážeme, že $\partial f(x_0)$ je konvexní. Nechť $x_1^* \in \partial f(x_0)$, $x_2^* \in \partial f(x_0)$. Potom

$$\langle x_1^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0),$$

$$\langle x_2^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0).$$

Zvolíme $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ a první nerovnost vynásobíme číslem α a druhou nerovnost $1-\alpha$, potom

$$\alpha \langle x_1^*, x - x_0\rangle \leq \alpha f(x) - \alpha f(x_0),$$
$$(1-\alpha) \langle x_2^*, x - x_0\rangle \leq (1-\alpha) f(x) - (1-\alpha) f(x_0).$$

Nakonec obě nerovnosti sečteme

$$\alpha \langle x_1^*, x - x_0\rangle + (1-\alpha) \langle x_2^*, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0)$$

a úpravou dostaneme

$$\langle \alpha x_1^* + (1-\alpha) x_2^*, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0).$$

Tedy $\alpha x_1^* + (1-\alpha) x_2^* \in \partial f(x_0)$.
Dále chceme ukázat, že subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je slabě s hvězdičkou uzavřený. Budeme proto předpokládat, že $x^* \notin \partial f(x_0)$. Tedy existuje $y \in E$ tak, že

$$f(y) - f(x_0) < \langle x^*, y - x_0\rangle .$$

Z definice slabé topologie vyplývá, že pro každé z^* ve vhodném slabém okolí bodu x^* platí stejná nerovnost. To ukazuje, že subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je slabě s hvězdičkou uzavřený. Další vlastnost, kterou ukážeme je lokální omezenost. Z věty 2.1. víme, že f je lokálně lipschitzovská v bodě x_0, a proto existuje $M > 0$ a okolí U bodu x_0 tak, že

$$|f(y) - f(x)| \leq M \|y - x\|, \quad \text{kde } x, y \in U.$$

Jestliže $x \in U$ a $x^* \in \partial f(x)$, potom pro všechna $y \in U$ máme

$$\langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \leq M \|y - x\|,$$

což implikuje, že $\|x^*\| \leq M$. Nakonec slabá kompaktnost vyplývá z věty 1.3. Banach-Alaogluovy.

□

Budeme-li dále předpokládat, že E a F jsou normované lineární prostory, U je neprázdná otevřená podmnožina prostoru E a že máme funkci $\varphi : U \to F$, můžeme rozšířit definici Gâteauxova diferenciálu takto:

Definice 2.3. Řekneme, že φ je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x_0 \in U$, jestliže existuje spojité lineární zobrazení z E do F, označené $d\varphi(x_0)(x)$, tak, že

$$d\varphi(x_0)(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0)}{t} \qquad \text{pro } \forall x \in E.$$

Jinými slovy můžeme říci, že φ má směrové derivace v bodě x_0 v každém směru x a výsledná funkce ze směrů x je spojitá a lineární.

Dále uvažujme stále stejné předpoklady a zadefinujme Fréchetův diferenciál, který budeme potřebovat pro definici Asplundova prostoru.

Definice 2.4. Řekneme, že φ je fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x_0 \in U$, jestliže existuje spojité lineární zobrazení z E do F označované $\varphi'(x_0)$ tak, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x)}{\|x\|} = 0$$

Funkce $\varphi'(x_0)$ se nazývá Fréchetův diferenciál nebo Fréchetova derivace funkce φ.

Obecně můžeme říci, že máme-li spojitou funkci φ, která je fréchetovsky diferencovatelná v bodě x_0, potom je i gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0 a platí $\varphi'(x_0) = d\varphi(x_0)$.

Příklad 2.5. Zjistěte, zda je funkce z příkladu 2.3. fréchetovsky diferencovatelná v bodě x_0. Tedy

$$f : x_0 \mapsto \int_0^1 (x_0^2(t) - 2x_0(t))dt.$$

(V příkladě 2.3. jsme zjistili, že $df(x_0)(x) = 2\int_0^1 (x_0 x - x)dt$.)
Opět budeme postupovat podle definice a spočítáme danou limitu.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - df(x_0)(x)}{\|x\|}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\|x\|} \int_0^1 ((x_0 + x)^2 - 2(x_0 + x) - (x_0^2 - 2x_0) - 2(x_0 x - x))dt$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\|x\|} \int_0^1 (x_0^2 + 2x_0 x + x^2 - 2x_0 - 2x - x_0^2 + 2x_0 - 2x_0 x + 2x)dt$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\|x\|} \int_0^1 x^2 \; dt \leq \lim_{x\to 0} \|x\| = 0.$$

Z výsledku vidíme, že funkce f je fréchetovsky diferencovatelná a platí $f'(x_0) = df(x_0)(x) = 2\int_0^1 (x_0 x - x)dt$.

★

Příklad 2.6. Pro zadání z příkladu 2.4. najděte Fréchetův diferenciál v bodě x_0. Daná funkce je tedy ve tvaru

$$f(x) = \|x\|^2 = (x, x), \qquad \forall x \in H$$

a dosadíme ji do vzorce limity z definice Fréchetova diferenciálu. (V příkladě 2.4. jsme zjistili, že $df(x_0)(x) = 2(x_0, x)$.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - df(x_0)(x)}{\|x\|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\|x_0 + x\|^2 - \|x_0\|^2 - 2(x_0, x)}{\|x\|}.$$

V dalších úpravách využijeme poznámku 2.2. a dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|x_0 + x\|^2 - \|x_0\|^2 - \frac{1}{2}\|x_0 + x\|^2 + \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2}{\|x\|}$$

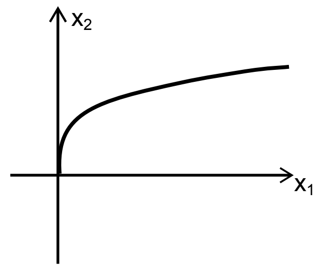
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|x_0 + x\|^2 - \|x_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2}{\|x\|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\|x_0\|^2 + \|x\|^2 - \|x_0\|^2}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \|x\| = 0.$$

Závěr tedy je, že funkce f je fréchetovsky diferencovatelná a hledaný Fréchetův diferenciál je $f'(x_0) = df(x_0)(x) = 2(x_0, x)$.

★

Nyní ještě uvedeme příklad funkce, která je gâteauxovsky diferencovatelná, ale není fréchetovsky diferencovatelná.



Obr. 1

Příklad 2.7. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^4,\ x_2 > 0, \\ \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(První podmínka, kdy se funkce rovná 1, je zakreslená na obrázku 1.)
Tato funkce je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x = (0, 0)$, protože

$$df(x)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = 0.$$

Nicméně daná funkce není v bodě $x = (0, 0)$ fréchetovsky diferencovatelná. Kdyby byla fréchetovsky diferencovatelná, byla by předchozí limita stejnoměrná vzhledem k $h \in S_{\mathbb{R}^2}$ a platilo by, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - 0 < \epsilon, \qquad \forall h \in S_{\mathbb{R}^2},\ 0 < t < \delta. \tag{4}$$

Pokud ovšem zvolíme $\epsilon = 1$ a posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $h_n = (\cos\varphi_n, \sin\varphi_n)$, $\varphi_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}$, tak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $t_n > 0$ tak, že $f(t_n h_n) = 1$ a $\frac{f(t_n h_n)}{t_n} > 1$, tedy podmínka (4) neplatí.

★

Budeme-li v tuto chvíli uvažovat pouze reálné spojité funkce, tedy Gâteauxova a Fréchetova derivace budou spojité lineární zobrazení z E do $\mathbb{R}$, což jsou prvky E^*, můžeme uvést další zajímavé vlastnosti. Například následující věta ukazuje, že reálné konvexní funkce mají mnoho bodů diferencovatelnosti.

Věta 2.5. *Je-li f konvexní na otevřeném intervalu $D \subset \mathbb{R}$, potom $f'(x)$ existuje pro všechny body s výjimkou nejvýše spočetně mnoha bodů z D.*

Důkaz: viz [12, strana 10]

Závěr této věty ovšem platí pouze v $\mathbb{R}$, v $\mathbb{R}^2$ již ne. Tam se hovoří o diferencovatelnosti skoro všude, kterou přibližuje následující Rademacherova věta.

Věta 2.6. (Rademacherova). *Mějme U neprázdnou otevřenou podmnožinu prostoru $\mathbb{R}^n$ a předpokládejme, že zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^m$ je lokálně lipschitzovské. Potom f je fréchetovsky diferencovatelné skoro všude na U (vzhledem k Lebesgueově míře).*

Důkaz: viz [9, strana 122]

Navíc jsme ve větě 2.5. dosáhli diferencovatelnosti funkce, aniž bychom předpokládali její spojitost. V literatuře [12, strana 11] je také dokázána věta, která ukazuje, že spojitost konvexních funkcí na konečně dimenzionálních prostorech je automatická. Obecně ovšem nemůžeme říci, že konvexnost implikuje spojitost.

V důkazu následující věty budeme potřebovat pojem metrizovatelnost, proto nyní vyslovíme větu a lemma týkající se této problematiky.

Věta 2.7. *Nechť E je Banachův prostor a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_E$ je hustá v S_E. Definujeme metriku na B_{E^*} vztahem*

$$\rho(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left|(f - g)(x_i)\right| .$$

Potom identické zobrazení $I : (B_{E^*,w^*}) \to (B_{E^*}, \rho)$ je homeomorfismus. Speciálně (B_{E^*}, ρ) je kompaktní metrický prostor.

Důkaz: viz [7, strana 72]

Lemma 2.2. *Nechť E je kompaktní prostor. Banachův prostor $C(E)$ je separabilní právě tehdy, když E je metrizovatelný.*

Důkaz: viz [7, strana 72]

Díky této větě a lemmatu můžeme dokázat následující větu.

Věta 2.8. *Nechť E je Banachův prostor. Prostor (B_{E^*}, w^*) je metrizovatelný právě tehdy, když E je separabilní.*

Důkaz: viz [7, strana 73]

Lemma 2.3. *Nechť E je normovaný lineární prostor a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ jsou takové posloupnosti, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je silně omezená, $x_n \overset{w^*}{\to} x^*$ a $y_n \to y$, potom $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x^*, y \rangle$.*

Důkaz: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x^*, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x^*, y \rangle| \\
&= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x^*, y \rangle| \\
&\leq \underbrace{\|x_n\|}_{omez.} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} + \underbrace{|\langle x_n - x^*, y \rangle|}_{\to 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

Vrátíme se tedy opět ke spojitým konvexním funkcím na Banachových prostorech, které jsou na určitých Banachových prostorech nutně genericky (= v husté G_δ podmnožině) diferencovatelné. Následující Mazurova věta redukuje problém do jednodimezionální věty.

Věta 2.9. (Mazurova). *Je-li E separabilní Banachův prostor a f je spojitá konvexní funkce definovaná na konvexní otevřené podmnožině D prostoru E, potom množina bodů x, pro které $df(x)$ existuje, je hustá G_δ množina v D.*

Celý důkaz je uveden v literatuře, viz [12, strana 12], ale protože je to jedna z nejdůležitějších vět této práce, důkaz rozepíšeme v následujích odstavcích.

Důkaz: Nejdříve ukážeme, že množina bodů $x \in D$, které nejsou gâteauxovsky diferencovatelné, je F_σ podmnožina množiny D. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost, která je hustá v jednotkové kouli prostoru E a pro každé $n \geq 1,\ m \geq 1$ nechť $A_{n,m}$ značí všechny ty $x \in D$, pro které existuje $x^*,\ y^* \in \partial f(x)$ tak, že platí

$$\langle x^* - y^*, x_n \rangle \geq \frac{1}{m}.$$

Protože $df(x)$ neexistuje právě tehdy, když subdiferenciál $\partial f(x)$ obsahuje více než 1 prvek, je zřejmé, že $df(x)$ neexistuje právě tehdy, když $x \in \cup A_{n,m}$.
Dále ukážeme, že každá $A_{n,m}$ je relativně uzavřená, proto uvažujme posloupnost $\{z_k\} \subset A_{n,m}$ takovou, že $z_k \to z$, přičemž $z \in D$. Pro každé k můžeme vybrat x_k^* a y_k^* ze subdiferenciálu $\partial f(z_k)$ tak, že $\langle x_k^* - y_k^*, z_k \rangle \geq \frac{1}{m}$. Vzhledem k tomu, že E je separabilní, jsou podle věty 2.8. omezené podmnožiny prostoru E^* metrizovatelné ve slabé hvězdičkové topologii, takže díky lokální omezenosti a slabé s hvězdičkou kompaktnosti můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje x^* a y^* takové, že $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ a $y_k^* \xrightarrow{w^*} y^*$ (slabě s hvězdičkou, tedy podle definice $\lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle$). Pro každé $y \in D$ pak podle lemmatu 2.3. platí

$$\langle x^*, y - z \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, y - z_k \rangle \leq \lim_{k\to\infty} [f(y) - f(z_k)] = f(y) - f(z),$$

a tedy $x^* \in \partial f(z)$, (podobně $y^* \in \partial f(z)$). Protože platí

$$\langle x^* - y^*, x_n \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_k^* - y_k^*, x_n \rangle \geq \frac{1}{m},$$

vidíme, že $z \in A_{n,m}$. Nakonec ukážeme, že $D \backslash A_{n,m}$ je hustá v D pro každé $n,\ m$. Zvolme $x_0 \in D$. Podle věty 2.5. je funkce $f_1(r) = f(x_0 + rx_n)$ definovaná na $I = \{r \in \mathbb{R} : x_0 + rx_n \in D\}$ diferencovatelná všude s výjimkou nejvýše spočetně mnoha bodů. Můžeme tedy aproximovat x_0 body tvaru $x' = x_0 + rx_n$, kde $f_1'(r)$ existuje. Jestliže $x^*,\ y^* \in \partial f(x')$, potom jejich restrikce na přímku

$x_0 + \mathbb{R}x_n$ přinese subdiferenciály z f_1 v x'. Diferencovatelnost f_1 v x' znamená, že tyto dvě restrikce se musejí shodovat na celé přímce, proto $\langle x^*, x_n \rangle = \langle y^*, x_n \rangle$. Z toho vyplývá, že $x' \in D \backslash A_{n,m}$ pro $m = 1, 2, 3, \ldots$. Ukázali jsme tedy, že $D \backslash A_{n,m}$ je hustá v D a došli jsme k závěru, že $\cap(D \backslash A_{n,m})$ je hustá G_δ podmnožina množiny D, protože otevřené podmnožiny Banachova prostoru mají Baireovu vlastnost.

□

Jak ukazuje následující věta, pro konvexní spojité funkce f můžeme Fréchetův diferenciál charakterizovat i pouze pomocí funkce f, tj. bez zmínky lineárního funkcionálu $f'(x)$.

Věta 2.10. *Předpokládejme, že f je spojitá a konvexní na neprázdné otevřené konvexní podmnožině D prostoru E. Potom f je fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x \in D$ právě tehdy, když pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$f(x + ty) + f(x - ty) - 2f(x) < t\epsilon,$$

kde $\|y\| = 1$ a $0 < t < \delta$.

Důkaz: viz [12, strana 14]

Na závěr této kapitoly uvedeme větu, která nám může být užitečná při dokazování obecné Fréchetovy diferencovatelnosti. S využitím této věty bude stačit dokázat, že množina G je hustá.

Věta 2.11. *Předpokládejme, že f je spojitá a konvexní na neprázdné otevřené konvexní podmnožině D prostoru E. Potom množina G (možná prázdná) bodů $x \in D$, kde f je fréchetovsky diferencovatelná, je G_δ.*

Důkaz: viz [12, strana 14]

2.2 Příklady na diferencovatelnost konvexních funkcí

V této podkapitole uvedeme několik dalších příkladů týkajících se Gâteauxovy diferencovatelnosti a Fréchetovy diferencovatelnosti konvexních funkcí na reálných Banachových prostorech.

Příklad 2.8. Dokažte, že spojitá konvexní funkce f na otevřené konvexní množině D je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in D$ právě tehdy, když pro každé $y \in E$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty) + f(x-ty) - 2f(x)}{t} = 0.$$

Řešení:

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in D$, tedy existuje limita

$$df(x)(y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}, \qquad \forall y \in E.$$

Potom již víme, že platí $df(x)(y) = d^+f(x)(y)$ a platí také vztah

$$d^+f(x)(y) = -d^+f(x)(-y).$$

Vidíme tedy, že odečteme-li od sebe tyto dvě derivace dostaneme nulu, přičemž tímto rozdílem dostaneme právě naši hledanou limitu

$$\begin{aligned} d^+f(x)(y) - [-d^+f(x)(-y)] &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} + \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-ty) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty) + f(x-ty) - 2f(x)}{t}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty) + f(x-ty) - 2f(x)}{t} = 0.$$

Tuto limitu můžeme rozepsat na dvě limity

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} + \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-ty) - f(x)}{t} = 0,$$

což jsou směrové derivace zprava pro každé $y \in E$. V předchozí kapitole jsme zmínili, že $y \mapsto d^+ f(x)(y)$ je sublineární funkcionál, který je lineární, pokud $d^+ f(x)(y) = -d^+ f(x)(-y)$. Výše uvedené limity nám ovšem přímo dávají tuto rovnost, a proto je f gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in D$.

★

Příklad 2.9. Mějme funkci f, která je konvexní a spojitá na otevřené konvexní množině $C \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in C$ právě tehdy, když f má v bodě x všechny parciální derivace.

Řešení:

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že funkce f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Gâteauxovská diferencovatelnost v bodě x znamená, že funkce f má všechny směrové derivace. Parciální derivace funkce f

$$\frac{\partial f}{x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t},$$

je ovšem směrová derivace ve směru e_i, tudíž f má všechny parciální derivace v bodě x.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že máme všechny parciální derivace funkce f v bodě x neboli máme všechny směrové derivace ve směru jednotkového vektoru e_i, které označíme $df(x)(e_i)$.

Ukážeme-li, že subdiferenciál $\partial f(x)$ je jednobodová množina, potom již z věty 2.3. plyne, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x.

Pro každý jednotkový vektor e_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a pro každý prvek $x^* \in \partial f(x)$ platí

$$x^*(e_i) \leq d^+ f(x)(e_i) \tag{5}$$

a

$$x^*(-e_i) \leq d^+ f(x)(-e_i) = -d^+ f(x)(e_i),$$

tedy

$$x^*(e_i) \geq d^+ f(x)(e_i). \tag{6}$$

Ze vztahů (5) a (6) pak plyne $x^*(e_i) = d^+ f(x)(e_i)$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a každý prvek $x^* \in \partial f(x)$. Libovolný směr $h \in \mathbb{R}^n$ si můžeme vyjádřit pomocí jednotkových vektorů takto

$$h = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n, \qquad \text{kde } \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots n,$$

takže můžeme psát

$$x^*(h) = \langle x^*, h\rangle = \langle x^*, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\rangle = \langle x^*, \lambda_1 e_1\rangle + \dots + \langle x^*, \lambda_n e_n\rangle$$

$$= \lambda_1 \langle x^*, e_1\rangle + \dots + \lambda_n \langle x^*, e_n\rangle = \lambda_1 x^*(e_1) + \dots + \lambda_n x^*(e_n).$$

Jelikož podle předchozí úvahy $x^*(e_i) = d^+ f(x)(e_i)$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a každý prvek $x^* \in \partial f(x)$, pro libovolné $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x)$ a libovolné $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$x_1^*(h) = x_2^*(h).$$

Tedy subdiferenciál $\partial f(x)$ jednobodová množina.

★

Příklad 2.10. Mějme na Banachově prostoru E konvexní funkce f a g takové, že $f \geq g$ na E a $f(x_0) = g(x_0)$. Dále předpokládejme, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0. Ukažte, že funkce g je také gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0.

Řešení: Funkce f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0, tedy podle příkladu 2.8. pro každé $y \in E$ platí

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ty) + f(x_0 - ty) - 2f(x_0)}{t} = 0.$$

Dále z podmínky konvexnosti funkce g vyplývá, že

$$g\left(x_0 + ty\right) + g\left(x_0 - ty\right) - 2g\left(x_0\right) \geq 0.$$

Ze zadání také víme, že $f(x_0 + ty) \geq g(x_0 + ty)$, $f(x_0 - ty) \geq g(x_0 - ty)$ a $f(x_0) = g(x_0)$. Můžeme tedy napsat nerovnost

$$f(x_0 + ty) + f(x_0 - ty) - 2f(x_0) \geq g(x_0 + ty) + g(x_0 - ty) - 2g(x_0) \geq 0,$$

kterou dále vydělíme t, (přičemž víme, že $t > 0$)

$$\frac{f(x_0 + ty) + f(x_0 - ty) - 2f(x_0)}{t} \geq \frac{g(x_0 + ty) + g(x_0 - ty) - 2g(x_0)}{t} \geq 0.$$

Když nyní uplatníme limitu pro $t \to 0^+$ dostaneme nerovnost

$$0 \geq \lim_{t \to 0^+} \frac{g(x_0 + ty) + g(x_0 - ty) - 2g(x_0)}{t} \geq 0.$$

Tudíž

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(x_0 + ty) + g(x_0 - ty) - 2g(x_0)}{t} = 0$$

a funkce g je tedy gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x_0.

★

Příklad 2.11. Mějme dány konvexní spojité funkce f, g na Banachově prostoru E a předpokládejme, že funkce f není fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x \in E$. Ukažte, že funkce $f + g$ také není fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x \in E$.

Řešení: Z věty 2.10. víme, že funkce f je fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x \in E$ právě tehdy, když $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že

$$f(x + ty) + f(x - ty) - 2f(x) < t\epsilon, \qquad \text{kde } \|y\| = 1,\ 0 < t < \delta.$$

Naše funkce fréchetovsky diferencovatelná není, tudíž existuje $\epsilon > 0$ pro každé $t > 0$ tak, že

$$f(x + ty) + f(x - ty) - 2f(x) \geq t\epsilon.$$

My chceme ukázat, že také

$$(f + g)(x + ty) + (f + g)(x - ty) - 2(f + g)(x) \geq t\epsilon.$$

Rozepíšeme-li tuto nerovnost, dostaneme

$$f(x+ty)+f(x-ty)-2f(x)+g(x+ty)+g(x-ty)-2g(x)\geq t\epsilon.$$

První tři členy jsou ale samy o sobě větší než $t\epsilon$ a budou-li zbylé tři členy větší než nula, bude nerovnost splněna. To ovšem plyne z podmínky pro konvexní funkce

$$g[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\leq \alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2),$$

když položíme $x_1=x+ty$, $x_2=x-ty$ a $\alpha=\frac{1}{2}$. Pak máme

$$g\left[\frac{1}{2}(x+ty)+\left(1-\frac{1}{2}\right)(x-ty)\right]\leq \frac{1}{2}g(x+ty)+\left(1-\frac{1}{2}\right)g(x-ty),$$

$$g(x)\leq \frac{1}{2}g(x+ty)+\frac{1}{2}g(x-ty).$$

Vynásobíme-li rovnici 2 a $g(x)$ převedeme na pravou stranu, dostaneme

$$0\leq g(x+ty)+g(x-ty)-2g(x).$$

Tedy nerovnost opravdu platí a ani funkce $f+g$ není fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x\in E$.

★

Příklad 2.12. Ukažte, že v prostorech konečné dimenze jsou gâteauxovsky diferencovatelné spojité konvexní funkce i fréchetovsky diferencovatelné.

Řešení: Nechť f je spojitá konvexní funkce na Banachově prostoru konečné dimenze E. Víme, že funkce f má v bodě x Gâteauxův diferenciál, existuje-li $L\in E^*$ tak, že platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=L(h),\qquad \forall h\in E.$$

Potom f bude mít v bodě x Fréchetův diferenciál, jestliže předchozí limita bude stejnoměrná vzhledem k $h\in S_E$. Předpokládejme ale, že f v bodě x nemá Fréchetův diferenciál, potom existuje $\epsilon>0$ tak, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ existuje $h_n\in S_E$

a $0 < t_n < \frac{1}{n}$ tak, že

$$\epsilon < \frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - L(h_n).$$

V prostorech konečné dimenze jsou omezené uzavřené podmnožiny kompaktní, proto i S_E je kompaktní a můžeme najít podposloupnost posloupnosti $\{h_n\}$, která bude konvergovat k $h \in S_E$. Dále tedy můžeme výše uvedenou nerovnost psát ve tvaru

$$\epsilon < \frac{f(x + t_n h_n) - f(x + t_n h) + f(x + t_n h) - f(x)}{t_n} - L(h_n).$$

Jelikož uvažujeme funkci spojitou a konvexní, je vlastně podle věty 2.1. lipschitzovská, a proto bude existovat $M > 0$ tak, že

$$\epsilon < \frac{M \left\| x + t_n h_n - x + t_n h \right\|}{t_n} + \frac{f(x + t_n h) - f(x)}{t_n} - L(h_n),$$

$$\epsilon < M \left\| h_n - h \right\| + \frac{f(x + t_n h) - f(x)}{t_n} - L(h_n).$$

Pro $n \to +\infty$ pak dostaneme

$$\epsilon \leq 0 + L(h) - L(h) = 0,$$

což je spor s předpokladem, že $\epsilon > 0$, takže funkce f má v bodě x Fréchetův diferenciál.

★

2.3 Monotónní operátory a subdiferenciály

Definice 2.5. Mnohoznačné zobrazení T z Banachova prostoru E do podmnožiny jeho duálního prostoru E^* se nazývá monotónní operátor, jestliže platí

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0,$$

přičemž $x, y \in E$ a $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$. Nepožadujeme, aby $T(x)$ byla neprázdná množina. Definiční obor $D(T)$ zobrazení T je množina všech $x \in E$ takových, že $T(x)$ je neprázdná.

Příklad 2.13. Je-li f spojitá konvexní funkce na neprázdné otevřené konvexní podmnožině D prostoru E, potom

$$T(x) = \begin{cases} \partial f(x), & \text{pro } x \in D, \\ \emptyset, & \text{pro } x \in E \setminus D \end{cases}$$

je monotónní operátor s definičním oborem $D(T) = D$, protože je-li $x^* \in \partial f(x)$ a $y^* \in \partial f(y)$, pak

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x),$$

$$-\langle y^*, y - x \rangle = \langle y^*, x - y \rangle \leq f(x) - f(y)$$

a sečtením těchto dvou nerovností máme nerovnost

$$\langle x^* - y^*, y - x \rangle \leq 0,$$

kterou vynásobíme -1 a dostaneme podmínku pro monotónní operátor

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0.$$

★

Definice 2.6. Nechť X, Y jsou Hausdorffovy topologické prostory a předpokládejme, že $T : X \to 2^Y$ je mnohoznačné zobrazení z prostoru X do podmnožin prostoru Y. Je-li A podmnožina Banachova prostoru E, definujeme $T(A) = \cup\{T(x) : x \in A\}$. Řekneme, že T je shora polospojité v bodě $x \in X$, jestliže pro každou otevřenou množinu V v prostoru Y obsahující $T(x)$, existuje otevřené okolí U bodu x takové, že $T(U) \subset V$. Polospojitost shora na množině je definována obvyklým způsobem.

Příklad 2.14. Za předpokladu, že $T(x)$ je jednobodová množina, je T normovaně-normovaně shora polospojitý v bodě x právě tehdy, když platí

$$\lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\left[B(x;\delta)\right] = 0.$$

Řešení: Jelikož předpokládáme, že $T(x)$ je jednobodová množina, můžeme napsat $T(x) = x^*$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že T je normovaně-normovaně shora polospojitý v bodě x. Podle definice polospojitosti shora v bodě x, pro každou otevřenou množinu V obsahující x^*, existuje otevřené okolí U bodu x tak, že $T(U) \subset V$. Jelikož stále uvažujeme Banachovy prostory, existují $\epsilon > 0$ a $\delta > 0$ tak, že $B(x^*, \epsilon) \subset V$, $B(x, \delta) \subset U$ a

$$T[B(x,\delta)] \subset B(x^*, \epsilon).$$

Pro zvolené $\epsilon > 0$ pak pro každé dostatečně malé $\delta > 0$ platí

$$\operatorname{diam} T\left[B(x;\delta)\right] \leq 2\epsilon.$$

Jelikož ϵ můžeme volit libovolně malé, platí

$$\lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\left[B(x;\delta)\right] = 0.$$

$\Leftarrow$ Budeme předpokládat, že platí

$$\lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\left[B(x;\delta)\right] = 0.$$

Uvažujme otevřené okolí V bodu x^* a $\epsilon > 0$ tak, že $B(x^*, \epsilon) \subset V$. Pak ale jistě najdeme množinu $U = B^\circ(x, \delta)$ takovou, že

$$T(U) \subset T[B(x,\delta)] \subset B(x^*, \epsilon) \subset V.$$

Proto je T normovaně-normovaně shora polospojitý v bodě x.

★

Věta 2.12. *Je-li f spojitá konvexní funkce na otevřené konvexní podmnožině D prostoru E, potom zobrazení $x \mapsto \partial f(x)$ je normovaně-slabě s hvězdičkou shora polospojité na D.*

Důkaz: viz [12, strana 19]

Poznámka 2.3. Tvrzení, že zobrazení $x \mapsto \partial f(x)$ je normovaně-slabě s hvězdičkou shora polospojité na D je ekvivalentní s tvrzením, že subdiferenciál

$$\partial f(.) : (E, \|.\|) \to (E^*, w^*)$$

je shora polospojitý na D.

Lemma 2.4. *Předpokládejme, že f je spojitá a konvexní funkce na neprázdné konvexní podmnožině D prostoru E a že je fréchetovsky diferencovatelná v bodě x podmnožiny D. Potom subdiferenciál zobrazení $\partial f(x)$ je normovaně-normovaně shora polospojitý v x.*

Důkaz: viz [12, strana 19]

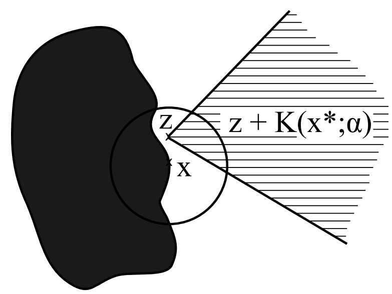
Definice 2.7. Selekce φ mnohoznačného zobrazení T je jednoznačné zobrazení splňující $\varphi(x) \in T(x)$ pro každé $x \in D(T)$.

Věta 2.13. *Nechť f je konvexní a spojitá na neprázdné otevřené konvexní podmnožině D prostoru E, potom funkce f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in D$ právě tehdy, když existuje selekce φ pro subdiferenciál $\partial f(x)$, která je normovaně-slabě s hvězdičkou spojitá v bodě $x \in D$.*

Obdobně je funkce f fréchetovsky diferencovatelná v bodě $x \in D$ právě tehdy, když existuje selekce φ pro subdiferenciál $\partial f(x)$, která je normovaně-normovaně spojitá v bodě $x \in D$.

Důkaz: viz [12, strana 20]

Zajímavým důsledkem je, že fréchetovsky diferencovatelné konvexní funkce jsou nutně C^1.



Obr. 2

Důsledek 2.1. Je-li f konvexní a fréchetovsky diferencovatelná funkce na otevřené konvexní množině D, potom $x \to f'(x)$ je normovaně-normovaně spojité v D.

Dále si uvedeme definici konvexního kuželu, který je využit při důkazu věty, která bude následovat.

Definice 2.8.

a) Nechť $x^* \in E^*$, $x^* \neq 0$ a $0 < \alpha < 1$. Definujeme uzavřený konvexní kužel $K(x^*;\alpha)$ vztahem

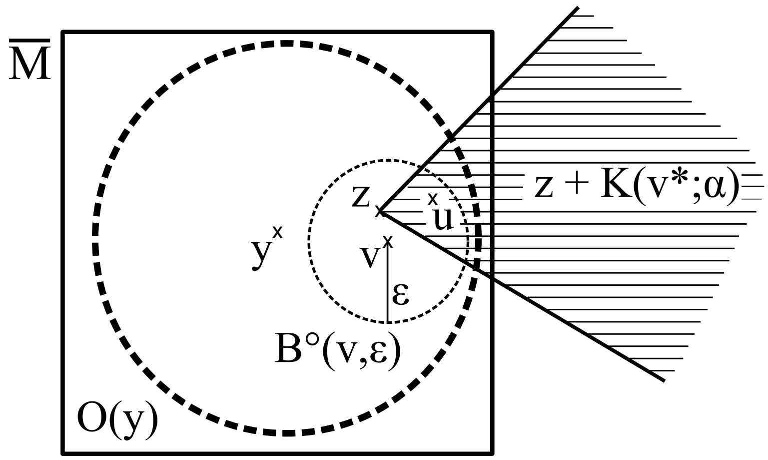
$$K(x^*;\alpha) = \{x \in E : \alpha \|x\| \cdot \|x^*\| \leq \langle x^*, x\rangle\}.$$

Tento kužel nazýváme α-kužel a jeho vnitřek $\{x \in E : \alpha \|x\| \cdot \|x^*\| < \langle x^*, x\rangle\}$ je neprázdný. Čím více se α přibližuje k nule, tím je kužel širší.

b) Podmnožina M prostoru E se nazývá α-kuželově řídká (kde $0 < \alpha < 1$), jestliže pro každé $x \in M$ a $\epsilon > 0$ existuje $z \in B(x;\epsilon)$ a $0 \neq x^* \in E^*$ tak, že platí

$$M \cap [z + \text{int } K(x^*;\alpha)] = \emptyset.$$

Tedy, že M je α-kuželově řídká znamená, že nějaký bod z M může být libovolně blízko k vrcholům kuželů, jejichž vnitřky leží v doplňku množiny M. Obrázek 2 znázorňuje situaci, kdy množina M není zřejmě α-kuželově řídká, ale pro jisté x je splněna předchozí podmínka.



Obr. 3

c) Množina M se nazývá úhlově malá, jestliže pro každé $0 < \alpha < 1$ může být vyjádřena jako spočetné sjednocení α-kuželově řídkých množin.

Příklad 2.15. Je-li M α-kuželově řídká pro nějaké $\alpha > 0$, potom $\overline{M}$ má prázdný vnitřek a vyplývá z toho, že případná úhlově malá množina je množinou první kategorie.

Řešení: Budeme předpokládat, že $\overline{M}$ nemá prázdný vnitřek, tedy že nějaké $y \in \text{int } \overline{M}$. Pro vnitřní bod y platí, že existuje jeho okolí $O(y)$ takové, že $y \in O(y) \subset \overline{M}$. V tomto okolí jistě najdeme nějaký bod v, který bude bodem množiny M. Pro bod v bude existovat $\epsilon > 0$ tak, že $B^\circ(v, \epsilon) \in O(y)$. Potom podle definice bude M α-kuželově řídká, jestliže pro každé $v \in M$ a každé $\epsilon > 0$ bude existovat $z \in B(v, \epsilon)$ a $0 \neq v^* \in E^*$ tak, že platí

$$M \cap [z + \text{int } K(v^*; \alpha)] = \emptyset.$$

To ovšem neplatí, protože průnik $B^\circ(v, \epsilon)$ a α-kužele $z + \text{int } K(v^*; \alpha)$ je otevřená množina v $\overline{M}$, která tak obsahuje nějaký bod z M (na obrázku 3 je označený jako u). Tudíž $\overline{M}$ musí mít opravdu prázdný vnitřek.

Z toho plyne, že jsou to řídké množiny. Z definice víme, že úhlově malou množinu můžeme vyjádřit jako spočetné sjednocení α-kuželově řídkých množin a spočetné sjednocení řídkých množin je množina první kategorie.

★

Poznámka 2.4. Být α-kuželově řídká má geometrické a stejně tak i topologické důsledky. Například bude-li M sjednocení v $\mathbb{R}^2$ jednotkového kruhu a počátku souřadnic, potom není M nikde hustá, ale není α-kuželově řídká pro libovolné $\alpha > 0$. Nicméně, je to sjednocení dvou α-kuželově řídkých množin pro každé $\alpha > 0$.
Protože α-kuželově řídká podmnožina z $\mathbb{R}$ může obsahovat nejvýše dva body, je vidět, že podmnožina $\mathbb{R}$ je úhlově malá právě tehdy, když je spočetná.

V další kapitole chceme vyslovit Asplundovu větu. Díky tomu, že subdiferenciál ∂f spojité konvexní funkce je monotónní zobrazení a že Fréchetovu diferencovatelnost spojité konvexní funkce můžeme charakterizovat jako normovanou-normovanou polospojitost shora subdiferenciálu ∂f, budeme dokazovat zobecnění Asplundovy věty. K tomu budeme potřebovat následující větu dokázanou D. Preissem a L. Zajíčkem.

Věta 2.14. (Preiss-Zajíček). *Předpokládejme, že Banachův prostor E má separabilní duál a že zobrazení $T : E \to 2^{E^*}$ je monotónní s definičním oborem $D(T) = \{x; T(x) \neq 0\}$. Potom existuje úhlově malá množina $A \subset D(T)$ taková, že T je jednoznačné a normovaně-normovaně shora polospojité v každém bodě $D(T) \setminus A$.*

Důkaz této věty je převzat z literatury, viz [12, strana 22].

Důkaz: Stačí ukázat, že množina

$$A = \big\{x \in D(T) : \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\,[B(x;\delta)] > 0\big\}$$

je úhlově malá, protože pak podle příkladu 2.14. bude T jednoznačné a normovaně-normovaně shora polospojité v každém bodě $D(T) \setminus A$. Nejprve si množinu A napíšeme jako sjednocení množin A_n, tj. $A = \cup A_n$, kde

$$A_n = \big\{x \in D(T) : \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\,[B(x;\delta)] > \frac{1}{n}\big\}.$$

Nechť $\{x_k^*\}$ je hustá posloupnost v duálním prostoru E^* a předpokládejme $0 < \alpha < 1$. Definujeme

$$A_{n,k} = \left\{ x \in A_n : \operatorname{dist}(x_k^*, T(x)) < \frac{\alpha}{4n} \right\}$$

a ukážeme, že každá množina $A_{n,k}$ je α-kuželově řídká. Předpokládejme tedy, že $x \in A_{n,k}$ a že $\epsilon > 0$. Protože $x \in A_n$, existuje $0 < \delta < \epsilon$ a $z_1,\ z_2 \in B(x;\delta)$ a $z_i^* \in T(z_i)$, pro $i = 1, 2$ tak, že $\|z_1^* - z_2^*\| > \frac{1}{n}$. Takže pro $x^* \in T(x)$ je jedna z norem $\|z_i^* - x^*\| > \frac{1}{2n}$. Protože $\operatorname{dist}(x_k^*, T(x)) < \frac{\alpha}{4n}$, můžeme vybrat $x^* \in T(x)$ tak, že $\|x_k^* - x^*\| < \frac{\alpha}{4n}$, a proto existují body $z \in B(x;\epsilon)$ a $z^* \in T(z)$ tak, že

$$\|z^* - x_k^*\| \geq \|z^* - x^*\| - \|x_k^* - x^*\| > \frac{1}{2n} - \frac{\alpha}{4n} > \frac{1}{4n}.$$

Chceme ukázat, že $A_{n,k} \cap (z + \operatorname{int} K(z^* - x_k^*; \alpha)) = \emptyset$, čili

$$A_{n,k} \cap \{y \in E : \langle z^* - x_k^*, y - z \rangle > \alpha \|z^* - x_k^*\| \cdot \|y - z\|\} = \emptyset.$$

Nyní, jestliže $y \in D(T)$ a $\langle z^* - x_k^*, y - z \rangle > \alpha \|z^* - x_k^*\| \cdot \|y - z\|$ a jestliže $y^* \in T(y)$, potom

$$\langle y^* - x_k^*, y - z \rangle = \langle y^* - z^*, y - z \rangle + \langle z^* - x_k^*, y - z \rangle \geq$$

$$\geq \langle z^* - x_k^*, y - z \rangle > \alpha \|z^* - x_k^*\| \cdot \|y - z\| > \frac{\alpha}{4n} \|y - z\| .$$

Z čehož vyplývá, že $\|y^* - x_k^*\| \geq \frac{\alpha}{4n}$, takže $y \notin A_{n,k}$.

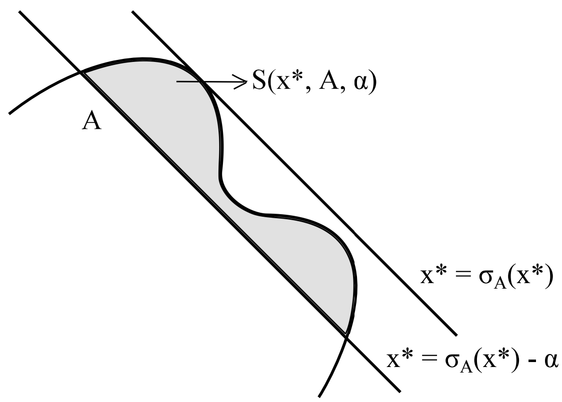
$\square$

Definice 2.9. Plátkem neprázdné množiny A rozumíme nutně neprázdnou podmnožinu množiny A danou vztahem

$$S(x^*, A, \alpha) = \{x \in A : \langle x^*, x \rangle > \sigma_A(x^*) - \alpha\},$$

kde $x^* \in E^*, \alpha > 0$ a $\sigma_A(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle : x \in A\}$. Viz obr. 4.

Je-li $A \subset E^*$, můžeme také definovat plátek slabý s hvězdičkou množiny A, což je plátek, v jehož definici používáme lineární funkcionál z E (neboli z E^{**}).



Obr. 4

Řekneme, že neprázdná podmnožina A připouští plátky libovolně malého průměru, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje plátek množiny A průměru menšího než ϵ. Tato vlastnost je ekvivalentní s pojmem dentabilita, proto někdy bývá pojmenována stejně, více viz [12, strana 79].

Dále se podívejme na některé další vlastnosti subdiferenciálů.

Definice 2.10. Mnohoznačné zobrazení $T : E \to 2^{E^*}$ se nazývá n-cyklicky monotónní, pokud

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \langle x_k^*, x_k - x_{k-1} \rangle \geq 0,$$

přičemž $n \geq 2$ a $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $x_n = x_0$ a $x_k^* \in T(x_k), k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Je zřejmé, že 2-cyklický monotónní operátor je monotónní. Dále říkáme, že T je cyklicky monotónní, jestliže je n-cyklicky monotónní pro každé n.

Příklad 2.16. Je-li f spojitá konvexní funkce na otevřené konvexní množině, potom ∂f je cyklicky monotónní.

Řešení: Subdiferenciál takové funkce je definován jako množina

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* | \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in D\}.$$

Ověřme tedy, že platí podmínka pro n-cyklicky monotónní operátor pro každé $n \geq 2$. Mějme body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ takové, že $x_n = x_0$ a $x_k^* \in \partial f(x_k)$,

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dostaneme tyto nerovnice

$$\langle x_1^*, x_0 - x_1 \rangle \leq f(x_0) - f(x_1),$$

$$\langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \leq f(x_1) - f(x_2),$$

$$\vdots$$

$$\left\langle x_{n-1}^*, x_{n-2} - x_{n-1} \right\rangle \leq f(x_{n-2}) - f(x_{n-1}),$$

$$\langle x_n^*, x_{n-1} - x_n \rangle \leq f(x_{n-1}) - f(x_n),$$

přičemž poslední nerovnici můžeme napsat i ve tvaru

$$\langle x_n^*, x_{n-1} - x_0 \rangle \leq f(x_{n-1}) - f(x_0).$$

Sečteme-li těchto n nerovnic (poslední bereme v upraveném tvaru), dostaneme

$$\langle x_1^*, x_0 - x_1 \rangle + \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle + \ldots + \left\langle x_{n-1}^*, x_{n-2} - x_{n-1} \right\rangle + \langle x_n^*, x_{n-1} - x_0 \rangle$$

$$\leq f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2}) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_0).$$

Na pravé straně se nám všechny hodnoty odečtou. Jelikož platí $x_n = x_0$, vynásobíme-li tuto nerovnici -1 zjistíme, že daná podmínka platí

$$\langle x_1^*, x_1 - x_0 \rangle + \langle x_2^*, x_2 - x_1 \rangle + \ldots + \left\langle x_{n-1}^*, x_{n-1} - x_{n-2} \right\rangle + \langle x_n^*, x_n - x_{n-1} \rangle \geq 0.$$

★

Poznámka 2.5. Tvrzení z předchozího příkladu lze dokázat i obráceně. Důkaz lze najít například v literatuře [12, strana 53] viz Rockafellarova věta.

Definice 2.11.

- Podmnožina G prostoru $E \times E^*$ se nazývá monotónní, pokud

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \qquad \text{přičemž } (x, x^*), (y, y^*) \in G.$$

- Monotónní množina se nazývá maximálně monotónní, jestliže je maximální v systému monotónních podmnožin prostoru $E \times E^*$, uspořádaných inkluzí.

- Řekneme, že monotónní operátor T je maximálně monotónní, pokud jeho graf je maximálně monotónní množinou.

Poznámka 2.6. Je-li zobrazení $T : E \to 2^{E^*}$ monotónní operátor, potom jeho graf $G(T) = \{(x, x^*) \in E \times E^* : x^* \in T(x)\}$ je monotónní množina.

Je tedy zřejmá korespondence mezi monotónními množinami a monotónními operátory. Snadná aplikace Zornova lemmatu ukazuje, že každý monotónní operátor T může být rozšířen na maximální monotónní operátor $\overline{T}$ ve smyslu, že $G(T) \subset G(\overline{T})$.

Příklad 2.17. Monotónní operátor $T : E \to 2^{E^*}$ je maximálně monotónní právě tehdy, když platí podmínka: Vždy když $y \in E$, $y^* \in E^*$ a

$$\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in D(T),\ x^* \in T(x)$$

je nutně $y^* \in T(y)$.

Řešení:

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že monotónní operátor $T : E \to 2^{E^*}$ je maximálně monotónní. To znamená, že jeho graf $G(T) = \{(x, x^*) \in E \times E^* : x^* \in T(x)\}$ je maximálně monotónní množina. Pokud tedy platí $\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0$ pro $x \in D(T)$ a $x^* \in T(x)$, musí $y \in D(T)$ a $y^* \in T(y)$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že když $y \in E$, $y^* \in E^*$ a $\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0$ pro všechna $x \in D(T)$, $x^* \in T(x)$, je nutně $y^* \in T(y)$. Jelikož platí pro každé $x \in D(T)$ a $x^* \in T(x)$, nemůže již být $G(T)$ větší. Tudíž $G(T)$ je maximální monotónní množina a T je maximální monotónní operátor.

★

Věta 2.15. *Je-li f konvexní na D a spojitá v bodě $x \in D$, potom pro všechny $y \in E$ platí*

$$d^+f(x)(y) = \sup\{\langle x^*, y\rangle : x^* \in \partial f(x)\}$$

a tohoto suprema je dosaženo v nějakém bodě $x^* \in \partial f(x)$.

Důkaz: viz [12, strana 27]

Věta 2.16. *Je-li f spojitá a konvexní na celém E, potom subdiferenciál zobrazení ∂f je maximálně monotónní.*

Důkaz: viz [12, strana 27]

Nakonec ještě zmíníme definici striktně konvexní normy.

Definice 2.12. a) Norma na Banachově prostoru E se nazývá striktně konvexní, pokud nejsou žádné úsečky v jednotkové kružnici. Ekvivalentně, pokud $\|x\| = 1 = \|y\|$ a $x \neq y$ znamená

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < \lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\|,$$

kde $0 < \lambda < 1$.

b) Norma na Banachově prostoru E se nazývá hladká za předpokladu, že pro každé $x \in E$ s normou $\|x\| = 1$ existuje jediný prvek $x^* \in E^*$ takový, že $\langle x^*, x\rangle = 1$ a $\|x^*\| = 1$.

3 Asplundovy prostory

V předchozí kapitole jsme uvedli Mazurovu větu, která byla základem pro vznik Asplundovy věty. Asi 30 let poté, co Mazur dokázal svou větu, Lindenstrauss získal další výsledek tohoto typu. Ukázal, že když je separabilní Banachův prostor také reflexivní, potom můžeme v Mazurově větě nahradit Gâteauxovu diferencovatelnost za Fréchetovu diferencovatelnost. Na což navázal o 5 let později Edgar Asplund, když obnovil studium takových otázek. Napsal několik zajímavých příspěvků, například, že Mazurova věta může být formulována také v této podobě: Separabilní Banachovy prostory jsou slabé Asplundovy prostory. A právě Asplundovy prostory budou obsahem této kapitoly, především základní Asplundův výsledek: Je-li duální prostor Banachova prostoru separabilní, potom daný Banachův prostor je Asplundův prostor.
Nejdříve si tedy zadefinujeme slabý Asplundův prostor a Asplundův prostor. Následně uvedeme některé jejich vlastnosti.

Definice 3.1. Banachův prostor E se nazývá slabým Asplundovým prostorem za předpokladu, že každá spojitá konvexní funkce definovaná na neprázdné otevřené konvexní podmnožině D prostoru E je gâteauxovsky diferencovatelná v každém bodě nějaké husté podmnožiny G_δ množiny D.

Definice 3.2. Banachův prostor E se nazývá Asplundovým prostorem, jestliže každá spojitá konvexní funkce definovaná na neprázdné otevřené konvexní podmnožině D prostoru E je fréchetovsky diferencovatelná v každém bodě nějaké husté podmnožiny G_δ množiny D.

Z definic jde vidět, že Asplundův prostor se nazývá slabý nikoli proto, že by šlo o slabou topologii, ale proto, že Gâteauxova diferencovatelnost je slabší než Fréchetova diferencovatelnost a bývá i někdy nazývána slabou diferencovatelností.

Preiss-Zajíčkova věta 2.14. spolu s příkladem 2.15. vede k následující Asplundově větě, která je nejdůležitější větou o Asplundových prostorech.

Věta 3.1. (Asplundova). *Je-li duální prostor E^* Banachova prostoru E separabilní, potom E je Asplundův prostor.*

Důkaz: Je-li f spojitá a konvexní na otevřené konvexní množině $D \subset E$, potom subdiferenciál ∂f je monotónní, takže podle věty 2.14. je jednoznačný a normovaně-normovaně shora polospojitý v bodech nějaké husté G_δ podmnožiny množiny $G \subset D$. Tudíž libovolná selekce pro subdiferenciál ∂f je spojitá v bodech množiny G, takže podle věty 2.13. je f fréchetovsky diferencovatelná v bodech G. □

Tento důkaz je převzat z literatury [12] a dokazuje ještě více než říká tato Asplundova věta, protože ji vyslovujeme díky postupu od Preisse a Zajíčka. Můžeme tedy uvést i její zobecnění.

Věta 3.2. *Nechť E je Banachův prostor takový, že jeho duální prostor E^* je separabilní a nechť monotónní operátor $T = \partial f$, kde f je spojitá konvexní funkce na E. Potom existuje úhlově malá množina $A \subset D(T)$ a funkce f je fréchetovsky diferencovatelná na $D(T) \backslash A$.*

V minulé kapitole jsme se zabývali i diferencovatelností lipschitzovských funkcí v prostorech konečné dimenze, když jsme uvedli Rademacherovu větu. Na ni navazuje Preissova věta, kterou si nyní uvedeme a jejíž důkaz lze najít v článku [13, strana 320].

Věta 3.3. (Preissova). *Nechť E je Asplundův prostor a nechť f je reálná lipschitzovská funkce na otevřené podmnožině U prostoru E. Potom je funkce f fréchetovsky diferencovatelná na husté podmnožině U.*

Díky mnoha dalším poznatkům z minulé kapitoly můžeme vyslovit několik tvrzení o Asplundových prostorech.

Věta 3.4. *Uzavřený podprostor M Asplundova prostoru E je sám Asplundův prostor.*

Důkaz: viz [12, strana 32]

Stále ovšem zůstává otevřenou otázkou, zda uzavřený podprostor slabého Asplundova prostoru je sám slabý Asplundův prostor.

Dále uvedeme větu obsahující několik tvrzení o Asplundových prostorech, všechna zmíněná tvrzení jsou dokázána v literatuře [12].

Věta 3.5. *Nechť E je Banachův prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) E je Asplundův prostor.

2) Každý separabilní uzavřený podprostor F prostoru E je Asplundův prostor.

3) Každý separabilní podprostor prostoru E má separabilní duál.

4) Každá neprázdná ohraničená podmnožina duálního prostoru E^* připouští plátky slabé s hvězdičkou libovolně malého průměru.

5) Každý separabilní uzavřený podprostor prostoru E má separabilní duál.

Bezprostředně z bodu 2) a 3) plyne, že každý reflexivní Banachův prostor je Asplundův prostor.

Pokud bychom uvažovali separabilní Banachův prostor můžeme vyslovit ještě jedno tvrzení.

Věta 3.6. *Separabilní Banachův prostor E je Asplundův prostor právě tehdy, když duální prostor E^* je separabilní.*

Důkaz: viz [12, strana 25]

Nakonec můžeme ještě zmínit důsledek bodu 4) věty 3.5.: Jestliže Banachův prostor E není Asplundův prostor, potom existuje ekvivalentní norma na E, která není nikde fréchetovsky diferencovatelná. Pro slabé Asplundovy prostory je pak v literatuře [12] zmíněno tvrzení, které má podobný důkaz jako bod 4) věty 3.5.: Jestliže E připouští ekvivalentní normu, která má striktně konvexní duální normu, potom E je slabý Asplundův prostor.

3.1 Příklady Asplundových prostorů

V této podkapitole ukážeme některé již známé příklady Asplundových a slabých Asplundových prostorů. Tyto příklady se dají najít v literatuře [7].

Příklad 3.1. Ukažte, že prostor l^p je Asplundův prostor pro $1 < p < \infty$.
Víme, že prostor l^p je prostor posloupností, pro které je pro $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ splněna podmínka

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Norma vektoru x je pak rovna

$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}.$$

a) Ukážeme, že prostor l^p, $1 \leq p < \infty$ je separabilní. Uvažujme tedy v prostoru l^p skupinu $\mathcal{F}$ tvořenou prvky obsahujícími konečný počet nenulových členů a těmi jsou racionální čísla. Potom $\mathcal{F}$ je spočetná. Dále potřebujeme ukázat, že $\mathcal{F}$ je hustá v l^p. Mějme $x \in l^p$, $\epsilon > 0$ a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |x_i|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2}$$

a potom najdeme racionální čísla $r_1, r_2, \dots, r_{n_0-1}$ tak, že

$$|x_i - r_i|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2n_0} \qquad \text{pro } i = 1, \dots, n_0 - 1.$$

Potom $s = (r_1, r_2, \dots, r_{n_0-1}, 0, \dots)$ je v $\mathcal{F}$ a

$$\|s - x\|_p^p = \sum_{i=1}^{n_0-1} |x_i - r_i|^p + \sum_{i=n_0}^{\infty} |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{\epsilon^p}{2n_0} + \frac{\epsilon^p}{2} < \epsilon^p.$$

Proto $\mathcal{F}$ je hustá v l^p. Víme tedy, že $\mathcal{F}$ je spočetná a hustá v l^p, z čehož vyplývá, že l^p je separabilní, tudíž je slabým Asplundovým prostorem.

b) Ukážeme, že $(l^p)^*$, $1 < p < \infty$ je separabilní. Je zřejmé, že prostor $(l^p)^*$ je prostor posloupností, které v řadě konvergují, tedy pro $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, \ldots)$ je splněna podmínka

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*|^q < \infty,$$

kde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, tedy $l^{p*} = l^q$ (odvození viz [5, strana 37]), $1 < q < \infty$. Norma vektoru x^* je pak rovna

$$\|x^*\| = \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*|^q}.$$

Prostor l^q má tudíž stejné vlastnosti jako l^p, a proto je také separabilní, takže prostor l^p je Asplundův prostor.

★

Příklad 3.2. Ukažte, že prostor c_0 je Asplundův prostor.

Víme, že prostor c_0 je prostor posloupností konvergujících k nule. Norma vektoru $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ je rovna

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Nejdříve ukážeme, že prostor c_0 je separabilní. Postup je velice podobný jako u prostoru l^p. Uvažujme tedy v prostoru c_0 skupinu $\mathcal{F}$ tvořenou prvky obsahujícími konečný počet nenulových členů a těmi jsou racionální čísla. Potom $\mathcal{F}$ je spočetná. Dále potřebujeme ukázat, že $\mathcal{F}$ je hustá v c_0. Mějme $x \in c_0$, $\epsilon > 0$ a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\max_{n_0 \le i < \infty} |x_i| \le \frac{\epsilon}{2}$$

a potom najdeme racionální čísla $r_1, r_2, \ldots, r_{n_0-1}$ tak, že

$$|x_i - r_i| \le \frac{\epsilon}{2n_0} \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n_0 - 1.$$

Potom $s = (r_1, r_2, \ldots, r_{n_0-1}, 0, \ldots)$ je v $\mathcal{F}$ a

$$\|s - x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n_0 - 1} |x_i - r_i| + \max_{n_0 \le i < \infty} |x_i| \le \frac{\epsilon}{2n_0} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Tudíž $\mathcal{F}$ je hustá v c_0. Víme tedy, že $\mathcal{F}$ je spočetná a hustá v c_0, z čehož vyplývá, že c_0 je separabilní, a tedy je slabým Asplundovým prostorem. Abychom mohli říci, že c_0 je Asplundův prostor musíme ještě ukázat, že ${c_0}^*$ je separabilní. Duálním prostorem prostoru c_0 ovšem je prostor l^1 a z příkladu 3.1. bodu a) víme, že ten je také separabilní, takže prostor c_0 je Asplundův prostor.

★

Obecně platí, že je-li K kompaktní množina, potom prostor $C(K)^*$ může být ztotožněn s prostorem všech regulárních borelovských měr na K konečné variace. Každá taková míra μ definuje funkcionál $F_\mu(f) = \int_K f d\mu$ a zobrazení $\mu \mapsto F_\mu$ je lineární izometrie, viz literatura [7].

V dalším příkladě se využívá Diracovy míry, proto si ji nyní zavedeme. Mějme $k \in K$, příslušnou Diracovu míru stanovíme na $\delta_k(f) = f(k)$ pro každé $f \in C(K)$. Přičemž δ_k je spojitý lineární funkcionál s normou rovnou jedné. Ve skutečnosti

$$\|\delta_k\| = \sup_{\|f\| \leq 1} (\delta_k(f)) = \sup_{\|f\| \leq 1} (f(k)) \leq 1.$$

Vezmeme-li konstantní funkci $f = 1$, dostaneme $\|\delta_k\| = 1$.

Příklad 3.3. Ukažte, že prostor $C\langle 0,1\rangle$ je slabý Asplundův prostor, ale není Asplundovým prostorem.

Víme, že prostor $C\langle 0,1\rangle$ je prostor všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$, na kterém uvažujeme normu

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Opět nejdříve ukážeme, že prostor $C\langle 0,1\rangle$ je separabilní. Mějme množinu polynomů $\mathcal{P}$ na $\langle 0,1\rangle$, která tvoří algebru v $C\langle 0,1\rangle$ oddělující body z $\langle 0,1\rangle$ a obsahující konstantní funkci. Proto uzávěr $\overline{\mathcal{P}}$ v $C\langle 0,1\rangle$ je $C\langle 0,1\rangle$ podle Stone-Weierstrassovy věty. Budeme-li uvažovat množinu polynomů na $\langle 0,1\rangle$ s racionálními koeficienty, máme hustou množinu v $\mathcal{P}$, a proto $C\langle 0,1\rangle$ je separabilní, tudíž je slabým Asplundovým prostorem. Dále ukážeme, že prostor $C(\langle 0,1\rangle)^*$ není separabilní. Uvažujme Diracovu míru δ_t pro $t \in \langle 0,1\rangle$. Požadujeme, pokud

$t_1 \neq t_2$, že $\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\| = 2$. Ve skutečnosti $\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\| \leq \|\delta_{t_1}\| + \|\delta_{t_2}\| = 2$. Na druhou stranu vybereme funkci $f_0 \in C\langle 0,1\rangle$ takovou, že $f_0(t_1) = 1$, $f_0(t_2) = -1$ a $\|f_0\|_\infty = 1$. Potom

$$\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\| \geq |f_0(t_1) - f_0(t_2)| = 2,$$

což je spor. Takže $C(\langle 0,1\rangle)^*$ nesplňuje podmínku spočetnosti, protože můžeme získat nespočetnou množinu disjunktních otevřených množin. Proto není separabilní, a tedy není Asplundovým prostorem.

★

Závěr

V této diplomové práci je popsána gâteauxovská diferencovatelnost a fréchetovská diferencovatelnost konvexních funkcí na Banachových prostorech včetně několika příkladů. Jsou zde zavedeny monotónní operátory a některé jejich vlastnosti. Díky těmto poznatkům mohly být uvedeny Mazurova věta a Preiss-Zajíčkova věta, které jsou základem pro vyslovení Asplundovy věty, což je nejdůležitější věta týkající se Asplundových prostorů. Nakonec jsou zmíněny další vlastnosti Asplundových prostorů a ukázány některé jejich příklady.

O tom, kde se dají Asplundovy prostory využít, hodně napsal ve svých knihách B. S. Mordukhovich [11]. Například v jednom z variačních principů zvaném extremální princip (Extremal Principle). V uvedené knize je zmíněno, že třída Asplundových prostorů je nejvhodnější strukturou pro teorii a aplikaci výsledků tohoto principu stejně jako několika dalších. Asplundovy prostory jsou aplikovány třeba při omezené optimalizaci (např. stanovování nutných podmínek v matematickém programování), ale i v ekonomii (např. druhý Welfareoův teorém pro nekonvexní ekonomiku).

Při psaní této práce jsem si opět potvrdila, že je velice těžké využít získané znalosti a uplatnit je při tvorbě důkazů či řešení příkladů. Zároveň jsem ráda, že se mi to v několika příkladech povedlo. V jiných a vlastně při psaní celé práce jsem čerpala z dostupné literatury, a protože většina odborných článků a knih je napsána v angličtině, prospělo mi to v procvičení anglického jazyka. Stejně tak jsem si opět prohloubila své dovednosti s typografickým programem TEX, ve kterém je tato práce napsána.

Literatura

[1] Alexejev V. M., Tichomirov V. M., Fomin S. V.: Matematická teorie optimálních procesů. Academia, Praha 1991

[2] Bachman G., Narici L.: Functional Analysis, Academic Press, New York 1966

[3] Balzar B., Štěpánek P.: Teorie množin, Academia, Praha 2001

[4] Dirac measure [online], dostupné na: http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac _measure, [citováno dne 19. 11. 2012]

[5] Došlý O.: Lineární funkcionální analýza [online], dostupné na: http:// www.math.muni.cz/ dosly/lfa-2012.pdf, [citováno dne 17. 11. 2012]

[6] Došlý O.: Základy konvexní analýzy a optimalizace v $\mathbb{R}^n$, Masarykova univerzita, Brno 2005

[7] Fabian M., Habala P., Hájek P., Santalucía V. M., Pelant J., Zizler V.: Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry. Springer-Verlag, New York 2001

[8] Lukeš J.: Zápisky z funkcionální analýzy, Karolinum, Praha 2003

[9] Lukeš J., Malý J.: Measure and Integral, MATFYZPRESS, Praha 2005

[10] Lukšan L.: Úvod do funkcionální analýzy [online], dostupné na: http:// www.cs.cas.cz/luksan/lekce2.pdf, [citováno dne 22. 10. 2012]

[11] Mordukhovich B. S.: Variational Analysis and Generalized Differentiation I, II, Springer-Verlag, Berlin 2006

[12] Phelps R. R.: Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. Springer-Verlag, Berlin 1993

[13] Preiss D.: Differentiability of Lipschitz Functions on Banach Spaces, Journal of Functional Analysis **91**, 1990, 312 - 345

[14] Rockafellar R. T.: Convex functions, monotone mperators and variational inequalities, In: Theory and Applications of Monotone Operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy 1968, 35-65