Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Kombinatorika a pravděpodobnost v úlohách matematických soutěží

Combinatorics and probability in problems from mathematical competitions

Bakalářská práce

Vypracoval: Vojtěch Míka

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2022

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce panu prof. RNDr. Pavlovi Tlustému, CSc. za ochotu, odborné vedení a mnoho cenných rad, které mi během mého psaní poskytl.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 25. března 2022.

....

Vojtěch Míka

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá řešením úloh z českých i zahraničních matematických soutěží, které jsou zaměřeny na téma kombinatorika a pravděpodobnost. Práce má sloužit jako doplňující studijní materiál jak pro studenty se zvýšeným zájmem o matematiku, tak i pro učitele. Součástí práce jsou obrázky a schémata potřebná pro řešení konkrétních úloh.

Abstract

This bachelor thesis deals with solving problems from Czech and foreign mathematical competitions, which are focused on the topic of combinatorics and probability. The work is to serve as a supplementary study material for students with an increased interest in mathematics, as well as for teachers. The work includes pictures and diagrams needed to solve specific tasks.

Obsah

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je vytvoření materiálu pro studenty (především středních škol), popř. učitele, kteří mají zájem o matematiku. Práce má sloužit jako podpůrný materiál jak při studiu, tak při přípravě na účast v matematických soutěžích. Úlohy byly vybírány ze středoškolských kategorií především proto, že jejich řešení jsou složitější a některé z nich umožňují řešení různými postupy. Z každé soutěže, která byla v této práci použita, je zde uvedeno několik úloh, včetně jejich podrobného řešení. Zároveň byl kladen důraz na úlohy, které mají více možných řešení.

V první kapitole jsou uvedeny cíle práce a její charakter.

Druhá kapitola je zaměřená na objasnění základních pojmů z oblasti kombinatoriky a pravděpodobnosti, které jsou potřeba pro řešení příkladů v této práci.

Třetí kapitola obsahuje charakteristiku jednotlivých soutěží, ze kterých byla čerpána zadání jednotlivých úloh. U každé soutěže jsou uvedené stručné informace o soutěži, pro jakou věkovou skupinu studentů, popř. žáků, je určena. Dále je zde rozebrána stručně forma každé soutěže, tzn. časový limit, forma odpovědí.

Zbylé kapitoly jsou o příkladech z vybraných soutěží. V těchto kapitolách jsou příklady řešeny.

Práce je psána v programu TEXworks. Obrázky a schémata v ní byla vytvořena pomocí programu *Ipe*.

2 Základní pojmy

2.1 Kombinatorika

Kombinatorika, někdy také nazývána *Kombinatorickou analýzou*, je matematická disciplína, která se zabývá tzv. *konfigurací*. *Konfigurací* rozumíme „zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou“. Zjednodušeně lze říci, že se jedná rozdělování, uspořádávání a výběr prvků množiny. Od řady ostatních matematických oborů se liší tím, že zkoumá vlastnosti pouze konečných množin, na rozdíl např. od geometrie, kde útvary mají nekonečně mnoho bodů a mohou mít např. nekonečnou délku (přímka). Díky tomu patří kombinatorika do širší oblasti matematiky, do oblasti *diskrétní matematiky.* (Fuchs, 2)

Jako matematická disciplína se kombinatorika začala vyvíjet v zhruba v 16.-17. století. Mezi slavné matematiky z tohoto období, v jejichž dílech můžeme najít kombinatorické úvahy, patří např. B. Pascal, P. Fermat, G.W. Leibnitz. Svou prací v 18. století výrazně přispěl k rozvoji kombinatoriky L. Euler. Díky výpočetní technice zažívá kombinatorika od 20. století značný rozvoj. (Fuchs, 2)

Přehled definic

Definice (Faktoriál)**.** Funkci $n!$ (čti n faktoriál) definujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ takto:

$$n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{pro n} > 0. \end{cases}$$

Definice (Pravidlo součinu)**.** Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až $k-$tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Definice (Pravidlo součtu). Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Definice (Princip inkluze a exkluze (pro $n = 3$)). Pro libovolné množiny A_1, A_2, A_3 platí:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Definice (Variace). k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet $V(k, n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = \frac{n!}{n - k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Definice (Permutace 1). Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Jiný způsob definice permutace:

Definice (Permutace 2). Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků je

$$P(n) = n!.$$

Definice (Kombinace). k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet $K(k, n)$ všech k-členných kombinací z n prvků je

$$K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Výraz $\binom{n}{k}$ nazýváme *kombinačním číslem.* Pro všechna celá nezáporná čísla $n,\ k,\ k\ \leq\ n,$ platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Definice (Variace s opakováním)**.** k-členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací s opakováním z n prvků je

$$V'(k,n) = n^k.$$

Definice (Permutace s opakováním)**.** Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Počet $P'(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1,k_2\ldots,k_n$-krát, je

$$P'(k_1,k_2,\ldots,k_n) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.$$

Definice (Kombinace s opakováním)**.** k-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Definice (Binomická věta)**.** Pro všechna čísla a,b a každé přirozené číslo n platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Po rozepsání dostáváme

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

2.2 Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, jež se zabývá jevy, konstrukcí a zkoumáním pravděpodobnostních prostorů. Každá situace, kterou v pravděpodobnostním počtu řešíme, je jedinečná tím, že potřebuje svůj pravděpodobnostní prostor. Při řešení úloh je tedy potřeba vždy zkonstruovat pravděpodobnostní prostor jí odpovídající. (Płocki, 3) Objekty, které zkoumáme, jsou pokusy, u nichž nemůže dopředu znát výsledek, tedy závisí na náhodě. Takto provedené experimenty, ať už dodržíme předepsaný postup (např. při fyzikálním pokusu), mohou za stejných podmínek generovat různé výsledky. Mluvíme o **náhodných pokusech**. (Calda, 1)

Definice (Množina všech možných výsledků pokusu)**.** Množina všech možných výsledků pokusu je množina všech výsledků náhodného pokusu, které se navzájem vylučují (nastane-li jeden, nemůže nastat druhý), a jeden z nich nastane vždy. Značíme ji Ω a její libovolný prvek značíme ω.

Definice (Rozdělení pravděpodobnosti)**.** *Rozdělení pravděpodobnosti na množině* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ nazýváme každou nezápornou funkci p na množině Ω takovou, že

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_s) = 1.$$

Definice (Pravděpodobnostní prostor)**.** Dvojici (Ω, p), kde p je rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω, nazýváme *pravděpodobnostním prostorem.*

Pokud $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ a $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_s) = \frac{1}{s}$, pak funkci p nazýváme *klasické rozdělení pravděpodobnosti na množině* Ω a dvojici (Ω, p) *klasický pravděpodobnostní prostor.*

Jevy

Jevy jsou jednotlivé podmnožiny množiny všech možných výsledků. V každém náhodném pokusu je tolik jevů, kolik je podmnožin množiny výsledků Ω. Značíme je písmeny A, B, C atd.

Definice (Pravděpodobnost jevu)**.** Označme $P(A)$ pravděpodobnost jevu A. Definuje se jako součet pravděpodobností výsledku příznivých jevu A.

V pokusu, jehož všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné (klasický pravděpodobnostní prostor), je pravdě podobnost jevu rovna podílu

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}.$$

Druhy jevů:

- **Elementární jev**: každý prvek množiny Ω; $0 \leq P(A) \leq 1$
- **Nemožný jev**: $\emptyset \subset \Omega$; $P(\emptyset) = 0$
- **Jistý jev**: $\Omega \subset \Omega$; $P(\Omega) = 1$
- **Opačný (doplňkový) jev** A': Nastává právě tehdy, když jev A nenastává; $P(A') = 1 - P(A)$.

Definice (Sčítání pravděpodobností)**.** Jsou-li $A_1, \ldots, A_r$ navzájem se vylučující jevy, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, potom

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_r) = P(A_1) + \ldots + P(A_r).$$

3 Přehled soutěží

3.1 Matematická olympiáda v ČR

Jedná se o soutěž, kterou každoročně vyhlašuje Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT), a za uskutečnění soutěže zodpovídá Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF). Dále se na soutěži podílí Matematický ústav Akademie věd ČR. Účelem Matematické olympiády je podpora nadaných žáků a jejich rozvoj v oblasti matematiky. Zároveň slouží k popularizaci matematiky a informačních věd a péči o talentované žáky. Soutěž je jednotná pro celou ČR. Je tvořena domácí částí, školním, okresním, krajským a ústředním kolem.

Soutěž je určena jak pro žáky základních škol, tak i pro studenty středních škol, a je členěna do několika kategorií. V této práci se však budeme zabývat pouze příklady z kategorie C pro střední školy.

Ve školním kole soutěže, za které je zodpovědný ředitel školy a jím „pověřený učitel“, řeší žáci domácí a klauzurní část. V domácí části dostanou žáci letáky s úlohami, které mají vyřešit a odevzdat do daného termínu pověřenému učiteli. V klauzurní části už řeší žáci úlohy v termínu a čase, který stanovuje Ústřední komise MO.

Zodpovědnost za okresní kolo MO má kraj. Pro řízení tohoto kola zřizuje kraj okresní komisi MO (OK MO). Členy OK MO jmenuje kraj na období 5 let a tvoří ji učitelé základních, středních a vysokých škol.

Za krajské kolo MO je zodpovědný kraj, který pro tyto účely stanovuje komisi složenou z učitelů základních, středních a vysokých škol. Tyto členy komise navrhuje krajská pobočka JČMF a délka jejich funkčního období je 5 let.

Poslední kolo, tedy kolo ústřední, zajišťuje organizace vybraná ÚK MO, zpravidla je touto organizací JČMF, střední nebo vysoká škola v místě, kde se soutěž koná. Ústředního kola se účastní padesát nejlépe umístěných soutěžících z krajského kola kategorie A.

Je dobré zmínit, že pro nejúspěšnější soutěžící z ústředního kola pořádá ÚK MO soustředění, jehož účelem je příprava na příští ročník MO a příprava na účast v Mezinárodní matematické olympiádě (IMO). Zároveň ÚK MO pořádá soustředění pro nejlepší účastníky z krajských kol kategorií B a C. Pro ostatní soutěžící, tedy z školních, okresních a krajských kol, jsou pořádány odborné přednášky, semináře a odborná soustředění.

3.2 Matematický klokan

Matematický klokan je mezinárodně koordinovaná soutěž, jejíž počátky jsou v osmdesátých letech dvacátého století v Austrálii. V ČR se soutěž uskutečnila poprvé v roce 1995. Soutěž pořádá JČMF, a to ve spolupráci s Katedrou matematiky PdF UP a Katedrou algebry a geometrie PřF UP v Olomouci.

Soutěž je určena pro žáky základních škol i pro studenty středních škol. Je členěna celkem do šesti kategorií, které jsou podle věku soutěžících stanoveny následovně: Cvrček (2. - 3. třída ZŠ), Klokánek (4. - 5. třída ZŠ), Benjamín (6. - 7. třída ZŠ), Kadet (8. - 9. třída ZŠ), Junior (1. - 2. ročník SŠ) a Student (3. - 4. ročník SŠ). Soutěž probíhá ve stejný den pro všechny žáky v ČR. Úlohy v soutěži jsou členěny do tří kategorií podle obtížnosti a jsou ohodnoceny $3, 4$ nebo 5 body za správně zodpovězenou úlohu. Za špatnou odpověď se soutěžícímu strhne jeden bod. Soutěžící začíná s určitým počtem bodů, jehož hodnota nemůže být záporná. Ke každé úloze je na výběr z pěti možných odpovědí a pouze jedna je správně.

V této práci se budeme zabývat úlohami z kategorie Student. Navíc budeme i využívat toho, že máme nabídku odpovědí, tudíž je můžeme postupně vyzkoušet, zda-li jsou vhodná. Toho budeme využívat i u příkladů v soutěži AMC.

3.3 American Math Competition (AMC)

American Math Competition je soutěž konající se ve Spojených státech amerických. Od roku 1950, kdy se konal první ročník této soutěže, ji pořádá organizace Mathematics Association of America (MAA), volně přeloženo: Americká asociace matematiků. Soutěž se dělí do tří kategorií podle věku soutěžících, resp. podle ročníků, které navštěvují. Kategorie jsou AMC 8, AMC 10 a AMC 12. Číslovky odpovídají ročníkům, pro které jsou určeny. Dalo by se říci, že v USA 5. - 8. ročník odpovídá druhému stupni ZŠ v ČR. Od 9. ročníku se už jedná o střední školu.

Nejnižší je kategorie AMC 8, která je určena pro žáky do 14,5 let věku. Test trvá 40 minut, obsahuje 25 otázek a ke každé otázce je na výběr z pěti možných odpovědí. Otázky obsahují témata napříč celým „druhým stupněm“, jsou to např. pravděpodobnost, odhad, základní geometrie, prostorová vizualizace, grafy apod.

Kategorie AMC 10 a AMC 12 je spadá svou obtížností do oblasti střední školy. Pro AMC 10 jsou otázky z učebních osnov do 10 třídy, pro AMC 12 už test obsahuje celé středoškolské kurikulum. Test je opět složen z 25 otázek, každá s 5 možnými odpověďmi. Trvá však 75 minut. Horní věkový limit pro soutěžící v kategorii AMC 10 je 17,5 let, pro AMC 12 je tato hranice 19,5 let.

Ve všech kategoriích se nestrhávají body za špatnou odpověď a za každou správnou je udělen jeden bod. Maximum získaných bodů je tedy ve všech kategoriích 25. Certifikát vyznamenání je udělen všem soutěžícím, kteří dosáhnou maximálního počtu bodů. Vítěz soutěže v dané škole získá vítězný odznak/medaili. Tři nejlepší soutěžící v dané škole získají zlaté, stříbrné nebo bronzové ocenění za mimořádný úspěch. Čestné ocenění získají všichni, kteří dosáhli vysokého počtu bodů. Záslužné ocenění získají všichni soutěžící s vysokým počtem bodů, kteří jsou v 6. třídě nebo nižší. Obecně AMC patří mezi lehčí soutěže a kategorie AMC 10/12 jsou „startovní čárou“ na cestě až k IMO.

3.4 Math Prize for Girls

Jak již napovídá název, tak tato soutěž je určena pouze pro dívky. Účelem soutěže je podpora mladých dívek s výjimečným potenciálem stát se předními odbornicemi v oblasti přírodních věd a matematiky. První ročník soutěže byl v roce 2009 a od té doby se soutěž koná každý podzim na Massachusettském technologickém institutu (MIT) a pořádá ho Advantage Testing Foundation, volně přeloženo: Nadace pro pokročilé testování. Je pro účastnice, které jsou nejvýše v 12. ročníku (poslední ročník střední školy) a žijí v USA nebo v Kanadě. Pro zapsání na soutěž je potřeba předchozí účast v soutěži AMC 10 nebo AMC 12.

Dělí se na dvě kategorie, Math Prize a Math Prize Olympiad. První zmíněná obsahuje 20 otázek bez možnosti výběru správné odpovědi, a trvá 2,5 hodiny. Druhá zmíněná má pouze 4 otázky, které jsou náročnější, opět bez možnosti výběru odpovědi a test trvá 4 hodiny.

Math Prize for Girls je největší matematickou soutěží pro dívky na světě a zároveň má i jednu z nejvyšších odměn. Vítěz soutěže totiž obdrží částku 25 000 dolarů (v přepočtu zhruba 575 000 korun).

4 Matematická olympiáda pro SŠ, kategorie C

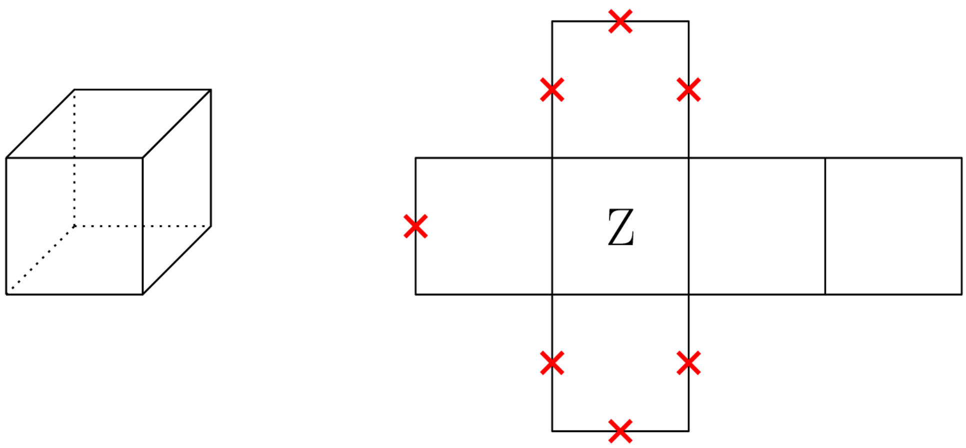
Úloha č.2 z krajského kola 65.ročníku (2015/2016)

Zadání:

Určete, kolika způsoby lze všechny hrany krychle $ABCDEFGH$ obarvit čtyřmi danými barvami (celou hranu bez krajních bodů vždy jednou barvou), aby při tom každá stěna krychle měla hrany všech čtyř barev.

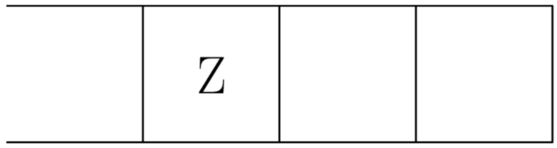
Řešení:

Jako první si nakreslíme krychli a její síť. Jako čtyři různé barvy si zvolíme například modrou, červenou, zelenou a oranžovou. Každá hrana patří ke dvěma stěnám krychle, proto můžeme naši síť zjednodušit tak, že si vybereme hrany, které jsou pro každou ze stěn společné a ty nebudeme brát v úvahu (na obrázku 4.1 označeny červeným křížkem).



Obrázek 4.1: Krychle a její síť

Dostaneme tak redukovanou síť, ve které každá čára **odpovídá právě jedné hraně.** Viz obrázek 4.2

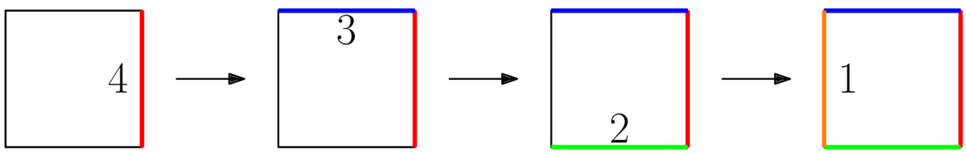


Obrázek 4.2: Redukovaná síť

Na začátku si vybereme jeden čtverec ze sítě, v našem případě ten, který je označen písmenem Z. Do toho čtverce budeme umísťovat barvy k hranám. Počet všech možností jak přiřadit čtyři různé barvy k hranám tohoto čtverce lze vyjádřit jako permutaci $P(n)$, kde $n = 4$.

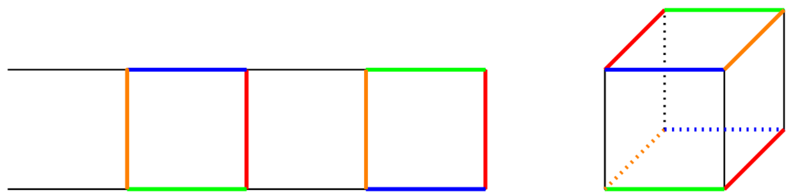
$$P(n) = n!$$
$$P(4) = 4!$$
$$P(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Jedno z možných obarvení základního čtverce viz obrázek 4.3.



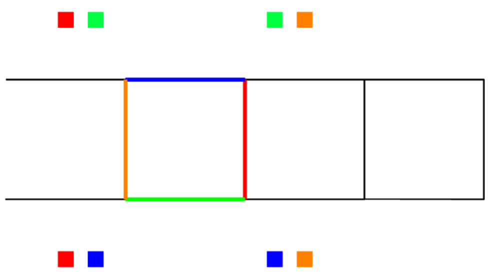
Obrázek 4.3: Možnosti pro výběr barev v Z-čtverci

V další části řešení je už potřeba si více promyslet, na jaké hrany můžeme dát příslušné barvy. Řekněme, že do čtverce nejvíce vpravo v naší redukované síti umístíme barvy tak, aby stejné barvy byly po složení krychle naproti sobě přes úhlopříčku krychle (tělesová úhlopříčka). Zbydou nám poslední čtyři neobarvené hrany, které však nemůžeme obarvit žádnou barvou, protože jakékoli obarvení už nesplní podmínku ze zadání, proto je toto obarvení špatně. Ukázka je na obrázku 4.4.



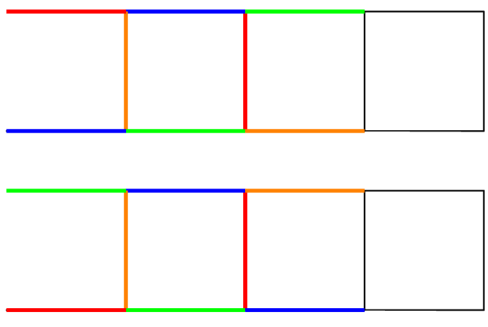
Obrázek 4.4: Ukázka špatného obarvení

Vrátíme se opět k naší redukované síti s obarveným základním čtvercem. Zaměříme se na vrcholy tohoto čtverce. V každém z vrcholů se „sbíhají“ dvě barvy a jedna z něho ještě musí „vystupovat“ do neobarvené hrany. Je jasné, že se nemůže jednat o jednu z dvou barev, které do vrcholu vstupují, protože by opět nedošlo k různobarevnému obarvení stěny krychle. Máme tedy dvě možnosti jak třetí hranu vystupující z každého vrcholu základního čtverce obarvit.



Obrázek 4.5: Možné obarvení třetí hrany

Avšak vybereme-li jednu ze dvou možností, pak už je dobarvení ostatních hran krychle, aby bylo splněno zadání úlohy, jednoznačné.



Obrázek 4.6: Situace po výběru barvy k jedné z hran

Počet možností, jak obarvit krychli požadovaným způsobem je tedy

$$P_{\text{způsob}} = 24 \cdot 2 = 48.$$

Úloha č.2 z krajského kola 66. ročníku (2016/2017)

Zadání:

Čtvercovou tabulku 6×6 zaplníme všemi čísly od 1 do 36.

a) Uveďte příklad takového zaplnění tabulky, kdy součet každých dvou čísel ve stejném řádku či ve stejném sloupci je větší než 11.

b) Dokažte, že při libovolném zaplnění tabulky se v některém řádku nebo sloupci najdou dvě čísla, jejichž součet nepřevyšuje 12.

Řešení:

V případě za **a)**, jde pouze o to najít vhodné uspořádání čísel v tabulce. Toho lze dosáhnout tak, že budeme diagonály v tabulce střídavě vyplňovat čísly z obou konců množiny od 1 do 36 aby šla "proti sobě". Začneme tím, že hlavní diagonálu vyplníme odshora dolů, tzn. od levé horní buňky k pravé dolní buňce, čísly 1 až 6. Obě sousední diagonály vyplníme poté čísly z druhé konce dané množiny, tzn. od 36 až po 27. V dalších diagonálách postupujeme obdobně až do vyčerpání celé množiny. Jedno z možných vyplnění lze vidět na obrázku 6.1.

1	31	11	23	17	19
36	2	30	12	22	18
7	35	3	29	13	21
26	8	34	4	28	14
15	25	9	33	5	27
20	16	24	10	32	6

Obrázek 4.7: Tabulka 1

Dalším způsobem je použít nejdříve čísla od 1 do 12. Čísla od 1 do 6 vepíšeme do hlavní diagonály a zbylá čísla od 7 do 12 vyplníme vedle nich vhodným způsobem tak, aby součet byl větší než 11. Zbytek tabulky už lze vyplnit libovolně, protože tam budeme vypisovat čísla větší než 11. Ukázka na obrázku 4.8

1	12				
11	2				
		3	10		
		9	4		
				5	8
				7	6

Obrázek 4.8: Tabulka 2

V případě **b)** opět vyplníme hlavní diagonálu čísly od 1 do 6, protože při jiném způsobu zaplnění bychom tvrzení dokázali, jelikož by se v některém sloupci nebo řádku vyskytovala dvě čísla z množiny $1, 2, \ldots, 6$ a tím pádem by součet dvou vhodných čísel, například $6 + 5$ nebo $6 + 3$ byl roven nejvýše 11.

Budeme-li tedy mít vyplněnou diagonálu od 1 do 6, pak další nejmenší číslo, které lze zapsat do tabulky, je 7. Jelikož je hlavní diagonála zaplněna tak, jak je, znamená to, že číslo 7 můžeme do tabulky zapsat kamkoliv. Vždy se totiž vyskytne v sloupci nebo řádku s číslem od 1 do 5. Ukázku lze vidět na obrázku 4.9

1					
8	2				
	9	3			
		10	4		
			11	5 12	
7	7	7	7	7	6

Obrázek 4.9: Tabulka 3

Tím pádem je zadání **b)** splněno a platí.

Úloha č.2 ze školního kola 67. ročníku (2017/2018)

Zadání:

Zkoumejte, zda lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé čtvercové části 2×2 byl zapsán aspoň jeden násobek pěti.

a) Dokažte, že pro každé sudé n to nejde.

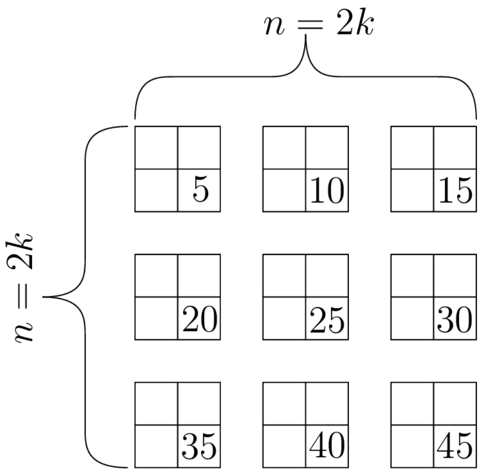
b) Najděte největší liché n, pro něž to jde.

Řešení:

V části **a)** si tabulku rozdělíme na oddělené části 2×2. V každé z těchto částí chceme mít alespoň jeden násobek pěti. Jestliže n jsou sudá, tzn. $n = 2k$, pak všech přirozených čísel od 1 do n^2 je tím pádem:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Násobky pěti jsou $5, 10, \ldots, 5k^2$. My máme však k^2 čtverečků 2×2. Číslo $5k^2$ mezi čísly $n^2 = 4k^2$ není obsaženo, tím je část **a)** dokázána.



Obrázek 4.10: Tabulka a)

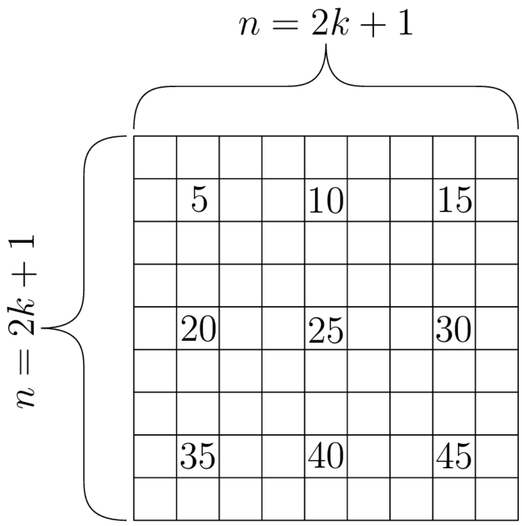
V části **b)** je n liché číslo, tudíž $n = 2k+1$. Všech čísel v tabulce $n \times n$ a tím pádem

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Opět potřebujeme vyplnit k^2 čtverečků typu 2×2. Musí proto platit, že:

$$\begin{aligned} 5k^2 &\leq 4k^2 + 4k + 1 \\ k^2 &\leq 4k + 1 \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna pro $k = 4$, jak lze vidět na obrázku 4.11. Nejvyšší možné n, které vyhovuje je tím pádem $n = 2 * 4 + 1 = 9$.



Obrázek 4.11: Tabulka b)

Úloha č.2 ze školního kola 70. ročníku (2020/2021)

Zadání:

Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí:

(i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0,

(ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích.

Řešení (i):

V první části lze snadno odhadnout, že hledané číslo n bude muset být dělitelné třemi, viz tabulky na obrázku 4.12.

2	-1	-1
-1	2	-1
-1	-1	2

2	-1	-1	2	-1	-1
-1	2	-1	-1	2	-1
-1	-1	2	-1	-1	2
2	-1	-1	2	-1	-1
-1	2	-1	-1	2	-1
-1	-1	2	-1	-1	2

Obrázek 4.12: Součet v tabulkách (i)

Řešení (ii):

Jelikož podmínka (ii) nebude platit pro tabulku 3×3 a z podmínky (i) víme, že n je dělitelné třemi, zkusíme tedy, jestli podmínka (ii) bude platit pro tabulku 6×6. V tomto případě už platí obě podmínky.

Z první podmínky plyne, že součet v jednotlivých řádcích je roven 0. Tím pádem součty bílých polí S_b a součty černých polí S_c jsou rovny 0. Zároveň však z druhé podmínky plyne že $S_b = S_c$. Počet černých i bílých polí je tím pádem dělitelný 3.

2	-1	-1	2	-1	-1
-1	2	-1	-1	2	-1
-1	-1	2	-1	-1	2
2	-1	-1	2	-1	-1
-1	2	-1	-1	2	-1
-1	-1	2	-1	-1	2

Obrázek 4.13: Tabulka (*ii*)

V případě, že n je sudé, jsou si počty černých a bílých polí rovny. Druhá možnost je, že je n liché, v tom případě se počet černých a bílých polí liší o 1. Neexistují však násobky 3, které by se lišily o 1. Z toho plyne, že n musí být sudé a je-li n sudé, je dělitelné 2. Jelikož je n dělitelné 2 i 3, je tím pádem dělitelné i 6. Podmínky (i) i (ii) jsou tedy splněny pro všechna n, která jsou dělitelná 6, nebo-li $n = 6k$.

5 Matematický klokan, kategorie Student

Příklad č.20 z roku 2010 (za 5 bodů)

Zadání:

Třikrát hodíme standardní hrací kostkou. Při třetím hodu padne číslo, které je součtem čísel padlých v prvních dvou hodech. Určete pravděpodobnost, že při alespoň jednom hodu padne číslo 2.

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{91}{216}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{8}{15}$ **(E)** $\frac{7}{12}$

Řešení:

Nakreslíme si tabulku 6×6, která odpovídá hodům dvěma kostkami a v jejích buňkách budou jednotlivé součty hozených teček na obou kostkách.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obrázek 5.1: Tabulka hodů

Nyní si rozebereme situace, kdy padne alespoň jedna dvojka. Začneme s třetí kostkou. Padne-li na třetí kostce dvojka, znamená to, že předchozích dvou kostkách musely padnout jedničky. To v tabulce odpovídá buňce v levém horním rohu.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obrázek 5.2: Hod dvou jedniček

Pokud padne dvojka na jedné z prvních dvou kostek, tak na druhé musí padnout číslo, které po sečtení s 2 dá maximálně číslo 6 (pokud by byl součet větší, nemohla by být splněno zadání pro třetí hod kostkou). To v naší tabulce znamená, že vyhovující jsou sloupce, resp. řádky, kdy padla dvojka a zároveň součet obou hodů nebyl větší než 6. Všechny vyhovující buňky jsou fialově zvýrazněny na obrázku 5.3.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obrázek 5.3: Možnosti prvních dvou hodů

Sečtením obarvených buněk v tabulce dostáváme celkem osm, při kterých padla alespoň jednou dvojka. Jak již bylo zmíněno, součet prvních dvou hodů nesmí přesáhnout 6. Vyznačíme si to v tabulce a spočítáme tyto buňky. Dostaneme tím počet všech možností, které mohou nastat. Z obrázku 5.4 lze snadno určit, že všech možností je 15.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obrázek 5.4: Všechny možnosti

Pravděpodobnost, že padne alespoň jedna dvojka je tedy

$$P = \frac{8}{15}$$

Správná odpověď je potom $\boxed{\textbf{(D)}}$.

Příklad č.14 z roku 2017 (za 4 body)

Zadání:

Regulérní hrací kostka tvaru pravidelného čtyřstěnu má stěny označeny čísly 2, 0, 1 a 7. Hodíme čtyřmi takovými kostkami. Určete pravděpodobnost jevu: kostky můžeme poté sestavit tak, že vznikne číslo 2017 užitím vždy právě jedné ze tří shora viditelných stěn každé kostky.

(A) $\frac{1}{256}$ **(B)** $\frac{63}{64}$ **(C)** $\frac{81}{256}$ **(D)** $\frac{3}{32}$ **(E)** $\frac{29}{32}$

Řešení:

Tento příklad je vhodné řešit pomocí pravděpodobnosti doplňkového jevu $P(A')$. Budeme tedy zkoumat situaci, kdy při hodu čtyřmi kostkami nebudeme schopni složit číslo 2017 z tří čísel shora viditelných na stěnách kostek. Stačí si proto uvědomit, že chceme na všech čtyřech kostkách hodit stejná čísla. V okamžiku, kdy se jedna z kostek bude lišit od ostatních tří, tak už jsme schopni poskládat požadované číslo 2017. Jaké kombinace čísel vlastně můžeme hodit na jedné kostce? Je to jako bychom vybírali náhodně tři čísla ze čtyř. Můžeme si všechny možnosti vypsat nebo vypočítat pomocí kombinačního čísla. Počet n všech možných výsledků hodu jednou kostkou je potom

$$n = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = 4.$$

Po vypsání víme, že to jsou $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 7\}$, $\{0, 2, 7\}$ a $\{1, 2, 7\}$. Pravděpodobnost $P(\{0, 1, 2\})$, že na všech 4 kostkách hodíme kombinaci $\{0, 1, 2\}$ je P

$$P(\{0, 1, 2\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}.$$

Kombinace, jak už bylo uvedeno výše, máme však celkem čtyři, proto pro každou kombinaci čísel bude platit výše zmíněný výpočet pravděpodobnosti jejich hodu na všech kostkách.

1. kostka	2. kostka	3. kostka	4. kostka	
$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\rightarrow \frac{1}{256}$
$\{0,1,7\}$	$\{0,1,7\}$	$\{0,1,7\}$	$\{0,1,7\}$	$\rightarrow \frac{1}{256}$
$\{0,2,7\}$	$\{0,2,7\}$	$\{0,2,7\}$	$\{0,2,7\}$	$\rightarrow \frac{1}{256}$
$\{1,2,7\}$	$\{1,2,7\}$	$\{1,2,7\}$	$\{1,2,7\}$	$\rightarrow \frac{1}{256}$

Obrázek 5.5: Množina všech hodů

Tím dostáváme hledanou pravděpodobnost doplňkového jevu $P(A')$

$$P(A') = 4 \cdot P(\{0, 1, 2\}) = 4 \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{64}.$$

Pravděpodobnost jevu A, tzn. jevu, kdy můžeme z hozených kostek poskládat číslo 2017, je

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A') \\ P(A) &= 1 - \frac{1}{64} \\ P(A) &= \frac{63}{64}. \end{aligned}$$

Správná odpověď je tím pádem $\boxed{\textbf{(B)}}$.

Příklad č.23 z roku 2018 (za 5 bodů)

Zadání:

Ve skupině je počet dívek a chlapců v poměru 7 ku 5. Pravděpodobnost jevu, že se náhodně vybraná dvojice členů skupiny skládá z chlapce a dívky, je $\frac{1}{2}$. Kolik členů má skupina?

(A) 12 **(B) 24** **(C) 36** **(D) 48** **(E) situace je nemožná**

Řešení:

Budeme vycházet z klasické definice pravděpodobnosti pro náhodný jev A, který je tvořen m elementárními jevy. Pravděpodobnost $P(A)$ náhodného jevu A je

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}.$$

kde:

$m(A)$ je počet všech příznivých případů jevu A

m je počet všech možných případů jevu A

Ze zadání víme, že hodnota $P(A) = \frac{1}{2}$. Budeme nejprve hledat číslo n. Pro jeho nalezení si musíme uvědomit, že budeme vybírat neuspořádanou dvojici ze všech $12 \cdot k$ členů skupiny, kde $k \in \{1; 2; 3; 4\}$. Čísla 1 až 4 pro k vychází z možných řešení, např. pro (A) je $k = 1$, pro (B) je $k = 2$ atd.

$$n = \binom{12k}{2}.$$

Číslo n už máme, teď se pokusíme zjistit číslo m. Pro vybranou dvojici má platit, že se bude skládat z jednoho chlapce a jedné dívky. Víme, že dívky a chlapci jsou rozděleni v poměru 7 ku 5. Všech dívek tedy bude $7k$ a všech chlapců $5k$. Z obou skupin opět náhodně vybereme jednoho člena, proto opět použijeme kombinaci.
Pro výběr jedné dívky ze všech dívek platí

$$m_1 = \binom{7k}{1}.$$

Obdobně pro výběr jednoho chlapce ze všech možných platí

$$m_2 = \binom{5k}{1}.$$

Číslo m bude podle pravidla součinu rovno

$$m = m_1 \cdot m_2 = \binom{7k}{1} \cdot \binom{5k}{1}.$$

Teď už známe jak číslo m, tak číslo n a obě čísla společně s $P(A) = \frac{1}{2}$ dosadíme do rovnice (1).
Dostáváme tedy

$$\frac{1}{2} = \frac{\binom{7k}{1} \cdot \binom{5k}{1}}{\binom{12k}{2}}.$$

a tuto rovnici budeme řešit pro k.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{7k \cdot 5k}{\frac{(12k)!}{2! \cdot (12k-2)!}} \\
\frac{1}{2} &= \frac{35k^2 \cdot 2! \cdot (12k-2)!}{(12k)!} \\
\frac{1}{2} &= \frac{70k^2 \cdot (12k-2)!}{(12k) \cdot (12k-1) \cdot (12k-2)!} \\
140k^2 &= 144k^2 - 12k \\
0 &= 4k^2 - 12k \\
0 &= 4k(k-3).
\end{aligned}
$$

Rovnice má tedy dvě řešení, $k = 0$ a $k = 3$. Řešení, kde $k = 0$ není řešením naší úlohy, proto $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ a kdyby k bylo rovno 0 měli bychom de facto 0-člennou skupinu.

Vhodné řešení je tedy $k = 3$ a z toho plyne, že počet členů skupiny P_s je

$$P_s = 12 \cdot k = 12 \cdot 3 = 36.$$

Správná odpověď je tedy $\boxed{(C)}$.

Příklad č.20 z roku 2012 (za 5 bodů)

Zadání:

Kolik permutací (x_1, x_2, x_3, x_4) čísel množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ má vlastnost, že součet $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ je dělitelný 3?

(A) 8 **(B) 12** **(C) 14** **(D) 16** **(E) 24**

Řešení:

Nejprve určíme počet všech permutací ze zadané čtyř-prvkové množiny. Ten je roven

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Nyní si vypíšeme všechny možnosti jednotlivých součinů prvků $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1$. Máme celkem šest čísel a to:

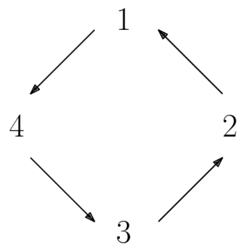
$$4 \cdot 3 = 12$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$4 \cdot 1 = 4$$
$$3 \cdot 2 = 6$$
$$3 \cdot 1 = 3$$
$$2 \cdot 1 = 2.$$

Vždy budeme mít součet čtyřech z výše vypsaných šesti čísel, avšak nemůžeme je sčítat jen tak libovolně. Zápis $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ si můžeme představit jako graf o čtyřech prvcích, přičemž začínáme z jednoho prvku a pomocí čtyř (plusy) šipek musíme „projít“ zbylými třemi prvky a dostat se zpět do výchozího bodu. Do každého prvku musí jedna šipka vstupovat a jedna z něj musí vystupovat. Jako příklad můžeme vzít jednu z permutací, např. (1,2,3,4).

Součet součinů jejích prvků je podle zadání

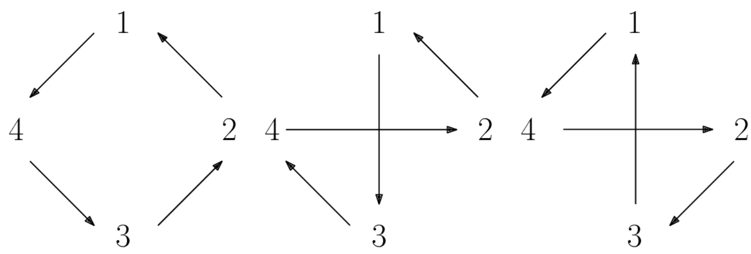
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 2 + 6 + 12 + 4 = 24$$

což by v grafu vypadalo následovně:



Obrázek 5.6: Graf permutace (1,2,3,4)

Tato „cesta“ nám dala výsledné číslo 24. Existují však ještě další „cesty“, které mohou být v grafu, konkrétně ještě další dvě. Všechny tři mají následující schémata.



Obrázek 5.7: Tři druhy cest

Je vidět, že nezáleží, v jakém čísle budeme „začínat“ a navíc ani nezáleží na směru šipek. Vždy pro každý graf s jedním typem cesty dostaneme součet součinů jedno číslo. Na obrázku 5.7 je to (čteno zleva) číslo 24 pro první graf, 25 pro druhý a 21 pro třetí. Jelikož v každém čísle můžeme v grafu začínat a můžeme jít i opačným směrem než na obrázku 5.7, tak pro každý typ grafu máme 8 cest a pro všechny tři tím pádem 24, což odpovídá počtu permutací zadané množiny.

Čísla 24 a 21 jsou dělitelná třemi, ale číslo 25. Dvě ze tří jsou dělitelná 3, proto všechny permutace dělitelné 3 jsou

$$\frac{2}{3} \cdot 24 = 16.$$

Správná odpověď je tím pádem $\boxed{(D)}$.

Příklad č.18 z roku 2014 (za 5 bodů)

Zadání:

Každý z 9 klokanů je buď zlatý, nebo stříbrný. Když se náhodně potkají tři klokani, s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ mezi nimi nebude žádný stříbrný. Kolik klokanů je zlatých?

(A) 1 **(B) 3** **(C) 5** **(D) 7** **(E) 8**

Řešení:

Počet zlatých klokanů si označíme jako z. Na příklad můžeme nahlížet jako např. na losování kuliček z urny bez vracení. „Náhodně se potkají“ tři klokani budeme brát ve smyslu, že losujeme tři klokany. Zároveň víme, že se vylosujeme tři zlaté klokany s pravděpodobností $\frac{2}{3}$, tudíž losujeme tři zlaté klokany z devíti. Prvního vylosujeme s pravděpodobností

$$P_1 = \frac{z}{9.}$$

Druhého už losujeme z počtu, kde je o jednoho zlatého méně, tudíž losujeme $z - 1$ zlatých klokanů z celkových osmi zbývajících.

$$P_2 = \frac{z-1}{8}$$

a pro los třetího tím pádem platí

$$P_3 = \frac{z-2}{7}.$$

Díky pravidlu součinu a znalosti toho, že pravděpodobnost losu tří zlatých klokanů je $\frac{2}{3}$, můžeme psát rovnici

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{z}{9} \cdot \frac{z-1}{8} \cdot \frac{z-2}{7} = \frac{2}{3}$$

což po úpravě dává

$$z^3 - 3z^2 + 2z = 336.$$

Jelikož máme na výběr z pěti možných odpovědí, tak je postupně budeme dosazovat za z, a číslo, které splní po dosazení tuto rovnost, je to správné. Pouze se zamyslíme, jestli má cenu dosazovat první tři čísla $(1, 3, 5)$. Pokud umocníme 5 na třetí, tak dostaneme „pouze“ 125, což je evidentně málo i s ohledem na to, že poté ještě budeme číslo zmenšovat od $3z^2$. Smysl skutečně dosazovat a dopočítávat tak mají možnosti (D) a (E).

Rovnice je splněna pro $z = 8$ a správná odpověď je tím pádem $\boxed{(E)}$.

6 American Math Competition

Příklad č.19 AMC 12B z roku 2018

Zadání:

Two fair dice, each with at least 6 faces are rolled. On each face of each dice is printed a distinct integer from 1 to the number of faces on that die, inclusive. The probability of rolling a sum of 7 is $\frac{3}{4}$ of the probability od rolling a sum of 10 and the probability of rolling a sum of 12 is $\frac{1}{12}$. What is the least possible number of faces on the two dice combined?

(A) 16 **(B) 17** **(C) 18** **(D) 19** **(E) 20**

Volný překlad:

Máme dvě kostky, každou s alespoň šesti stranami. Na stěnách obou kostek jsou napsána navzájem různá celá čísla od 1 až po počet stran každé kostky včetně. Pravděpodobnost, že při hodu kostkami padne součet rovný 7, je tříčtvrtinová oproti pravděpodobnosti, že padne součet rovný 10, a pravděpodobnost, že padne součet rovný 12, je $\frac{1}{12}$. Jaký je nejnižší možný součet všech stěn obou kostek?

(A) 16 **(B) 17** **(C) 18** **(D) 19** **(E) 20**

Řešení:

Autorské řešení č.1:

Označme stěny kostek a a b a bez ztráty obecnosti předpokládejme, že $a \geq b$. Jelikož každá kostka má alespoň šest stěn, bude tedy vždy šest způsobů, jak dosáhnout součtu rovnému 7. Tím pádem musí být $\frac{4}{3} \cdot 6 = 8$ způsobů, jak dosáhnout součtu rovnému 10. Způsobů, jak dostat součet 10, je nanejvýš devět a jsou možné jedině pokud $a, b \geq 9$. Pro získání osmi cest musí b mít osm stěn a $a \geq 9$.

Nechť n je počet způsobů, jak získat součet rovný 12. Platí $\frac{n}{8a} = \frac{1}{12} \implies n = \frac{2}{3}a$ a $b = 8, n \leq 8 \implies a \leq 12$.

Platí, že $3 \mid a$, tudíž musíme vyzkoušet $a = 9, 12$, která obě vyhovují. Jelikož chceme nejnižší možný součet, řešením bude $a = 9$ a $b = 8 \implies 8+9 = 17$. Správná odpověď je tedy $\boxed{\textbf{(B)}\ 17}$.

Autorské řešení č.2:

Řekněme, že první kostka má a stěn a druhá kostka b stěn, a bez ztráty obecnosti předpokládejme, že $a \geq b$. Všimněme si toho, že když by platilo $a + b = 12$, tak by počet stěn obou kostek byl roven 6 a tím pádem by byl jediný způsob, jak získat součet 12. Zvyšováním a nebo b by se přidal další způsob součtu 12 dosáhnout. To nám dává pravděpodobnost hození součtu 12 jako

$$\frac{a+b-11}{ab} = \frac{1}{12}.$$

Roznásobením dostaneme

$$12a + 12b - 132 = ab.$$

Dalšími úpravami dostaneme

$$(a-12)(b-12) = 12.$$

To zúží naše možnosti na tři uspořádané dvojice (a, b), které jsou $(13, 24)$, $(6, 10)$, a $(8, 9)$. První z nich můžeme zjevně rovnou vynechat a budou nás zajímat poslední dvě. Poslední dvojice dává odpověď:

$$\frac{6}{72} = \frac{3}{4}\left(\frac{9+8-9}{72}\right).$$

Správná odpověď je tedy $a + b = 8 + 9 = \boxed{\textbf{(B)}\ 17}$.

Vlastní řešení:

Řešení č.1:

V tomto řešení se budeme příkladem zabývat pomocí tabulky. Díky možným odpovědím víme, že nejmenší možný součet stěn na obou kostkách je 16. Zkusíme si proto nakreslit tabulku 8×8, kde na horním a levém okraji budou postupně číslice 1 až 8. Jednotlivé buňky tabulky budou znamenat hozený součet na obou kostkách. Celkový počet buněk tabulky je v tomto případě $8 \cdot 8 = 64$. Pravděpodobnost, že hodíme jakýkoliv možný součet S_{lib}, je potom

$$P[S_{lib}] = \frac{A}{A_n}.$$

Kde A je počet všech „splňujících“ hodů/součtů a A_n je počet všech možností, které lze hodit.

Ze zadání víme, že pravděpodobnost hození součtu 12 je $\frac{1}{12}$. Když si v tabulce označíme všechny buňky, kde je součet roven 12, a spočteme je, zjistíme, že jich je pět. Viz obrázek 6.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

Obrázek 6.1: Tabulka 8×8

Je zřejmé, že odpověď $\boxed{\textbf{(A)}}$ je špatně, protože $\frac{5}{64} \neq \frac{1}{12}$. Navíc pokud si představíme, že bychom přidali další sloupec nebo řádek k tabulce, tak by se počet 12 zvýšil o 1, a tudíž by byl počet možností, jak hodit 12, sudý. Přidáním dvou řádků nebo sloupců by byl opět lichý. Zkusíme tedy přidat jeden sloupec a vytvořit tak tabulku 8×9 a tím pádem zkusit variantu $\boxed{\textbf{(B)}}$. Počet 12 je 6, všech možných hodů je $9 \cdot 8 = 72$, a tedy platí podmínka, že pravděpodobnost hození součtu rovnému 12 je $\frac{1}{12}$.

Teď stejným způsobem spočítáme 10 a 7 v Tabulce 2. Zjistíme, že desítek je 8 a sedmiček je 6. Platí tedy druhá podmínka a to, že

$$P(S_7) = \frac{3}{4} \cdot P(S_{10}) \implies \frac{6}{72} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{72} = \frac{1}{12}.$$

Ukázku lze vidět na obrázku 6.2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Obrázek 6.2: Tabulka 8×9

Správné řešení je tedy $\boxed{\textbf{(B)}}$.

Řešení č.2:

Opět uvažujme vzorec

$$P[S_{lib}] = \frac{A}{A_n}.$$

První podmínka je, že pokud pravděpodobnost hození součtu, který bude roven 12, má být $\frac{1}{12}$, pak počet všech možností A_n musí být dělitelný 12. To nám však nestačí a musí být splněna ještě druhá podmínka, kterou je sudost resp. lichost počtu stěn každé kostky. V řešení 6 vidíme, že ačkoliv je počet políček v tabulce dělitelný dvanácti, tak v čitateli je $A = 5$. Tím pádem se jmenovatel s čitatelem nemohou vykrátit a je nemožné se dostat na tvar $\frac{1}{12}$. Počet stěn a jedné kostky proto musí být sudý a počet stěn b druhé kostky musí být lichý. Tím budeme mít v čitateli zaručené to, že číslo A bude sudé a tím pádem ho bude možné zkrátit s číslem ve jmenovateli.

	Podmínka dělitelnosti 12			Sudost a lichost
16	$6+10$	$\Rightarrow$	$6 \cdot 10 = 60$	$\cancel{6 \cdot 10 = 60}$
	$7+9$	$\Rightarrow$	$\cancel{7 \cdot 9 = 63}$	
	$8+8$	$\Rightarrow$	$\cancel{8 \cdot 8 = 64}$	
17	$6+11$	$\Rightarrow$	$\cancel{6 \cdot 11 = 66}$	
	$7+10$	$\Rightarrow$	$\cancel{7 \cdot 10 = 70}$	
	$8+9$	$\Rightarrow$	$8 \cdot 9 = 72$	$8 \cdot 9 = 72$
18	$6+12$	$\Rightarrow$	$6 \cdot 12 = 72$	$\cancel{6 \cdot 12 = 72}$
	$7+11$	$\Rightarrow$	$\cancel{7 \cdot 11 = 77}$	
	$8+10$	$\Rightarrow$	$\cancel{8 \cdot 10 = 80}$	
	$9+9$	$\Rightarrow$	$\cancel{9 \cdot 9 = 81}$	
19	$6+13$	$\Rightarrow$	$\cancel{6 \cdot 13 = 78}$	
	$7+12$	$\Rightarrow$	$7 \cdot 12 = 84$	$7 \cdot 12 = 84$
	$8+11$	$\Rightarrow$	$\cancel{8 \cdot 11 = 88}$	
	$9+10$	$\Rightarrow$	$\cancel{9 \cdot 10 = 90}$	
20	$6+14$	$\Rightarrow$	$6 \cdot 14 = 84$	$\cancel{6 \cdot 14 = 84}$
	$7+13$	$\Rightarrow$	$\cancel{7 \cdot 13 = 91}$	
	$8+12$	$\Rightarrow$	$8 \cdot 12 = 96$	$\cancel{8 \cdot 12 = 96}$
	$9+11$	$\Rightarrow$	$\cancel{9 \cdot 11 = 99}$	
	$10+10$	$\Rightarrow$	$\cancel{10 \cdot 10 = 100}$	

Obrázek 6.3: Sýto - tabulka

Po splnění obou podmínek nám zůstanou pouze dvě možnosti, kolik stěn mohou kostky mít. Jako řešení volíme $a = 8$ a $b = 9$, protože v zadání chtěli nejmenší možný počet stěn. Řešení úlohy je tím pádem $\boxed{\textbf{(B)}}$.

Příklad č.13 AMC 12B z roku 2013

Zadání:

Alex has 75 red tokens and 75 blue tokens. There is a booth where Alex can give two red tokens and receive in return a silver token and a blue token, and another booth where Alex can give three blue tokens and receive in return a silver token and a red token. Alex continues to exchange tokens until no more exchanges are possible. How many silver tokens will Alex have at the end?

(A) 62 **(B) 82** **(C) 83** **(D) 102** **(E) 103**

Volný překlad:

Alex má sedmdesát pět červených žetonů a sedmdesát pět modrých žetonů. Máme dva stánky. V jednom může Alex směnit dva červené žetony za jeden stříbrný a jeden modrý, v druhém může směnit tři modré za jeden stříbrný a jeden červený. Alex směňuje žetony, dokud je to možné. Kolik stříbrných žetonů bude mít Alex na konci?

(A) 62 **(B) 82** **(C) 83** **(D) 102** **(E) 103**

Řešení č.1:

Budeme uvažovat to, že Alex si vždy vezme všechny žetony od jedné barvy a smění je všechny najednou. Potom udělá to samé s žetony druhé barvy. Bude tedy střídat jednotlivé stánky. Nesmíme zapomenout, že z každé směny žetonů jedné barvy se zvýší počet žetonů druhé barvy.

Představme si tedy, že jako první bude směňovat modré žetony (modrou jsme vybrali čistě jenom proto, že směňujeme tři modré žetony a číslo 75 je dělitelné třemi, a tudíž na začátku budeme moci směňovat beze zbytku všechny žetony). Nejjednodušší bude vytvořit si tabulku (viz obrázek 6.4), kde v jednotlivých sloupcích budeme mít počet modrých žetonů, červených žetonů a přírůstek stříbrných žetonů v jednotlivých řádcích, které představují jednotlivé směny žetonů.

n	●	●	+S
0	75	75	0
1	0	100	25
2	50	0	50
3	2	16	16
4	10	0	8
5	1	3	3
6	2	1	1
			$\Sigma = 103$

n	●	●	+S
0	75	75	0
1	112	1	37
2	1	38	37
3	20	0	19
4	2	6	6
5	5	0	3
6	2	1	1
			$\Sigma = 103$

Obrázek 6.4: Tabulka směňování - vlevo první směna modrých, vpravo červených

Sečtením všech čísel ve sloupci přírůstků stříbrných získáme jejich celkový počet. Ten je 103. Správná odpověď je tedy $\boxed{\textbf{(E)}}$.

Řešení č.2:

Označme počet červených žetonů jako x, modrých jako y a stříbrných jako z. Ze zadání plyne

$$2x = z + y$$
$$3y = z + x.$$

Odečtením rovnic (např. první od druhé) a následnou úpravou získáme rovnici

$$4y = 3x.$$

Jedno z možných řešení rovnice je

$$x = 4$$
$$y = 3$$

a tedy po dopočtení z z jedné rovnic dostaneme

$$z = 5.$$

Hodnota modrého žetonu je 3, červeného 4 a stříbrného 5. Hodnota všech žetonů na začátku je

$$75 \cdot 3 + 75 \cdot 4 = 525.$$

Počet možných získaných stříbrných žetonů je po vydělení celkové hodnoty původních žetonů roven 105. Avšak je zde možnost, kdy nebudeme mít dost žetonů na směnění. A to když budeme mít dva modré žetony a jeden červený. Ostatně to ukazují i tabulky na obrázku 6.4. Tento počet žetonů dává dohromady hodnotu 10, která je zároveň hodnotou dvou stříbrných žetonů, které však nemůžeme z tohoto počtu modrých a červených žetonů získat. Proto výsledný počet stříbrných žetonů je

$$105 - 2 = 103$$

a správná odpověď je tím pádem $\boxed{\textbf{(E)}}$.

Příklad č.11 AMC 12A z roku 2016

Zadání:

Each of the 100 students in a certain summer camp can either sing, dance, or act. Some students have more than one talent, but no student has all three talents. There are 42 students who cannot sing, 65 students who cannot dance, and 29 students who cannot act. How many students have two of these talents?

(A) 16 **(B) 25** **(C) 36** **(D) 49** **(E) 64**

Volný překlad:

Každý ze sta studentů na letním táboře umí buď zpívat, tančit nebo hrát. Někteří umí více než jednu ze zmíněných aktivit, ale nikdo z nich neumí všechny tři. Čtyřicet dva studentů neumí zpívat, šedesát pět neumí tančit a dvacet devět neumí hrát. Kolik studentů umí právě dvě aktivity?

(A) 16 **(B) 25** **(C) 36** **(D) 49** **(E) 64**

Řešení:

Pro řešení příkladu využijeme principu inkluze a exkluze. Pro tři množiny platí

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Máme tedy tři množiny A, B a C. Množina A jsou studenti, kteří umí zpívat, množina B studenti, kteří umí tančit, a množina C jsou ti, kteří umí hrát.

Ze zadání plyne:

$$A = 100 - 42 = 58$$

$$B = 100 - 65 = 35$$

$$C = 100 - 29 = 71$$

a tím pádem

$$A + B + C = 164.$$

Víme, že $|A \cup B \cup C| = 100$ a jelikož nikdo neumí všechny tři aktivity, tak platí $|A \cap B \cap C| = 0$. Díky tomu dostaneme rovnici

$$100 = 164 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

a tedy

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 164 - 100,$$

kde $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$ je právě počet pouze těch studentů, kteří umí právě dvě aktivity.

Správná odpověď je tudíž $\boxed{\textbf{(E)}}$.

Příklad č.10 AMC 12A z roku 2011

Zadání:

A pair of standard 6-sided dice is rolled once. The sum of the numbers rolled determines the diameter of a circle. What is the probability that the numerical value of the area of the circle is less than the numerical value of the circle's circumference?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{5}{18}$

Volný překlad:

Hodíme dvojicí šestistěnných kostek. Součet padlých čísel bude udávat průměr kruhu. Jaká je pravděpodobnost, že číselná hodnota obsahu kruhu bude menší než číselná hodnota jeho obvodu?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{5}{18}$

Řešení:

Nejdříve zjistíme, kdy je hodnota obsahu menší, než hodnota obvodu (nebereme v úvahu rozdíl mezi např. metrem a metrem čtverečním, pouze porovnáváme čísla). Obsah kruhu je $S = \pi \cdot (\frac{d^2}{4})$ a obvod $o = \pi \cdot d$. Obsah musí být menší, tudíž

$$
\begin{aligned}
S &< o \\
\pi \cdot (\frac{d^2}{4}) &< \pi \cdot d \\
d &< 4.
\end{aligned}
$$

Víme tedy, že součet teček po hození kostkami musí být menší než 4. Nakreslíme si tabulku 6×6, která nám bude obsahovat všechny možné výsledky součtu hodů dvou kostek. Tabulku lze vidět na obrázku 6.5.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obrázek 6.5: Tabulka součtů

Vidíme, že buňky v tabulce, které mají hodnotu menší než 4, jsou pouze tři.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Obrázek 6.6: Vhodné součty

Celkový počet buněk v tabulce je 36. Pravděpodobnost, že obsah kruhu je menší (číselně) než jeho obvod o průměru daným hodem kostkami, je

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Správná odpověď je tudíž $\boxed{\textbf{(B)}}$.

Příklad č.9 AMC 12A z roku 2011

Zadání:

At a twins and triplets convention, there were 9 sets of twins and 6 sets of triplets, all from different families. Each twin shook hands with all the twins except his/her siblings and with half the triplets. Each triplet shook hands with all the triplets except his/her siblings and with half the twins. How many handshakes took place?

(A) 324 **(B) 441** **(C) 630** **(D) 648** **(E) 882**

Volný překlad:

Na setkání dvojčat a trojčat bylo devět párů dvojčat a šest trojic trojčat. Každá dvojice a trojice byla z jiné rodiny. Každé dvojče si potřáslo rukou se všemi ostatními dvojčaty kromě svého sourozence, a zároveň s polovinou trojčat. Každé trojče si potřáslo rukou se všemi trojčaty, kromě svých sourozenců, a s polovinou dvojčat. Kolikrát došlo na setkání k potřesení rukou?

(A) 324 **(B) 441** **(C) 630** **(D) 648** **(E) 882**

Řešení:

Dvojčat je celkem osmnáct (jedinců), stejně tak i trojčat. Rozdělíme si příklad na dvě situace. První, kdy rukou třesou dvojčata, a druhý, kdy třesou trojčata.

Jedno dvojče si třese rukou s šestnácti dvojčaty (netřese sám se sebou a se svým sourozencem) a devíti trojčaty. Takto to udělá každé dvojče, kterých je osmnáct.

Dostáváme tedy

$$(16 + 9) \cdot 18 = 450.$$

Stejnou úvahu aplikujeme i na trojčata, pouze s tím rozdílem, že jedno trojče si třese rukou s patnácti dalšími (tedy bez dvou sourozenců a sebe) a s devíti dvojčaty.

$$(15 + 9) \cdot 18 = 432.$$

Tím pádem máme 882 potřesení. Ještě je však potřeba vzít v úvahu, že potřese-li si jeden rukou s druhým, tak už si potřásl i druhý s prvním, a proto celý počet potřesení bude poloviční.

Celkem tedy 441 a správná odpověď je $\boxed{\textbf{(B)}}$.

7 Math Prize for girls

Příklad č.10 z roku 2017

Zadání:

Let C be a cube. Let P, Q and R be random verices of C, chosen uniformly and independetly from the set of verices of C. (Note that P, Q and R might be equal.) Compute the probability that some face of C contains P, Q and R. Express your answer as a fraction in simpliest form.

Volný překlad:

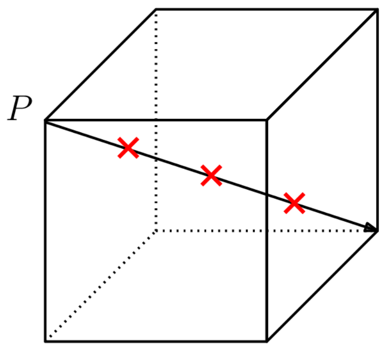
Nechť C je krychle a P, Q a R jsou její náhodně zvolené vrcholy ze všech možných vrcholů. (Berte v potaz, že P, Q a R si mohou být rovny.) Jaká je pravděpodobnost, že některá ze stěn krychle bude obsahovat P, Q i R. Odpověď vyjádřete zlomkem v nejjednodušším možném tvaru.

Řešení:

Budeme vybírat náhodně tři vrcholy, což si můžeme představit, jako bychom třikrát hodili onou osmistěnnou kostkou.

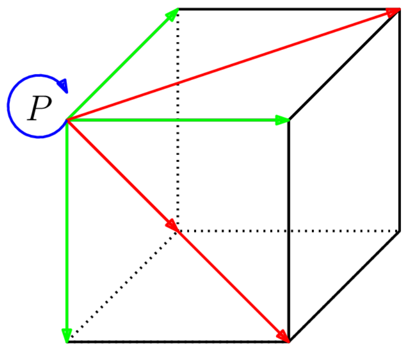
Výběr prvního vrcholu je pro podmínku v zadání nepodstatný, proto ho můžeme „vybrat“ kdekoliv. Umístíme ho tedy například do levého horního rohu přední stěny. Další umístění vrcholů si rozebereme jednotlivě podle způsobu jejich možného umístění v krychli.

Je zřejmé, že pokud by vrchol Q byl umístěn na „opačný“ konec krychle (viz obrázek 7.1) než je vrchol P, podmínku by nebylo možné splnit.



Obrázek 7.1: Ukázka špatné volby

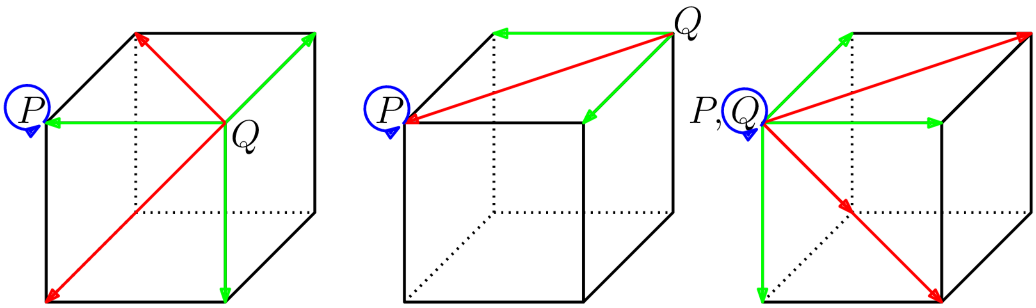
Představme si, že vrchol P bude posílat bod Q do vrcholů krychle. Bod Q tak může „cestovat“ třemi různými způsoby, po stranách krychle, po stěnových úhlopříčkách, nebo zůstane ve vrcholu P. Pro pohyb po stěně máme tři možnosti, stejně tak pro pohyb po úhlopříčkách, a aby zůstal na místě, tak má pouze jednu možnost.



Obrázek 7.2: Možnosti bodu Q

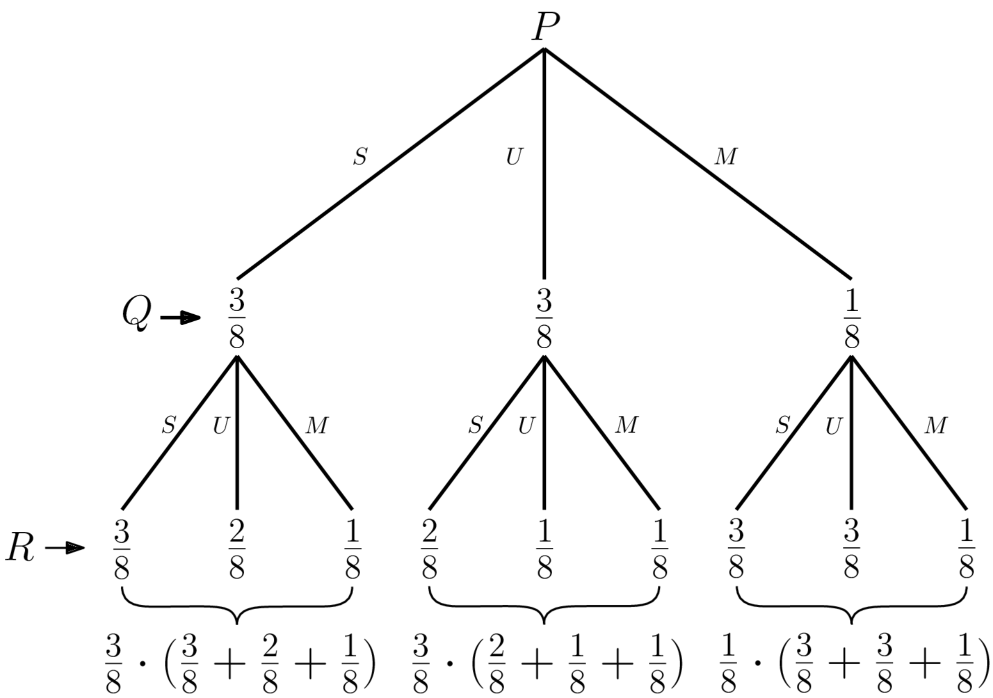
Takto můžeme rozmístit vrchol Q na krychli C. Nyní si situaci „posílání“ bodu zopakujeme, ale tentokrát bude již vybraný vrchol Q „posílat“ bod R stejnými způsoby jako předtím. Teď však musíme vzít v potaz různé polohy vrcholu Q, podle toho jestli se pohyboval z vrcholu P po stěnách, úhlopříčkách nebo se vůbec nepohyboval.

Pokud je tedy vrchol Q společný straně, která obsahuje vrchol P, má R celkem tři možnosti, jak se umístit pomocí pohybu po stěnách, dvě možnosti po úhlopříčkách a jednu zůstat na místě. Je-li vrchol Q na stěnové úhlopříčce s vrcholem P, pak jsou dvě možnosti jak se může R „pohnout“ po stěnách, jedna po stěnové úhlopříčce a jedna jak zůstat na místě. Je-li vrchol Q rovný vrcholu P, pak si situaci můžeme představit jako ve výběru vrcholu Q, tudíž máme tři možnosti po stěnách, tři po stěnových úhlopříčkách a jednu pro setrvání na místě.



Obrázek 7.3: Možnosti bodu R

Celkově můžeme naše úvahy shrnout pomocí stochastického stromu, kde S je pohyb po stěně, U je pohyb po úhlopříčce a M je setrvání na místě.



Obrázek 7.4: Stochastický strom

Tím pádem

$$P = \frac{3 \cdot 6}{64} + \frac{3 \cdot 4}{64} + \frac{1 \cdot 7}{64}.$$

Potom pravděpodobnost, že některá ze stěn bude obsahovat všechny tři vrcholy P, Q a R je

$$P = \frac{37}{64}.$$

Příklad č.3 z roku 2014

Zadání:

Four different positive integers less than 10 are chosen randomly. What is the probability that their sum is odd? Express your answer as fraction in simplest form.

Volný překlad:

Losujme náhodně čtyři různá kladná celá čísla menší než 10. Jaká je pravděpodobnost, že součet vylosovaných čísel bude lichý? Odpověď vyjádřete zlomkem v nejjednodušším možném tvaru.

Řešení:

Losujeme z devíti možných čísel, jimiž jsou 1,2,3 . . . 9. Pro získání lichého čísla jako součtu dvou čísel musí jedno z čísel být liché a druhé sudé. V jiném případě bychom dostali jako součet číslo sudé. Příklad rozdělíme na dva disjunktní jevy a každý budeme řešit zvlášť. Celková pravděpodobnost bude potom, podle kombinatorického pravidla součtu, rovna součtu pravděpodobností jednotlivých disjunktních případů. Máme tedy první případ, kdy jedno z čísel bude liché a zbylá tři budou sudá, a případ druhý, kdy budeme mít tři lichá čísla a jedno sudé.

Počet všech možností, kdy můžeme vylosovat čtyři čísla z devíti je

$$\binom{9}{4}$$

Máme tedy k dispozici pět lichých (1,3,5,7,9) a čtyři sudá (2,4,6,8) čísla. V prvním případě tedy losujeme jedno liché z pěti a tři sudá ze čtyř. Pravděpodobnost, že součet vylosovaných čísel je tedy

$$P_1 = \frac{5 \cdot \binom{4}{3}}{\binom{9}{4}}.$$

V druhém případě losujeme tři lichá a jedno sudé ze čtyř. Tedy

$$P_2 = \frac{\binom{5}{3} \cdot 4}{\binom{9}{4}}.$$

Celková pravděpodobnost P bude rovna

$$P = P_1 + P_2 = \frac{5 \cdot \binom{4}{3}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot 4}{\binom{9}{4}}$$

což po zjednodušení dává hodnotu $\boxed{\frac{10}{21}}$.

Příklad č.13 z roku 2016

Zadání:

Alice, Beth, Carla, Dana, and Eden play a game in which each of them simultaneously closes her eyes and randomly chooses two of the others to point at (one with each hand). A participant loses if she points at someone who points back at her; otherwise, she wins. Find the probability that all five girls win. Express you answer as a fraction in simplest form.

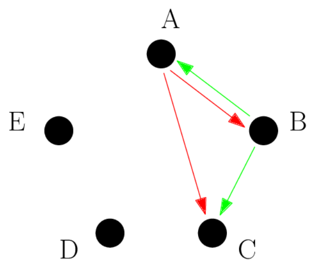
Volný překlad:

Alice, Beth, Carla, Dana a Eden hrají hru, ve které každá z nich zároveň zavře oči a náhodně ukáže na dvě hráčky (jednou rukou na jednu z hráček). Prohraje ta, která ukazuje na někoho, kdo zároveň ukazuje na ni. V opačném případě vyhrává. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje všech pět dívek? Odpověď vyjádřete zlomkem v nejjednodušším tvaru.

Řešení č.1:

Nejprve si určíme počet všech možností, jak může pět dívek ukázat na dvě z nich. Každá z nich vybírá dvě dívky ze zbylých čtyř, tudíž má $\binom{4}{2}$ možností jak vybrat, na koho ukáže. Jelikož je dívek pět, tak počet všech možností výběru je $\binom{4}{2}^5$, a tudíž celkem 7776 možností.

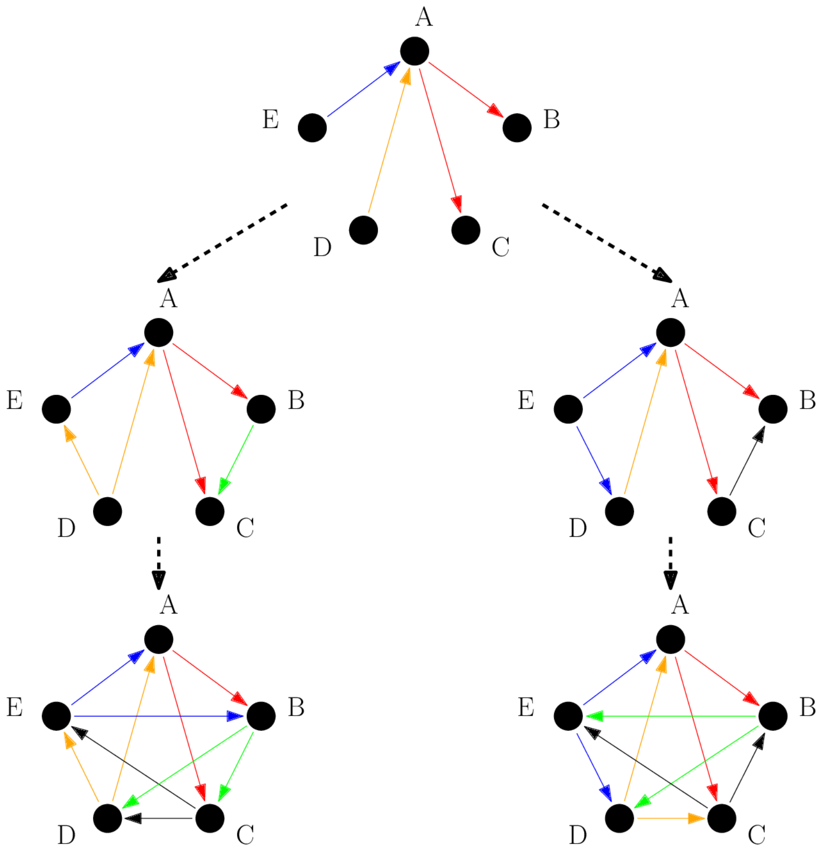
Nyní si rozebereme situaci, kdy všechny vyhrají. Zakreslíme si pět bodů rovnoměrně do „kruhu“ a šipku nakreslíme tam, kde hráčka ukáže na jinou. Zobrazme si například situaci, kdy Alice ukáže na Beth a Carlu a Beth ukáže na Alici a Carlu. Jelikož Alice ukazuje na Beth a Beth zároveň na Alici, tak obě prohrály, tudíž tato varianta nepřipadá v úvahu, ale pomůže nám uvědomit si dvě věci. První je triviální a vyplývá ze zadání, a to, že vždy prohraje dvojice hráček, protože každá z dvojice ukazuje na tu druhou. Druhá věc je ta, že aby dvojice neprohrála, musí sdílet pouze jednu šipku.



Obrázek 7.5: Ukázka špatné hry

Už nám jenom stačí zjistit počet možností, které mají hráčky, aby všechny vyhrály. Začneme u Alice. Ta má $\binom{4}{2} = 6$ možností. Řekněme, že Alice ukáže na Beth a Carlu. Tím pádem však musí Dana a Eden ukázat jednou šipkou na Alici. Teď už šipka mezi Beth a Carlou může ukazovat 2 směry. To samé pak platí i mezi Danou a Eden. Jakmile je šipka mezi Beth a Carlou a zároveň mezi Danou a Eden, pak už je jenom jeden způsob, jak doplnit směry šipek, aby dívky vyhrály.

Viz obrázek 7.6



Obrázek 7.6: Dvě z možných výherních situací

Pravděpodobnost toho, že všechny vyhrají, je

$$P = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2}{\binom{4}{2}^5} = \frac{2^3 \cdot 3}{6^5} = \frac{2^3 \cdot 3}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{1}{4 \cdot 81} = \frac{1}{324}.$$

Výsledek je $\boxed{\frac{1}{324}}$.

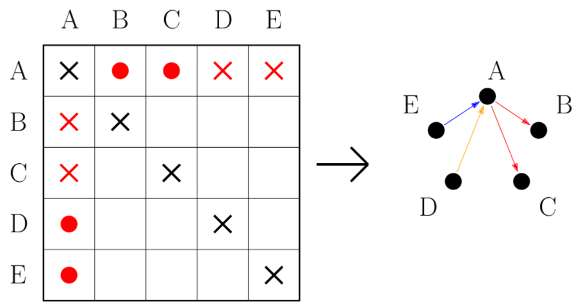
Řešení č.2:

Příklad můžeme řešit i pomocí tabulky. Vytvoříme si tabulku, kde kolečkem označíme situaci, kdy jedna dívka ukáže na druhou. Jinak řečeno, je mezi nimi šipka jedním směrem. Je zřejmé, že šipky nemohou být na hlavní diagonále, tzn. kolečka v místech typu $[A; A], [B; B] \dots [E; E]$, protože žádná hráčka nemůže ukázat sama na sebe (plyne ze zadání). Abychom splnili zadání, tak musí tabulka splňovat dvě podmínky.

První vychází z předchozího tvrzení, že každá dvojice má mezi sebou nejvýše jednu šipku. Tím pádem existuje-li šipka z A do B, pak už nemůže existovat z B do A. To znamená, že sobě odpovídající si dvojice, např. $[A; B]$ a $[B; A]$, mohou mít pouze jedno kolečko v buňce tabulky. Druhá buňka odpovídající té samé dvojici už tam musí poté mít křížek.

Druhá podmínka plyne z počtu dívek, na které může být jednou dívkou ukázáno. Každá dívka může ukázat na dvě jiné, tudíž jak v řádku, tak i ve sloupci, musí být nejvýše dvě kolečka.

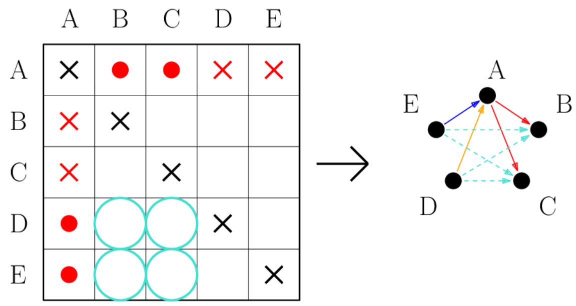
Za respektování těchto dvou podmínek budeme řešit možné výherní situace. Začneme tedy opět s Alicí. Ta vybírá dvě dívky ze čtyř, proto má $\binom{4}{2}$ možností. Řekněme, že vybere Beth a Carlu, tudíž Dana a Eden budou ukazovat na Alici. Zobrazíme si to v tabulce (viz obrázek 7.7).



Obrázek 7.7: Situace po výběru Alice

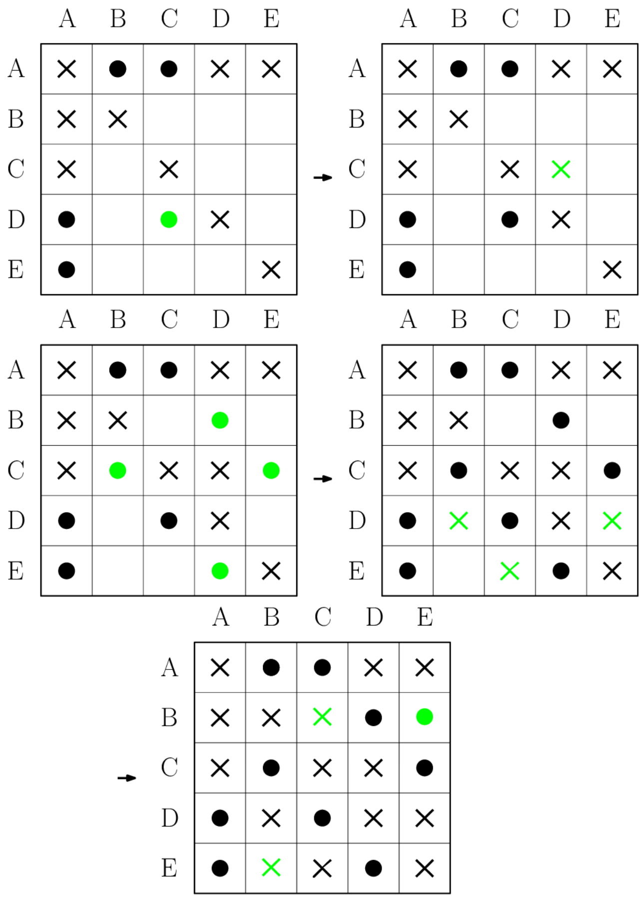
Když existují šipky $[A; B]$ a $[A; C]$, tak neexistují šipky $[B; A]$ a $[C; A]$ (označíme křížky). To samé lze vidět i pro prvky D a E.

Jelikož víme, že v každém řádku a sloupci mohou musí být právě dvě kolečka, tak umístěním dalšího kolečka do místa, kde se kryjí sloupce B a C s řádky D a E, budeme v situaci, kdy už můžeme tabulku (tím pádem i hru) doplnit jednoznačně. Dostali jsme tedy čtyři možnosti, kam umístit kolečko (viz obrázek 7.8).



Obrázek 7.8: Čtyři možnosti výběru

Pro ukázku si to zkusíme například umístěním kolečka do buňky $[D; C]$. S využitím toho, že pro každou dvojici hráček musí být v tabulce jedno kolečko a jeden křížek, a toho, že v řádku a sloupci jsou právě dvě kolečka (resp. tři křížky), pak už snadno doplníme tabulku. Ukázku doplnění lze vidět na obrázku níže.



Obrázek 7.9: Ukázka doplnění tabulky

Počet vhodných možností pro vítězství všech je tedy $6 \cdot 4 = 24$ a pravděpodobnost, že všichni vyhrají je potom

$$P = \frac{24}{6^5} = \frac{1}{314}.$$

Správná odpověď je $\boxed{\dfrac{1}{314}}$.

Příklad č.2 z roku 2016

Zadání:

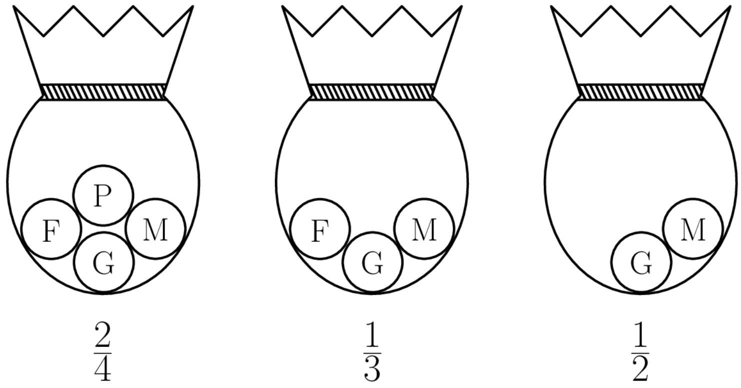
Katrine has a bag containing 4 buttons with distinct letters M, P, F, G on them (one letter per button). She picks buttons randomly, one at a time without replacement, until she picks the button with letter G. What is the probability that she has at least three picks and her third pick is the button with letter M? Express your answer as a fraction in a simplest form.

Volný překlad:

Katrine má pytlík obsahujicí čtyři knoflíky, kde každý z nich má na sobě jedno z písmen M, P, F, G. Katrine bude náhodně losovat po jednom knoflíky bez vracení, dokud nevytáhne knoflík s písmenem G. Jaká je pravděpodobnost, že bude losovat alespoň třikrát a že třetí vytažený knoflík bude mít písmeno M? Odpověď vyjádřete zlomkem v nejjednodušším tvaru.

Řešení:

Aby mohla Katrine losovat třikrát, tak musí písmeno G losovat jako třetí nebo čtvrté. Má-li ke všemu ve třetím tahu vylosovat písmeno M, pak písmeno G musí vylosovat až v posledním tahu.



Obrázek 7.10: Ukázka losování

Pravděpodobnost losu ze zadání je

$$P = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

a tedy výsledek je $\boxed{\frac{1}{12}}$.

Příklad lze řešit i tak, že losování vždy provedeme až do konce, tedy čtyřikrát, bez ohledu na los písmena G. Všechny možnosti losu jsou potom 4!. Vypíšeme si ze zadání požadované výsledky losování. Jimi jsou pouze dvě konfigurace, a to PFMG a FPMG. Celkovou pravděpodobnost pak vypočítáme jako

$$P = \frac{2}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Příklad č.6 z roku 2009

Zadání:

Consider a fair coin and a fair 6-sided die. The die begins with the number 1 face up. A *step* starts with a toss of the coin: in the coin comes out heads, we roll the die; otherwise (if the coin comes out tails), we do nothing else in this step. After 5 such steps, what is the probability that the number 1 is face up on the die? Express your answer as a fraction in reduced form.

Volný překlad:

Mějme minci a šestistrannou hrací kostku. Kostka na začátku leží tak, že ukazuje 1. *Krok* začíná hodem mincí: když padne orel, hodíme kostkou. Padne-li panna, dále nic neděláme. Jaká je pravděpodobnost, že po 5 krocích bude kostka ukazovat číslo 1. Odpověď vyjádřete zlomkem v nejjednodušším tvaru.

Řešení:

Podobně jako v příkladě č.3 z roku 2014 lze situaci rozdělit na dva disjunktní jevy, kdy po 5 tazích bude na kostce 1 a jejich pravděpodobnost poté sečíst. První je ten, že ve všech pěti krocích padne panna, tudíž se nebude ani jednou házet kostkou a ta zůstane ve svém původním stavu (ukazujíce číslo 1). V tom druhém už padne různý počet orlů, avšak nehledě na počet hodů kostkou, šance, že padne 1, je jedna možná z celkových 6, které mohou na kostce zůstat.

Pravděpodobnost, že padne pětkrát za sebou panna je rovna

$$P_1 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

Všechny zbylé možnosti pak mají pravděpodobnost

$$1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

Pravděpodobnost, že kostka skončí s číslem 1 na vrchu, je

$$P_2 = \frac{31}{32} \cdot \frac{1}{6} = \frac{31}{192}.$$

Výsledná pravděpodobnost je potom součtem obou možností a tedy

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{32} + \frac{31}{192} = \frac{37}{192}.$$

Výsledek je $\boxed{\frac{37}{192}}$.

8 Závěr

Smyslem této práce bylo vytvořit podpůrný materiál z oblasti kombinatoriky a pravděpodobnosti pro žáky a studenty, kteří mají zájem o matematiku a především o matematické soutěže a účast v nich. Zároveň by měla práce sloužit jako inspirace pro učitele matematiky.

Práce byla rozvržena do celkem osmi kapitol, přičemž druhá se věnuje stručně pojmům potřebným k řešení příkladů v kapitolách 4 až 7 a třetí obsahuje charakteristiku jednotlivých soutěží.

Těžištěm práce jsou příklady a jejich řešení. U příkladů, kde byla možnost nalezení více způsobů řešení, jsou tato řešení uvedena. Příkladů je v práci celkem devatenáct a většina z nich obsahuje i obrázky pro lepší pochopení příkladu nebo pro nalezení jeho řešení.

Domnívám se, že kombinatorika a pravděpodobnost nejsou zrovna oblíbené oblasti u žáků základních a středních škol. Proto doufám, že by tato práce mohla pomoci některým z nich si tuto oblast oblíbit a pomohla jim v přípravě na matematické soutěže.

Literatura

[1] CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-365-3.

[2] FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2703-7.

[3] PŁOCKI, Adam a Pavel TLUSTÝ.*Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-330-1.

[4] *Art of Problem Solving: AMC 12 Problems and Solutions* [online]. USA: AoPS Incorporated, 2002 [cit. 2021-10-26]. Dostupné z: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AMC_12_Problems_and_Solutions

[5] *Matematický klokan* [online]. Olomouc: JČMF, 2004 [cit. 2021-12-10]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/

[6] *Olympiáda pro SŠ - Matematická Olympiáda* [online]. Brno: JČMF, 2016 [cit. 2021-09-01]. Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly

[7] *Math Prize for Girls - Official Site - Advantage Testing Foundation* [online]. USA: Advantage Testing Foundation, 2009 [cit. 2022-01-13]. Dostupné z: https://mathprize.atfoundation.org/

[8] *American Mathematics Competitions* [online]. USA: Mathematical Association of America, 2013 [cit. 2021-10-26]. Dostupné z: https://www.maa.org/math-competitions