UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vytvoření sbírky řešených příkladů výrokové logiky a teorie množin pomocí aparátu Booleovy algebry

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Miloslav Závodný**
Vypracoval: **Ondřej Konopáč**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika – ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Ondřej Konopáč

Název práce: Vytvoření sbírky řešených příkladů výrokové logiky a teorie množin pomocí aparátu Booleovy algebry

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Miloslav Závodný

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: V souladu se svým tématem tato práce demonstruje užití Booleovy algebry zejména při převodu analyzovaného textu na výrokové formule nebo množinové situace a dále se věnuje jejich podrobnému vyhodnocování. Obsažené příklady se zaměřují na logické uvažování a tříbení správného úsudku.

Klíčová slova: sbírka příkladů, teorie množin, výroková logika, Booleova algebra, George Boole

Počet stran: 60

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Ondřej Konopáč

Title: Developing a collection of solved examples from the propositional logic and set theory using the apparatus of Boolean algebra

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Miloslav Závodný

The year of presentation: 2016

Abstract: According to its theme, this thesis shows the application of Boolean algebra for transforming words to propositional formulas or set situations and then there is also shown how to solve these problems in detail. Included examples are focused on logic thinking and correct attitude to these tasks.

Key words: a collection of examples, set theory, propositional logic, Boolean algebra, George Boole

Number of pages: 60

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Miloslava Závodného a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval především svému vedoucímu, panu RNDr. Miloslavu Závodnému, za odborné rady a dohled při vedení mé práce. Díky patří také všem lidem v mém okolí za projevenou podporu.

Úvod

Může se zdát, že v běžné praxi má teorie množin minimální uplatnění a výroková logika, alespoň na středoškolské úrovni, je spíše takové slovíčkaření. Přínos těchto disciplín ovšem spočívá v tom, že teorie množin patří společně s matematickou logikou k základům matematiky. Slovo „základy“ je často vykládáno jako nějaký úvod do dané problematiky nebo nějaké potřebné minimum. V tomto kontextu však základy představují jakousi páteř celé matematické vědy. Je nezpochybnitelné, že každá matematická úvaha se musí řídit pravidly správného usuzování (tedy logickými pravidly) a snad každý matematický obor užívá slova množina. Význam těchto dvou disciplín je výstižným způsobem vysvětlen v publikaci [1], kde autor tyto základy přirovnává k základům domu – bez dobrých základů zřejmě není možné postavit kvalitní a z dlouhodobého hlediska udržitelnou stavbu.

Pokud se dnes žáci na školách setkávají s výrokovou logikou, pak se jedná nejvýše o pojmy jako je například výrok a jeho pravdivostní hodnota, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, složený výrok nebo vyhodnocení pravdivosti složeného výroku pomocí tabulkové metody. V této práci je ukázáno, že existuje i sofistikovanější způsob, jak přistupovat k vyhodnocování složených výroků. Nejen to, užitím aparátu Booleovy algebry budou zobecněny také pojmy z teorie množin, takže i množinové situace bude možno řešit tímto přístupem.

Vzhledem ke skutečnosti, že poté, co jsem naprosté většině svého okolí, a to podotýkám i tomu matematikou políbenému okolí, tlumočil název své bakalářské práce, následovala okamžitě otázka: „Co, prosím? Jaké že algebry?!“, jsem se rozhodl do obsahu práce zasadit i stručný životopis George Boola. Jeho přínos nespadá rozhodně jen do oblasti logiky, jak by se snad mohlo na základě předchozích řádků na první pohled zdát, ale jeho vědecká práce má využití také v elektrotechnice, tedy i ve výpočetní technice, což je v dnešní době téma blízké prakticky každému.

Následuje teoretická část práce (kapitola 2), v níž budou definovány potřebné pojmy z teorie množin a výrokové logiky a také uvedeny věty platné v rámci Booleovy algebry. Poté, v kapitole 3, již přistoupíme k samotným příkladům, rozděleným do příslušných podkapitol podle jejich zaměření. Při jejich řešení jsem se snažil důsledně vyhýbat termínům jako „zřejmě“, „další postup je již analogický“, „atd.“, … Ve svém životě jsem se totiž již častokrát setkal se situací, kdy další postup nemusí být čtenáři ani zdaleka tak jasný jako autorovi těchto slov.

Jsem si vědom, že Booleova algebra už dnes není nijak vyhledávaná oblast zájmu. Svědčí o tom i fakt, že většina publikovaných knih na toto téma, které se mi dostaly do rukou, se datovala do minulého století. Booleova algebra není ani zařazena do běžných učebních osnov, i když představuje efektivní způsob pro řešení mnoha typů úloh. O to zajímavější pro mě ovšem moje studium bylo.

Kapitola 1

George Boole

Následující kapitola věnovaná významné osobnosti a stručnému nastínění významu Booleovy algebry byla sestavena za přispění překladů z anglických zdrojů [2] a [3].

George Boole (2. 11. 1815 Lincoln, Anglie – 8. 12. 1864 Ballintemple, Irsko) byl britský matematik, logik a filosof. Během svého života vydal několik prací, z nichž ty nejvýznamnější pojednávají o tématech z oblasti diferenciálních rovnic, teorie pravděpodobnosti a algebraické logiky.

Za svého života přišel s novým druhem matematiky, která spočívá v ohodnocování myšlenek (výroků) a jejich následné kodifikaci pomocí jazyka algebry. Bývá tedy právem označován jako zakladatel matematické logiky.

I když jméno George Boole není široké veřejnosti všeobecně známo (zde mohu mluvit z vlastní zkušenosti, jak se zmiňuji již v úvodu této práce), jedná se o světově proslulého matematika. Svou prací ovlivnil další vývoj matematické vědy naprosto zásadním způsobem, jeho stěžejní objevy v matematice, logice a pravděpodobnosti poskytly základy nezbytné nejen pro moderní matematiku. Jeho práce představuje naprosto zásadní krok i pro pozdější vznik počítačové vědy a mikroelektronického inženýrství vůbec.

Zasloužil si také titul „otec informačního věku“. Díky zavedení algebry, později na jeho počest pojmenované přívlastkem Booleova, připravil cestu pro navrhování logických obvodů v elektronických přístrojích (čímž se zabývá elektrotechnika) a pro zpracovávání informací v nich (tedy pro informatiku) – přispěl tak podstatným způsobem k následnému vzniku moderní počítačové vědy a položil základy digitálního věku.

George Boole pocházel z poměrně skromných sociálních poměrů, otec byl obuvníkem, matka komornou. I přes nelichotivou rodinnou ekonomickou situaci ho otec podporoval ve studiu a poskytl mu to nejlepší dostupné vzdělání. Boole navštěvoval obchodní školu, kde však brzy, díky své touze po vzdělání, předstihl své učitele, a tak své studium doplnil procesem sebevzdělávání se, ve kterém vytrval po celý svůj život[1].

Učil se latinsky, řecky, francouzsky, německy a italsky, což mu následně umožnilo studovat pokročilé matematické texty, mimo jiné od S. F. Lacroixe, J. L. Lagrangea, P. S. Laplacea nebo i sira Isaaca Newtona.

Když mu bylo 16 let, otcův podnik s botami zkrachoval a Boole pociťoval povinnost postarat se o rodinu. Rozhodl se tedy zanechat školy – nedostalo se mu tak ani univerzitního vzdělání. Aby svou rodinu finančně zabezpečil, stal se asistentem učitele. Později založil v Lincolnu vlastní školu pod názvem „Boarding School for Young Gentlemen“, přičemž jeho rodinní příslušníci se podíleli na jejím chodu, vypomáhali s učením a s administrativními záležitostmi.

Roku 1847 vydal svou první knihu *A Mathematical Analysis of Logic*, kde poprvé poukazuje na možnost matematického přístupu k logice, pohlíží tedy na logiku jako na matematickou vědu. Uvádí zde koncept, v němž matematické symboly reprezentují třídy nebo sady objektů a s těmito symboly je potom možno provádět různé matematické operace. Můžeme mluvit o první zmínce o Booleově algebře, v té době určené výhradně jako nástroj pro matematickou analýzu logiky.

V roce 1849 byl jmenován prvním profesorem matematiky na irské vysoké škole UCC (University College Cork). Tato funkce již pro něj znamenala dostatečné finanční zabezpečení a Boole se stal uznávaným lektorem.

Při vykonávání této profese pracoval na své další knize, *An Investigation of the Laws of Thought*, vydanou o několik let později, roku 1854, kde už byla Booleova algebra uvedena v plné šíři. Toto dílo ovlivnilo nejen matematiku a logiku, ale

[1] Během shromažďování informací jsem se setkal dokonce s označením Boola termínem „zázračné dítě“, nechci ale v této práci užívat takovýchto populistických výrazů.

umožnilo revoluční myšlení i v inženýrství a moderní počítačové vědě. Autor zde vzal principy z logiky a redukoval je do jednoduché algebraické formy (tzv. algebraizace logiky).

Co nejobecněji řečeno – Booleova algebra umožňuje všechny hodnoty a veškerý text redukovat do „0“ a „1“ a s těmito dvěma matematickými symboly potom provádět tři základní (tzv. booleovské) operace (nazýváme je zkráceně „and“, „or“ a „not“). Laicky řečeno, jeho teorie spočívá v předpovídání toho, co se stane pro každý z těchto binárních stavů, respektive jejich možné variace. Každý počítač je obeznámen pouze se dvěma stavy – „on“ a „off“, nebo také jinými slovy „true“ a „false“, přičemž tyto stavy jsou v počítači kódovány jako „1 (pravda)“ a „0 (nepravda)“. A právě Booleova algebra umožňuje převod jakéhokoli textu do posloupností tvořených 1 a 0 a zavádí tak mechanismus pro komunikaci s počítači. Na internetové stránce www.binarytranslator.com si může zaujmutý čtenář vyzkoušet převod textu do jazyka počítačů – tedy na binární data.

Roku 1859 vydal Boole excelentní učebnici na téma diferenciálních rovnic pod názvem *A Treatise on Differential Equations*. Ta je údajně dodnes užitečná a zůstává studenty stále vyhledávaná. Autor v ní předpovídá rostoucí význam diskrétní matematiky.

Ve svých 40 letech se Boole oženil s o 17 let mladší Mary Everest. I přes tento značný věkový rozdíl bylo jejich manželství šťastné, vzešlo z něj 5 dcer.

George Boole umřel na zápal plic, jenž byl důsledkem jedné jeho dlouhé procházky ve studeném dešti a následným přednášením v promočených šatech. S jeho dědictvím se však i dnes neustále setkáváme ve formě elektrických obvodů, ovládacích prvků, osobních počítačů a dalších přístrojů pro získávání nebo uchovávání informací, bez kterých si již komunikaci, učení nebo vůbec život ve 21. století nelze představit. Naše telefony, osobní počítače, všemožné ovladače, … všechny tyto přístroje fungují na principech Booleovy algebry.

Pondělí 2. 11. 2015 bylo dnem, kdy uplynulo rovných 200 let od narození George Boola. Při této příležitosti vydala společnost Google článek věnovaný této významné osobnosti s názvem *The man who shrunk the world into '0's and '1's* [3] (tj. *Člověk, který vtěsnal svět do „0“ a „1“*). Tato společnost Boola také označila jako člověka, bez něhož by žádný Google neexistoval [4]. Na počest tohoto výročí byl dokonce vytvořen speciální Google Doodle.[2]

[2]Termín „Google Doodle“ představuje speciální dočasnou změnu loga společnosti Google na jejich domovské stránce www.google.com, která má např. upozornit na nějakou podstatnou historickou událost, oslavit nějaký svátek nebo právě připomenout světu některou významnou osobnost, jako je tomu v tomto případě. Pro zájemce uvádím odkaz na webovou stránku, kde se nachází video s daným Google Doodlem: http://www.smh.com.au/technology/technology-news/who-is-george-boole-the-mathematician-behind-the-google-doodle-20151102-gkofyg.html.

Kapitola 2

Teoretická část

V následujících třech podkapitolách budou blíže popsány základní pojmy a vlastnosti z teorie množin a výrokové logiky, přičemž tyto pojmy jsou nezbytné pro další práci v samotné Booleově algebře, definované následně ve 4. podkapitole této kapitoly. Předpokládám, že s jejich obsahem už byla většina čtenářů seznámena v dřívějším studiu, nicméně jejich zařazení sem je opodstatněné z hlediska přehlednosti a má práce tak bude srozumitelnější a také přístupnější i pro širší okruh čtenářů.

2.1. Množiny a operace s nimi

Český pojem *množina* je ryze matematický termín, v běžné češtině se příliš nevyskytuje. Podobně jako bod, přímka nebo rovina patří mezi základní matematické pojmy – nemáme pro něj přesnou definici, naopak jej užíváme k definování ostatních pokročilejších struktur. Obecně množinu chápeme jako nějaký „rozhodnutelný soubor prvků“. Prvky pak představují nějaké vzájemně rozlišitelné objekty, přičemž o každém tomto objektu musíme být schopni rozhodnout, jestli do daného souboru patří nebo ne.

Poznámka 2.1.1. Bylo uvedeno, že množinu nemůžeme přesně definovat, neboť jde o základní matematický pojem. Existuje ale cesta, jak tuto nesnáz obejít – vybudovat teorii množin na axiomatickém základu. Museli bychom zvolit axiomy, vyhovující našemu záměru, a každý objekt, pro který budou platit, nazveme množinou. Nejužívanější takovou teorií je Zermelova–Fraenkelova teorie množin, jejíž axiomy lze definovat pomocí formálního jazyka predikátové logiky.

Ve shodě s použitou literaturou i na základě vlastních zvyklostí budu také v tomto textu popisovat množiny pomocí velkých písmen nejčastěji z počátku abecedy a jednotlivé prvky budou reprezentovány naopak písmeny malými.

Vlastnost „býti prvkem množiny" se značí symbolem $\in$ (tedy např. $a \in A$). Naopak v případě, že daný objekt není prvkem dané množiny užívá se symbolu $\notin$. Existuje několik možností, jak určit prvky dané množiny. Protože při výpočtech v praktické části této práce se omezíme pouze na konečné množiny, vystačíme si se zadáním množiny prostřednictvím výčtu jejích prvků (např. $A = \{a, b, c, d, e\}$).

V případě množin obsahujících prvky stejného typu (např. množina přirozených čísel, množina těles, nebo třeba i obecně množina barev, či rostlin) můžeme zkoumat, zda prvky jedné množiny jsou současně i prvky množiny druhé.

Je-li každý prvek množiny B současně prvkem množiny A, píšeme $B \subseteq A$ nebo $A \supseteq B$. Existuje-li v množině A alespoň jeden prvek, který není prvkem množiny B, píšeme $B \subset A$ nebo $A \supset B$. V takovém případě říkáme, že množina B je vlastní podmnožinou množiny A (nebo také B je v inkluzi k A). Naopak symbol $\not\subset$ značí, že daná množina naopak není v inkluzi k jiné dané množině.

Prázdnou množinou nazveme takovou, která neobsahuje žádný prvek. K jejímu značení je všeobecně přijímaný symbol $\emptyset$. Pro libovolnou množinu přitom platí, že prázdná množina je její podmnožinou.

Rovnost množin nastává v případě, kdy každý prvek jedné množiny je zároveň i prvkem množiny druhé (k popisu tohoto stavu se užívá znaku $=$), tj. platí-li pro každé $a \in A$, že i $a \in B$ a naopak, že pro každé $b \in B$ je také $b \in A$, pak $A = B$. Můžeme tedy psát:

$$A = B \text{ právě tehdy, když } A \subseteq B \text{ a zároveň } B \subseteq A.$$

Potenční množina množiny A (značíme $\widehat{A}$) je množina, která obsahuje všechny možné podmnožiny množiny A. Formální matematický zápis je následující:

$$\widehat{A} = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Pro každé dvě libovolné množiny A, B jsme schopni jednoznačně provést operace sjednocení množin, průnik množin, rozdíl množin a doplněk množiny:

- *Sjednocením* množin A a B je množina, jež obsahuje právě ty prvky, které náleží alespoň do jedné z uvedených množin, tedy do A nebo do B (a samozřejmě i ty, které náleží do obou množin zároveň, spojka nebo je v tomto kontextu chápána v nevylučovacím smyslu). Matematický zápis je:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}.$$

- *Průnikem* množin A a B je množina, která obsahuje právě ty prvky, které náleží jak do A, tak do B. Formálně:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \in B\}.$$

Pokud platí, že $A \cap B = \emptyset$ nazýváme množiny A a B navzájem disjunktní.

Poznámka 2.1.2. Pro sjednocení i průnik platí, že nezáleží na pořadí množin, na kterých tyto operace provádíme. $A \cup B$ je totožné s $B \cup A$, stejně tak $A \cap B$ je to samé jako $B \cap A$. Množiny jsou totiž určeny pouze výčtem svých prvků, bez ohledu na jejich pořadí.

- *Rozdíl* množin A a B (v uvedeném pořadí) je množina, která obsahuje právě ty prvky, které náleží do množiny A a které zároveň nenáleží do množiny B. Píšeme:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \notin B\}.$$

Poznámka 2.1.3. V tomto případě, na rozdíl od sjednocení nebo průniku, záleží na pořadí. $A \setminus B$ není totéž jako $B \setminus A$.

- *Doplněk* množiny A (značíme A'), je množina, která obsahuje všechny ty prvky, které nepatří do množiny A. Píšeme $A' = U \setminus A$, kde U představuje množinu obsahující všechny možné uvažovatelné prvky, tzv. univerzum neboli základní množinu. Jestliže je doplněk A' k dané množině A správně utvořený, musí být splněny následující vztahy:

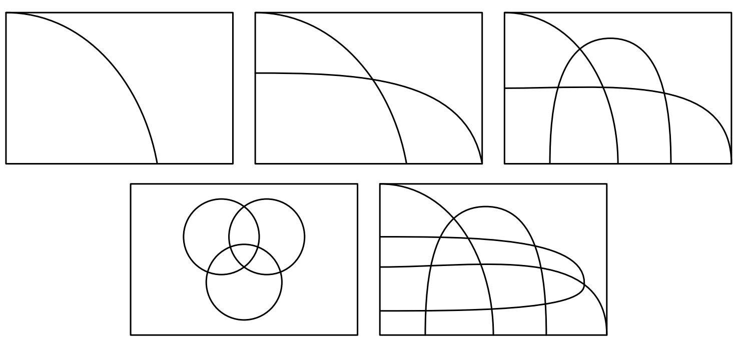
$$A \cup A' = U \text{ a zároveň musí platit } A \cap A' = \emptyset.$$

Při splnění těchto vztahů říkáme, že A a A' tvoří rozklad U na dvě disjunktní množiny.

Pro názorné grafické znázornění vztahů mezi množinami včetně uvedených operací se užívá tzv. Vennových[1] diagramů.

Jsou to grafická přihrádková schémata, na kterých modelujeme vztahy mezi množinami. Uzavřený rovinný útvar znázorňuje množinu. Každý útvar přitom musí mít část společnou postupně nejen se všemi ostatními útvary, ale i se všemi jejich společnými částmi. Musíme být schopni v diagramu vyznačit prvek, který patří libovolně vybraným množinám. Důkaz pomocí Vennových diagramů je rovnocenný ostatním matematickým důkazům. [6]

Ukázky Vennových diagramů postupně pro 1, 2, 3 a 4 množiny: [6]



Použití Vennových diagramů se doporučuje pro nejvýše 4 různé množiny, poté už dochází ke ztrátě požadované názornosti a obrázek znázorňující sledovanou situaci se jeví nepřehledný.

V dalším textu budeme pracovat s množinou M, respektive s jejími podmnožinami $A, B, C, \ldots$ Na M přitom po celou dobu budeme klást jednoduchý, ale opodstatněný požadavek, a to $M \neq \emptyset$.

[1] John Venn (1834–1923) byl britský matematik, logik a filosof. Nejvíce se proslavil vytvořením zmíněných diagramů, které se s úspěchem užívají pro názorné ukázky na množinách mimo jiné v logice, při kombinatorických úvahách, v teorii pravděpodobnosti a statistice, v počítačových oborech nebo právě i v teorii množin. [5]

2.2. Výroky, logické operace

Výrokem rozumíme každé tvrzení, o kterém má smysl rozhodovat, zda je či není pravdivé. Naší snahou potom je každému tvrzení přiřadit jeho *pravdivostní hodnotu*. Po vzoru George Boola přiřadíme pravdivému výroku hodnotu 1 (pravda), nepravdivému výroku hodnota 0 (nepravda).

Situaci, kdy je výrok X pravdivý, značíme $\mathrm{ph}(X) = 1$ (pravdivostní hodnota výroku X je rovna 1). Naopak je-li X nepravdivý, píšeme $\mathrm{ph}(X) = 0$ (pravdivostní hodnota výroku X je rovna 0).

Jednotlivá tvrzení (tzv. jednoduché výroky) lze pomocí logických spojek skládat do výroků složených, u nichž nás bude opět zajímat jejich celková pravdivostní hodnota, která je přímo závislá na pravdivostních hodnotách obsažených výroků. Pět nejužívanějších logických spojek si představíme v dalším textu.

Tak jako u množin budeme používat pro označování výroků velkých písmen, tentokrát ovšem pro odlišení z konce abecedy.

- **Negace ($'$)** Při negaci pracujeme pouze s jedním výrokem, proto je negace příkladem tzv. jednoargumentové spojky. Pomocí negace se z daného výroku X vytvoří výrok s opačnou pravdivostní hodnotou. Z pravdivého tvrzení tak díky negaci vznikne nepravdivé a naopak. Situace je schématicky znázorněna v tabulce 2.1. Slovně se negace vyjadřuje jako „není pravda, že platí X“, popřípadě tuto formulaci často zkracujeme jen užitím předpony „ne“.

X	X'
1	0
0	1

Tabulka 2.1: Negace

Následující spojky již pracují se dvěma výroky (respektive jejich pravdivostními hodnotami), označujeme je jako dvouargumentové.

- **Konjunkce ($\wedge$)** Užitím konjunkce na výroky X a Y získáme tvrzení, které je pravdivé jedině v případě, kdy jsou i oba tyto výroky pravdivé (viz tabulka 2.2). Zápis $X \wedge Y$ čteme „X a zároveň Y“ nebo také jen „X a Y“.

X	Y	$X \wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabulka 2.2: Konjunkce

Poznámka 2.2.1. Řádky tabulky musí zahrnovat všechny možností, jak lze pravdivostní hodnoty výroků kombinovat. Počet řádků tabulky je tedy 2^n, kde n je počet uvažovaných proměnných, jak udává obecný princip kombinatoriky (viz např. [6]).

- **Disjunkce ($\vee$)** K tomu, aby byla disjunkce dvou tvrzení X a Y pravdivá, postačuje pravdivost alespoň jednoho znich. Jsou-li obě nepravdivé, pravdivostní hodnota jejich disjunkce je nulová (viz tabulka 2.3). Situace $X \vee Y$ se čte jako „X nebo Y“, přičemž je podstatné si uvědomit, že spojka „nebo“ v tomto v případě není užita ve vylučovacím významu – platnost obou výroků zároveň se tedy nevylučuje.

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabulka 2.3: Disjunkce

- **Implikace ($\Rightarrow$)** Implikací dvou výroků získáme výrok nepravdivý pouze v případě, že je první z nich pravdivý a druhý nepravdivý. V ostaních třech případech je implikace vždy pravdivá, jak je vidět v tabulce 2.4. Způsobů, jak tuto spojku přečíst, je povícero, mezi nejčastější formulace patří „jestliže

X, potom Y“, „nechť X, potom Y“, „když X, pak Y“. Je-li implikace pravdivá, můžeme zápis $X \Rightarrow Y$ přečíst také jako „z X plyne Y“. O výroku X můžeme také mluvit jako o předpokladu nebo o postačující podmínce pro výrok Y. Výrok Y se považuje za závěr nebo za nutnou podmínku pro X.

X	Y	$X \Rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabulka 2.4: Implikace

Poznámka 2.2.2. Implikace je v porovnání s ostatními logickými spojkami pro většinu lidí složitější na pochopení a zapamatování. Proto zde uvádím příklad[2], díky kterému by už nikdo neměl mít s touto spojkou problém. Nechť máme výrok X: „Student dá svému vyučujícímu úplatek“ a výrok Y: „Vyučující dá na oplátku studentovi na konci semestru A“. Uspořádáním těchto tvrzení do implikace získáme složený výrok: „Když dá student svému vyučujícímu úplatek, pak mu dá vyučující na konci semestru A“ a chceme rozhodnout o jeho pravdivosti, tedy v jakých případech vyučující lže? Pokud vyučující žádný úplatek nepřijme, je ohodnocení studenta přímo úměrné předvedeným znalostem (hodnocení známkou A pořád klidně dát může) a je naprosto v jeho kompetenci (3. a 4. řádek tabulky 2.4). Pokud ovšem už dojde k přijetí úplatku, bylo by na místě splnit daný slib (1. řádek). A konečně v případě, že vyučující příjme úplatek a student za A přesto nedostane, pak je snad každému zřejmé, že je něco špatně.

- **Ekvivalence ($\Leftrightarrow$)** Z tabulky 2.5 je patrné, že ekvivalence dvou výroků nabývá hodnoty 1 pouze v případech, kdy mají tyto výroky stejnou pravdivostní hodnotu, tedy kdy jsou buď oba pravdivé nebo oba nepravdivé. $X \Leftrightarrow Y$ čteme například „X je ekvivalentní Y“, „X právě tehdy, když Y“ nebo

[2] Příklad parafrázován na základě přednášky z předmětu Lineární algebra 1 konané v roce 2013, vyučující Ing. Milan Petrík, Ph.D.

„X tehdy a jen tehdy, když Y“. I zde se používá pojmů postačující a nutná podmínka, protože jsou ale oba výroky ekvivalentní čteme „X je postačující a zároveň nutná podmínka pro Y a naopak Y je nutná a postačující podmínka pro X“.

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tabulka 2.5: Ekvivalence

Dle [8] se někdy ekvivalence označuje také jako oboustranná implikace, neboť mezi nimi platí vztah

$$(X \Leftrightarrow Y) = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X),$$

jak se lze přesvědčit pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Poznámka 2.2.3. Už nyní si povšimněme důležité vlastnosti, ze které budeme později dále vycházet, a to že jak v konjunkci, tak i disjunkci a ekvivalenci nezáleží na pořadí výroků, které spojujeme. Jinými slovy – zaměníme-li v tabulkách 2.2, 2.3 a 2.5 pořadí výroků X a Y, pravdivostní hodnota složeného výroku se nezmění. Pro implikaci tato vlastnost splněna není.

Písmena, která jsme v předchozím textu užívali pro označení konkrétních výroků, symbolizují tzv. *výrokové proměnné*, které zastupují pravdivostní hodnoty výroků. *Výroková formule* je termín pro matematický výraz zkonstruovaný z konečného počtu výrokových proměnných, jež jsou pospojovány prostřednictvím symbolů pro logické spojky (v našem případě jsou to $'$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Formule mohou dále obsahovat různé typy závorek pro vyjádření předností mezi operacemi nebo pro zřetelné vyznačení struktury formule (pro oddělení tzv. podformulí). Závorky tak zde mají stejný význam jako v číselné algebře [7].

Většina matematických tvrzení (lemmat, vět, jejich důsledků, důkazů, definic) je ve tvaru implikace nebo ekvivalence. Pro naše potřeby jsou ovšem tyto logické spojky „poněkud zbytečné“. Později, v booleovských výpočtech, využijeme skutečnosti, že je obě lze nahradit pomocí jednoduššího zápisu.

Ekvivalence se mimo $\Leftrightarrow$ často také značí $\leftrightarrow$ nebo i $=$. V následujícím oddílu, i později v booleovských úpravách, budeme pomocí symbolu $=$ vyjadřovat, že zápis na jeho levé straně je ekvivalentní tomu na pravé.

Implikaci můžeme vyjádřit pomocí logických spojek negace a disjunkce takto:

$$(X \Rightarrow Y) = (X' \vee Y). \tag{2.1}$$

(viz tabulka 2.6, ze které je patrné, že pravdivostní hodnota $X \Rightarrow Y$ a $X' \vee Y$ je ve všech čtyřech případech totožná).

X	Y	X'	$X' \vee Y$	$X \Rightarrow Y$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Tabulka 2.6: Důkaz vztahu (2.1)

Ekvivalenci lze vyjádřit pomocí logických spojek negace, konjunkce a disjunkce (viz tabulka 2.7) takto:

$$(X \Leftrightarrow Y) = (X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y'). \tag{2.2}$$

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$	$(X \wedge Y)$	$\vee$	$(X' \wedge Y')$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1

Tabulka 2.7: Důkaz vztahu (2.2)

Poznámka 2.2.4. Vztah (2.2) lze získat i následující úpravou. Pro pochopení tohoto postupu je však nezbytná znalost vlastností definovaných dále v podkapitole 2.3.

$$
\begin{aligned}
(X \Leftrightarrow Y) = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X) = (X' \vee Y) \wedge (Y' \vee X) = \\
= [(X' \vee Y) \wedge Y'] \vee [(X' \vee Y) \wedge X] = \\
= [(X' \wedge Y') \vee (Y \wedge Y')] \vee [(X' \wedge X) \vee (Y \wedge X)] = \\
= [(X' \wedge Y') \vee 0] \vee [0 \vee (Y \wedge X)] = \\
= (X' \wedge Y') \vee (Y \wedge X) = (X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y')
\end{aligned}
$$

Z předchozích řádků vyplývá, že si vystačíme pouze s prvními 3 logickými operacemi (negace, konjunkce, disjunkce), protože implikaci i ekvivalenci jsme na ně schopni převést na základě vztahů (2.1) a (2.2).

George Boole přišel se systémem ohodnocování výrazů, které jsou složeny z logických spojek (konjunkce, disjunkce a negace) a logických proměnných 1 (pravda) a 0 (nepravda). [9]

V dalším textu budeme provádět výpočty na dvouprvkové množině pravdivostních hodnot $H = \{0{,}1\}$. Na této množině mějme zavedeny operace logického součinu, logického součtu (analogicky ke konjunkci $\rightarrow +$ a disjunkci$\rightarrow \cdot$), a také negaci ($'$).

$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	1’ $= 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$	0’ $= 1$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$	
$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	

Při výpočtech na množině H pracujeme tedy pouze s prvky 0, 1. Je zvykem provádět nejprve negaci, poté se přistupuje k logickému násobení a až nakonec se ponechává logické sčítání. Toto pořadí operací budeme dodržovat i později v Booleově algebře.

Příklad 2.2.1. Rozhodněte, zda následující prvek z množiny H je roven 0 nebo 1:

$$(0 + 0')' + (1 + 1')' + (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1)'(1' \cdot 0' + 0' \cdot 1') + [(1 \cdot 1' + 0 \cdot 0') \cdot (1 \cdot 0' \cdot 1)]'$$

Postup řešení: $(0+0')'+(1+1')'+(1\cdot 0+0\cdot 1)'\cdot(1'\cdot 0'+0'\cdot 1')'+[(1\cdot 1'+0\cdot 0')\cdot(1\cdot 0'\cdot 1)]' =$ $= (0 + 1)' + (1 + 0)' + (0 + 0)' \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)' + [(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1)]' =$ $= 1'+1'+0'\cdot(0+0)'+[(0+0)\cdot 1]' = 0+0+1\cdot 0'+[0\cdot 1]' = 0+1\cdot 1+0' = 0+1+1 = \underline{1}$

Poznámka 2.2.5. Znak symbolizující logické násobení (tj. $\cdot$) je možné vynechávat, tak jako při běžném násobení v číselné algebře. Při počítání s prvky množiny H by ovšem mohlo docházet k mystifikaci ($101 = 1 \cdot 0 \cdot 1$), později, kdy už budeme provádět výpočty i s proměnnými ($a, b, c, \dots$), už by tento problém nastat neměl. Přesto však v celém tomto textu bude právě z důvodu přehlednosti znak $\cdot$ psán.

2.3. Operace a jejich vlastnosti

Kartézský součin na množinách A a B je definován jako množina všech uspořádaných dvojic, kde první člen dvojice patří do množiny A, druhý do množiny B. Formální matematický zápis vypadá takto:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Nechť máme dány množiny A, B. Neprázdnou podmnožinu f kartézského součinu těchto množin ($f \subseteq A \times B$) nazýváme *zobrazení* množiny A do množiny B, pokud ke každému $a \in A$ existuje právě jedna uspořádaná dvojice $(a, b) \in f$. Symbolicky zobrazení $f\colon A \to B$ zapisujeme:

$$\{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\},$$

pomocí tohoto předpisu je každému prvku $a \in A$ přiřazena funkční hodnotu $f(a) \in B$. Množinou A rozumíme definiční obor funkce f, množina B představuje obor hodnot pro f. [10]

Kartézský součin $A \times A$ se značí A^2, mluvíme potom o *kartézské mocnině na* A.

Nechť je množina $A \neq \emptyset$ a $n = 1, 2, 3, \dots$ Potom každé zobrazení $f\colon A^n \to A$ nazveme n-ární operací na A. My se v dalším omezíme pouze na případy, kdy $n = 1$, tj. $f\colon A \to A$, což nazýváme *unární operací* na A a pro $n = 2$, tj. $f\colon A^2 \to A$, mluvíme o *operaci binární na* A. [10]

Pro binární operace rozlišujeme několik vlastností:

- *Komutativita*

Říkáme, že binární operace $\circ$ je komutativní na množině A, jestliže pro každé dva její prvky platí:

$$a \circ b = b \circ a \qquad \forall a, b \in A$$

- *Asociativita*

  Říkáme, že binární operace $\diamond$ je asociativní na množině A, jestliže pro každé tři její prvky platí:

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a, b, c \in A$$

- *Distributivita*

  Říkáme, že binární operace $\star$ je na množině A distributivní vůči binární operaci $\triangle$, jestliže pro každé tři její prvky platí:

$$a \triangle (b \star c) = (a \triangle b) \star (a \triangle c) \quad \forall a, b, c \in A$$

$$(b \star c) \triangle a = (b \triangle a) \star (c \triangle a) \quad \forall a, b, c \in A$$

- *Neutrální prvek*

  Neutrálním prvkem vůči binární operaci $*$ definované na množině A nazveme takový prvek n, pro který platí:

$$a * n = a = n * a \qquad \forall a \in A$$

- *Symetrický prvek*

  Symetrickým prvkem a^* k prvku a je takový, pro který pro danou binární operaci $*$ na množině A platí:

$$a * a^* = n = a^* * a \quad \forall a \in A$$

$$(a^*)^* = a \quad \forall a \in A$$

Poznámka 2.3.1. Neutrální prvek nemusí vždy existovat. Pokud existuje, potom je uvedenými vztahy určen jednoznačně. Na dané množině a pro danou operaci tedy existuje vždy nejvýše jeden neutrální prvek. Ze vztahů dále vyplývá, že existence inverzního prvku je závislá na existenci prvku neutrálního.

Neutrální prvek se v případě některých operací také nazývá jednotkový (značeno e nebo 1), resp. nulový (značeno 0). Symetrický prvek se v těchto případech nazývá inverzní (značeno a^{-1}), resp. opačný (značeno $-a$).

2.4. Booleova algebra

Na konci podkapitoly 2.1 byla zmíněna neprázdná množina M a na závěr podkapitoly 2.2 množina $H = \{0,1\}$. Nyní dáme pojmy z podkapitol 2.1 a 2.2 do souvislostí s vlastnostmi definovanými v podkapitole 2.3.

Dle [11] zavedeme tzv. *množinovou algebru*, kterou označíme $(\widehat{M}, \cup, \cap, ')$, kde $\widehat{M}$ značí množinu všech podmnožin množiny M, sjednocení $\cup$ a průnik $\cap$ jsou binární operace definované na $\widehat{M}$ a doplněk $'$ je unární operace na stejné množině. V poznámce 2.1.2 je vysvětleno, že jak $\cup$, tak i $\cap$ jsou komutativní. Stejně tak pro ně lze snadno ukázat platnost asociativity. Také platí, že $\cup$ je distributivní vzhledem k $\cap$ a i $\cap$ je distributivní k $\cup$. Dále jednoduchou úvahou zjistíme, že k operaci $\cup$ existuje neutrální prvek $\emptyset$ a také $\cap$ má neutrální prvek, kterým je celá množina M. Přičemž tyto neutrální prvky jsou vzájemně různé, protože na počátku byl na množinu M kladen požadavek $M \neq \emptyset$.

Podobně zavedeme i tzv. *algebru pravdivostních hodnot* $(H, +, \cdot, ')$, kde $+$ a $\cdot$ (resp. $'$) jsou příslušné binární (resp. unární) operace k logickému sčítání a logickému násobení (resp. doplňku), pro které platí, že splňují vlastnost komutativity (viz poznámka 2.2.3) i asociativity. Dále lze dokázat distributivitu logického sčítání vzhledem k logickému násobení a naopak distributivitu logického násobení vzhledem ke sčítání. Pro logické sčítání máme neutrální prvek 0 a pro násobení je tím prvkem 1, přitom platí $0 \neq 1$.

Z předchozích dvou odstavců je jasně vidět podobnost mezi množinovou algebrou a algebrou pravdivostních hodnot. Na obou máme definovány dvě binární a jednu unární operaci, mající stejné vlastnosti, v obou případech existují vzájemně různé neutrální prvky a ke každému prvku lze pomocí dané unární operace najít prvek symetrický.

Nad těmito dvěma algebrami nyní vytvoříme jakousi abstraktní nadstavbu (definice převzata z [11], výrazy „sčítání“ a „násobení“ jsou zde pouze termíny vypůjčené z číselné algebry, nejedná se o běžné sčítání a násobení, jak ho známe např. u přirozených čísel): *Mějme dánu neprázdnou, jinak zcela libovolnou množinu B, v níž je definována rovnost jejích prvků a na které jsou zavedeny dvě binární operace „sčítání“ a „násobení“, a jedna unární operace „doplněk“. Množinu B spolu s příslušnými operacemi budeme nazývat* Booleova algebra *právě tehdy, když platí:*

Každá z binárních operací je komutativní a asociativní. Dále je operace „násobení“ distributivní vzhledem k operaci „sčítání“ a také operace „sčítání“ je distributivní vzhledem k „násobení“. Ke každé z binárních operací existuje právě jeden neutrální prvek: přitom jsou tyto neutrální prvky vzájemně různé. Neutrální prvek operace „sčítání“ označíme 0, neutrální prvek operace „násobení“ 1. Unární operace splňuje všechny požadavky uvedené v předchozím textu, jak pro množiny, tak i pro pravdivostní hodnoty.

Definice Booleovy algebry pomocí soustavy axiomů je dle [11] následující: *Mějme dánu neprázdnou množinu B, v níž je definována rovnost $=$, existují v ní vzájemně různé prvky 0, 1 a jsou v ní definovány binární operace $+, \cdot$ („$x + y$“, „$x \cdot y$“) a unární operace $'$ („x'“). Množinu B spolu s příslušnými operacemi budeme nazývat* Booleova algebra *právě tehdy, když pro všechny prvky x, y, z z množiny B platí následujících 10 axiomů:*

(1) $x + y = y + x$

(2) $x \cdot y = y \cdot x$

(3) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(4) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(5) $\quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(6) $\quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

(7) $\quad x + 0 = x$

(8) $\quad x \cdot 1 = x$

(9) $\quad x + x' = 1$

(10) $\quad x \cdot x' = 0$

Poznámka 2.4.1. Jinými slovy axiomy (1), (2) vyjadřují požadavek na komutativitu zavedených binárních operací, (3), (4) vyjadřují požadavek na asociativitu zavedených binárních operací a (5), (6) vyjadřují požadavek na distributivitu zavedených binárních operací. Dále (7), (8) popisují požadavek na existenci neutrálních prvků k jednotlivým binárním operacím a axiomy (9), (10) vyjadřují podmínku pro existenci inverzních prvků k příslušným binárním operacím, resp. popisují vztah mezi prvkem samotným a prvkem k němu inverzním.

Takto zavedenou Booleovu algebru budeme označovat $(B, +, \cdot, ')$. [11]

O rovnosti definované v B budeme předpokládat, že je „rovností vůči booleovským operacím“: to znamená, že pro všechny prvky x, y, z z množiny B platí: je-li $x = y$, pak $x + z = y + z$, $x \cdot z = y \cdot z$, $x' = y'$. [11]

Ve zbytku práce budou písmena $a, b, c, \ldots, x, y, z \in B$ značit prvky Booleovy algebry.

O „povaze“ prvků množiny B se v definici Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$ nic bližšího neříká, právě tak abstraktně pojaté jsou všechny operace i oba neutrální prvky. Známe ale už dva konkrétní příklady Booleovy algebry. [11]

Zvolme za B konkrétně množinu $\widehat{M}$ všech podmnožin množiny M. Operace „sčítání“, „násobení“ a doplněk konkretizujeme postupně jako operace sjednocení, průnik a doplněk na $\widehat{M}$. Pak pro všechny prvky množiny $\widehat{M}$ axiomy (1)–(10) zřejmě platí. Říkáme, že *množinová algebra $(\widehat{M}, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry*. Roli neutrálních prvků 0, 1 hrají množiny $\emptyset$ a M. [11]

Představme si dále namísto množiny B konkrétně množinu H pravdivostních hodnot výroků, operace „sčítání“, „násobení“ a doplněk B konkretizujeme jako operace logického sčítání, logického násobení a doplňku definované na H. Pak opět pro všechny prvky množiny H jsou axiomy (1)–(10) splněny. Říkáme, že *algebra pravdivostních hodnot* $(H, +, \cdot, ')$ *je modelem Booleovy algebry.* [11]

Uveďme a dokažme nyní několik důležitých vět platných v rámci Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$. Při jejich dokazování je užíváno výhradně axiomů (1)–(10).

Věta 2.4.1. *(o idempotenci) Pro každý prvek $x \in B$ platí:*

(11) $\quad x + x = x$

(12) $\quad x \cdot x = x$

Důkaz.

(11) $\quad x = x + 0 = x + (x \cdot x') = (x + x) \cdot (x + x') = (x + x) \cdot 1 = x + x$

(12) $\quad x = x \cdot 1 = x \cdot (x + x') = (x \cdot x) + (x \cdot x') = (x \cdot x) + 0 = x \cdot x$ □

Věta 2.4.2. *Pro každý prvek $x \in B$ platí:*

(13) $\quad x \cdot 0 = 0$

(14) $\quad x + 1 = 1$

Důkaz.

(13) $\quad x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + x \cdot x' = x \cdot (0 + x') = x \cdot x' = 0$

(14) $\quad x + 1 = (x + 1) \cdot 1 = (x + 1) \cdot (x + x') = x + (1 \cdot x') = x + x' = 1$ □

Věta 2.4.3. *(o involuci) Pro každý prvek $x \in B$ platí:*

(15) $\quad (x')' = x$

Důkaz.

(15) Podle definice operace doplněk a podle axiomů (1), (2) lze psát $x' + x = 1$ a zároveň $x' \cdot x = 0$. Odtud ihned plyne, že x je doplňkem k x', tj. $x = (x')'$. □

Věta 2.4.4. *Pro všechny prvky $x, y \in B$ platí:*

(16) $\quad (x + y)' = x' \cdot y'$

(17) $\quad (x \cdot y)' = x' + y'$

Důkaz.

(16) Naším úkolem je dokázat, že $x' \cdot y'$ je doplňkem k prvku $x+y$, tj. musíme ověřit, že platí: I) $(x' \cdot y') \cdot (x+y) = 0$ a zároveň II) $x' \cdot y' + (x+y) = 1$.

Nejprve dokažme I): $(x' \cdot y') \cdot (x+y) = (x' \cdot y') \cdot x + (x' \cdot y') \cdot y =$
$= (x' \cdot x) \cdot y' + x' \cdot (y' \cdot y) = 0 \cdot y' + x' \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$

Dokažme dále II): $x' \cdot y' + (x+y) = (x' + (x+y) \cdot (y' + (x+y)) =$
$= ((x'+x)+y) \cdot ((y'+y)+x) = (1+y) \cdot (1+x) = 1 \cdot 1 = 1.$

(17) Naším úkolem je dokázat, že $x'+y'$ je doplňkem k prvku $x \cdot y$, tj. musíme ověřit, že platí: I) $(x'+y') \cdot (x \cdot y) = 0$ a zároveň II) $(x'+y') + (x \cdot y) = 1$.

I) $(x'+y') \cdot (x \cdot y) = x' \cdot (x \cdot y) + y' \cdot (x \cdot y) = (x' \cdot x) \cdot y + (y' \cdot y) \cdot x =$
$= 0 \cdot y + 0 \cdot x = 0 + 0 = 0$

II) $(x'+y') + (x \cdot y) = ((x'+y')+x) \cdot ((x'+y')+y) = ((x'+x) + \; + y') \cdot$
$(x' + (y'+y)) = (1+y') \cdot (x'+1) = 1 \cdot 1 = 1$ □

Poznámka 2.4.2. (16), (17) jsou speciálním případem De Morganových[3] zákonů.

Věta 2.4.5. *(o absorpci) Pro všechny prvky $x, y \in B$ platí:*

(18) $x + x \cdot y = x$

(19) $x \cdot (x+y) = x$

Důkaz.

(18) $x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y = x \cdot (1+y) = x \cdot 1 = x$

(19) $x \cdot (x+y) = (x+0) \cdot (x+y) = x + (0 \cdot y) = x + 0 = x$ □

Věta 2.4.6. *Pro všechny prvky $x, y \in B$ platí:*

(20) $x + x' \cdot y = x + y$

(21) $x \cdot (x'+y) = x \cdot y$

[3] Augustus De Morgan (1806–1871) byl britský matematik. Kromě De Morganových zákonů je známý zavedením pojmu „matematická indukce“ při formulování matematických důkazů. Ovlivněn Georgem Boolem převedl v práci *The Differential and Integral Calculus* zákony algebraické logiky do logiky a matematiky – dnes známy jako De Morganovy zákony pro konjunkci a disjunkci. [9]

Důkaz.

(20) $\quad x + x' \cdot y = (x + x') \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$

(21) $\quad x \cdot (x' + y) = x \cdot x' + x \cdot y = 0 + x \cdot y = x \cdot y$ $\square$

Věta 2.4.7. *Nechť x, y jsou libovolné prvky množiny B. Pak platí:*

(22) $\quad x + y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \wedge (y = 0)$

(23) $\quad x \cdot y = 1 \Leftrightarrow (x = 1) \wedge (y = 1)$

Důkaz.

(22) I) Nechť je $x = 0$ a zároveň $y = 0$. Pak je $x + y = 0$ podle (7).

II) Nechť $x + y = 0$. Pak je $x + (x + y) = (x + x) + y = x + y = 0$ a zároveň $x + (x + y) = x + 0 = x$. Odtud plyne $x = 0$. Zcela obdobně zjistíme, že také $y = 0$. Nechť $x + y = 0$. Pak je $(x + y) + y = x + (y + y) = x + y = 0$ a zároveň $(x + y) + y = 0 + y = y$. Odtud plyne $y = 0$.

(23) I) Nechť je $x = 1$ a zároveň $y = 1$. Pak je $x \cdot y = 1$ podle (8).

II) Nechť $x \cdot y = 1$. Pak je $x \cdot (x \cdot y) = (x \cdot x) \cdot y = x \cdot y = 1$ a zároveň $x \cdot (x \cdot y) = x \cdot 1 = x$. Odtud plyne $x = 1$. Nechť $x \cdot y = 1$. Pak je $(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y) = x \cdot y = 1$ a zároveň $(x \cdot y) \cdot y) = 1 \cdot y = y$. Odtud plyne $y = 1$. $\square$

Věta 2.4.8. *Nechť x, y jsou libovolné prvky množiny B. Pak platí:*

(24) $\quad x = y \Leftrightarrow x \cdot y' + x' \cdot y = 0$

(25) $\quad x = y \Leftrightarrow (x + y') \cdot (x' + y) = 1$

Důkaz.

(24) I) Nechť je $x = y$. Pak $x \cdot y' = y \cdot y'$, čili $x \cdot y' = 0$ a zároveň také $x' \cdot x = x' \cdot y$, čili $x' \cdot y = 0$. Podle (22) je tedy $x \cdot y' + x' \cdot y = 0$.

II) Nechť nyní pro x, y z B je $x \cdot y' + x' \cdot y = 0$. Podle (22) je pak a) $x \cdot y' = 0$ a zároveň b) $x' \cdot y = 0$. Z a) plyne $x \cdot y' + y = y$, ale podle (20) je $x \cdot y' + y = y + x$. Proto $x + y = y$. Z b) plyne $x' \cdot y + x = x$, ale podle (20) je $x' \cdot y + x = x + y$, proto $x + y = x$. Tudíž $x = y$.

(25) I) Nechť je $x = y$. Pak $x + y' = y + y'$, čili $x + y' = 1$ a zároveň také $x' + y = 1$. Podle (23) je tedy $(x + y') \cdot (x' + y) = 1$.

II) Nechť je nyní pro x, y z B $(x + y') \cdot (x' + y) = 1$. Podle (23) je pak a) $x + y' = 1$ a zároveň b) $x' + y = 1$. Z a) plyne $x \cdot y = y$ a zároveň z b) plyne $x \cdot y = x$. Odtud $x = y$. $\square$

Věty z podkapitoly 2.4 a důkazy (11), (13), (15), (16), (18), (20), (22 I), II)) jsou převzaty z [11].

Uveďme ještě na tomto místě tzv. *princip duality* platný v Booleově algebře. Tohoto principu je možné užít například i při dokazování předchozích vět. Princip spočívá v tom, že v platícím výrazu provedeme záměny mezi všemi vyskytujícími se binárními operacemi ($+ \rightarrow \cdot$ a $\cdot \rightarrow +$) a zároveň i záměny mezi prvky ($1 \rightarrow 0$ a $0 \rightarrow 1$). Takto získaný (tzv. duální) výraz je opět platný. Například v případě věty 2.4.6 bychom užitím tohoto principu z axiomu (20) $x + x' \cdot y = x + y$ dostali ihned axiom (21) $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$. Principu duality však v této práci nijak užíváno není a zmiňuji ho zde jen pro úplnost.

Kapitola 3

Příkladová část

3.1. Příklady na redukci

V následujícím oddílu si ukážeme aplikaci vztahů (1)–(25) při zjednodušování dlouhých a složitých zápisů na takové výrazy, které obsahují co nejméně prvků. Těchto úprav bude dále využito i při řešení příkladů v dalších podkapitolách.

Čísla v kulatých závorkách situovaná mezi rovnítky v řešení příkladu 3.1.1 níže poukazují na to, kterého axiomu bylo užito v následujícím kroku úpravy. Takový zápis je sice maximálně názorný, ale zároveň poněkud narušuje strukturu řešení, proto budou v dalších příkladech příslušná čísla axiomů v aplikovaném pořadí psána až na závěr celého příkladu.

Zadání příkladů v této podkapitole pochází z ([11, str. 50]).

Příklad 3.1.1. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $a+a'\cdot b+a\cdot b'+a'\cdot b'$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$$a+a'\cdot b+a\cdot b'+a'\cdot b' = (2) = (a+a'\cdot b)+b'\cdot a+b'\cdot a' = (20),\,(5) = (a+b)+b'\cdot(a+a') =$$
$$= (9) = a+b+b'\cdot 1 = (8) = a+(b+b') = (9) = a+1 = (14) = \underline{1}$$

Poznámka 3.1.1. V algebře pravdivostních hodnot lze výsledek 1 interpretovat jako vždy splnitelnou formuli – *tautologii*. Naopak výsledek 0 chápeme jako formuli, kterou splnit nelze – jako *kontradikci*.

Příklad 3.1.2. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $(a+b'+c')\cdot(a+b'\cdot c)$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$(a+b'+c')\cdot(a+b'\cdot c) = (a+b'+c')\cdot(a+b')\cdot(a+c) = (a+b'+c')\cdot(a\cdot a+a\cdot c+a\cdot b'+b'\cdot c) =$
$= (a+b'+c')\cdot[(a+a\cdot c)+a\cdot b'+b'\cdot c] = (a+b'+c')\cdot[a+a\cdot b'+b'\cdot c] =$
$= (a+b'+c')\cdot(a+b'\cdot c) = a\cdot a+a\cdot b'\cdot c+a\cdot b'+b'\cdot b'\cdot c+a\cdot c'+b'\cdot c\cdot c' = a+a\cdot b'+a\cdot c'+$
$+a\cdot b'\cdot c+b'\cdot c+0 = a+a\cdot c'+b'\cdot c+(b'\cdot c)\cdot a = a+b'\cdot c\cdot(a+1) = a+b'\cdot c\cdot 1 = \underline{a+b'\cdot c}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (6); (2), (5); (12); (18); (18); (5), (2); (12), (10); (1), (18), (7); (18); (2), (4), (5); (14); (8).

Příklad 3.1.3. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $a\cdot b\cdot c'+a'\cdot b'\cdot c'+$ $+\, a'\cdot b\cdot c'+a\cdot b\cdot c$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$a\cdot b\cdot c'+a'\cdot b'\cdot c'+a'\cdot b\cdot c'+a\cdot b\cdot c = a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot c'+a'\cdot c'\cdot b+a'\cdot c'\cdot b' =$
$= a\cdot b\cdot(c+c')+a'\cdot c'\cdot(b+b') = a\cdot b\cdot 1+a'\cdot c'\cdot 1 = \underline{a\cdot b+a'\cdot c'}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (1), (4); (5); (9); (8).

Příklad 3.1.4. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $a+c'+b\cdot(a+c')'+$ $+\,(a+c')\cdot(a+b+c')$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$a+c'+b\cdot(a+c')'+(a+c')\cdot(a+b+c') = (a+c')\cdot(a+c')\cdot b+(a+c')(a+b+c') =$
$= (a+c')+b+(a+c')(a+b+c') = (a+b+c')+(a+b+c')(a+c') = \underline{a+b+c'}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (2); (20); (3), (1), (2); (18).

Příklad 3.1.5. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $[(a\cdot b+c)'+a\cdot b+d]'$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$[(a\cdot b+c)'+a\cdot b+d]' = [(a\cdot b)'\cdot c'+a\cdot b+d]' = [a\cdot b+(a\cdot b)'\cdot c'+d]' =$
$= (a\cdot b+c'+d)' = (a\cdot b)'\cdot(c'+d)' = (a\cdot b)'\cdot(c')'\cdot d' = \underline{(a\cdot b)'\cdot c\cdot d'}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (16); (1); (20); (16); (16); (15).

Příklad 3.1.6. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $(a\cdot b\cdot c+a\cdot b'+b\cdot c')'$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$(a\cdot b\cdot c+a\cdot b'+b\cdot c')' = (a\cdot b\cdot c)'\cdot(a\cdot b')'\cdot(b\cdot c')' = (a'+b'+c')\cdot(a'+b)\cdot(b'+c) =$
$= (a'\cdot a'+a'\cdot b+a'\cdot b'+b\cdot b'+a'\cdot c'+b\cdot c')\cdot(b'+c) = (a'+a'\cdot b+a'\cdot b'+0+a'\cdot$
$\cdot c'+b\cdot c')\cdot(b'+c) = (a'+a'\cdot b+a'\cdot c'+b\cdot c')\cdot(b'+c) = (a'+a'\cdot c'+b\cdot c')\cdot(b'+c) =$

$= (a' + b \cdot c') \cdot (b' + c) = a' \cdot (b' + c) + b \cdot c' \cdot (b' + c) = a' \cdot (b' + c) + b \cdot b' \cdot c' + b \cdot c \cdot c' =$
$= a' \cdot (b' + c) + 0 \cdot c' + b \cdot 0 = a' \cdot (b' + c) + 0 + 0 = \underline{a' \cdot (b' + c)}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (16); (17); (5), (2); (12), (10); (18), (7); (18); (18); (5), (2); (5); (10); (2), (13); (7).

Příklad 3.1.7. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $b \cdot (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot b \cdot (c+d) \cdot (b \cdot d)' \cdot (e+c+d)$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$b \cdot (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot b \cdot (c+d) \cdot (b \cdot d)' \cdot (e+c+d) = (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot b \cdot b \cdot (b'+d') \cdot (c+d) \cdot$
$\cdot (e+c+d) = (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot b \cdot (b'+d') \cdot (c \cdot e + c \cdot c + c \cdot d + d \cdot e + c \cdot d +$
$+ d \cdot d) = (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot (b \cdot b' + b \cdot d') \cdot (c \cdot e + (c + c \cdot d) + (d \cdot e + d)) =$
$= (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot (0 + b \cdot d') \cdot (c \cdot e + c + d) = (a+c+d) \cdot (a+e) \cdot b \cdot d' \cdot (c+d) =$
$= (a+e) \cdot b \cdot d' \cdot (a \cdot c + a \cdot d + c \cdot c + c \cdot d + c \cdot d + d \cdot d) = (a+e) \cdot b \cdot d' \cdot (a \cdot c + a \cdot d + (c + c \cdot d) + d) =$
$= (a+e) \cdot b \cdot d' \cdot (c + c \cdot a + d + d \cdot a) = (a+e) \cdot b \cdot d' \cdot (c+d) = (a+e) \cdot b \cdot c \cdot d' + b \cdot d \cdot d' =$
$= (a+e) \cdot b \cdot c \cdot d' + b \cdot 0 = (a+e) \cdot b \cdot c \cdot d' + 0 = \underline{b \cdot c \cdot d' \cdot (a+e)}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (2), (17); (12), (5), (2); (11), (12), (5); (10), (1), (18); (1), (18), (7), (1), (2); (11), (12); (2), (18), (1), (2); (1), (18); (2), (5); (10); (13); (2), (7).

Příklad 3.1.8. Zjednodušte zápis prvku Booleovy algebry $(a+c) \cdot (d \cdot g)' \cdot (a \cdot b)' \cdot (d + a') \cdot (f+g) \cdot c' \cdot (a \cdot d)' \cdot (d \cdot c)'$ tak, aby obsahoval co nejméně symbolů:

$(a+c) \cdot (d \cdot g)' \cdot (a \cdot b)' \cdot (d + a') \cdot (f+g) \cdot c' \cdot (a \cdot d)' \cdot (d \cdot c)' = (a+c) \cdot (a' + b') \cdot$
$\cdot c' \cdot (d' + g') \cdot (f+g) \cdot (d + a') \cdot (a' + d') \cdot (d' + c') = (a \cdot a' + a \cdot b' + a' \cdot c + b' \cdot c) \cdot$
$\cdot c' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + g \cdot g' + f \cdot g') \cdot (a' \cdot d + d \cdot d' + a' \cdot a' + a' \cdot d') \cdot (d' + c') =$
$= (0 + a \cdot b' + a' \cdot c + b' \cdot c) \cdot c' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + 0 + f \cdot g') \cdot (a' \cdot d + 0 + a' + a' \cdot d) \cdot (d' + c') =$
$= (a \cdot b' + a' \cdot c + b' \cdot c) \cdot c' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot (a' + a' \cdot d) \cdot (d' + c') =$
$= (a \cdot b' \cdot c' + a' \cdot c \cdot c' + b' \cdot c \cdot c') \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot a' \cdot (d' + c') =$
$= (a \cdot b' \cdot c' + a' \cdot 0 + b' \cdot 0) \cdot a' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot (d' + c') = (a \cdot b' \cdot c' + 0 + 0) \cdot a' \cdot$
$\cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot (d' + c') = (a \cdot b' \cdot c') \cdot a' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot (d' + c') =$
$= a \cdot a' \cdot b' \cdot c' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot (d' + c') = 0 \cdot b' \cdot c' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + f \cdot g') \cdot (d' + c') = \underline{0}$

Při řešení bylo užito postupně axiomů (17), (2); (5), (2); (10), (11); (1), (7), (11), (18); (5); (4), (10); (13), (2); (7); (2), (4); (10); (2), (13).

3.2. Příklady o množinách a logice

Dříve zmíněné Vennovy diagramy a také tabulková metoda představují jednoduché prostředky, pomocí nichž by bylo možné řešit některé z následujících příkladů. Aby však bylo tématu práce učiněno zadost, zaměříme se v dalším na jejich řešení pomocí booleovských výpočtů.

Množinové situace i výrokové formule jsme schopni na základě předchozího textu – s vědomím, že množinová algebra i algebra pravdivostních hodnot jsou modely Booleovy algebry, převést na booleovské výrazy, které dále upravíme analogicky jako v podkapitole 3.1.

V množinové algebře budeme provádět následující záměny mezi operacemi:

$$\cup \to + \qquad \cap \to \cdot \qquad {}' \to {}'$$

a symboly značící množiny budou nahrazeny malými písmeny představujícími prvky Booleovy algebry. V případě algebry pravdivostních hodnot budeme zapisovat:

$$\vee \to + \qquad \wedge \to \cdot \qquad {}' \to {}'$$

a výrokové proměnné nahradíme malými písmeny představujícími prvky Booleovy algebry.

3.2.1. Redukce na množinách

Příklad 3.2.1. ([11, str. 13]) Zjednodušte zápis těchto množin:

$$(A \cap B \cap D') \cup (D' \cap B' \cap A') \cup (A \cap B' \cap D') \cup (B \cap D' \cap A')$$

Řešení: Tuto množinovou situaci přepíšeme pomocí výše uvedeného návodu a dále upravíme:

$$a \cdot b \cdot d' + a' \cdot b' \cdot d' + a \cdot b' \cdot d' + a' \cdot b \cdot d' = a \cdot b \cdot d' + a \cdot b' \cdot d' + a' \cdot d' \cdot b' + a' \cdot d' \cdot b =$$
$$= a \cdot (b \cdot d' + b' \cdot d') + a' \cdot d' \cdot (b' + b) = a \cdot (d' \cdot (b + b')) + a' \cdot d' \cdot 1 = a \cdot d' \cdot 1 + a' \cdot d' =$$
$$= a \cdot d' + a' \cdot d' = d' \cdot (a + a') = d' \cdot 1 = \underline{d'}$$

Zpětná záměna: $d' \to D'$. Složitý zápis ze zadání se tedy zredukoval pouze na doplněk množiny D.

Příklad 3.2.2. ([11, str. 86]) Zjednodušte zápis těchto množin:

$$(D \cap A \cap B) \cup (C \cap (A \cup E)') \cup (D' \cap (A' \cup B')') \cup ((A' \cap E')' \cap C)$$

Řešení: Tuto množinovou situaci přepíšeme pomocí výše uvedeného návodu a dále upravíme:

$$d \cdot a \cdot b + c \cdot (a+e)' + d' \cdot (a'+b')' + (a' \cdot e')' \cdot c = a \cdot b \cdot d + c \cdot (a+e)' + d' \cdot (a \cdot b) + (a+e) \cdot c =$$
$$= a \cdot b \cdot d + a \cdot b \cdot d' + c \cdot (a+e) + c \cdot (a+e)' = a \cdot b \cdot (d+d') + c((a+e)+(a+e)') =$$
$$= a \cdot b \cdot 1 + c \cdot 1 = \underline{a \cdot b + c}$$

Zpětná záměna: $a \cdot b + c \to (A \cap B) \cup C$.

Příklad 3.2.3. ([11, str. 86]) Zjednodušte zápis těchto množin:

$$(A \cup C) \cap (D \cap G)' \cap (A \cap B)' \cap (D \cup E) \cap (F \cup G) \cap C' \cap (A \cap D)' \cap (D \cap C')$$

Řešení: Tuto množinovou situaci přepíšeme pomocí výše uvedeného návodu a dále upravíme:

$$(a+c) \cdot (d \cdot g)' \cdot (a \cdot b)' \cdot (d+e) \cdot (f+g) \cdot c' \cdot (a \cdot d)' \cdot (d \cdot c)' = (a \cdot c' + c \cdot c') \cdot (d'+g') \cdot (a'+b') \cdot$$
$$\cdot (f+g) \cdot (a'+d') \cdot (d'+c') = a \cdot c' \cdot [(d'+g') \cdot (f+g)] \cdot [(a'+b') \cdot (a'+d')] \cdot [(d+e) \cdot (d'+c')] =$$
$$= a \cdot c' \cdot (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f + g' \cdot g) \cdot (d \cdot d' + d \cdot c' + d' \cdot e + c' \cdot e) \cdot (a' \cdot a' + a' \cdot d' + a' \cdot b' + b' \cdot d') =$$
$$= (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot c' \cdot (c' \cdot d + d' \cdot e + c' \cdot e) \cdot a \cdot ((a' + a' \cdot d') + a' \cdot b' + b' \cdot d') =$$
$$= (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot (c' \cdot c' \cdot d + c' \cdot d' \cdot e + c' \cdot c' \cdot e) \cdot a \cdot ((a' + a' \cdot b') + b' \cdot d') =$$
$$= (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot (c' \cdot d + c' \cdot d' \cdot e + c' \cdot e) \cdot a \cdot (a' + b' \cdot d') = (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot$$
$$\cdot (c' \cdot d + c' \cdot d' \cdot e + c' \cdot e) \cdot (a \cdot a' + a \cdot b' \cdot d') = (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot (c' \cdot d + c' \cdot d' \cdot e + c' \cdot e) \cdot a \cdot b' \cdot d' =$$
$$= (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot (a \cdot b' \cdot c' \cdot d \cdot d' + a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot d' \cdot e + a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e) =$$
$$= (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot (a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e + a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e) = (d' \cdot f + d' \cdot g + g' \cdot f) \cdot a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e =$$
$$= a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot d' \cdot e + a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot d' \cdot e \cdot g + a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e \cdot f \cdot g' = a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e + a \cdot b' \cdot c' \cdot$$
$$\cdot d' \cdot e \cdot g + a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e \cdot f \cdot g' = a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e \cdot (f + g + f \cdot g') = \underline{a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e \cdot (f+g)}$$

Zpětná záměna: $a \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e \cdot (f+g) \to A \cap B' \cap C' \cap D' \cap E \cap (F \cup G)$.

3.2.2. Redukce na výrocích

Příklad 3.2.4. ([11, str. 85]) Určete pravdivostní hodnotu, jíž nabývá následující výroková formule:

$$(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$$

Řešení: Implikaci jako logickou spojku není možné v Booleově algebře zapsat, je proto nejprve nutné přepsat ji užitím vztahu (2.1). Dostaneme tak ekvivalentní výrokovou formuli:

$$(X \wedge Y)' \vee (X \vee Y),$$

kterou už můžeme pomocí známých záměn převést na booleovský výraz:
$(x \cdot y)' + (x + y) = x' + y' + x + y = (x + x') + (y + y') = 1 + 1 = \underline{1}$

Daný výraz je zřejmě při dosazení libovolných pravdivostních hodnot pravdivý a jedná se tedy o tautologii (viz poznámka 3.1.1).

Příklad 3.2.5. ([11, str. 85]) Rozhodněte, zda následující výroková formule je tautologií:

$$((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow Y)$$

Řešení: Nejprve je nutné přepsat implikaci i ekvivalenci pomocí logických spojek užívaných v Booleově algebře (vztah (2.1) a (2.2)). Dostaneme tak ekvivalentní výrokovou formuli:

$$[((X' \vee Z)' \vee Y) \wedge ((X \wedge Z)' \vee Y)] \vee [((X' \vee Z)' \vee Y)' \wedge ((X \wedge Z)' \vee Y)'],$$

kterou už můžeme pomocí známých záměn převést na booleovský výraz:

$$\begin{aligned}
&((x'+z)'+y)\cdot((x\cdot z)'+y)+((x'+z)'+y)'\cdot((x\cdot z)'+y)' = (x\cdot z'+y)\cdot(x'+z'+y)+\\
&+(x\cdot z'+y)'\cdot(x'+z'+y)' = (x\cdot z'+y)\cdot[(x'+z'+y)+(1'\cdot(x'+z'+y)')] =\\
&= (x\cdot z'+y)\cdot[(x'+z'+y)+(0\cdot(x'+z'+y)')] = (x\cdot z'+y)\cdot[(x'+z'+y)+0] =\\
&= x\cdot z'\cdot x'+x\cdot z'\cdot y+x\cdot z'\cdot z'+y\cdot x'+y\cdot y+y\cdot z' = 0+x\cdot z'\cdot y+x\cdot z'+y\cdot x'+(y+y\cdot z') =\\
&= x\cdot z'\cdot(y+1)+(y\cdot x'+y) = x\cdot z'\cdot 1+y = \underline{x\cdot z'+y}
\end{aligned}$$

Formuli nelze redukovat na 1, nejedná o tautologii. (Je zřejmé, že např. pro $y = 1$ je formule pravdivá, ale pro $x = y = 0$ nikoliv.)

Alternativní řešení: Na ukázku uvedeme také řešení pomocí tabulky pravdivostních hodnot. V tomto konkrétním případě se takový postup ukáže jako jednodušší a časově méně náročnější.

X	Y	Z	$((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow Y)$				
1	1	1	1	1	**1**	1	1
1	1	0	0	1	**1**	0	1
1	0	1	1	0	**1**	1	0
1	0	0	0	1	**1**	0	1
0	1	1	1	1	**1**	0	1
0	1	0	1	1	**1**	0	1
0	0	1	1	0	**0**	0	1
0	0	0	1	0	**0**	0	1

Tabulka 3.1: k příkladu 3.2.5

Aby byl daný výraz tautologií musel by tučně zvýrazněný sloupec v tabulce 3.1 být tvořený samými 1 (viz poznámka 3.1.1). Zjevně tomu tak není, tudíž se v případě výrokové formule $((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow Y)$ o tautologii nejedná.

3.3. Slovní úlohy

V této podkapitole uvedeme příklady, se kterými se čtenář mohl setkat například při skládání přijímacích zkoušek na vysoké školy, dále při řešení matematických olympiád, matematických klokanů nebo podobných soutěží, které vyžadují logické myšlení.

Zadání příkladů pochází ze sbírek, na něž je vždy odkázáno na příslušných místech. V těchto sbírkách je řešení provedeno povětšinou tabulkovou metodou nebo příklad není vyřešen vůbec. Booleovské řešení je tedy přínosem této práce.

Vzhledem k tomu, že úlohy jsou formulovány slovně, bude náš postup následující – slovní zadání budeme postupně převádět na výroky, které vhodně propojíme pomocí logických spojek, získáme tak složený výrok (alternativně nějakou množinovou situaci).

Dále provedeme přepis do Booleovy algebry – její prvky (booleovské proměnné) budou reprezentovat jednotlivé výroky a booleovské operace nahradí výrokové spojky. Zadání slovních úloh je často formulováno ve tvaru implikace a ekvivalence, proto zde bude hojně užíváno vztahů (2.1) a (2.2). Booleovský zápis se nato pokusíme co nejvíce zjednodušit. Získané řešení je potom, jako u každé slovní úlohy, potřebné opět formulovat slovně, tedy nakonec symboly znovu převedeme na slovní odpověď.

Příklad 3.3.1. ([8, str. 22]) Pro funkci kontrolora jistého složitého zařízení jsou vyškoleni tři zaměstnanci. Víme, že podmínky jejich přítomnosti na pracovišti vystihují tyto výrokové formule:

$$(A' \vee C') \Rightarrow B \qquad (A \wedge B) \Rightarrow C'$$

Rozhodněte, zda lze za tohoto předpokladu učinit závěry:

a) Neplatí-li A, platí B.

b) Neplatí-li A, platí C.

c) Neplatí-li B, platí C.

Řešení: Převedeme-li implikaci v obou výrokových formulích ze zadání na disjunkci a následně tyto formule spojíme prostřednictvím konjunkce, čímž zajistíme, aby byly platné obě zároveň, získáme:

$$[(A' \vee C')' \vee B] \wedge [(A \wedge B)' \vee C'].$$

V této už provedeme záměny do námi užívané algebry a upravíme aplikováním axiomů a vět z podkapitoly 2.4:

$$[(a'+c')'+b]\cdot[(a\cdot b)'+c'] = [a\cdot c+b]\cdot[a'+b'+c'] = a\cdot a'\cdot c + a\cdot b'\cdot c + a\cdot c\cdot c' +$$
$$+ a'\cdot b + b\cdot b' + b\cdot c' = 0 + a\cdot b'\cdot c + 0 + a'\cdot b + 0 + b\cdot c' = \underline{a\cdot b'\cdot c + b\cdot a' + b\cdot c'}$$

Zpětná záměna: $a\cdot b'\cdot c + b\cdot a' + b\cdot c' \to (A\wedge B'\wedge C)\vee(B\wedge A')\vee(B\wedge C')$. Zjistili jsme tak, že mohou nastat tyto tři situace: Na pracovišti jsou 1) společně přítomni zaměstnanci A a C bez B ($a = 1$, $b = 0$, $c = 1$) nebo 2) je přítomen B a nepřítomen A ($a = 0$, $b = 1$, $c \in \{0, 1\}$) nebo 3) je přítomen B a nepřítomen C ($a \in \{0, 1\}$, $b = 1$, $c = 0$).

V případě implikace nás zajímá, jaký je závěr za platnosti předpokladu. Neplatí-li předpoklad, pak je implikace vždy pravdivá.

a) Neplatí-li A, platí B.

Je-li $a = 0$, tj. případ 2) a jedna z možností 3), pak je nutně $b = 1$.

Závěr platí.

b) Neplatí-li A, platí C.

Je-li $a = 0$, tj. případ 2) a jedna z možností 3), pak může být $c = 0$.

Závěr neplatí.

c) Neplatí-li B, platí C.

Je-li $b = 0$, tj. případ 1), pak je nutně $c = 1$.

Závěr tedy platí.

Příklad 3.3.2. ([12, str. 10]) Při výslechu tří podezřelých z trestného činu se zjistilo toto: Na trestném činu se nemohl podílet nikdo další než A, B a C. C nikdy nepracuje sám. A nikdy nepracuje s C. Je-li A vinen a B nevinen, pak C je vinen.

Vyberte pravdivé tvrzení:

a) A a B spáchali čin spolu.

b) A je vinen

c) C a B jsou vinni, neboť spáchali čin spolu.

d) C je určitě nevinen.

e) B je v každém případě vinen.

Řešení: Výroková formule plynoucí přímo ze zadání je následující:

$$[(C \wedge A) \vee (C \wedge B)] \wedge (A \wedge C)' \wedge ((A \wedge B') \Rightarrow C),$$

vyskytující se implikaci je v ní však nutné nahradit aplikováním vztahu (2.1):

$$[(C \wedge A) \vee (C \wedge B)] \wedge (A \wedge C)' \wedge ((A \wedge B')' \vee C).$$

Nyní již můžeme přistoupit k přepisu na booleovský výraz:

$$(c \cdot a + c \cdot b) \cdot (a \cdot c)' \cdot ((a \cdot b')' + c),$$

který lze dále upravit: $(a \cdot c + b \cdot c) \cdot (a \cdot c)' \cdot (a' + b + c) = (a \cdot c \cdot (a \cdot c)' + b \cdot c \cdot$ $\cdot (a' + c')') \cdot (a' + b + c) = (0 + a' \cdot b \cdot c + b \cdot c \cdot c') \cdot (a' + b + c = a' \cdot b \cdot c \cdot (a' + b + c) =$ $= a' \cdot a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c \cdot c = a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c = a' \cdot b \cdot c$

Zpětná záměna: $a' \cdot b \cdot c \to A' \wedge B \wedge C$. Za stanovených podmínek tedy musel být trestný čin spáchán podezřelými B a C, přičemž A je nevinný. Pravdivá jsou tedy zřejmě právě tvrzení c) a e).

Příklad 3.3.3. ([8, str. 30]) Některý z žáků A, B, C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A. Lze určit pachatele jednoznačně v případě, že byl právě jeden?

Řešení: Utvořme tedy podle zadání jednoduché výroky, které následně propojíme do výroku složeného pomocí konjunkce, čímž dosáhneme toho, že bude zajištěna platnost všech výroků zároveň. Získáme výrokovou formuli:

$$(A' \vee B') \wedge (B' \Rightarrow A') \wedge (C \Leftrightarrow A')$$

(podmínku, že pachatel byl právě jeden, zatím nebudeme uvažovat, vrátíme se k ní až při vyhodnocování výsledků).

Formuli je třeba ještě upravit tak, aby obsahovala pouze nám vyhovující logické spojky:

$$(A' \vee B') \wedge ((B')' \vee A') \wedge ((C \wedge A') \vee (C' \wedge A)).$$

Nyní už můžeme přejít k booleovským výpočtům:

$(a' + b') \cdot ((b')' + a') \cdot (c \cdot a' + c' \cdot a) = (a' + b') \cdot (b + a') \cdot (c \cdot a' + c' \cdot a) =$ $= (a' \cdot b + a' \cdot a' + b \cdot b' + a' \cdot b') \cdot (a' \cdot c + a \cdot c') = ((a' \cdot b + a') + a' \cdot b') \cdot (a' \cdot c + a \cdot c') =$ $= (a' + a' \cdot b') \cdot (a' \cdot c + a \cdot c') = a' \cdot (a' \cdot c + a \cdot c') = a' \cdot a' \cdot c + a' \cdot a \cdot c' = a' \cdot c + 0 = \underline{a' \cdot c}$

Booleovský výsledek můžeme přepsat zpět na výrok $A' \wedge C$, který nejde proti podmínce jediného viníka. Okno musel rozbít žák C, protože nikdo jiný u okna nebyl.

Příklad 3.3.4. ([11, str. 87]) Třída II. b jistého gymnasia se chystá na výlet. Je předběžně dohodnuto, že navštíví některá z pěti výletních míst, která zde pro stručnost označíme A, B, C, D, E. Později byly podány ještě tyto upřesňující návrhy: Navštívit zároveň A i B nebo se podívat do C i D. Vynechat návštěvu C. Nenavštěvovat současně C a D. Vynechat aspoň jedno z míst E, A nebo nenavštěvovat zároveň B a E. Která výletní místa z uvedených pěti třída navštíví, předpokládáme-li, že všechny návrhy „prošly“ a jiné podány nebyly?

Řešení: Utvořme tedy dle zadání jednoduché výroky. Platnost všech výroků zároveň zajistíme tak, že je všechny propojíme logickou spojkou – konjunkcí. Celkový složený výrok bude ve tvaru:

$$[(A \wedge B) \vee (C \wedge D)] \wedge C' \wedge (C \wedge D)' \wedge [(A \wedge E)' \vee (B \wedge E)'].$$

A ten bude v Booleově algebře vypadat takto:

$$(a \cdot b + c \cdot d) \cdot c' \cdot (c \cdot d)' \cdot [(a \cdot e)' + (b \cdot e)'] = (a \cdot b \cdot c' + c \cdot c' \cdot d) \cdot (c' + d') \cdot (a' + e' + b' + e') =$$
$$= (a \cdot b \cdot c' + 0 \cdot d) \cdot (c' + d') \cdot (a' + b' + e') = (a \cdot b \cdot c' \cdot c' + a \cdot b \cdot c' \cdot d') \cdot (a' + b' + e') =$$
$$= a \cdot b \cdot c' \cdot c' \cdot a' + a \cdot b \cdot c' \cdot c' \cdot b' + a \cdot b \cdot c' \cdot c' \cdot e' + a \cdot b \cdot c' \cdot d' \cdot a' + a \cdot b \cdot c' \cdot d' \cdot b' + a \cdot b \cdot c' \cdot d' \cdot e' =$$
$$= 0 + 0 + a \cdot b \cdot c' \cdot e' + 0 + 0 + a \cdot b \cdot c' \cdot d' \cdot e' = a \cdot b \cdot c' \cdot e' \cdot (1 + d') = a \cdot b \cdot c' \cdot e' \cdot 1 = \underline{a \cdot b \cdot c' \cdot e'}$$

K výsledku přísluší výrok $A \wedge B \wedge C' \wedge E'$, který interpretujeme tak, že třída II. b se podívá pouze na místa A a B.

Příklad 3.3.5. ([8, str. 24]) Účast tří dcer na úklidu domácnosti lze vystihnout těmito formulemi:

$$(A' \wedge B) \Rightarrow C', \quad (A \vee B') \Rightarrow C, \quad (C \Rightarrow A) \Rightarrow B.$$

Rozhodněte, zda jsou za těchto předpokladů správné otcovy úsudky:

a) Jestliže A neplatí a B neplatí, pak C neplatí.

b) Jestliže A neplatí, pak B neplatí.

c) Jestliže B neplatí, pak A neplatí.

Řešení: Ve formulích převedeme implikaci a propojíme je užitím konjunkce:

$$[(A' \wedge B)' \vee C'] \wedge [(A \vee B')' \vee C] \wedge [(C' \vee A)' \vee B].$$

Provedeme záměny a upravíme:

$$[(a' \cdot b)' + c'] \cdot [(a + b')' + c] \cdot [(c' + a)' + b] = (a + b' + c') \cdot (a' \cdot b + c) \cdot (a' \cdot c + b) =$$
$$= (0 + a \cdot c + 0 + b' \cdot c + a' \cdot b \cdot c' + 0) \cdot (a' \cdot c + b) = 0 + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b' \cdot c + 0 + 0 + a' \cdot b \cdot c' =$$
$$= \underline{a \cdot b \cdot c + a' \cdot b' \cdot c + a' \cdot b \cdot c'}$$

Úklidu se tedy účastní buď všechny dcery ($A \wedge B \wedge C$) nebo uklízí pouze dcera C ($A' \wedge B' \wedge C$) anebo pouze dcera B ($A' \wedge B \wedge C'$). Z toho vychází, že pouze úsudek c) je správný.

Příklad 3.3.6. ([8, str. 25]) Jistý zaměstnanec si chce vybrat dovolenou co nejvýhodněji, případně i po částech v různých ročních obdobích. Možnosti zahraničních zájezdů, termíny manželčiny dovolené, nutné sezónní práce na zahrádce atd. lze vyjádřit výrokovými formulemi:

$$(A' \wedge B') \Rightarrow D', \quad (A \vee C) \Rightarrow B', \quad (A' \vee D') \Rightarrow (B \wedge C)', \quad (A' \wedge B' \wedge C' \wedge D')'$$

Rozhodněte, zda jeho spolupracovník, který zná tyto podmínky, usuzuje správně, říká-li:

a) Platí A nebo C.

b) Jestliže B neplatí, pak platí C.

c) Jestliže platí C, neplatí D.

d) A platí právě tehdy, když D platí.

e) Jestliže neplatí B, pak platí A nebo platí C.

Řešení: Ve formulích převedeme implikaci a propojíme je užitím konjunkce:

$$[(A' \wedge B')' \vee D'] \wedge [(A \vee C)' \vee B'] \wedge [(A' \vee D')' \vee (B \wedge C)'] \wedge (A' \wedge B' \wedge C' \wedge D')'.$$

Provedeme záměny a upravíme:

$$[(a' \cdot b')' + d'] \cdot [(a + c)' + b'] \cdot [(a' + d')' + (b \cdot c)'] \cdot (a' \cdot b' \cdot c' \cdot d')' = (a + b + d') \cdot (a' \cdot c' + b') \cdot$$
$$\cdot (a \cdot d + b' + c') \cdot (a + b + c + d) = (a + b + d') \cdot (a + b + c + d) \cdot (a' \cdot c' + b') \cdot (a \cdot d + b' + c') =$$
$$= (a + a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot b + b + b \cdot c + b \cdot d + a \cdot d' + b \cdot d' + c \cdot d' + 0) \cdot$$
$$\cdot (0 + a' \cdot b' \cdot c' + a' \cdot c' + a \cdot b' \cdot d + b' + b' \cdot c') = (a + b + c \cdot d') \cdot (a' \cdot c' + b') =$$
$$= 0 + a \cdot b' + a' \cdot b \cdot c' + 0 + 0 + b' \cdot c \cdot d' = \underline{a \cdot b' + a' \cdot b \cdot c' + b' \cdot c \cdot d'}$$

Interpretace výsledku nám dává několik možností, jak si vybrat dovolenou. Zaměstnanec se může rozhodnout buď pouze pro dovolenou A ($A \wedge B'$) nebo pouze pro B ($A' \wedge B \wedge C'$) nebo pouze pro C ($B' \wedge C \wedge D'$). Porovnáme-li to se spolupracovníkovými úsudky, zjistíme, že pravdivé jsou výroky c) a e).

Příklad 3.3.7. ([8, str. 33]) Rozhodněte, kteří žáci ze čtveřice A, B, C, D pojedou na výlet, mají-li být dodrženy tyto zásady: Pojede aspoň jeden z dvojice B, D, nejvýše jeden z dvojice A, C, aspoň jeden z dvojice A, D a nejvýše jeden z dvojice B, C. Dále je jisto, že B nepojede bez A a že C pojede, pojede-li D.

Řešení: Jak už jsme zvyklí převedeme věty na symboly. Tvrzením „aspoň jeden z dvojice B, D“ rozumějme, že může jet buď jeden, nebo druhý, ale také oba zároveň. Je tedy příhodné užití disjunkce $B \vee D$. Situaci, kdy pojede „nejvýše jeden z dvojice A, C“, tedy buď jeden nebo[1] druhý, vyjádříme poněkud složitěji jako: $(A \wedge C') \vee (A' \wedge C)$. Celková výroková formule se zohledněním všech podmínek vypadá takto:

$$(B \vee D) \wedge [(A \wedge C') \vee (A' \wedge C)] \wedge (A \vee D) \wedge [(B' \wedge C) \vee (B \wedge C')] \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (D \Rightarrow C),$$

respektive:

$$(B \vee D) \wedge [(A \wedge C') \vee (A' \wedge C)] \wedge (A \vee D) \wedge [(B' \wedge C) \vee (B \wedge C')] \wedge (A' \vee B) \wedge (D' \vee C)$$

a po záměnách:

$$\begin{aligned}
&(b+d) \cdot (a \cdot c' + a' \cdot c) \cdot (a+d) \cdot (b' \cdot c + b \cdot c') \cdot (a'+b) \cdot (d'+c) = (b+d) \cdot (d'+c) \cdot (a+d) \cdot \\
&\cdot (a'+b) \cdot (a \cdot c' + a' \cdot c) \cdot (b' \cdot c + b \cdot c') = (b \cdot d' + b \cdot c + c \cdot d) \cdot (a \cdot b + a' \cdot d + b \cdot d) \cdot (a \cdot b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c) = \\
&= (a \cdot b \cdot d' + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot c \cdot d + a' \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot d) \cdot (a \cdot b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c) = \\
&= \underline{a \cdot b \cdot c' \cdot d' + a' \cdot b' \cdot c \cdot d}
\end{aligned}$$

Zpětná záměna: $a \cdot b \cdot c' \cdot d' + a' \cdot b' \cdot c \cdot d \to (A \wedge B \wedge C' \wedge D') \vee (A' \wedge B' \wedge C \wedge D)$. Řešením jsou tak dvě možnosti – výletu se zúčastní buď pouze dvojice A, B nebo pouze dvojice C, D.

[1] Zde je spojka nebo ve vylučovacím smyslu!

Příklad 3.3.8. ([8, str. 28]) Účast Anny, Barbory, Cyrila a Dušana na koncertě je vázána těmito podmínkami: Přijde aspoň jeden chlapec, nejvýše jedna dívka a právě jeden ze sourozenců Anna, Cyril. Barbora nepřijde bez Dušana, přitom je však vyloučeno, aby přišla Anna spolu s Dušanem. Které skupiny z této čtveřice se mohou zůčastnit a kdo na koncert určitě půjde?

Řešení: Zaveďme výroky A, resp. B, resp. C, resp. D ve znění „Anna, resp. Barbora, resp. Cyril, resp. Dušan půjde na koncert“. Za tohoto značení dostaneme podle zadání výrokovou formuli:

$$(C \vee D) \wedge (A' \vee B') \wedge [(A \wedge C') \vee (A' \wedge C)] \wedge (B' \vee D) \wedge (A' \wedge D'),$$

Provedeme záměny a upravíme:

$$(c+d)\cdot(a'+b')\cdot(a\cdot c'+a'\cdot c)\cdot(b'+d)\cdot(a'+d') = (c+d)\cdot(b'+d)\cdot(a'+b')\cdot$$
$$\cdot(a\cdot c'+a'\cdot c)\cdot(a'+d') = (b'\cdot c+b'\cdot d+c\cdot d+d)\cdot(a'+b')\cdot(0+a'\cdot c+a\cdot c'\cdot d'+a'\cdot c\cdot d') =$$
$$= (b'\cdot c+d)\cdot(a'+b')\cdot(a'\cdot c+a\cdot c'\cdot d') = (b'\cdot c+d)\cdot(a'\cdot c+0+a'\cdot b'\cdot c+a\cdot b'\cdot c'\cdot d') =$$
$$= (b'\cdot c+d)\cdot(a'\cdot c+a\cdot b'\cdot c'\cdot d') = a'\cdot b'\cdot c+0+a'\cdot c\cdot d+0 = \underline{a'\cdot b'\cdot c+a'\cdot c\cdot d}$$

Převedením booleovských prvků zpět do výrokové logiky dostaneme dvě možnosti: $A' \wedge B' \wedge C$ a $A' \wedge C \wedge D$. V obou variantách se vyskytuje A' a C, tzn., že Anna na koncert určitě nepůjde, naopak Cyril určitě ano. Koncertu se buď zúčastní samotný Cyril nebo ho tam doprovodí Dušan.

Příklad 3.3.9. ([8, str. 30]) I do města Kocourkova pronikl v poslední době turistický ruch. Městská rada projednávala, jak co nejvíce zvýšit příliv turistů. Byly předloženy tyto návrhy: vybudovat na náměstí kašnu, postavit pomník zakladateli města, vystavět vyhlídkovou věž. Městská pokladna však není příliš plná, a tak se radní dohodli realizovat nejvýše dva z předložených návrhů. V diskusi vystoupili tři radní:

První radní: „Jsem pro jakékoliv řešení, nebudu souhlasit jenom s rozhodnutím stavět pomník a nestavět vyhlídkovou věž.“

Druhý radní: „Budu protestovat jenom tehdy, kdybychom v našem městě stavěli kašnu a nepostavili pomník.“

Třetí radní: „Mně by nevyhovovalo jedině to řešení, kdyby v našem městě stála vyhlídková věž a chyběla kašna.“

Městská rada usoudila, že všem třem radním je třeba vyhovět. Co asi v Kocourkově postaví?

Řešení: Nechť nyní písmena K, resp. P, resp. V reprezentují postupně jednotlivé návrhy městské rady „vystavět kašnu“, resp. „pomník“, resp. „věž“. V souladu s tímto značením vyjádříme přání prvního radního užitím výrokové logiky jako: $(P \Rightarrow V')'$, druhý radní se pak vyslovil takto: $(K \Rightarrow P')'$ a třetí by měl problém pouze v případě, kdyby $(V \Rightarrow K')'$. Abychom vyšli vstříc všem třem radním zároveň, musíme se zbavit všech implikací a vytvořit tak následující formuli:

$$(P' \vee V')' \wedge (K' \vee P')' \wedge (V' \vee K')',$$

zapsanou booleovsky:

$$(p' + v')' \cdot (k' + p')' \cdot (v' + k')' = (p \cdot v) \cdot (k \cdot p) \cdot (v \cdot k) = k \cdot k \cdot p \cdot p \cdot v \cdot v = k \cdot p \cdot v$$

Způsob, jak vyhovět všem radním zároveň, by tak byla realizace všech návrhů současně. Doposud jsme ovšem nezohlednili fakt, že „tamní radní se nějakým zázrakem jednou také na něčem dohodli, a to na realizaci nejvýše dvou z předložených návrhů“. Což jinými slovy znamená nepovolit všechny tři stavby zároveň, tedy $(K \wedge P \wedge V)' \rightarrow (k \cdot p \cdot v)'$, přidáním této podmínky k předchozímu výsledku, dostaneme: $(k \cdot p \cdot v) \cdot (k \cdot p \cdot v)'$, což je užitím axiomu (10) rovno $\underline{0}$.

Za stanovených podmínek tedy není možné realizovat ani jednu stavbu.

Příklad 3.3.10. ([11, str. 70]) Z města H do města K povede trať nové dálkové autobusové linky. Komise odborníků rozhoduje, ve kterých z měst A, B, C, D, která leží na této trati, má být zřízena zastávka. Byly podány tyto návrhy:

1. člen komise: „Není vhodné zřizovat zastávku v obou z měst B a C, ale je nutné, aby autobus stavěl v B nebo v D.“

2. člen komise: „Autobusová zastávka by měla být určitě v C nebo v B; jsem dále proti tomu, aby byla současně v městech A a C.“

3. člen komise: „Není možné, aby byla zastávka zřízena v B a nebyla zřízena v A. Jsem také proti tomu, aby autobus stavěl ve všech třech městech B, C a D.“

Ve kterých z měst A, B, C, D byly zbudovány zastávky této autobusové linky, víme-li, že všechny návrhy byly respektovány a žádný další návrh už potom nebyl podán?

Řešení: Označme postupně písmeny A, …, D výroky „Autobus staví ve městě A, …, D.“ Slova 1. člena komise potom přepíšeme jako $(B \wedge C)' \wedge (B \vee D)$, tvrzení 2. člena bude následující – $(C \vee B) \wedge (A \wedge C)'$ a 3. člen v řeči symbolů tvrdí $(B \wedge A') \wedge (B \wedge C \wedge D)'$. A protože ze zadaní plyne, že musí platit návrhy všech členů komise zároveň dospějeme k:

$$[(B \wedge C)' \wedge (B \vee D)] \wedge [(C \vee B) \wedge (A \wedge \ \wedge C)'] \wedge [(B \wedge A') \wedge (B \wedge C \wedge D)'],$$

což booleovsky přepíšeme a dále upravíme:

$$\begin{aligned}
&(b\cdot c)'\cdot(b+d)\cdot(c+b)\cdot(a\cdot c)'\cdot(b\cdot a')\cdot(b\cdot c\cdot d)' = (b\cdot c)'\cdot((b\cdot c)'+d')\cdot(b\cdot b+b\cdot c+b\cdot d+\\
&+ c\cdot d)\cdot(a'+c')\cdot(b'+a) = (b\cdot c)'\cdot((b+b\cdot c)+b\cdot d+c\cdot d)\cdot(a'\cdot b'+a'\cdot a+b'\cdot c'+a\cdot c') =\\
&= (b'+c')\cdot((b+b\cdot d)+c\cdot d)\cdot(a'\cdot b'+b'\cdot c'+a\cdot c') = (b'+c')\cdot(b+c\cdot d)\cdot(a'\cdot b'+b'\cdot c'+a\cdot c') =\\
&= (b'\cdot b+b'\cdot c\cdot d+b\cdot c'+c\cdot c'\cdot d)\cdot(a'\cdot b'+b'\cdot c'+a\cdot c') = (b'\cdot c\cdot d+b\cdot c')\cdot(a'\cdot b'+b'\cdot c'+a\cdot c') =\\
&= a'\cdot b'\cdot b'\cdot c\cdot d+b'\cdot b'\cdot c\cdot c'\cdot d+a\cdot b'\cdot c\cdot c'\cdot d+a'\cdot b\cdot b'\cdot c'+b\cdot b'\cdot c'\cdot c'+a\cdot b\cdot c'\cdot c' =\\
&= \underline{a'\cdot b'\cdot c\cdot d+a\cdot b\cdot c'}
\end{aligned}$$

Výsledek přepíšeme zpět na složený výrok: $(A' \wedge B' \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C')$. Vidíme tedy, že řešením jsou dvě možnosti – buď budou zastávky zřízeny pouze ve městech C a D nebo pouze ve městech A a B.

Příklad 3.3.11. ([8, str. 15, 22]) Katka si vybírá oblečení a módní doplňky, z osmi nabízených předmětů A, B, C, …, G si zamýšlí vybrat nejvýše čtyři. Její vlastní myšlenky, rady matky a rady prodavaček lze vyjádřit těmito výroky:

1) Vezme-li si Katka A, vezme si nutně E a G.

2) Nevezme-li si A, vezme si B.

3) C si vezme právě tehdy, když vezme D.

4) Vezme si F nebo G.

5) Vezme-li B a nevezme C, pak nevezme E a vezme F.

6) B a G si vezme právě tehdy, když si vezme C nebo F.

Nakonec si Katka odnáší jen předměty A, B. Které rady respektovala a které ne? Zjistěte, zda Katka mohla vyhovět všem radám vyjádřeným v textu úlohy. Kolika způsoby toho mohla dosáhnout ještě poté, kdy se rozhodla pro koupi předmětů A, B?

Řešení: Dle zadání zkonstruujeme složený výrok:

$$[A \Rightarrow (E \wedge G)] \wedge (A' \Rightarrow B) \wedge (C \Leftrightarrow D) \wedge (F \vee G) \wedge [(B \wedge C') \Rightarrow \\ \Rightarrow \; (E' \wedge F)] \wedge [(B \wedge G) \Leftrightarrow (C \vee F)],$$

který musíme pro další výpočty přepsat do tvaru:

$$[A' \vee (E \wedge G)] \wedge [(A')' \vee B] \wedge [(C \wedge D) \vee (C' \wedge D')] \wedge (F \vee G) \wedge [(B \wedge C')' \vee \\ \vee \; (E' \wedge F)] \wedge \{[(B \wedge G) \wedge (C \vee F)] \vee [(B \wedge G)' \wedge (C \vee F)']\}$$

Nyní již konečně můžeme přikročit ke známým záměnám a dále upravit:

$(a'+e\cdot g)\cdot[(a')'+b]\cdot(c\cdot d+c'\cdot d')\cdot(f+g)\cdot[(b\cdot c')'+e'\cdot f]\cdot[b\cdot g\cdot(c+f)+(b\cdot g)'\cdot(c+f)'] =$
$= (a'+e\cdot g)\cdot(a+b)\cdot(c\cdot d+c'\cdot d')\cdot(f+g)\cdot(b'+c+e'\cdot f)\cdot[b\cdot c\cdot g+b\cdot f\cdot g+(b'+g')\cdot(c'\cdot f')] =$
$= (0+a'\cdot b+a\cdot e\cdot g+b\cdot e\cdot g)\cdot(f+g)\cdot(b'\cdot c\cdot d+c\cdot d+c\cdot d\cdot e'\cdot f+b'\cdot c'\cdot d'+0+c'\cdot d'\cdot$
$\cdot\, e'\cdot f)\cdot(b\cdot c\cdot g+b\cdot f\cdot g+b'\cdot c'\cdot f'+c'\cdot f'\cdot g') = (a'\cdot b\cdot f+a\cdot e\cdot f\cdot g+b\cdot e\cdot f\cdot g+a'\cdot b\cdot$
$\cdot\, g+a\cdot e\cdot g+b\cdot e\cdot g)\cdot(c\cdot d+b'\cdot c'\cdot d'+c'\cdot d'\cdot e'\cdot f)\cdot(b\cdot c\cdot g+b\cdot f\cdot g+b'\cdot c'\cdot f'+c'\cdot f'\cdot g') =$
$= (a'\cdot b\cdot f+a'\cdot b\cdot g+a\cdot e\cdot g+b\cdot e\cdot g)\cdot(b\cdot c\cdot d\cdot g+0+0+b\cdot c\cdot d\cdot f\cdot g+0+b\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f\cdot$
$\cdot\, g+0+b'\cdot c'\cdot d'\cdot f'+b'\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f+0+b'\cdot c'\cdot d'\cdot f'\cdot g'+0) = (a'\cdot b\cdot f+a'\cdot b\cdot g+a\cdot e\cdot$
$\cdot\, g+b\cdot e\cdot g)\cdot(b\cdot c\cdot d\cdot g+b\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f\cdot g+b'\cdot c'\cdot d'\cdot f'+b'\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f+b'\cdot c'\cdot d'\cdot f'\cdot g') =$
$= a'\cdot b\cdot c\cdot d\cdot f\cdot g+a'\cdot b\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f\cdot g+0+0+0+a'\cdot b\cdot c\cdot d\cdot g+a'\cdot b\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f\cdot g+0+0+$
$+\, 0+a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot g+0+a\cdot b'\cdot c'\cdot d'\cdot e\cdot f'\cdot g+0+0+b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot g+0+0+0+0 = a'\cdot b\cdot c\cdot d\cdot f\cdot$
$\cdot\, g+a'\cdot b\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f\cdot g+a'\cdot b\cdot c\cdot d\cdot g+a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot g+a\cdot b'\cdot c'\cdot d'\cdot e\cdot f'\cdot g+b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot g = \ldots$
(aplikováním podmínky, že Katka zamýšlí vybrat si nejvýše čtyři předměty, nám některé sčítance vypadnou (ty, ve kterých je alespoň pět proměnných bez negace) a konečný výsledek potom vypadá takto:)

$$\ldots = \underline{a'\cdot b\cdot c'\cdot d'\cdot e'\cdot f\cdot g+a'\cdot b\cdot c\cdot d\cdot g+a\cdot b'\cdot c'\cdot d'\cdot e\cdot f'\cdot g}$$

Ze zbylých tří sčítanců vybereme ty proměnné, které nejsou negovány, a po záměně tak dostaneme tři možné varianty předmětů splňující všechny rady ze zadání: $(B \wedge F \wedge G), (B \wedge C \wedge D \wedge G)$ nebo $(A \wedge E \wedge G)$.

Přitom ovšem víme, že dívka si nakonec odnesla pouze předměty A a B. Porovnáme-li to se zadanými výroky, dospějeme k závěru, že dívka respektovala pouze výroky 2), 3) a 6), tedy že výroky 2), 3), 6) ze zadání jsou pravdivé, jsou v souladu s naším řešením.

Příklad 3.3.12. ([8, str. 35]) Detektiv Babočka se svými muži už dlouho sleduje podvodníka, který vyhledává své oběti v šesti kavárnách města, jež jsou v zájmu utajení označeny písmeny A, B, C, D, E, F. Babočka z dlouhých pozorování ví, že podvodník navštíví v témž dni vždy kavárnu A nebo C, dále kavárnu B nebo F a také nikdy nevynechá kavárnu D nebo E. Nikdy však v témž dni nenavštíví současně kavárny D a B, také vždy vynechá návštěvu alespoň jedné z kaváren C, F. Dnes ho chce Babočka dopadnout při činu. Od svých mužů, kteří hlídají vchody všech šesti kaváren, dostal hlášení, že podvodník už navštívil kavárny A, E a F. Babočka se najisto rozjíždí do kavárny B. Míří tam podvodník také? (Předpokládejte, že podvodník neporuší pravidelnost „obchůzek“.)

Řešení: Označme postupně písmeny $A, \ldots, F$ výroky „Podvodník navštíví kavárnu A, …, F.“ Na základě tohoto značení přepíšeme zadání do složeného výroku:

$$(A \vee C) \wedge (B \vee F) \wedge (D \vee E) \wedge (D \wedge B)' \wedge (C \wedge F)',$$

který přepíšeme jako prvek Booleovy algebry a dále upravíme:

$$(a+c)\cdot(b+f)\cdot(d+e)\cdot(d\cdot b)'\cdot(c\cdot f)' = (a+c)\cdot(b+f)\cdot(c'+f')\cdot(d+e)\cdot(d'+b') =$$
$$= (a+c)\cdot(b\cdot c' + b\cdot f' + c'\cdot f + 0)\cdot(0 + b'\cdot d + d'\cdot e + b'\cdot e) = (a+c)\cdot(0 +$$
$$+ b\cdot c'\cdot d'\cdot e + 0 + 0 + b\cdot d'\cdot e\cdot f' + 0 + b'\cdot c'\cdot d\cdot f + c'\cdot d'\cdot e\cdot f + b'\cdot c'\cdot e\cdot f) =$$
$$= a\cdot b\cdot c'\cdot d'\cdot e + a\cdot b\cdot d'\cdot e\cdot f' + a\cdot b'\cdot c'\cdot d\cdot f + a\cdot c'\cdot d'\cdot e\cdot f + a\cdot b'\cdot c'\cdot e\cdot f + 0 + b\cdot c\cdot d'\cdot e\cdot f' + 0 + 0 +$$
$$+ 0 = \underline{a\cdot b\cdot c'\cdot d'\cdot e + a\cdot b\cdot d'\cdot e\cdot f' + a\cdot b'\cdot c'\cdot d\cdot f + a\cdot c'\cdot d'\cdot e\cdot f + a\cdot b'\cdot c'\cdot}$$
$$\underline{\cdot\, e\cdot f + b\cdot c\cdot d'\cdot e\cdot f'}$$

Nyní jsme nalezli 6 možností, jak se podvodník může každý den potenciálně zachovat při dodržení svých dosavadních zvyků. Víme, že už dnes navštívil kavárny

A, E a F. Pravdivostní hodnota výroků A, E i F je tedy rovna 1. Pokud při našem značení platí, že $\mathrm{ph}(A) = \mathrm{ph}(E) = \mathrm{ph}(F) = 1$, pak i $a = e = f = 1$. Dosaďme tyto hodnoty na příslušná místa:

1) $a \cdot b \cdot c' \cdot d' \cdot e = 1 \cdot b \cdot c' \cdot d' \cdot 1 = \underline{b \cdot c' \cdot d'}$

2) $a \cdot b \cdot d' \cdot e \cdot f' = 1 \cdot b \cdot d' \cdot 1 \cdot 1' = b \cdot d' \cdot 0 = 0$

3) $a \cdot b' \cdot c' \cdot d \cdot f = 1 \cdot b' \cdot c' \cdot d \cdot 1 = \underline{b' \cdot c' \cdot d}$

4) $a \cdot c' \cdot d' \cdot e \cdot f = 1 \cdot c' \cdot d' \cdot 1 \cdot 1 = \underline{c' \cdot d'}$

5) $a \cdot b' \cdot c' \cdot e \cdot f = 1 \cdot b' \cdot c' \cdot 1 \cdot 1 = \underline{b' \cdot c'}$

6) $b \cdot c \cdot d' \cdot e \cdot f' = b \cdot c \cdot d' \cdot 1 \cdot 1' = b \cdot c \cdot d' \cdot 0 = 0$

Možnosti 2) a 6) úplně vypadly, ostatní se zjednodušili. Možnost 1), varianta, pro kterou se rozhodl Babočka, připouští, že podvodník se vydá do kavárny B. Možnost 3) ovšem nabízí také situaci, kdy by se podvodník objevil v kavárně D a zbylé dvě alternativy dokonce uvádí možnost, že podvodník dnes už nemusí na žádném sledovaném místě být spatřen.

Alternativní řešení: Předchozí a poměrně dlouhý postup lze podstatně zjednodušit. Ze zadání víme, že podvodník již navštívil kavárny A, E, F, nic nám tedy nebrání zohlednit toto hned na začátku v nezjednodušeném booleovském výrazu

$$(a + c) \cdot (b + f) \cdot (d + e) \cdot (d \cdot b)' \cdot (c \cdot f)'.$$

Pro $a = 1$, $e = 1$, $f = 1$ dostaneme:
$(1 + c) \cdot (b + 1) \cdot (d + 1) \cdot (d \cdot b)' \cdot (c \cdot 1)' = = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (d \cdot b)' \cdot (c)' = (d \cdot b)' \cdot c' = (d' + b') \cdot c' = \underline{c' \cdot d' + b' \cdot c'}$

Tyto možnosti jsou totožné s 4) a 5) v předcházejícím způsobu řešení. I když nám alternativní způsob řešení nedává oproti předchozímu celkovou představu o všech možných variantách průběhu podvodníkova dne, poskytuje nám i přesto dostatek informací pro uspokojivou odpověď na otázku ze zadání „Míří podvodník do kavárny B stejně jako Babočka?“.

Druhé alternativní řešení: Dalším možným zjednodušeným přístupem je vyřešení příkladu pomocí logického sčítání a logického násobení.

Celkový booleovský výraz

$$(a+c)\cdot(b+f)\cdot(d+e)\cdot(d\cdot b)'\cdot(c\cdot f)'$$

rozdělíme na jednotlivé závorky. Přitom ze zadání víme, že dle Babočkových pozorování jsou všechny tyto jednotlivé podvýroky pravdivé, a současně platí: $\underline{a=1, e=1, f=1}$, tedy:

1) $(1+c)=1$

2) $(b+1)=1$

3) $(d+1)=1$

4) $(d\cdot b)'=1$

5) $(c\cdot 1)'=1 \quad \rightarrow \quad (c)'=1 \quad \rightarrow \quad \underline{c=0}$

Pro řešení rovnice 5) je přitom splněna i rovnost 1). Dále vyjděme z toho, že Babočka říká: „$b=1$“. Potom:

2) $(1+1)=1 \quad \rightarrow \quad 1=1$

3) $(d+1)=1 \quad \rightarrow \quad 1=1$ … užitím věty 2.4.2

4) $(d\cdot 1)'=1 \quad \rightarrow \quad (d)'=1 \quad \rightarrow \quad \underline{d=0}$

Nyní připusťme, že se Babočka mýlí, tj. $b=0$:

2) $(0+1)=1 \quad \rightarrow \quad 1=1$

3) $(d+1)=1 \quad \rightarrow \quad \underline{d=0}$ nebo $\underline{d=1}$

4) $(d\cdot 0)'=1 \quad \rightarrow \quad (0)'=1 \quad \rightarrow \quad 1=1$ … užitím věty 2.4.2

Tak jako předcházející způsoby řešení i toto vylučuje, že by pachatel ještě dnes navštívil kavárnu C. Z našeho posledního způsobu řešení dále vidíme tři možné varianty, jak se pachatel může zachovat – pokud $b=1$, pak $d=0$, případně pokud $b=0$, pak buď $d=0$ nebo $d=1$. Z toho plyne, že Babočka má pouze třetinovou šanci na dopadení pachatele.

Příklad 3.3.13. ([8, str. 34]) Jsme o přestávce před první hodinou matematiky v jedné třídě 1. ročníku jistého gymnázia. Dívky tipují. jak asi bude vypadat jejich profesor matematiky, který je podle předběžných zpráv mladý a hezký.

Věra: „Myslím, že bude vysoký a štíhlý nebo bude brýlatý a světlovlasý.“

Jarmila: „Nebude brýlatý. Navíc si myslím, že nebude současně světlovlasý a černooký.“

Jiřina: „Bude černoooký a štíhlý nebo bude vysoký a černooký.“

Profesor odpovídal tipu Věry a Jarmily, Jiřina však neuhodla. Jaký byl jeho vzhled?

Řešení: Písmenem „v“ označíme prvek odpovídající tipu, že profesor bude „vysoký“. Obdobně prvek „s“, resp. „b“, resp. „t“, resp. „c“ symbolizuje, že bude „štíhlý“ resp. „brýlatý“, resp. „světlovlasý“, resp. „černooký“. Tipy dívek potom můžeme zapsat jako:

Věra: $v \cdot s + b \cdot t$

Jarmila: $b' \cdot (t \cdot c)'$

Jiřina: $c \cdot s + v \cdot c.$

Dále víme, že tvrzení Věry a Jarmily se ukázala jako pravdivá, naopak Jiřina se mýlila. To znamená:

Věra: $v \cdot s + b \cdot t = 1$

Jarmila: $b' \cdot (t \cdot c)' = 1$

Jiřina: $c \cdot s + v \cdot c = 0$

Nejprve upravme Jarmilinu podmínku:

$$b' \cdot (t \cdot c)' = b' \cdot (t' + c') = 1$$

Aby byl výraz na levé straně roven 1, musí být nutně $b' = 1$, tzn. $\underline{b = 0}$.

Dosaďme nyní $b = 0$ do podmínky Věřiny:

$$v \cdot s + 0 \cdot t = v \cdot s = 1$$

Musí tedy platit $\underline{v = 1}$ a zároveň $\underline{s = 1}$.

Dosazením těchto dvou hodnot do Jiřininy podmínky získáme hodnotu c:

$$c \cdot 1 + 1 \cdot c = 0$$

Pro splnění rovnosti je nezbytné, aby $\underline{c = 0}$.

Zbývá ještě určit hodnotu proměnné t, vystupující ve Věřině a Jarmilině podmínce. Po dosazení již známých hodnot do těchto podmínek, dostaneme:

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot t = 1$$

$$1 \cdot (t \cdot 0)' = 1$$

Obě rovnosti jsou zřejmě splněny pro $\underline{t = 1}$ i $\underline{t = 0}$.

Závěr je následující: Profesor není brýlatý, je vysoký a štíhlý, také určitě není černooký. Pouze o tom, zda je světlovlasý, nejsme schopni ze zadání rozhodnout.

Příklad 3.3.14. ([8, str. 73]) Ředitel závodu chce svolat v dalším týdnu poradu vedoucích pracovníků. Dotázal se svých náměstků A, B, C na jejich časové možnosti. Náměstek A bude mimo závod ve čtvrtek, pátek a v sobotu. Náměstku B nevyhovuje jen středa a pondělí. Ředitel si přál, aby se porady zúčastnil náměstek B a aspoň jeden z náměstků A, C. V tom případě měl pouze dvě možnosti pro svolání porady: úterý nebo pátek. Které dny v týdnu označil náměstek C ve svém vzkazu jako dny, v nichž se může porady zúčastnit?

Řešení: Dny v týdnu si pro stručnost označme číslicemi (sobotu ještě uvažujeme, neděli už ne). Množina všech uvažovaných dnů je potom: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ze zadání je zřejmá množina dnů přípustných pro náměstka A: $A = \{1, 2, 3\}$ a obdobně i pro náměstka B ze zadání plyne: $B = \{2, 4, 5, 6\}$. Dále je zadáno:

$$B \cap (A \cup C) = \{2, 5\} \quad \text{neboli} \quad \{2, 4, 5, 6\} \cap (\{1, 2, 3\} \cup C) = \{2, 5\}.$$

Nyní přistupme k přepisu do Booleovy algebry: $B \to b$, $A \to a$, $C \to c$, $\{2, 5\} \to d$, $\cap \to \cdot$, $\cup \to +$:

$$b \cdot (a + c) = b \cdot a + b \cdot c = d,$$

kde d odpovídá $D = \{2, 5\}$. Na rovnici aplikujeme větu 2.4.8 a postupně upravíme:

$$(a \cdot b + b \cdot c)' \cdot d + (a \cdot b + b \cdot c) \cdot d' = 0$$
$$(a \cdot b)' \cdot (b \cdot c)' \cdot d + a \cdot b \cdot d' + b \cdot c \cdot d' = 0$$
$$(a' + b') \cdot (b' + c') \cdot d + a \cdot b \cdot d' + b \cdot c \cdot d' = 0$$
$$(a' \cdot b' + a' \cdot c' + b' + b' \cdot c') \cdot d + a \cdot b \cdot d' + b \cdot c \cdot d' = 0$$
$$(a' \cdot c' + b') \cdot d + a \cdot b \cdot d' + b \cdot c \cdot d' = 0$$
$$a' \cdot c' \cdot d + b' \cdot d + a \cdot b \cdot d' + b \cdot c \cdot d' = 0$$

Rovnici už nemůžeme dále nijak upravit, přistupme proto ke zpětné záměně do množinového zápisu:

$(A' \cap C' \cap \{2,5\}) \cup (B' \cap \{2,5\}) \cup (A \cap B \cap \{2,5\}') \cup (B \cap C \cap \{2,5\}') = \emptyset$

neboli

$(\{1,2,3\}' \cap C' \cap \{2,5\}) \cup (\{2,4,5,6\}' \cap \{2,5\}) \cup (\{1,2,3\} \cap \{2,4,5,6\} \cap \{2,5\}') \cup$
$\cup (\{2,4,5,6\} \cap C \cap \{2,5\}') = \emptyset$

$(\{4,5,6\} \cap C' \cap \{2,5\}) \cup (\{1,3\} \cap \{2,5\}) \cup (\{1,2,3\} \cap \{2,4,5,6\} \cap \{1,3,4,6,\}) \cup$
$\cup (\{2,4,5,6\} \cap C \cap \{1,3,4,6\}) = \emptyset$

$(\{5\} \cap C') \cup (\emptyset) \cup (\emptyset) \cup (\{4,6\} \cap C) = \emptyset$

$(\{5\} \cap C') \cup (\{4,6\} \cap C) = \emptyset$

Z posledního vztahu plyne:

$$\{5\} \cap C' = \emptyset \quad \text{a zároveň} \quad \{4,6\} \cap C = \emptyset.$$

Tyto dvě rovnosti jsou zřejmě splněny tehdy a jen tehdy, když:

$$5 \in C \quad \text{a zároveň} \quad C \subseteq \{1,2,3,5\}.$$

Množina dnů, kdy se může dostavit náměstek C, bude tudíž alespoň jednoprvková: $\{5\} \subseteq C \subseteq \{1,2,3,5\}$. Náměstek C tedy určitě označil pátek, případně ještě mohl označit pondělí, úterý a středu.

Příklad 3.3.15. ([8, str. 74]) Ve třech pavilonech T, U, V na výstavišti jsou umístěny exponáty ze skla, jedna váza z pavilonu T však byla odcizena. Sherlock Holmes a dr. Watson brzy zúžili okruh podezřelých na osm osob. Holmes po delší úvaze objevil jednoho z pachatelů krádeže a v rozmluvě se snaží dr. Watsona přivést k témuž poznatku. Podezřelé si označili písmeny a, b, c, . . . , h.

W.: „Zjistil jsem, že v pavilonu T byli podezřelí a, e, h; s nimi nebo mezi nimi tam ovšem byli i oba zlodějové.“

H.: „Zlodějové byli skutečně dva a mohu Vás ujistit, že jste přesně vystihl, kteří z osmi podezřelých navštívili pavilon T.“

W.: „V pavilonu U byli všichni podezřelí kromě b, c. v pavilonu V byli určitě d, f, g, h.“

H.: „Ve V byli také ještě všichni, kteří nespáchali krádež v T, ale už nikdo další.“

W.: „Všechny tři pavilony navštívili jen dva z osmi podezřelých, a to a, h.“

H.: „Správně. A teď už víte tolik, co já, můžete určit jednoho pachatele a vyloučit každého z podezřelých, který prokazatelně krádež nespáchal.“

Řešení: Známou množinu podezřelých označíme $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Neznámou množinu pachatelů nechť symbolizuje písmeno P. Dle zadání zkonstruujeme množinu $T = \{a, e, h\} \cup P$ jako množinu všech prvků (=podezřelých) z M, které byly v pavilonu T. Obdobně dostaneme $U = \{b, c\}'$ a $V = \{d, f, g, h\} \cup P'$.

Ze zadání dále plyne, že průnik množin T, U, V se musí rovnat {a, h}, odpovídající množinový zápis je:

$$\{a, h\} = (\{a, e, h\} \cup P) \cap (\{b, c\}') \cap (\{d, f, g, h\} \cup P')$$

Nyní přistupme k přepisu do Booleovy algebry: $\{a, h\} \to x$, $\{a, e, h\} \to y$, $P \to p$, $\{d, f, g, h\} \to z$, $\cap \to \cdot$, $\cup \to +$ a všimněmě si $\{b, c\}' = \{a, d, e, f, g, h\} =$ $= \{a, e, h\} \cup \{d, f, g, h\}$, proto můžeme $\{b, c\}'$ substituovat jako $y + z$:

$$x = (y + p) \cdot (y + z) \cdot (z + p')$$
$$x = (y + y \cdot z + p \cdot y + p \cdot z) \cdot (z + p')$$
$$x = (y + p \cdot z) \cdot (z + p')$$
$$x = y \cdot z + p' \cdot y + p \cdot z$$

Na rovnici aplikujeme větu 2.4.8 a postupně upravíme:

$$x' \cdot (y \cdot z + p' \cdot y + p \cdot z) + x \cdot (y \cdot z + p' \cdot y + p \cdot z)' = 0$$
$$x' \cdot y \cdot z + p' \cdot x' \cdot y + p \cdot x' \cdot z + x \cdot [(y' + z') \cdot (p + y') \cdot (p' + z')] = 0$$
$$x' \cdot y \cdot z + p' \cdot x' \cdot y + p \cdot x' \cdot z + x \cdot [(p \cdot y' + y' + p \cdot z' + y' \cdot z') \cdot (p' + z')] = 0$$
$$x' \cdot y \cdot z + p' \cdot x' \cdot y + p \cdot x' \cdot z + x \cdot [(y' + p \cdot z') \cdot (p' + z')] = 0$$
$$x' \cdot y \cdot z + p' \cdot x' \cdot y + p \cdot x' \cdot z + x \cdot (p' \cdot y' + y' \cdot z' + p \cdot z') = 0$$
$$x' \cdot y \cdot z + p' \cdot x' \cdot y + p \cdot x' \cdot z + p' \cdot x \cdot y' + x \cdot y' \cdot z' + p \cdot x \cdot z' = 0$$
$$(x' \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z') + p' \cdot (x' \cdot y + x \cdot y') + p \cdot (x' \cdot z + x \cdot z') = 0$$

Rovnici už nemůžeme dále nijak upravit, přistupme proto ke zpětné záměně do množinového zápisu:

$(\{a,h\}' \cap \{a,e,h\} \cap \{d,f,g,h\} \cup \{a,h\} \cap \{a,e,h\}' \cap \{d,f,g,h\}') \cup (P' \cap \{a,h\}' \cap$
$\cap \{a,e,h\} \cup \{a,h\} \cap \{a,e,h\}') \cup (P \cap \{a,h\}' \cap \{d,f,g,h\} \cup \{a,h\} \cap \{d,f,g,h\}') = \emptyset$

$(\{b,c,d,e,f,g\} \cap \{a,e,h\} \cap \{d,f,g,h\} \cup \{a,h\} \cap \{b,c,d,f,g\} \cap \{a,b,c,e\}) \cup$
$\cup (P' \cap \{b,c,d,e,f,g\} \cap \{a,e,h\} \cup \{a,h\} \cap \{b,c,d,f,g\}) \cup (P \cap \cap \{b,c,d,e,f,g\} \cap$
$\cap \{d,f,g,h\} \cup \{a,h\} \cap \{a,b,c,e\}) = \emptyset$

$(\emptyset \cup \emptyset) \cup (P' \cap \{e\} \cup \emptyset) \cup (P \cap \{d,f,g\} \cup \{a\}) = \emptyset$

$(P' \cap \{e\}) \cup (P \cap \{a,d,f,g\}) = \emptyset$

Aby byla levá strana nulová (přesněji rovna prázdné množině), musí platit:

$$P' \cap \{e\} = \emptyset \quad \text{a zároveň} \quad P \cap \{a,d,f,g\} = \emptyset$$

Ze vztahu vlevo ihned plyne $e \in P$, což znamená, že podezřelý e je jedním z pachatelů. Z pravého vztahu potom jasně plyne, že podezřelé a, d, f, g můžeme z vyšetřování vyloučit. Zbývá tedy nalézt druhého pachatele, kterým musí být jeden ze zbylých podezřelých b, c, h. K tomu, abychom ho mohli určit, nemáme ale dostatek informací.

Závěr

Chtěl bych se dobrovolně přiznat, že jsem byl v průběhu práce příjemně překvapen užitečností Booleovy algebry, o které jsem ještě při oficiálním zadávání práce neměl tak úplně ponětí. Původně jsem si totiž zamýšlel zvolit téma *Vyhodnocování formulí výrokové logiky*, nicméně někdo byl rychlejší… Nyní, s odstupem času, mi nezbývá, než ještě jednou poděkovat svému vedoucímu za pohotové vymyšlení tohoto alternativního tématu.

Teoretická část nabyla ve výsledku poněkud většího rozsahu oproti představě, kterou jsem měl při psaní úvodu práce, nicméně všechny definované pojmy zde, z mého úhlu pohledu, mají své místo a dodávají práci na ucelenosti.

V příkladové části jsem nejprve velmi podrobně předvedl práci s prvky Booleovy algebry. Poté jsem výpočty rozšířil na množiny a výrokové formule. Nejzajímavější částí jsou potom pravděpodobně slovní úlohy. Aplikováním aparátu Booleovy algebry bylo představeno, jak jednoduše a přesto efektivně uchopit logický problém.

Zadání některých příkladů bylo převzato z literatury, datující se do 70. let minulého století, a tak se jejich formulace někomu snad může v dnešní době jevit už poněkud kostrbatá. Nicméně vymýšlení nějakých aktuálních problémů by bylo pouze analogií už dříve vymyšleného, proto jsem zvolil tuto cestu.

Jak jsem již zmínil v úvodu práce a dále rozvinul v části věnované Booleovu životopisu, největší přínos Booleovy algebry náleží do oblasti elektrotechniky. Příklady zabývající se touto problematikou by však vedly k odchýlení se od zvoleného tématu, proto jsem se je rozhodl do této práce nezařadit. Jejich výpočty by byly analogické v práci uvedeným příkladům, rozdílná by byla jen analýza zadání takových příkladů. Případné zájemce proto odkazuji na uvedenou literaturu, např. [7, 11, 13]. Pro základní seznámení s příklady z elektrotechniky postačí [11, kapitola 7 a 8], pro podrobnější studium poslouží [7] a pro ty nejnáročnější zejména [13, kapitola 6].

Jako velmi přínosné shledávám zkušenosti, kterých jsem nabyl při sázení práce do typografického systému TEX. I když zpočátku jsem s tímto programem poněkud zápasil, s nemalým přispěním pana RNDr. Miloslava Závodného se mi nakonec, dle mého skromného názoru, podařilo vysázet práci na obstojné úrovni.

Literatura

[1] ZELINKA, Bohdan. *Matematika hrou i vážně.* 1.vyd. Praha: Mladá fronta, 1979, 188 s. Škola mladých matematiků.

[2] *George Boole: George Boole:His Life:Timeline of Life Events* [online]. Western Road, Cork, Ireland: University College Cork, 2016 [cit. 2016-03-04]. Dostupné z: http://georgeboole.com/boole/life/timeline/

[3] George Boole: The man who shrunk the world into '0's and '1's. *Hindustan Times: Tech* [online]. New Delhi: HT Media, 2015 [cit. 2016-03-04]. Dostupné z: http://www.hindustantimes.com/tech/george-boole-the-man-who-shrunk-the-world-into-1-s-and-0-s/story-GBJncfw4nZWgPvnezIAyfN.html

[4] 200. výročí narození George Boolea: 2. listopadu 2015. *Google* [online]. 2015 [cit. 2016-03-04]. Dostupné z: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

[5] John Venn. In: Wikipedie: Otevřená encyklopedie [online]. Wikimedia Foundation, 2015 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/John_Venn

[6] ZÁVODNÝ, Miloslav. *Úvod do matematiky.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3399-8.

[7] HOERNES, G. a HEILWEIL, M. *Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů.* Vyd. 1. Překlad Jiří Petrželka. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1969.

[8] ŠEDIVÝ, J. *Úlohy o výrocích a množinách pro 1. ročník gymnasia.* 1. vyd. Praha: SPN, 1972, 100 s. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).

[9] VOPĚNKA, Petr. *Úvod do klasické teorie množin.* 1. vyd. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, 2011, 205 s. ISBN 978-80-7043-986-9.

[10] KOUŘILOVÁ, Pavla a PAVLAČKOVÁ, Martina. Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.

[11] ODVÁRKO, Oldřich. *Booleova algebra.* 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1973, 115 s. Škola mladých matematiků.

[12] Průvodce přijímacím řízením na VŠ + otázky. [Brožura]. *Sokrates.cz: Ke stažení* [online]. 2015 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: http://www.sokrates.cz/wp-content/uploads/2014/05/SOKRATES_Pr%C5%AFvodce2015_2016.pdf

[13] BARTEE, Thomas C. *Aplikovaná algebra.* 1. vyd. Bratislava: Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1981.