



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka slovních úloh řešených rovnicemi

Vypracoval: Michal Pejchal
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková. Ph.D.

České Budějovice 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sběrka slovních úloh řešených rovnicemi jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucí mé práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D za důležité rady a korekci mé sbírky. Dále bych rád poděkoval Jiřímu Rabovi za konzultaci ohledně probraného materiálu, jemuž se má práce věnuje.

Anotace

Bakalářská práce je sbírka slovních úloh, které jsou řešeny rovnicemi. Úlohy jsou na úrovni osmé a deváté třídy ZŠ. Práce je rozdělena do dvou základních částí, které jsou ještě rozčleněny do dalších kapitol. Základní části obsahují teorii, ukázkové řešené úlohy a neřešené úlohy, ke kterým jsou výsledky. K lepšímu porozumění zadání úloh jsou některé příklady doplněny o obrázky, které znázorňují dané situace.

Annotacion

My bachelor's thesis is a digest of word problems solved through equations. Word problems are on level of 8th a 9th classes of elementary school. The work is divided into two main parts, which are divided into another parts. Main parts contain theory, elaborate examples and examples with solutions. Some examples include pictures, which help to understand situations.

Obsah

1.	Úvod	6
2.	Lineární rovnice s jednou neznámou	8
2.1	Řešené slovní úlohy.....	9
2.1.1	Úlohy s přirozenými a desetinnými čísly.....	9
2.1.2	Úlohy se zlomky	17
2.1.3	Úlohy s procenty	22
2.1.4	Pohybové úlohy.....	30
2.1.5	Geometrické úlohy.....	40
2.2	Neřešené úlohy s jednou neznámou	51
3	Lineární rovnice s více neznámými	53
3.1	Metody pro výpočet soustavy rovnic.....	53
3.1.1	Metoda dosazovací	53
3.1.2	Metody sčítací a odčítací	54
3.2	Řešené slovní úlohy s více neznámými	55
3.3	Neřešené slovní úlohy s více neznámými	68
4	Výsledky neřešených úloh.....	69
5	Závěr.....	70
6	Seznam použitých zdrojů	71

1. Úvod

Při výběru tématu mé bakalářské práce jsem myslel hlavně na to, aby se později dala využít jako učební pomůcka. Chtěl jsem udělat sbírku úloh řešených rovnicemi takovou, aby obsahovala všechna možná zadání a postupy řešení.

Práci jsem rozdělil na dvě hlavní témata a to na Lineární rovnice s jednou neznámou, které jsou ještě děleny na úlohy s přirozenými a desetinnými čísly, úlohy se zlomky, úlohy s procenty, pohybové úlohy a geometrické úlohy. Úlohy s přirozenými a desetinnými čísly jsou ty nejzákladnější, a tak je na nich nejdůležitější ukázat všechny možné druhy zadání a hlavně práci při zápisu a vytváření rovnic, což je vlastně nejtěžnější část při řešení úloh. Úlohy se zlomky, se kterými se žáci shledávají v sedmé třídě na ZŠ, jsou již těžší a při jejich řešení musíme využívat složitějších úprav rovnic. Následují úlohy s procenty, které se vyučují také v sedmé třídě. Tyto úlohy jsou propojeny i s předchozími kapitolami, takže se zde počítá nejen s procenty ale i s přirozenými čísly, desetinnými čísly i zlomky. Tak, že se na novou látku připojuje i probraná látka, je koncipována celá sbírka. Tím získává na komplexnosti a větším využití. Pohybové úlohy kladou důraz na různé situace, které mohou nastat např. při předjíždění nebo srážkách aut. Geometrické úlohy obsahují látku, se kterou se setkáváme od začátku studií na ZŠ až do jejich ukončení a jsou zaměřeny hlavně na různé geometrické vzorce, které by měly být známy.

Druhým z hlavních témat jsou Lineární rovnice s více neznámými. V tomto tématu jsem se zaměřil hlavně na to, jak sestavit soustavu rovnic ze zadání a na řešení soustav rovnic. Chtěl jsem, aby bylo poznat, kdy je vhodné využít vyjádření jedné neznámé a kdy je vhodné použít sčítací či odčítací metodu.

Každá z hlavních částí vždy začíná teorií řešení rovnic. Dále následují příklady řešených slovních úloh, z nichž některé jsou doplněny o více způsobů řešení a ilustrace, které pomohou znázornit danou situaci ze zadání. Slovní úlohy jsou v jednotlivých částech řazeny podle obtížnosti od lehčích po složitější. Obě hlavní témata jsou zakončena několika neřešenými úlohami, které slouží k ověření znalostí. K těmto úlohám jsou i výsledky pro kontrolu správnosti řešení.

Práce je určena pro žáky osmých a devátých tříd ZŠ, ve kterých se problematika rovnic probírá. Po prostudování této sbírky by nemělo být problémem vyřešit kteroukoli slovní úlohu koncipovanou pro výpočet pomocí rovnice.

Při tvorbě mé práce jsem se inspiroval hlavně sešity ze ZŠ a těmito publikacemi:

Běloun, František, *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ*. 6. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993.

Bittnerová, Anežka, *Úlohy z matematických olympiád*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-25439-X.

Charvát, Jura a kol., *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

2. Lineární rovnice s jednou neznámou

Rovnice (s jednou neznámou) je zápis rovnosti dvou výrazů, kde se mohou vyskytovat písmena ($x, y, m, \dots$). Tato písmena označujeme jako **neznámé**. Např.:

$$x + 2 = 2x - 3$$

Kdybychom za neznámé dosadili libovolná čísla, pro která jsou výrazy na obou stranách definovány, vycházeli by nám platné nebo neplatné rovnosti. Číslům, pro která vycházejí platné rovnosti, říkáme **řešení** (kořeny). Toto si můžeme ukázat na předchozím příkladu, kde je řešením číslo 5.

$$5 + 2 = 2 \cdot 5 - 3$$

$$7 = 7$$

Naproti tomu číslo $x = 7$ řešením není.

$$7 + 2 \neq 2 \cdot 7 - 3$$

$$9 \neq 14 - 3$$

$$9 \neq 11$$

Při řešení rovnic využíváme tzv. **ekvivalentních rovnic**. Tyto, pro nás pomocné rovnice, mají stejné řešení jako rovnice původní a získáváme je procesem, kterému se říká ekvivalentní úpravy. Mezi tyto úpravy patří přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice nebo vynásobení obou stran stejným číslem mimo nuly. Ekvivalentní úpravy obvykle pro pochopení píšeme za rovnici, od které jsou odděleny. My využijeme pro oddělení od rovnice symbolu $\|$.

Naši úvodní rovnici, tak řešíme pomocí ekvivalentních úprav takto:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 2x - 3 && \| + 3 \\ x + 2 + 3 &= 2x - 3 + 3 \\ x + 5 &= 2x && \| - x \\ x + 5 - x &= 2x - x \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Rovnice má pouze jediné řešení $x = 5$.

2.1 Řešené slovní úlohy

2.1.1 Úlohy s přirozenými a desetinnými čísly

Př.1

Hynek šel včera večer pozdě spát a ráno zaspal. Vstával v 7:08. Na snídani mu stačí obvykle 10 minut, a jelikož bydlí přímo před zastávkou, tak k městské jde 1 minutu. Kolik času má na převléknutí a umytí, aby stihl autobus v 7:28?

Řešení pomocí rovnice:

Čas na převléknutí a umytí..... x minut

Hynek vstával v..... 7:08

Autobus odjíždí v.....7:28

Snídaně zabere.....10 minut

Přesun na zastávku zabere..... 1 minutu

Nejprve od sebe odečteme časy 7:28 a 7:08 a vyjde nám celkový čas, který má Hynek na zvládnutí všech úkonů. Vyjde nám, že mu zbývá 20 minut. Sestavíme si rovnici pro výpočet času na převléknutí a umytí.

$$10 + 1 + x = 20$$

$$11 + x = 20 \quad || - 11$$

$$x = 9$$

Jiný způsob řešení:

Hynek má celkem mezi probuzením 7:08 a odjezdem autobusu 7:28 dvacet minut. 10 minut zabere snídaně a 1 minutu zabere přesun na zastávku. Na převléknutí a umytí mu tedy po odečtení snídaně a přesunu na zastávku od času, který má mezi probuzením a odjezdem autobusu, zbývá $20 - 10 - 1 = 9$ minut

Zkouška:

Hynek vstal v 7:08. Snídaně trvala 10 minut, umytí a převléknutí maximálně 9 minut a přesun na zastávku 1 minutu, což je dohromady $10 + 9 + 1 = 20$ minut.

Odpověď:

Hynek má na umytí a převléknutí jen 9 minut.

Př.2

Zjistěte dvě čísla, jestliže víte, že dvojnásobek prvního čísla je o 33 větší než druhé číslo, a že první číslo je o deset větší než druhé.

Řešení:

Druhé číslo..... x

První číslo..... $x + 10$

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní, že dvojnásobek prvního čísla je o 33 větší než druhé číslo. Tedy že jejich rozdíl je 33.

$$\begin{aligned}2(x + 10) - x &= 33 \\2x + 20 - x &= 33 \quad || - 20 \\x &= 13\end{aligned}$$

Zkouška:

První číslo je o deset větší než druhé, tj. $23 - 13 = 10$. Dvojnásobek prvního čísla je o 33 větší než druhé číslo, tedy $2 \cdot 23 - 13 = 33$.

Odpověď:

První číslo je 23, druhé je 13.

Př.3

Myslím si číslo, jehož šestinásobek je roven součtu jeho čtyřnásobku a trojnásobku sníženého o 6. Jaké si myslím číslo?

Řešení:

Myšlené číslo..... x

Šestinásobek čísla x je roven..... $4x + 3x - 6$

Sestavíme si rovnici, kde pomocí předpisu pro šestinásobek čísla x vypočteme myšlené číslo.

$$6x = 4x + 3x - 6$$

$$6x = 7x - 6 \quad || - 7x$$

$$-x = -6 \quad || : (-1)$$

$$x = 6$$

Zkouška:

Šestinásobek čísla 6 je $6 \cdot 6 = 36$. Součet jeho čtyřnásobku a trojnásobku sníženého o 6 je $4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 6 = 36$.

Odpověď:

Myšlené číslo je 6.

Př. 4

Dana má 108 Kč, které chce rozdělit rovnoměrně na desetikoruny, pětikoruny, dvoukoruny a koruny. Kolik bude mít po rozdělení desetikorunových mincí?

Řešení pomocí rovnice:

Počet desetikorunových mincí..... x

Dana má celkem rozdělit..... 108 Kč

Vzhledem k tomu, že počet desetikorunových, pětikorunových, dvoukorunových a korunových mincí je stejný, tak si vytvoříme následující rovnici. Násobky x jsou hodnoty mincí.

$$\begin{aligned} 108 &= 10x + 5x + 2x + x \\ 108 &= 18x && || : 18 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Jiný způsob řešení:

108 Kč musíme rovnoměrně rozdělit mezi desetikoruny, pětikoruny, dvoukoruny a koruny. Součet hodnot těchto mincí je $10 + 5 + 2 + 1 = 18$. Hodnotu 108 Kč nyní stačí vydělit 18. Tak zjistíme, kolik mincí každé hodnoty budeme mít po rozdělení $108 : 18 = 6$.

Zkouška:

Počet 6 mincí je u všech druhů stejný, takže stačí jen vypočítat, jaký je jejich celkový součet $6 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 108$.

Odpověď:

Po rovnoměrném rozdělení 108 Kč bude mít Dana šest desetikorunových mincí.

Př. 5

Ve třetím ročníku ZŠ je celkem 55 žáků ve dvou třídách. V 3. A je o 3 žáky méně, než ve 3. B. Kolik žáků je v jednotlivých třídách?

Řešení pomocí rovnice:

Žáků v 3. B..... x

Žáků v 3. A..... $x - 3$

Dohromady v obou třídách..... 55 žáků

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní počty žáků v jednotlivých třídách a celkový počet žáků.

$$x + x - 3 = 55 \quad || + 3$$

$$2x = 58 \quad || : 2$$

$$x = 29$$

Jiný způsob řešení:

Dohromady je v obou třídách 55 žáků. Ve 3.A je o 3 žáky méně než ve 3.B, jestliže odečteme 3 žáky ze 3.B z celkového počtu 55, bude v obou třídách stejně žáků, $55 - 3 = 52$. Nyní stačí vydělit 52 dvěma, abychom zjistili, kolik žáků by bylo v každé třídě $52 : 2 = 26$. Počet žáků ve 3.A je tedy 26. Ve 3.B je o 3 žáky více, tedy $26 + 3 = 29$.

Zkouška:

V 3. B je 29 žáků, v 3. A je 26 žáků, což je o tři méně. Dohromady je ve třídách $26 + 29 = 55$ žáků.

Odpověď:

V 3. A je 26 žáků a v 3. B je 29 žáků.

Př.6

Na dvoudenní festival Smack Fest přišlo celkem 468 návštěvníků. V pátek jich přišlo o 146 více než v sobotu. Kolik lidí přišlo v jednotlivé dny?

Řešení pomocí rovnice:

V sobotu přišlo na festival..... x lidí

V pátek přišlo na festival..... x + 146 lidí

Celkem přišlo na festival..... 468 lidí

Sestavíme si rovnici, kde sečteme počty návštěvníků v jednotlivé dny a porovnáme je s celkovým počtem návštěvníků.

$$x + x + 146 = 468 \quad || - 146$$

$$2x = 322 \quad || : 2$$

$$x = 161$$

Jiný způsob řešení:

Celkem přišlo na festival 468 lidí. V pátek jich přišlo o 146 více než v sobotu. To znamená, že po odečtení 146 od 468 nám vyjde, kolik lidí by se zúčastnilo festivalu, kdyby v pátek přišlo o 146 lidí méně a v sobotu by přišlo stejně lidí jako v pátek. $468 - 146 = 322$. Stačí vydělit 322 dvěma a zjistíme, kolik lidí přišlo na festival v sobotu, $322 : 2 = 161$. V pátek přišlo o 146 lidí více, tj. $161 + 146 = 307$.

Zkouška:

V sobotu přišlo na festival 161 lidí. V pátek jich přišlo o 146 více, tj. $161 + 146 = 307$. Dohromady jich za oba dva dny přišlo $161 + 307 = 468$.

Odpověď:

Na festival přišlo v pátek 307 a v sobotu 161 lidí.

Př.7

Michal přivezl z Anglie vinylovou desku, láhev a polštářek pro své kamarády. Vinylová deska byla 2,5 krát dražší než polštářek, který byl o 2£ (libry) levnější než láhev. Kolik stály jednotlivé věci, jestliže dohromady stály všechny dárky 29£?

Řešení:

Láhev stála..... x £

Polštářek stál..... x - 2 £

Vinylová deska stála..... $2,5 \cdot (x - 2)$ £

Dohromady stály všechny dárky..... 29 £

Sestavíme si rovnici, kde sečteme ceny jednotlivých dárků a porovnáme je s celkovou cenou.

$$x + x - 2 + 2,5 \cdot (x - 2) = 29 \quad || + 2$$

$$2x + 2,5x - 5 = 31 \quad || + 5$$

$$4,5x = 36 \quad || : 4,5$$

$$x = 8$$

Zkouška:

Láhev stála 8£. Polštářek stál o 2£ méně, tj. $8 - 2 = 6$ £. Vinylová deska byla 2,5 krát dražší než polštářek, takže stála $2,5 \cdot 6 = 15$ £. Dohromady stály všechny dárky $8 + 6 + 15 = 29$ £.

Odpověď:

Láhev stála 8£, polštářek stál 6£ a vinylová deska stála 15£.

Př.8

Na farmě je dvakrát více koní než pštrosů. Kolik je na farmě koní a kolik pštrosů, jestliže všechna zvířata mají dohromady 90 nohou?

Řešení pomocí rovnice:

Počet pštrosů..... x

Počet koní..... $2x$

Pštros má..... 2 nohy

Kůň má..... 4 nohy

Dohromady mají..... 90 noh

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní počty noh jednotlivých plemen a jejich celkový počet.

$$4 \cdot 2x + 2x = 90$$

$$10x = 90 \quad || : 10$$

$$x = 9$$

Jiný způsob řešení:

Celkem mají koně a pštrosy 90 noh. Poměr noh koní a pštrosů je 4:2. Koní je ale dvakrát více než pštrosů, a tak je celkový poměr noh 8:2. Celkový počet 90 vydělíme 10 (8 + 2). Vyjde nám číslo 9, které vynásobíme 8 (počet noh v poměru), abychom zjistili, kolik noh mají na farmě koně. Výsledek 72 vydělíme 4 (počet noh koně), tak zjistíme, že na farmě je 18 koní. Stejným způsobem budeme postupovat i při výpočtu počtu pštrosů. Číslo 9 vynásobíme 2. Vyjde nám číslo 18., které vydělíme 2, a tak zjistíme, že na farmě je 9 pštrosů.

Zkouška:

Počet noh pštrosů, kterých je 9, je $2 \cdot 9 = 18$. Počet noh koní, kterých je $2 \cdot 9 = 18$, je $18 \cdot 4 = 72$. Dohromady mají zvířata na farmě $18 + 72 = 90$ noh.

Odpověď:

Na farmě je 18 koní a 9 pštrosů.

2.1.2 Úlohy se zlomky

Př. 1

Několik kamarádů si vyšlo na třídní výlet, který byl dlouhý celkem 43 km. První den ušli polovinu trasy druhého dne. Třetí den ušli o 3 km více než první den. Kolik km ušli v jednotlivých dnech?

Řešení pomocí rovnice:

2. den ušli..... x km

1. den ušli..... $\frac{1}{2}x$ km

3. den ušli..... $\frac{1}{2}x + 3$ km

Celkem ušli..... 43 km

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní celkový počet ušlých kilometrů jako součet kilometrů za jednotlivé dny.

$$\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2}x + 3 = 43$$

$$2x + 3 = 43 \quad || - 3$$

$$2x = 40 \quad || : 2$$

$$x = 20$$

Jiný způsob řešení:

Třídenní výlet byl celkem dlouhý 43 km. Víme, že třetí den ušli kamarádi o 3 km více než první den. Kdybychom tyto 3 km odečetli od celkového počtu 43 km, tak by ušli celkem jen 40 km a první den by ušli stejně jako třetí den. Vzhledem k tomu, že druhý den nachodili kamarádi dvakrát více km, tak by poměry mezi jednotlivými dny byly 1:2:1. Celkový počet ušlých 40 kilometrů vydělíme 4 (1+2+1) a vyjde nám číslo 10. Tímto číslem vynásobíme hodnoty z poměrů za jednotlivé dny. První den tak nachodili $10 \cdot 1 = 10$ km, druhý den $10 \cdot 2 = 20$ km a třetí den $10 \cdot 1 = 10$ km. To by byly hodnoty ušlých km v případě, že by kamarádi nachodili pouze 40 km. Celkem ale ušli o 3 km více. Tyto 3 km připočteme k poslednímu dni, od kterého jsme je na začátku odečetli.

Zkouška:

Z výpočtu vidíme, že druhý den ušli 20 km. První den ušli $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ km. A třetí den ušli $\frac{1}{2} \cdot 20 + 3 = 13$ km. Celý výlet byl tedy dlouhý $10 + 20 + 13 = 43$ km.

Odpověď:

Kamarádi ušli první den 10 km, druhý den 20 km a třetí den 13 km.

Př.2

Karel se zúčastnil běžeckého závodu. Polovina závodníků byla lepší než Karel, zato $\frac{4}{9}$ byly horší. Kolik závodníků běželo závod?

Řešení:

Celkem běželo závod..... x závodníků

Lepších závodníků než Karel..... $\frac{1}{2}x$ závodníků

Horších než Karel..... $\frac{4}{9}x$ závodníků

Karel.....1

Vytvoříme si rovnici pro celkový počet závodníků.

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{9}x + 1 = x \quad || \cdot 18$$

$$9x + 8x + 18 = 18x$$

$$17x + 18 = 18x \quad || - 17x$$

$$x = 18$$

Zkouška:

Před Karlem doběhlo $\frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ závodníků. Za Karlem bylo $\frac{4}{9} \cdot 18 = 8$ závodníků.

Závodníků včetně Karla bylo tedy celkem $9 + 8 + 1 = 18$.

Odpověď:

Celkem běželo 18 závodníků.

Př.3

Kladivem se zeď rozbije za 2 hodiny, palicí bude trvat práce 40 minut. Jak dlouho bude práce trvat, jestliže Michal bude pracovat s kladivem a zároveň David s palicí?

Řešení pomocí rovnice:

Michal a David společně rozbijí zeď za..... x minut

Kladivem trvá práce..... 2 hodiny = 120 minut

Palicí trvá práce..... 40 minut

Celkem musí rozbít..... 1

Součtem Michalovy a Davidovy práce bude výsledná práce, kterou udělají dohromady.

Oba budou pracovat stejný počet minut x , který vždy vydělíme počtem minut, za které by udělal práci každý sám. Např. Michal by sám rozbil zeď za 120 minut, tedy $\frac{120}{120} = 1$.

Nyní práci ale budou pracovat společně. Rovnice nám znázorní jejich společnou práci, která musí být celá dokončená.

$$\frac{x}{120} + \frac{x}{40} = 1 \quad || \cdot 120$$

$$x + 3x = 120 \quad || : 4$$

$$x = 30$$

Jiný způsob řešení:

Ze zápisu úlohy je vidět, že za 1 minutu odpracuje Michal $\frac{1}{120}$ práce. David odpracuje za

1 minutu $\frac{1}{40}$ práce. To znamená, že najednou odpracují za 1 minutu $\frac{1}{120} + \frac{1}{40} = \frac{1}{30}$ práce.

Celkem musí odpracovat $\frac{30}{30}$, neboli vše. To znamená, že práci, kterou dohromady odpracují za 1 minutu, stačí vynásobit třicet, abychom dostali $\frac{30}{30}$. Celá práce tedy bude trvat 30 minut.

Zkouška:

Za 30 minut se kladivem rozbije $\frac{1}{120} \cdot 30 = \frac{1}{4}$ práce. Palicí se rozbije za 30 minut

$\frac{1}{40} \cdot 30 = \frac{3}{4}$ práce. Celkem se tedy rozbije $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4}$ zdi.

Odpověď:

Společně rozbijí zeď za 30 minut.

Př. 4

Na fotbalový zápas mezi Slavií Praha a Spartou Praha se dostavilo velmi mnoho slávistů, kteří si před zápasem koupili jeden suvenýr. Dvě čtvrtiny z nich si koupily šálu, šestina si koupila dres a zbylých 2460 si koupilo čepici. Kolik fanoušků Slavie si koupilo před zápasem suvenýr?

Řešení:

Celkem si koupilo suvenýr..... x fanoušků

Šálu si koupila..... $\frac{2}{4}x = \frac{1}{2}x$ fanoušků

Dres si koupila..... $\frac{1}{6}x$ fanoušků

Čepici si koupilo..... 2460 fanoušků

Sestavíme si rovnici, kde budou na jedné straně součty počtů fanoušků, kteří si koupili jednotlivé předměty, a na druhé straně celkový počet nakupujících.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x + 2460 = x \quad || \cdot 6$$

$$3x + x + 14760 = 6x$$

$$4x + 14760 = 6x \quad || - 4x$$

$$14760 = 2x \quad || : 2$$

$$x = 7380$$

Zkouška:

Šálu si koupilo celkem $\frac{2}{4}$ fanoušků, což je $\frac{2}{4} \cdot 7380 = 3690$. Dres si koupila $\frac{1}{6}$, tedy $\frac{1}{6} \cdot 7380 = 1230$. Zbylých fanoušků, kteří si koupili čepici bylo $7380 - 3690 - 1230 = 2460$.

Odpověď:

Celkem si před zápasem koupilo suvenýr 7380 diváků.

Př.5

Michal s Petrem dostali za úkol uklidit železo z neobydleného statku. První den uklidili polovinu, druhý den stihli jen tři čtvrtiny zbytku. Kolik železa bylo na statku, jestliže na ně třetí den zbylo 60 tun železa?

Řešení:

Na statku bylo..... x tun železa

1. den uklidili..... $\frac{x}{2} \rightarrow \text{zbytek } \frac{x}{2}$

2. den uklidili..... $\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{2}$

3. den uklidili..... 60 tun

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní počet odpracované práce v jednotlivých dnech vzhledem k celkové práci.

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{2} + 60 = x \quad || \cdot 8$$

$$4x + 3x + 480 = 8x$$

$$7x + 480 = 8x \quad || - 7x$$

$$x = 480$$

Zkouška:

První den uklidili Michal s Petrem polovinu tedy $480:2 = 240$ tun železa. Zbylo jim tedy na úklid 240 tun. Druhý den uklidili $\frac{3}{4}$ zbytku. To je $\frac{3}{4} \cdot 240 = 180$. Na poslední den jim tak zbylo $240 - 180 = 60$ tun železa.

Odpověď:

Celkem bylo potřeba uklidit 480 tun železa.

Př. 6

Michal je o 30 let mladší než jeho otec. Kolik let je Michalovi, jestliže za 3 roky bude Michalův věk $\frac{1}{2}$ otcovo věku?

Řešení pomocí rovnice:

Věk Michala..... x

Věk otce..... $x + 30$

Za 3 roky bude Michalovi polovina otcova věku.

Vytvoříme si rovnici, která nám znázorní poměr věku Michala a otce za 3 roky. K původním věkům musíme přičíst 3, jelikož oba zestárli o 3 roky.

$$\begin{aligned}x + 3 &= \frac{1}{2} \cdot (x + 30 + 3) & || \cdot 2 \\2x + 6 &= x + 33 & || - 6 \\2x &= x + 27 & || - x \\x &= 27\end{aligned}$$

Jiný způsob řešení:

Když se Michal narodil, tak otci bylo 30 let. Michal bude mladší o $\frac{1}{2}$ otcovo věku za 30 let, kdy otci bude 60 let a jemu 30. Tento případ ale nastane až za 3 roky. Michalovi je tedy nyní $30 - 3 = 27$ let.

Zkouška:

Michal je o 30 let mladší než otec. Otcí je tedy $27 + 30 = 57$ let. Za 3 roky mu bude $57 + 3 = 60$ let. Michalovi bude za 3 roky $27 + 3 = 30$ let, tedy polovina otcova věku.

Odpověď:

Michalovi je 27 let.

2.1.3 Úlohy s procenty

Př.1

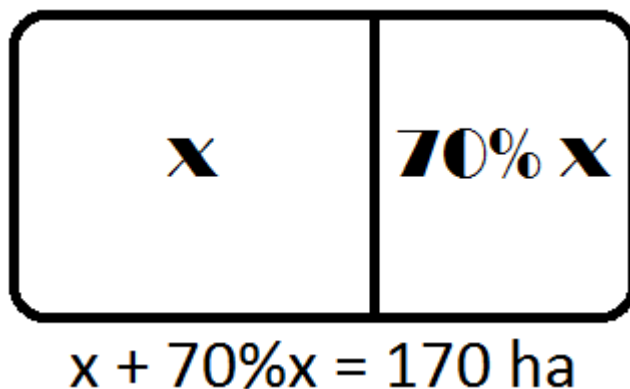
Pozemek o obsahu 170 ha byl rozdělen na dvě části. Menší část byla rovna 70 % větší části. Jak velké byly oba pozemky?

Řešení:

Větší část..... x ha

Menší část..... $70\% \text{ z } x = 0,7x$ ha

Celkový rozměr pozemku.....170 ha



Obr. 1 – Rozdělený pozemek

Sečteme menší a větší část. Obě musí dát dohromady původní velikost pozemku.

$$x + 0,7x = 170$$

$$1,7x = 170 \quad || : 1,7$$

$$x = 100$$

Zkouška:

Větší část má 100 ha. 70% větší části je 70 ha. Dohromady mají $100 + 70 = 170$ ha, což je původní velikost pozemku.

Odpověď:

Menší část rozděleného pozemku měla 70 ha. Větší část měřila 100 ha.

Př.2

Automobil, který se v obchodě dlouho neprodával, byl zlevněn o 15% na cenu 27540.

Jaká byla jeho původní cena?

Řešení pomocí rovnice:

Původní cena vozu před slevou..... x Kč

Sleva z původní ceny..... 15% z $x = 0,15 x$

Cena auta po slevě..... 27540 Kč

Rovnice, kterou sestavíme, nám znázorní poměr původní ceny auta, od které odečteme 15 %, a ceny auta po zlevnění.

$$\begin{aligned}
 x - 0,15x &= 27540 \\
 0,85x &= 27540 & || : 0,85 \\
 x &= 32400
 \end{aligned}$$

Jiný způsob řešení:

Automobil, který byl zlevněný o 15%, stojí nyní 27540 Kč. To, že byl zlevněný o 15% ceny, znamená, že jeho nynější cena je $100 - 15 = 85\%$ původní ceny. Nyní stačí zjistit, kolik je 100% ceny. Vydělíme nynější cenu (27540 Kč) 85-ti a zjistíme, kolik je 1%, poté výsledek vynásobíme 100, a tak zjistíme původní cenu, tedy $27540 : 85 \cdot 100 = 32400$.

Zkouška:

Původní cena automobilu byla 32400 Kč. 15 % z 32400 je $\frac{15}{100} \cdot 32400 = 4860$. Po odečtení 15 % bylo auto zlevněno na $32400 - 4860 = 27540$ Kč.

Odpověď:

Původní cena automobilu byla 32400 Kč.

Př.3

Fotbalové družstvo získalo za všechna vítězství v sezoně 54 bodů. Za remízy pak získalo družstvo 10% z celkového počtu bodů. Kolik získalo mužstvo bodů za celou sezonu?

Řešení:

Mužstvo získalo za sezonu..... x bodů
 Za vítězství získalo..... 54 bodů
 Za remízy získalo..... 10% z $x = 0,1x$ bodů

Sestavíme rovnici, kde sečteme získané body za vítězství a za remízy a součet porovnáme s celkovým ziskem bodů za celou sezonu.

$$\begin{aligned}
 54 + 0,1x &= x & || - 0,1x \\
 54 &= 0,9x & || : 0,9 \\
 x &= 60
 \end{aligned}$$

Zkouška:

Mužstvo získalo celkem 60 bodů. Za vítězství získalo 54 bodů. Za remízy získalo 10% z celkového zisku, tj. $0,1 \cdot 60 = 6$ bodů. Součet bodů za vítězství a za remízy je $54 + 6 = 60$ bodů.

Odpověď:

Mužstvo získalo za sezonu celkem 60 bodů.

Př.4

Anetě přišlo do kadeřnictví v prosinci a lednu celkem 213 zákazníků. V prosinci jich přitom přišlo o 13% více než v lednu? Kolik zákazníků přišlo do kadeřnictví v lednu?

Řešení:

V lednu přišlo do kadeřnictví..... x zákazníků

V prosinci přišlo do kadeřnictví..... $x + 13\%$ z $x = x + 0,13x$ zákazníků

Celkem přišlo do kadeřnictví.....213 zákazníků

Sestavíme si rovnici, kde sečteme počty zákazníků za jednotlivé měsíce a porovnáme je s celkovým počtem zákazníků.

$$x + x + 0,13x = 213$$

$$2,13x = 213 \quad || : 2,13$$

$$x = 100$$

Zkouška:

V lednu přišlo do kadeřnictví 100 zákazníků. V prosinci jich přišlo o 13% více než v lednu, tj. $100 + 13\%$ ze 100 = $100 + 13 = 113$. Dohromady pak přišlo do kadeřnictví $100 + 113 = 213$ zákazníků.

Odpověď:

Do kadeřnictví přišlo v lednu 100 zákazníků.

Př.5

Do posilovny přišlo za tři dny celkem 75 osob. Druhý den přišlo o 50% více lidí než třetí den a zároveň o 3 méně než první den. Kolik přišlo v jednotlivé dny lidí?

Řešení:

3. den přišlo do posilovny..... x lidí

2. den přišlo do posilovny..... $x + 50\% x = x + 0,5x$ lidí

1. den přišlo do posilovny..... o 3 lidi víc než 2. den, tj. $x + 0,5x + 3$ lidí

Celkem přišlo do posilovny..... 75 osob

Sestavíme si rovnice, která nám znázorní součet osob, které byly v posilovně a celkový počet osob.

$$x + x + 0,5x + x + 0,5x + 3 = 75 \quad || - 3$$

$$4x = 72 \quad || : 4$$

$$x = 18$$

Zkouška:

Třetí den přišlo 18 lidí. Druhý den přišlo o 50% více než třetí den, tj. $18 + 50\% \text{ z } 18 = 18 + 9 = 27$ lidí. Zároveň druhý den přišlo o 3 lidi méně než první den, to znamená, že první den přišlo o tři lidi více než druhý den, tedy $27 + 3 = 30$. Dohromady přišlo za tři dny do posilovny $30 + 27 + 18 = 75$ lidí.

Odpověď:

První den přišlo do posilovny 30, druhý den 27 a třetí den 18 lidí.

Př.6

Na koupališti se prodalo za tři dny 420 párků v rohlíku. Kolik párků v rohlíku se prodalo v jednotlivých dnech, jestliže se první den prodalo o 40 kusů méně než třetí den a druhý den se prodalo o 80% více než první den?

Řešení:

3. den se prodalo..... x párků v rohlíku

1. den se prodalo $x - 40$ párků v rohlíku

2. den se prodalo $(x - 40) + 0,8 \cdot (x - 40)$ párků v rohlíku

Celkem se prodalo..... 420 ks

Sečteme prodané kusy v jednotlivé dny a porovnáme je s celkovým počtem prodaných párků v rohlíku. Odtud zjistíme, kolik se prodalo párků v rohlíku ve třetí den.

$$x - 40 + x - 40 + 0,8 \cdot (x - 40) + x = 420 \quad || + 80$$

$$x + x + 0,8x - 32 + x = 500 \quad || + 32$$

$$3,8x = 532 \quad || : 3,8$$

$$x = 140$$

Zkouška:

První den se prodalo $140 - 40 = 100$ párků v rohlíku. Druhý den se prodalo o 80% více než první den, tj. $100 + 0,8 \cdot 100 = 180$ kusů. Třetí den se prodalo 140 párků. Dohromady to bylo $100 + 180 + 140 = 420$ párků v rohlíku

Odpověď:

1. den se prodalo 100, 2. den 180 a 3. den 140 párků v rohlíku.

Př.7

Na třídním výletě byla třída rozdělena do čtyř nerovnoměrných skupin. V první bylo 10 žáků, v druhé bylo o 10% více žáků než v první. Ve třetí skupině bylo 25% žáků z celé třídy. V poslední čtvrté skupině bylo o jednoho žáka méně než ve třetí skupině. Kolik bylo celkem žáků ve třídě?

Řešení:

Celkem bylo ve třídě..... x žáků

V první skupině bylo..... 10 žáků

Ve druhé skupině bylo..... $10 + 10\% \text{ z } 10 = 10 + 1 = 11$ žáků

Ve třetí skupině bylo..... $25\% \text{ z } x = 0,25x$ žáků

Ve čtvrté skupině bylo..... $0,25x - 1$ žáků

Celkový počet žáků vypočteme jako součet žáků v jednotlivých skupinách.

$$10 + 11 + 0,25x + 0,25x - 1 = x$$

$$20 + 0,5x = x \quad || - 0,5x$$

$$20 = 0,5x \quad || : 0,5$$

$$x = 40$$

Zkouška:

Celkem bylo ve třídě 40 žáků. V první skupině bylo 10 žáků. Ve druhé bylo o 10% více než v první skupině, tedy $10 + 0,1 \cdot 10 = 11$ žáků. Ve třetí skupině bylo 25% žáků z celé třídy, tj. $0,25 \cdot 40 = 10$ žáků. Ve čtvrté skupině bylo o jednoho žáka méně než ve třetí skupině, tj. $10 - 1 = 9$ žáků. Součet žáků jednotlivých skupin je $10 + 11 + 10 + 9 = 40$.

Odpověď:

Celkem bylo ve třídě 40 žáků.

Př.8

Na faktuře o zaplacení za telefon bylo za volání vyúčtováno čtyřikrát více než za zprávy, za které se mělo zaplatit 5,5 krát méně než za celou fakturu. Za data a internet bylo vyúčtováno 20% z celkové částky. Jako věrnostní bonus dostal klient 48 Kč. Jaká byla celková částka faktury?

Řešení:

Celková částka k zaplacení..... x Kč

Zprávy stály..... $\frac{x}{5,5}$ Kč

Volání stálo..... $4 \cdot \frac{x}{5,5}$ Kč

Data a internet stály..... $20\% \text{ z } x = 0,2x$ Kč

Věrnostní bonus..... 48 Kč

Pro výpočet celkové částky sečteme všechny položky, které byly na faktuře. Věrnostní bonus od ostatních položek odečteme, protože slouží jako sleva z původní částky.

$$\frac{x}{5,5} + 4 \cdot \frac{x}{5,5} + 0,2x - 48 = x \quad || \cdot 5,5$$

$$x + 4x + 1,1x - 264 = 5,5x \quad || + 264$$

$$6,1x = 5,5x + 264 \quad || - 5,5x$$

$$0,6x = 264 \quad || : 0,6$$

$$x = 440$$

Zkouška:

Celkem bylo na faktuře vyúčtováno 440 Kč. Zprávy stály 5,5 krát méně než celá faktura, tedy $\frac{440}{5,5} = 80$ Kč. Volání stálo čtyřikrát více než zprávy, tj. $4 \cdot 80 = 320$ Kč.

Za data a internet bylo vyúčtováno 20% z celkové částky, tj. $0,2 \cdot 440 = 88$ Kč. Sleva za věrnostní bonus byla 48 Kč. Po sečtení všech položek a odečtení bonusu vyjde částka $80 + 320 + 88 - 48 = 440$ Kč.

Odpověď:

Celkem částka na faktuře byla 440 Kč.

Př.9

Na čtyřdenním pochodu ušli turisté první den 20 km, druhý den ušli o 10% méně než první den. Třetí den ušli $\frac{2}{9}$ z celého pochodu a čtvrtý den ušli 25% ze všech ušlých kilometrů. Kolik ušla skupina za všechny čtyři dny kilometrů?

Řešení:

Skupina ušla celkem..... x km
1.den ušli..... 20 km
2.den ušli..... $20 - 10\% \text{ z } 20 = 20 - 2 = 18$ km
3.den ušli..... $\frac{2}{9}x$ km
4.den ušli..... $25\% \text{ z } x = 0,25x$ km

$$20 + 18 + \frac{2}{9}x + 0,25x = x \quad || - 0,25x - \frac{2}{9}x$$

$$38 = 0,75x - \frac{2}{9}x \quad || \cdot 9$$

$$342 = 6,75x - 2x$$

$$342 = 4,75x \quad || : 4,75$$

$$x = 72$$

Zkouška:

Celkem ušli 72 km. První den ušli 20 km. Druhý den ušli o 10% méně než první, tj. $20 - 0,1 \cdot 20 = 18$ km. Třetí den ušli $\frac{2}{9}$ ze 72, tj. 16 km. Čtvrtý den ušli 25% ze 72 km, tedy $0,25 \cdot 72 = 18$ km. Součet za jednotlivé dny je $20 + 18 + 16 + 18 = 72$ km.

Odpověď:

Za čtyřdenní výlet ušla skupinka celkem 72 km.

2.1.4 Pohybové úlohy

Př.1

Z místa A vyjel cyklista do místa B rychlostí 20 km/h. Proti němu se ve stejnou dobu rozjel automobilista z místa B rychlostí 70 km/h. Za jak dlouho se setkají, jestliže jsou obě místa od sebe vzdálená 45 km?

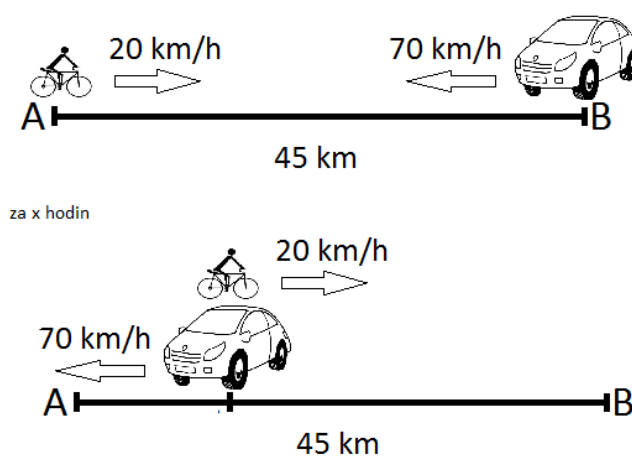
Řešení pomocí rovnice:

Čas, za který se cyklista a automobilista sejdou.... x hodin

Cyklista jede rychlostí..... 20 km/h

Automobilista je rychlostí..... 70 km/h

Vzdálenost mezi místy A a B..... 45 km



Obr. 2 – Znáznornění situace [1], [2]

Sestavíme si rovnici pro výpočet času, kdy se střetnou. Cyklista, který jede rychlostí 20 km/h ujede za x hodin $20 \cdot x$ km. Stejně tak automobilista ujede rychlostí 70 km/h za x hodin $70 \cdot x$ km. Ujeté vzdálenosti musíme sečíst, protože musí dohromady ujet celou délku trasy mezi místy A a B, aby se střetli.

$$20x + 70x = 45$$

$$90x = 45 \quad || : 90$$

$$x = 0,5$$

Jiný způsob řešení:

Cyklista urazí rychlostí 20 km/h za hodinu 20 km. Proti jedoucí automobilista ujede rychlostí 70 km/h za hodinu 70 km. Dohromady urazí za hodinu $20 + 70 = 90$ km. Vzdálenost mezi místy A a B je 45 km, tedy polovina. Stačí vydělit hodinu dvěma, jelikož za tu dobu urazí právě 45 km. Setkají se tedy za $\frac{1}{2}$ hodiny.

Zkouška:

Cyklista ujede $20 \cdot 0,5 = 10$ km. Automobilista ujede $70 \cdot 0,5 = 35$ km. Dohromady ujedou $10 + 35 = 45$ km, což je vzdálenost mezi místy A a B.

Odpověď:

Sejdou se za půl hodiny od výjezdu.

Př.2

Z Volyně vyrazil řidič směr Strakonice. Proti němu vyjel ve stejnou dobu, 1,5 krát menší rychlostí než první řidič, druhý řidič ze Strakonic. Jakými jeli oba řidiči rychlostmi, jestliže se střetly 6 minut a města jsou od sebe vzdálená 12 km?

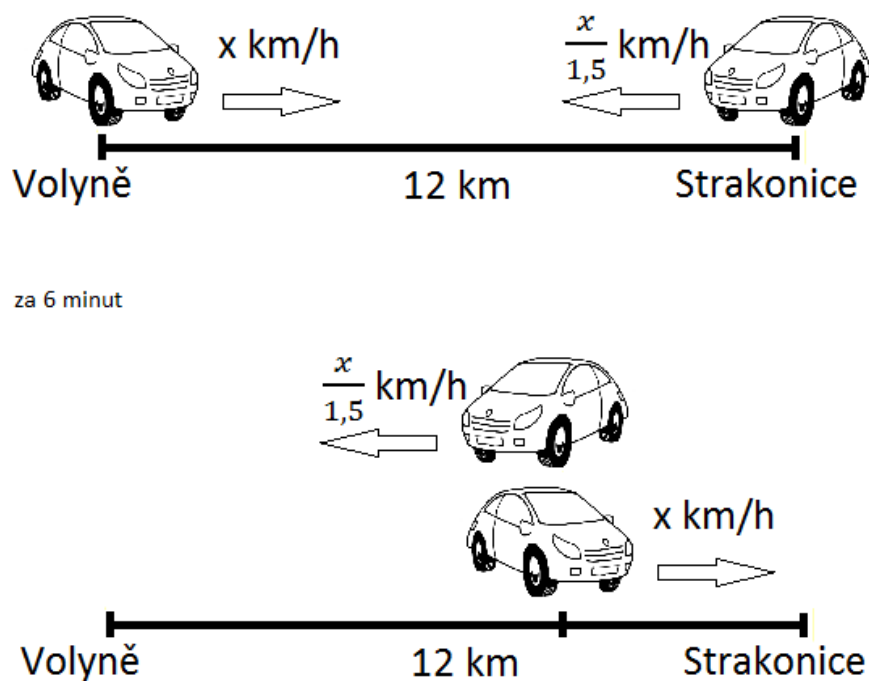
Řešení:

První řidič jel rychlostí..... x km/h

Druhý řidič jel rychlostí..... 1,5 krát menší než první řidič $= \frac{x}{1,5}$ km/h

Setkali se za..... $6 \text{ minut} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \text{ hodiny}$

Vzdálenost obou měst..... 12 km



Obr. 3 – Znázornění situace [1]

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní počet kilometrů, které ujeli řidiči za 6 minut s ohledem na poměr jejich rychlostí. Dohromady museli ujet 12 km, což je vzdálenost mezi městy, ze kterých vyjžděli. Tuto vzdálenost musí dosáhnout, aby se střetli.

$$\begin{aligned}x \cdot \frac{1}{10} + \frac{x}{1,5} \cdot \frac{1}{10} &= 12 \\ \frac{x}{10} + \frac{x}{15} &= 12 \quad || \cdot 30 \\ 3x + 2x &= 360 \\ 5x &= 360 \quad || : 5 \\ x &= 72\end{aligned}$$

Zkouška:

První řidič, který jel rychlostí 72 km/h, ujel za 6 minut $\frac{6}{60} \cdot 72 = 7,2$ km. Druhý řidič, který jel rychlostí $\frac{72}{1,5} = 48$ km/h ujel za 6 minut $\frac{6}{60} \cdot 48 = 4,8$ km. Dohromady ujeli $7,2 + 4,8 = 12$ km, což je vzdálenost mezi Volyní a Strakonice.

Odpověď:

První řidič jel rychlostí 72 km/h. Druhý řidič jel rychlostí 48 km/h.

Př.3

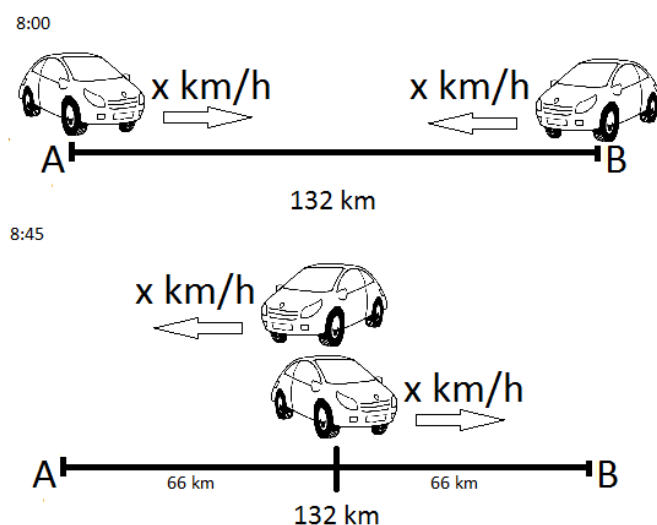
Z místa A vyjel do místa B automobil v 8:00. Z místa B vyjel ve stejnou dobu druhý automobil do místa A. Obě auta jela stejnou průměrnou rychlostí. Jaká byla jejich rychlost, jestliže se auta střetla v 8:45 a obě místa byla vzdálená 132 km?

Řešení pomocí rovnice:

Průměrná rychlost obou aut..... x km/h

Vzdálenost místa A od místa B..... 132 km

Doba, kterou obě auta jela, než se střetla..... $8:45 - 8:00 = 45$ minut = $\frac{45}{60}$ hodin



Obr. 4 – Znázornění situace [1]

Sestavíme si rovnici, kde znázorníme, že obě auta musela rychlostí x km/h ujet za 45 minut vzdálenost 132 km.

$$\begin{aligned}\frac{45}{60} \cdot x + \frac{45}{60} \cdot x &= 132 & || \cdot 60 \\ 45x + 45x &= 7920 \\ 90x &= 7920 & || : 90 \\ x &= 88\end{aligned}$$

Jiný způsob řešení:

Celková vzdálenost mezi místy, ze kterých auta vyjela, byla 132 km. Obě auta vyjela ve stejnou dobu stejnou rychlostí a střetla se za 45 minut. Znamená to, že stačí spočítat, jakou rychlostí jelo jedno auto, když zdolalo polovinu trasy za 45 minut. Tedy jakou rychlostí muselo jet $132 : 2 = 66$ km za 45 minut. Auto jelo rychlostí $x = \frac{66}{\frac{45}{60}} = 88$ km/h.

Zkouška:

Řidič prvního auta ujel za 45 minut $\frac{45}{60} \cdot 88 = 66$ km. Stejně ujel i druhý řidič. Dohromady řidiči obou aut ujeli $66 + 66 = 132$ km, což je vzdálenost mezi místy A a B.

Odpověď:

Oba řidiči jeli rychlostí 88 km/h.

Př.4

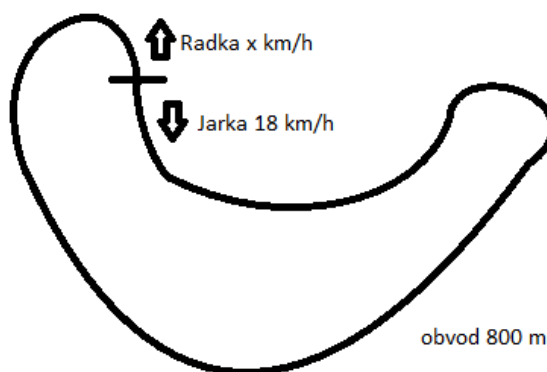
Běžecský okruh je dlouhý 800 m. Jarka vyběhla ze startu rychlostí 18 km/h. Radka vyběhla ve stejnou dobu ze stejného místa, ale opačným směrem. Jakou rychlostí běžela Radka, jestliže se střetly za 100 sekund?

Řešení:

Radka běžela rychlostí..... x km/h = $\frac{1000 \cdot x}{3600}$ m/s

Jarka běžela rychlostí..... $18 \text{ km/h} = \frac{18000}{3600} \text{ m/s}$

Délka oválu je.....800 m



Obr. 5 – Znáznornění situace

Sestavíme si rovnici, kde uvidíme, že dohromady musí obě dívky uběhnout 800 m, aby se střetly. Jarka uběhne rychlostí $18 \text{ km/h} = \frac{18000}{3600} \text{ m/s}$ za 100 sekund 500 m. Radka uběhne za 100 sekund $\frac{x}{3600} \cdot 100 \text{ m}$.

$$\begin{aligned}\frac{18000}{3600} \cdot 100 + \frac{1000 \cdot x}{3600} \cdot 100 &= 800 && || \cdot 3600 \\ 1800000 + 100000x &= 2880000 && || - 1800000 \\ 100000x &= 1080000 && || : 100000 \\ x &= 10,8\end{aligned}$$

Zkouška:

Jarka uběhla rychlostí 18 km/h za 100 s $\frac{18 \cdot 1000}{3600} \cdot 100 = 500 \text{ m}$. Radka uběhla rychlostí $10,8 \text{ km/h}$ za 100 s $\frac{10,8 \cdot 1000}{3600} \cdot 100 = 300 \text{ m}$. Dohromady uběhly $500 + 300 = 800 \text{ m}$, což je délka celého oválu.

Odpověď:

Radka běžela rychlostí $10,8 \text{ km/h}$.

Př.5

Michal se rozběhne od domu a běží průměrnou rychlostí 12 km/h. Deset minut po něm vyjede ze stejného místa na kole Jan. Jak dlouho poběží Michal, než ho Jan dožene, jestliže Jan jede rychlostí 36 km/h?

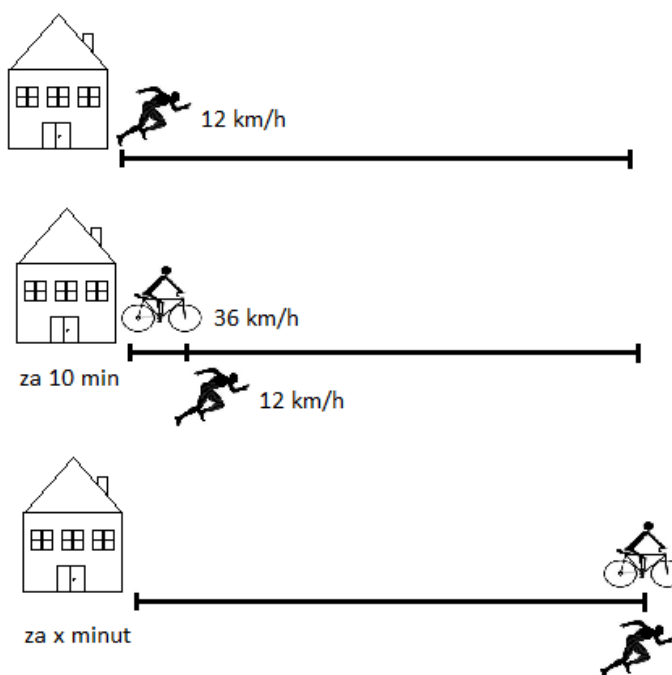
Řešení:

Doba, kterou Michal poběží, než ho Jan dojede..... x hodin

Michal běží rychlostí.....12 km/h

Jan jede rychlostí.....36 km/h

Jan vyjede za Michalem za.....10 min = $\frac{1}{6}$ hodiny



Obr. 6 – Znázornění [2], [3]

Sestavíme si rovnici, která nám znázorní, za jak dlouho ujede Jan stejnou vzdálenost, kterou Michal uběhne. Michal uběhne za x hodin $12 \cdot x$ km. Jan ujede za x hodin $36 \cdot x$ km. Michal ale běžel o $\frac{1}{6}$ hodiny déle, a tak musíme ke vzdálenosti, kterou Michal uběhl

přičíst vzdálenost, kterou by Jan ujel právě za $\frac{1}{6}$ hodiny. Tato vzdálenost je náskok, který měl Michal v době, kdy za ním Jan vyjel.

$$\begin{aligned}
 12x + \frac{1}{6} \cdot 36 &= 36x \\
 12x &= 36x && || - 16x \\
 6 &= 24x && || : (24) \\
 x &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Zkouška:

Michal uběhne za $\frac{1}{4}$ hodiny $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ km. Jan celkem pojede $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ hodiny. Ujedete tedy $\frac{1}{12} \cdot 36 = 3$ km.

Odpověď:

Michal poběží $\frac{1}{4}$ hodiny, než ho Jan dojede.

Př.6

Otec se synem běželi závod, kdo uběhne více metrů za dvě minuty. Otec běžel průměrně rychlostí 18 km/h a uběhl o 120 m více než syn. Jakou rychlostí běžel syn a kolik uběhl metrů?

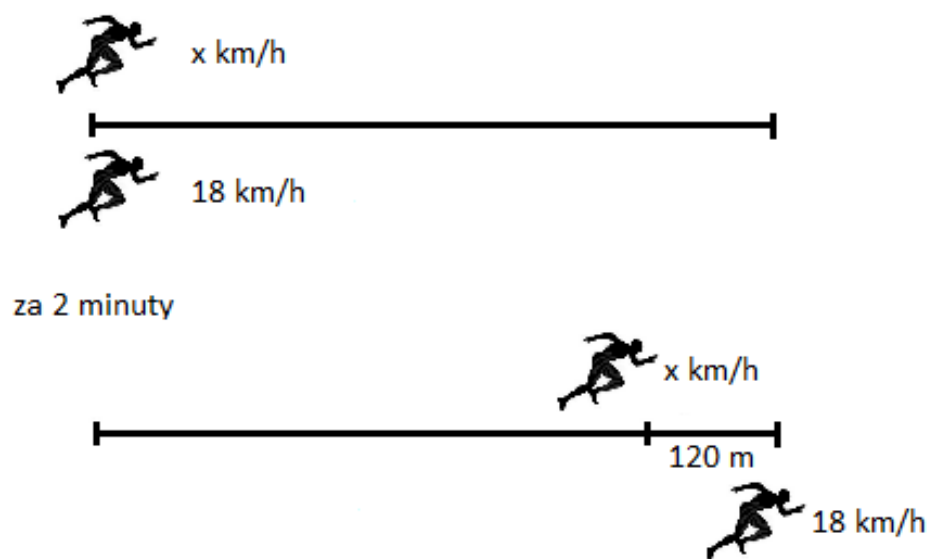
Řešení:

Syn běžel průměrnou rychlostí..... x km/h

Syn uběhl za dvě minuty..... $x \cdot \frac{2}{60}$ km = $x \cdot \frac{2}{60} \cdot 1000$ m

Otec běžel průměrnou rychlostí..... 18 km/h = 18000 m/h

Otec uběhl za dvě minuty..... $\left(18 \cdot \frac{2}{60} \cdot 1000\right)$ m



Obr. 7 – Znázornění situace [3]

Nyní si vytvoříme rovnici, kde na jedné straně bude vzdálenost, kterou uběhl syn a na druhé ta, kterou uběhl otec snížena o 120 m, které uběhl otec navíc oproti synovi.

$$\begin{aligned}
 x \cdot \frac{2}{60} \cdot 1000 &= \left(18 \cdot \frac{2}{60} \cdot 1000 \right) - 120 \\
 x \cdot \frac{2000}{60} &= 600 - 120 \\
 x \cdot \frac{2000}{60} &= 480 & || \cdot 60 \\
 x \cdot 2000 &= 28800 & || : 2000 \\
 x &= 14,4
 \end{aligned}$$

Zkouška:

Syn uběhl rychlostí 14,4 km/h za dvě minuty $\frac{2}{60} \cdot 14,4 = 0,48 \text{ km} = 480 \text{ m}$. Otec uběhl rychlostí 18 km/h za dvě minuty $\frac{2}{60} \cdot 18 = 0,6 \text{ km} = 600 \text{ m}$, tedy o 120 m více než syn.

Odpověď:

Syn uběhl 480m rychlostí 14,4 km/h.

Př.7

Z firmy vyjelo nákladní auto rychlostí 72 km/h. Bohužel bylo nákladní auto naloženo špatným zbožím, a tak za ním bylo, 15 minut po výjezdu prvního auta, vysláno další auto se správným zbožím, aby první mohli doplnit. Druhé auto jelo rychlostí 96 km/h. Jak dlouho jel řidič druhého auta, než dojel prvního řidiče?

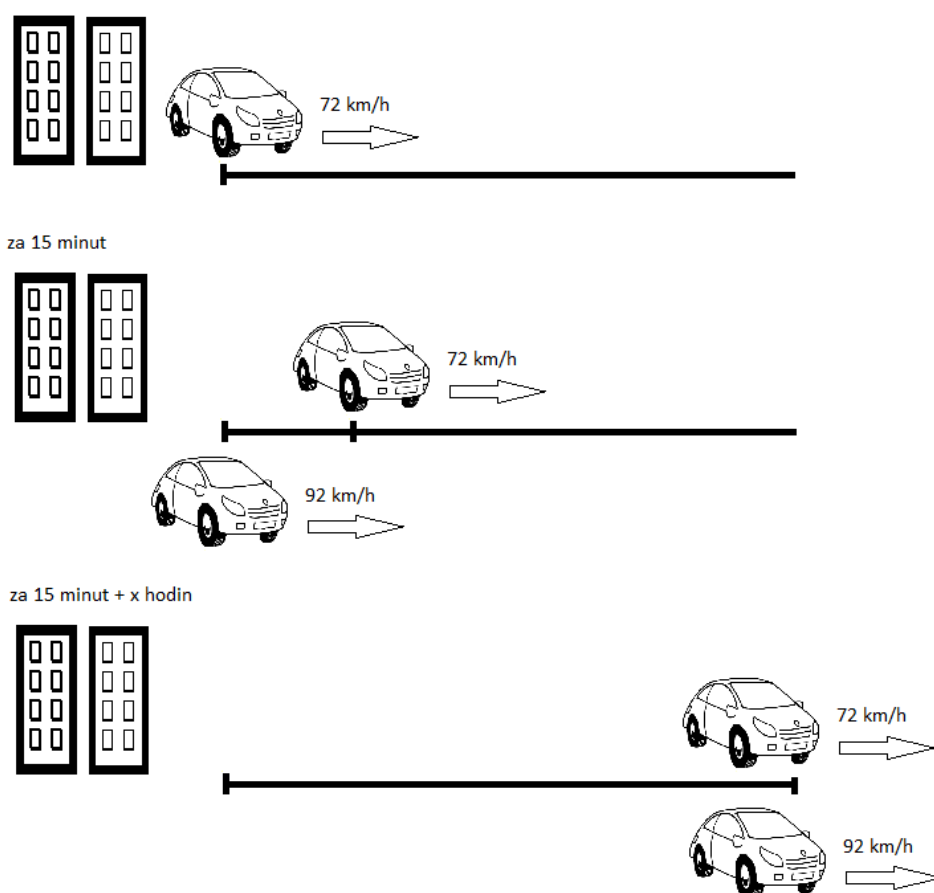
Řešení:

Řidič druhého auta dojel první auto za..... x hodin

Řidič prvního auta jel rychlostí..... 72 km/h

Řidič druhého auta jel rychlostí..... 96 km/h

Druhý řidič vyjel za prvním autem za..... 15 minut = $\frac{15}{60}$ hodin



Obr. 8 – Znázornění situace [1]

Sestavíme si rovnice, kde bude na jedné straně vzdálenost, kterou ujel druhý řidič, než dostihl prvního, a na druhé straně vzdálenost, kterou ujel první řidič, než ho druhý dostihl. První řidič ujede za x hodin $72 \cdot x$ km. Druhý ujede za x hodin $96 \cdot x$ km. V našem případě jel ale první řidič o patnáct minut déle, takže ujel celkem $72 \cdot (x + \frac{15}{60})$ km.

$$\begin{aligned} 96 \cdot x &= 72 \cdot \left(x + \frac{15}{60}\right) \\ 96x &= 72x + \frac{72 \cdot 15}{60} & || - 72x \\ 24x &= 18 & || : 24 \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zkouška:

První řidič ujel za $\frac{3}{4} + \frac{15}{60} = 1$ hodinu $1 \cdot 72 = 72$ km. Druhý řidič, který vyrazil o 15 minut déle, ujel za $\frac{3}{4}$ hodiny $\frac{3}{4} \cdot 96 = 72$ km.

Odpověď:

Druhý řidič jel $\frac{3}{4}$ hodiny, než dojel prvního řidiče.

2.1.5 Geometrické úlohy

Př.1

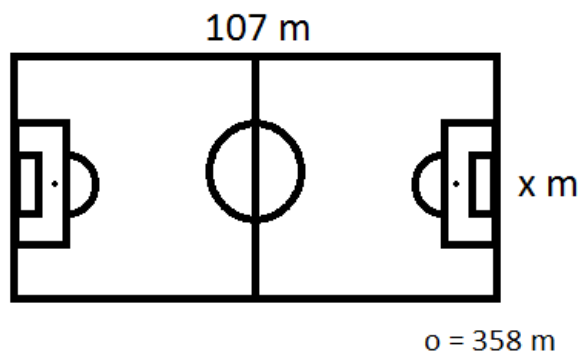
Stadion Realu Madrid Santiago Bernabéu má obvod hřiště 358 m. Jaká je šířka hřiště, jestliže délka je 107 m?

Řešení:

Šířka hřiště..... x m

Obvod hřiště..... 358 m

Délka hřiště..... 107 m



Obr. 9 – Santiago Bernabéu

Podle vzorce pro obvod obdélníka $o = 2 \cdot (x + 107)$, zjistíme šířku hřiště x .

$$\begin{aligned} 358 &= 2 \cdot (x + 107) & || : 2 \\ 179 &= x + 107 & || - 107 \\ x &= 72 \end{aligned}$$

Zkouška:

Obvod hřiště je roven součtu všech jeho stran, kde je šířka i délka dvakrát. Obvod je tedy $72 + 72 + 107 + 107 = 358$ m.

Odpověď:

Šířka hřiště Santiago Bernabéu je 72 m.

Př.2

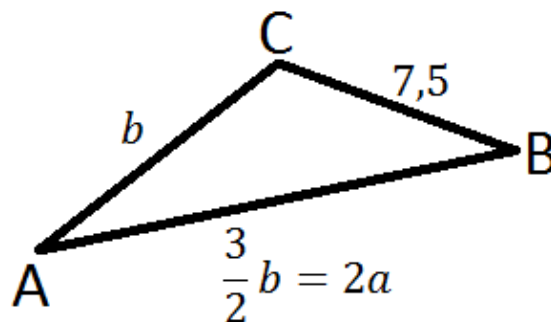
Vypočítejte délky stran trojúhelníku, jestliže víte, že nejkratší strana a má délku 7,5 cm a nejdelší c je rovna dvojnásobku nejkratší a zároveň $\frac{3}{2}$ prostřední strany b .

Řešení:

Strana a 7,5 cm

Strana b b

Strana c $2a$ a zároveň $\frac{3}{2}b$



Obr. 9 - Trojúhelník

Délku strany c vypočteme z následující rovnice.

$$\begin{aligned} c &= 2a \quad || \text{dosadíme } a = 7,5 \\ c &= 15 \end{aligned}$$

Nyní si dopočítáme stranu b . Víme, že strana c je dlouhá $\frac{3}{2}b$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}b &= c \quad || \cdot \frac{2}{3} \\ b &= \frac{2}{3}c \quad || \text{dosadíme } c = 15 \\ b &= 10 \end{aligned}$$

Zkouška:

Strana a je 7,5 cm. Strana b je 10 cm. A strana c je 15 cm. Strana a je tedy nejkratší. Strana c je nejdelší a zároveň je dvakrát delší než a , a $\frac{3}{2}$ krát delší než b .

Odpověď:

Trojúhelník má strany 7,5 cm, 10 cm a 15 cm.

Př.3

Vypočtete délku odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, jestliže víte, že druhá odvěsna b je o 10 cm větší než první a a přepona je 50 cm.

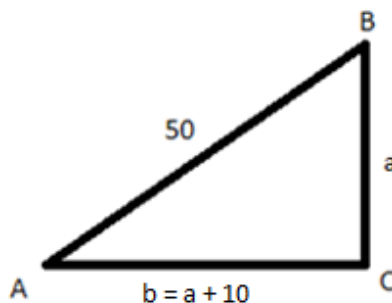
Řešení:

První odvěsna..... a

Druhá odvěsna..... $b = a + 10$ cm

Přepona..... $c = 50$ cm

Podle Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$ dopočteme druhou odvěsnu.



Obr. 101 – Pravoúhlý trojúhelník

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= 50^2 && || \text{dosadíme } b = a + 10 \\
 a^2 + (a + 10)^2 &= 2500 && || \text{upravíme člen v závorce} \\
 a^2 + a^2 + 20a + 100 &= 2500 && || - 2500 \\
 2a^2 + 20a - 2400 &= 0 && || : 2 \\
 a^2 + 10a - 1200 &= 0 && || \text{upravíme si levou část} \\
 &&& \text{rovnice na součin dvou výrazů} \\
 (a + 40) \cdot (a - 30) &= 0
 \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že aby byl součin výrazů roven nule, museli bychom dosadit buď číslo (-40) nebo 30. Vzhledem k tomu, že potřebujeme kladný výsledek, tak je řešením 30.

Nyní dopočteme poslední stranu b , dosazením do $b = a + 10$. Strana b je tedy rovna $b = 30 + 10 = 40$ cm.

Zkouška:

Dosadíme strany a , b , c do Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\begin{aligned}
 30^2 + 40^2 &= 50^2 \\
 900 + 1600 &= 2500 \\
 2500 &= 2500
 \end{aligned}$$

Odpověď:

První odvěsna a je dlouhá 30 cm a druhá odvěsna b je dlouhá 40 cm.

Př.4

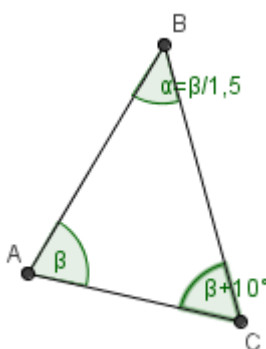
Dopočtěte úhly v trojúhelníku, jestliže víte, že úhel α je 1,5 krát menší než úhel β , který je o 10° menší než γ .

Řešení:

$$\alpha \dots\dots\dots \alpha = \frac{\beta}{1,5}$$

$$\beta \dots\dots\dots \beta$$

$$\gamma \dots\dots\dots \gamma - 10 = \beta, \text{ tedy } \gamma = \beta + 10^\circ$$



Obr. 11 - Trojúhelník

Sestavíme si rovnici, kde sečteme všechny úhly a porovnáme je se 180° , což součet všech úhlů v každém trojúhelníku.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

*|| dosadíme za úhly, které
jsme vyjádřili pomocí úhlu β*

$$\frac{\beta}{1,5} + \beta + \beta + 10 = 180$$

$$|| - 10$$

$$\frac{\beta}{1,5} + \beta + \beta = 170$$

$$|| \cdot 1,5$$

$$\beta + 1,5 \cdot \beta + 1,5 \cdot \beta = 255$$

$$4 \cdot \beta = 255$$

$$|| : 4$$

$$\beta = 63,75$$

Úhel $63,75$ musíme převést na stupně a minuty. Rozdělíme číslo na celé stupně a desetinnou část $63^\circ + 0,75^\circ$. Desetinnou část vynásobíme 60ti $0,75^\circ \cdot 60 = 45'$. Převedený úhel je $63^\circ 45'$.

Zkouška:

Součet úhlů v trojúhelníku je 180° . Úhel α je $\frac{63,75}{1,5} = 42,5 = 42^\circ 30'$. Úhel β je $63^\circ 45'$ a úhel $\gamma = 63^\circ 45' + 10^\circ = 73^\circ 45'$. Součet úhlů je $42^\circ 30' + 63^\circ 45' + 73^\circ 45' = 180^\circ$.

Odpověď:

Úhel α je $42^\circ 30'$, úhel β je $63^\circ 45'$ a úhel γ je $73^\circ 45'$.

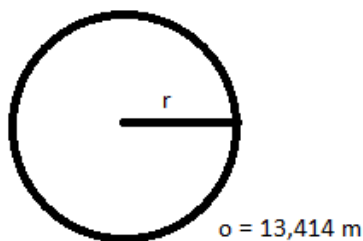
Př.5

Vypočtete průměr vrhačské kruhu, jestliže víte, že obvod kruhu je 13,414 m.

Řešení:

Průměr kruhu..... r m

Obvod kruhu..... 13,414 m



Obr. 12 - Kruh

Průměr kruhu vypočteme podle rovnice $o = 2 \cdot \pi \cdot r$.

$$\begin{aligned} 13,414 &= 2 \cdot \pi \cdot r \quad || : 2 \cdot \pi \\ \frac{13,414}{2 \cdot \pi} &= r \\ r &= 2,135 \end{aligned}$$

Zkouška:

Do vzorce pro výpočet obvodu kruhu $o = 2 \cdot \pi \cdot r$ dosadíme

$$\begin{aligned} 13,414 &= 2 \cdot \pi \cdot 2,135 \\ 13,414 &= 13,414 \end{aligned}$$

Odpověď:

Průměr vrhačského kruhu je 2,135 m.

Př.6

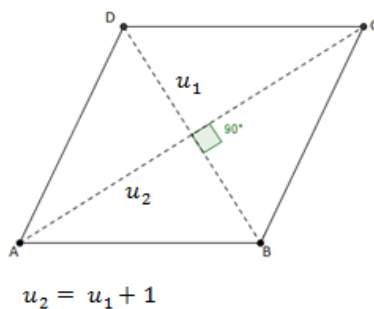
Zjistěte délky úhlopříček kosočtverce, jehož obsah je 110 cm^2 a úhlopříčka u_2 je o 1 cm delší než u_1 .

Řešení:

První úhlopříčka..... u_1

Druhá úhlopříčka..... $u_2 = u_1 + 1$

Obsah kosočtverce..... 110 cm^2



Obr. 13 - Kosočtverec

Díky vzorci pro obsah kosočtverce $S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$ vypočteme jeho úhlopříčky

$$55 = \frac{u_1 \cdot u_2}{2} \quad || \text{dosadíme } u_2 = u_1 + 1$$

$$55 = \frac{u_1 \cdot (u_1 + 1)}{2} \quad || \cdot 2$$

$$110 = u_1 \cdot (u_1 + 1)$$

Zde vidíme, že součin dvou po sobě jdoucích čísel je 110. Jediným takovým řešením jsou čísla 10 a 11. Úhlopříčka u_1 je tedy rovna 10.

Ze zadání víme, že $u_2 = u_1 + 1$. Úhlopříčka u_2 je $10 + 1 = 11 \text{ cm}$.

Zkouška:

Do vzorce pro obsah kosočtverce dosadíme námi nalezené délky úhlopříček a porovnáme je s obsahem ze zadání.

$$\begin{aligned}55 &= \frac{u_1 \cdot u_2}{2} && || \text{dosadíme } u_1 = 10 \text{ a } u_2 = 11 \\55 &= \frac{10 \cdot 11}{2} \\55 &= 55\end{aligned}$$

Odpověď:

Délky úhlopříček kosočtverce jsou $u_1 = 10 \text{ cm}$ a $u_2 = 11 \text{ cm}$.

Př.7

Zjistěte délky stran podstavy hranolu, jestliže víte, že jedna strana podstavy je rovna $\frac{3}{4}$ druhé strany, výška je 23 cm a objem je 4416 cm³.

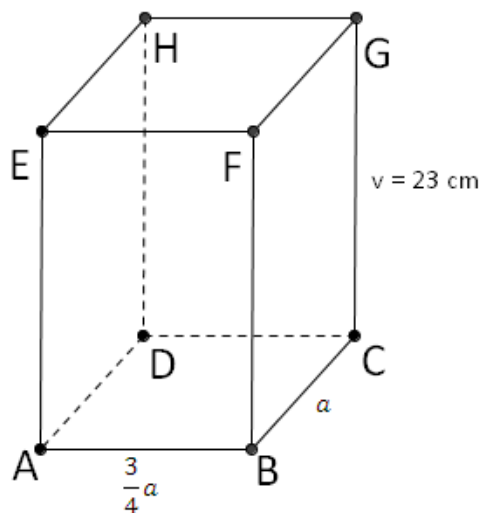
Řešení:

Jedna strana podstavy..... a cm

Druhá strana podstavy..... $\frac{3}{4}$ a cm

Výška hranolu..... 23 cm

Objem hranolu..... 4416 cm³.



Obr. 14 - Hranol

Dosadíme jednotlivé délky do vzorce pro objem hranolu $V = a \cdot b \cdot c$, v našem případě

$$V = a \cdot \frac{3}{4}a \cdot v$$

$$V = a \cdot \frac{3}{4}a \cdot v \quad || \text{dosadíme výšku a objem}$$

$$4416 = a \cdot \frac{3}{4}a \cdot 23 \quad || \cdot 4$$

$$17664 = 3a^2 \cdot 23 \quad || : (3 \cdot 23)$$

$$a^2 = 256 \quad || \sqrt{}$$

$$a = 16$$

Zkouška:

Do vzorce pro objem hranolu dosadíme jednotlivé délky a objem.

$$4416 = 16 \cdot \frac{3}{4} \cdot 16 \cdot 23$$

$$4416 = 4416$$

Odpověď:

Strany podstavy hranolu jsou 12 cm a 16 cm.

Př.8

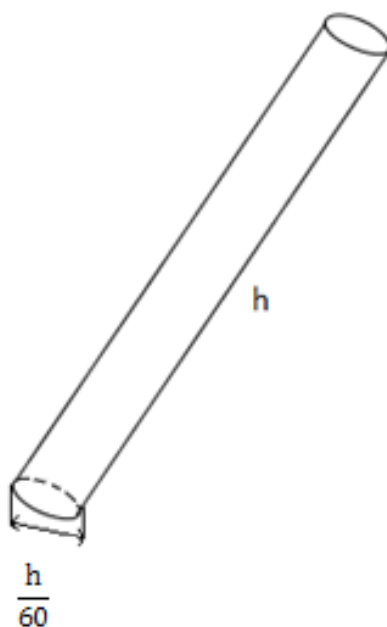
Jaká je délka brčka v milimetrech, jestliže víte, že jeho poloměr je 60 krát menší než délka a jeho objem je 2,945243 ml?

Řešení:

Délka brčka..... h mm

Poloměr brčka..... $\frac{h}{60}$ mm

Objem brčka..... 2,945243 ml = 2945,243 mm³



Obr. 15 - Brčko

Pomocí rovnice pro objem válce $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ zjistíme délku.

$$\begin{aligned} 2945,243 &= \pi \cdot \left(\frac{h}{60}\right)^2 \cdot h && || \cdot 3600 \\ 10602874,8 &= \pi \cdot h^3 && || : \pi \\ 3374999,87 &= h^3 && || \sqrt[3]{} \\ h &\doteq 150 \end{aligned}$$

Zkouška:

Do vzorce pro objem válce dosadíme hodnoty a porovnáme je s naším výsledkem.

$$2,945243 \text{ ml} = \pi \cdot \left(\frac{150}{60}\right)^2 \cdot 150 \text{ mm}^3$$

$$2,945243 \text{ ml} = 2945,243 \text{ mm}^3$$

Odpověď:

Délka brčka je 150 mm.

2.2 Neřešené úlohy s jednou neznámou

1. Zjistěte čísla, jestliže víte, že čtyřnásobek prvního je roven dvojnásobku druhého, a že první číslo je o 13 menší než druhé číslo.
2. Do ordinace přišlo za dva dny 54 lidí. První den přišlo o 12 více lidí než druhý den. Kolik lidí přišlo v jednotlivé dny?
3. Na statku je třikrát více slepic než prasat. Kolik je na statku prasat, jestliže všechna zvířata mají dohromady 60 nohou?
4. Na veřejný trénink fotbalové reprezentace přišla první den $\frac{1}{3}$ lidí, co přišla druhý den. Třetí den přišlo o 3 lidi méně než druhý den. Kolik lidí se přišlo podívat na reprezentační trénink v jednotlivé dny, jestliže dohromady bylo za všechny 3 dny na tréninku 67 lidí?
5. Petr si vydělal za svou brigádu 1600 Kč. Druhý den si vydělal 75% toho, co získal za první den a třetí den dostal o 100 Kč více než druhý den. Kolik si Petr vydělal za jednotlivé dny?
6. Za čtyři víkendy přišlo na fotbalové zápasy 522 diváků. První víkend přišlo o 20 diváků méně než třetí víkend, druhý víkend přišlo o $\frac{1}{4}$ více než první víkend, a čtvrtý víkend přišlo o 20% méně lidí než víkend předtím. Kolik lidí přišlo v jednotlivé víkendy?
7. Z Českých Budějovic vyjel do Prahy automobil rychlostí 87 km/h. Proti němu vyjel ve stejnou dobu z Prahy do Českých Budějovic druhý řidič rychlostí 93 km/h. Za jak dlouho se střetli, jestliže jsou obě města vzdálená 150 km?
8. Petr vyběhl ze startovací místa rychlostí 12 km/h. Za 4 minuty se za ním rozjel na kole Robert rychlostí 20 km/h. Jak dlouho běžel Petr než ho Robert dojel?

9. Zjistěte objem akvária, které má tvar hranolu, jestliže víte, že jedna strana podstavy je o 50 % menší než druhá strana. Víme, že delší strana podstavy je o sedminu kratší než výška, která je 28 cm.

10. Jak je vysoká plechovka limonády v centimetrech, jestliže se do ní vejde 0,216 l a její poloměr je 4,4 krát menší než výška.

Výsledky k neřešeným úlohám se nacházejí na str. 69

3 Lineární rovnice s více neznámými

Lineární rovnice s více neznámými se řeší pomocí, tzv. soustav rovnic. Soustava rovnic je soubor dvou a více rovnic, ve kterých se může nacházet více neznámých. K tomu, abychom vyřešili soustavu rovnic s reálnými kořeny, potřebujeme vždy minimálně stejný počet rovnic jako neznámých. Při řešení soustavy rovnic se snažíme zjistit hodnoty neznámých tak, aby při dosazení do jakékoli rovnice ze soustavy vyšla rovnost. Pro vyřešení soustavy rovnic se využívá několika metod.

3.1 Metody pro výpočet soustavy rovnic

Při výpočtu soustavy rovnic platí stejná početní pravidla jako u jednotlivých rovnic. Vzhledem k tomu, že se v soustavě objevuje více rovnic, tak si jednotlivé rovnice budeme označovat číslem v závorce, které se bude nacházet za rovnicí. Získáme tak větší přehled.

3.1.1 Metoda dosazovací

Př. Vyřešte soustavu rovnic

$$5x + 4y = 22 \quad (1)$$

$$x + 2y = 8 \quad (2)$$

Nyní si vyjádříme jednu neznámou z nějaké rovnice. Nejlépe je vyjádřit si neznámou s koeficientem 1 nebo -1.

To znamená, že si z druhé rovnice (2) vyjádříme neznámou x .

$$x = 8 - 2y$$

Vyjádřenou neznámou x dosadíme do jiné rovnice, než ze které jsme si ji vyjádřili. V našem případě do první rovnice (1).

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 22 && || \text{dosadíme za } x, x = 8 - 2y \\ 5(8 - 2y) + 4y &= 22 \\ 40 - 10y + 4y &= 22 && || -40 \\ -6y &= -18 && || : -6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $y = 3$ do vztahu, který jsme si v úvodním kroku odvodili a dopočítáme neznámou x .

$$x = 8 - 2y \quad || \text{dosadíme za } y, y = 3$$

$$x = 8 - 2 \cdot 3$$

$$x = 6$$

Řešením soustavy rovnice jsou $x = 2$ a $y = 3$.

3.1.2 Metody sčítací a odčítací

Př. Vyřešte soustavu rovnic

$$2x - 3y = -6 \quad (1)$$

$$x + 3y = 15 \quad (2)$$

U sčítací (odčítací) metody využíváme toho, že když k sobě přičteme (odečteme) rovnice, tak nám vypadne jedna neznámá. Díky tomu poté dopočteme neznámou, která v rovnici zbyla.

V našem případě k sobě obě rovnice (1), (2) přičteme.

$$2x - 3y + x + 3y = -6 + 15$$

$$3x = 9$$

Nyní řešíme rovnici jen s jednou neznámou.

$$3x = 9 \quad || : 3$$

$$x = 3$$

Dosazením $x = 3$ do nějaké rovnice (1) dopočteme zbylou neznámou.

$$2x - 3y = -6 \quad || \text{dosadíme za } x, x = 3$$

$$2 \cdot 3 - 3y = -6 \quad || - 6$$

$$-3y = -12 \quad || : (-3)$$

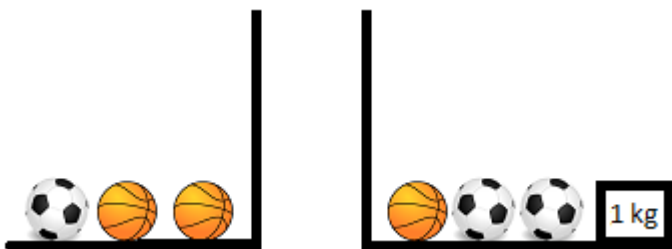
$$y = 4$$

Řešením soustavy rovnic jsou $x = 3$ a $y = 4$.

3.2 Řešené slovní úlohy s více neznámými

Př.1

Na váhy, které jsou v rovnováze, byly rozmístěny předměty podle obrázku



Obr. 16 – Rozmístění předmětů na váze [5], [6]

Určete hmotnost jednoho fotbalového a basketbalového míče, jestliže všechny míče dohromady váží 27 kg. (všechny fotbalové míče mají stejnou hmotnost, stejně tak basketbalové).

Řešení:

Basketbalový míč..... x kg

Fotbalový míč..... y kg

Všechny míče váží dohromady..... 27 kg

Vytvoříme si rovnici, která nám znázorní rozložení míčů a závaží na vahách.

$$x + 2y = y + 2x + 1$$

Druhou rovnicí vyjádříme součet hmotností všech míčů a jejich celkovou hmotnost.

$$3x + 3y = 27$$

Nyní řešíme soustavu rovnic.

$$x + 2y = y + 2x + 1 \quad (1)$$

$$3x + 3y = 27 \quad (2)$$

Z druhé rovnice (2) vyjádříme neznámou x .

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 27 & || : 3 \\ x + y &= 9 & || - y \\ x &= 9 - y \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $x = 9 - y$ do první rovnice (1).

$$\begin{aligned} x + 2y &= y + 2x + 1 & || \text{dosadíme } x = 9 - y & (1) \\ 9 - y + 2y &= y + 2(9 - y) + 1 \\ 9 + y &= y + 18 - 2y + 1 \\ 9 + y &= 19 - y & || + y \\ 9 + 2y &= 19 & || - 9 \\ 2y &= 10 & || : 2 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $y = 5$ do vztahu $x = 9 - y$, který jsme si v úvodu odvodili.

$$\begin{aligned} x &= 9 - y & || \text{dosadíme } y = 5 \\ x &= 9 - 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Zkouška:

Porovnáme obě strany vah. Na obou by měla být stejná hmotnost.

Levá strana váhy:

$$4 + 2 \cdot 5 = 14$$

Pravá strana váhy:

$$5 + 2 \cdot 4 + 1 = 14$$

Odpověď:

Fotbalový míč váží 4 Kg a basketbalový 5 Kg.

Př.2

Jestliže sečteme populace měst A,B,C vyjde nám 14000 obyvatel. Ve městech A,B,D je dohromady 18060. Ve městech B,C,D je dohromady 19460 obyvatel a ve městech A,C,D je dohromady 16760 obyvatel. Kolik obyvatel je v jednotlivých městech?

Řešení:

a,b,c,d..... počty obyvatel v jednotlivých městech

Sestavíme si rovnice, které nám znázorní součty obyvatel jednotlivých měst a jejich celkový součet

$$a + b + c = 14000$$

$$a + b + d = 18060$$

$$b + c + d = 19460$$

$$a + c + d = 16760$$

Řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých.

$$a + b + c = 14000 \quad (1)$$

$$a + b + d = 18060 \quad (2)$$

$$b + c + d = 19460 \quad (3)$$

$$a + c + d = 16760 \quad (4)$$

Nejprve od sebe odečteme první dvě rovnice (1), (2), a tak vyjádříme neznámou c .

$$a + b + c - (a + b + d) = 14000 - 18060$$

$$c - d = -4060$$

$$c = -4060 + d$$

Nyní víme, že $c = -4060 + d$, a tak si ze třetí rovnice (3), kde se neznámé c a d vyskytují, vyjádříme b .

$$b + c + d = 19460 \quad || \text{dosadíme } c = -4060 + d$$

$$b + (-4060 + d) + d = 19460 \quad || -(-4060 + d) - d$$

$$b = 19460 - (-4060 + d) - d$$

$$b = 23520 - 2d$$

Nyní víme, že $b = 19460 - 2d$, a tak od sebe odečteme první (1) a čtvrtou rovnici (4) a vypočteme neznámou d .

$$\begin{array}{rcl}
 a + b + c & = & 14000 \\
 a + c + d & = & 16760 \\
 b - d & = & -2760 \quad || \text{dosadíme } b = 23520 - 2d \\
 23520 - 2d - d & = & -2760 \quad || - 23520 \\
 -3d & = & 26280 \quad || : (-3) \\
 d & = & 8760
 \end{array}$$

Ted' můžeme dopočítat ostatní neznámé dosazením $d = 8760$ do odvozených vztahů $c = -4060 + d$ a $b = 23520 - 2d$.

Tedy:

$$\begin{array}{rcl}
 c & = & -4060 + d \quad || \text{dosadíme } d = 8760 \\
 c & = & 4700
 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcl}
 b & = & 23520 - 2d \quad || \text{dosadíme } d = 8760 \\
 b & = & 6000
 \end{array}$$

Poslední neznámou a můžeme dopočítat dosazením neznámých b, c, d do některé z úvodních rovnic, kde se neznámá a nachází. My zvolíme první rovnici (1).

$$\begin{array}{rcl}
 a + b + c & = & 14000 \quad || \text{dosadíme } b = 6000 \text{ a } c = 4700 \\
 a + 6000 + 4700 & = & 14000 \quad || - 6000 - 4700 \\
 a & = & 3300
 \end{array}$$

Zkouška:

V městech A,B,C (1) je $3300 + 6000 + 4700 = 14000$ obyvatel. V městech A,B,D (2) je $3300 + 6000 + 8760 = 18060$ obyvatel. Města B,C,D (3) mají dohromady $6000 + 4700 + 8760 = 19460$. Města A,C,D (4) mají dohromady $3300 + 4700 + 8760 = 16760$ obyvatel.

Odpověď:

Ve městech A, B, C, D bydlí 3300, 6000, 4700 a 8760 lidí.

Př.3

Ve firmě je 242 zaměstnanců. Od nového roku 72 z nich dostalo přidáno. Lepší plat si vysloužila $\frac{1}{3}$ ze všech mužů a 25% ze všech žen. Kolik je ve firmě mužů a žen?

Řešení:

Mužů je ve firmě.....x

Žen je ve firmě.....y

Celkem je zaměstnanců.....242

Přidáno dostalo.....72 zaměstnanců ($\frac{1}{3}$ všech mužů, 25% všech žen)

Pozn. $25\% = \frac{1}{4}$

Sestavíme si dvě rovnice. První nám vyjádří, že součet všech mužů a žen je stejný jako celkový počet zaměstnanců. Druhá vyjádří součet povýšených žen a mužů, který je stejný jako součet všech povýšených zaměstnanců

$$x + y = 242 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 72 \quad (2)$$

Z první rovnice (1) si vyjádříme x.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 242 \\ & & || - y \\ x & = & 242 - y \end{array}$$

A $x = 242 - y$ dosadíme do druhé rovnice (2).

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 72 \quad || \text{dosadíme } x = 242 - y$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot (242 - y) + \frac{1}{4}y &= 72 & || \cdot 12 \\
968 - 4y + 3y &= 864 & || - 968 \\
-y &= -104 & || \cdot (-1) \\
y &= 104
\end{aligned}$$

Nyní dosadíme $y = 104$ do vztahu $x = 242 - y$, který jsme si v úvodu odvodili.

$$\begin{aligned}
x &= 242 - y & || \text{dosadíme } y = 104 \\
x &= 138
\end{aligned}$$

Zkouška:

Porovnáme obě rovnice po dosazení vypočtených neznámých.

$$\begin{aligned}
x + y &= 242 & (1) \\
\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y &= 72 & (2) \\
138 + 104 &= 242 & (1) \\
\frac{1}{3} \cdot 138 + \frac{1}{4} \cdot 104 &= 72 & (2) \\
242 &= 242 & (1) \\
72 &= 72 & (2)
\end{aligned}$$

Odpověď:

Ve firmě je 138 mužů a 104 žen.

Př.4

Michal má ve třídě pětkrát více spolužáků než spolužaček. Jarka má ve stejné třídě sedmkrát více spolužáků než spolužaček. Kolik je ve třídě celkem chlapců a kolik dívek?

Řešení:

Chlapců je ve třídě..... x

Dívek je ve třídě..... y

Michal má ve třídě..... 5 krát více spolužáků než spolužaček

Jarka má ve třídě..... 7 krát více spolužáků než spolužaček

Sestavíme si dvě rovnice, kde uvidíme poměry chlapců a dívek ve třídě. Jednu z pohledu Michala a druhou z pohledu Jarky. V první rovnici odečteme od chlapců 1, což děláme kvůli tomu, abychom nezapočítali i Michala samotného. V druhé rovnici odečteme 1 od dívek, abychom nezapočítali zase Jarku.

$$x - 1 = 5y \quad (1)$$

$$x = 7(y - 1) \quad (2)$$

Neznámou z druhé rovnice $x = 7(y - 1)$ dosadíme do první rovnice (1) a vypočteme tak neznámou y .

$$7(y - 1) - 1 = 5y \quad || \text{roznásobíme závorku}$$

$$7y - 8 = 5y \quad || + 8$$

$$7y = 5y + 8 \quad || - 5y$$

$$2y = 8 \quad || : 2$$

$$y = 4$$

Dosazením $y = 4$ do druhé rovnice (2), dopočítáme x .

$$x = 7(y - 1) \quad || \text{dosadíme } y = 4$$

$$x = 7(4 - 1)$$

$$x = 21$$

Zkouška:

Michal má ve třídě 5 krát více spolužáků než spolužaček. Spolužáků má 20 a spolužaček 4. Jarka má ve třídě 7 krát více spolužáků než spolužaček. Spolužáků má 21 a spolužaček 3.

Odpověď:

Ve třídě je 21 chlapců a 4 dívky.

Př.5

Ve smíšeném hokejovém družstvu je šestina dívek. Hokejku na pravou stranu má $\frac{6}{8}$ hráčů, z toho $\frac{1}{4}$ ze všech dívek a 17 chlapců. Kolik je v týmu chlapců a kolik dívek?

Řešení:

Chlapců v týmu.....x

Dívek v týmu..... y

Hokejku na pravou stranu má..... $\frac{6}{8}$ hráčů, z toho $\frac{1}{4}$ dívek a 17 chlapců

Sestavíme si soustavu dvou rovnic, kterou poté budeme řešit. První rovnice nám ukáže, že šestina všech hráčů jsou dívky. Druhá znázorní, že čtvrtina dívek a 17 chlapců, to znamená všech hráčů s hokejkou na pravou stranu, je rovna $\frac{6}{8}$ všech hráčů.

$$\frac{1}{6}(x + y) = y \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}y + 17 = \frac{6}{8}(x + y) \quad (2)$$

Z první rovnice (1) si vyjádříme x.

$$\frac{1}{6}(x + y) = y \quad || \cdot 6$$

$$x + y = 6y \quad || - y$$

$$x = 5y$$

Nyní dosadíme $x = 5y$ do druhé rovnice (2).

$$\frac{1}{4}y + 17 = \frac{6}{8}(x + y) \quad || \text{dosadíme } x = 5y \text{ a zkrátíme zlomek } \frac{6}{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}y + 17 &= \frac{3}{4}(5y + y) && || \cdot 4 \\ y + 68 &= 18y && || - y \\ 68 &= 17y && || : 17 \\ y &= 4\end{aligned}$$

Dosadíme $y = 4$ do vztahu $x = 5y$, který jsme si v úvodu odvodili.

$$\begin{aligned}x &= 5y && || \text{dosadíme } y = 4 \\ x &= 20\end{aligned}$$

Zkouška:

V týmu je celkem $20 + 4 = 24$ hráčů. Šestina jsou dívky, tj. $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$. Hokejku na pravou stranu má $\frac{6}{8} \cdot 24 = 18$ hráčů, z toho čtvrtina dívek, tedy $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ a 17 chlapců.

Odpověď:

V týmu je 20 chlapců a 4 dívky.

Př.6

Zjistěte dvě čísla, o nichž víte, že součet dvojnásobku prvního a trojnásobku druhého je roven 29. Rozdíl čtyřnásobku prvního a dvojnásobku druhého je 2.

Řešení:

První číslo..... x

Druhé číslo..... y

Ze zadání víme, že $2x + 3y = 29$ a $4x - 2y = 2$.

Sestavíme si soustavu dvou rovnic ze zadání.

$$2x + 3y = 29 \quad (1)$$

$$4x - 2y = 2 \quad (2)$$

Vynásobíme první rovnici (1) dvěma a vyžijeme odčítací metodu pro vyřešení soustavy.

$$2x + 3y = 29 \quad || \cdot 2$$

$$4x + 6y = 58$$

Nyní dvojnásobek první rovnice (1) odečteme od druhé rovnice (2).

$$4x - 2y - (4x + 6y) = 2 - 58$$

$$-8y = -56 \quad || : (-8)$$

$$y = 7$$

Nyní dosadíme $y = 7$ do první rovnice (1).

$$2x + 3y = 29 \quad || \text{dosadíme } y = 7$$

$$2x + 3 \cdot 7 = 29 \quad || - 21$$

$$2x = 8 \quad || : 2$$

$$x = 4$$

Zkouška:

Součet dvojnásobku prvního a trojnásobku druhého je roven 29, tj. $2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 29$.

Rozdíl čtyřnásobku prvního a dvojnásobku druhého je 2, tedy $4 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 2$.

Odpověď:

První číslo je 4 a druhé číslo je 7.

Př.7

Ve fotbalovém týmu byli hráči rozděleni do dvou družstev, jedni byli červení a druzí bílí. Tým poprvé představoval nové sponzory, a tak hráči dostali kopačky značek Umbro a Nike. Čtvrtina všech hráčů dostala kopačky Umbro. Kolik hráčů bylo červených, jestliže počet hráčů v kopačkách Nike je o 9 větší než počet hráčů v bílých dresech a počet poloviny hráčů v červených dresech je o 1 větší než počet hráčů v kopačkách Umbro.

Řešení:

Hráčů v bílých dresech..... x

Hráčů v červených dresech..... y

Kopačky Umbro dostala..... čtvrtina všech hráčů, tedy $\frac{1}{4}(x + y)$

Kopačky Nike dostalo..... o 9 více než v bílých dresech, tedy $x + 9$

Polovina hráčů v červených dresech je o 1 větší než počet hráčů v kopačkách Umbro

Sestavíme si soustavu dvou rovnic. První nám ukáže, že součet hráčů v bílých a červených dresech je stejný jako součet hráčů v kopačkách Umbro a Nike. Víme, že polovina hráčů v červených dresech ($\frac{1}{2}y$) je o 1 větší než počet hráčů v kopačkách Umbro ($\frac{1}{4}(x + y)$). Tento poměr si znázorníme ve druhé rovnici.

$$x + y = \frac{1}{4}(x + y) + x + 9 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{4}(x + y) + 1 \quad (2)$$

Upravíme si první rovnici (1).

$$x + y = \frac{1}{4}(x + y) + x + 9 \quad || - x$$

$$y = \frac{1}{4}(x + y) + 9$$

Nyní odečteme druhou rovnici (2) od první (1).

$$y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}(x + y) + 9 - (\frac{1}{4}(x + y) + 1)$$

$$\frac{1}{2}y = 8 \quad || \cdot 2$$

$$y = 16$$

Dosadíme $y = 16$ do druhé rovnice (2)

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{4}(x + y) + 1 \quad || \text{dosadíme } y = 16$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 16 &= \frac{1}{4}(x + 16) + 1 \quad || \cdot 4 \\ 32 &= x + 16 + 4 \quad || - 20 \\ x &= 12\end{aligned}$$

Zkouška:

Bílé dresy mělo 12 hráčů, červené dresy mělo 16. Dohromady bylo $12 + 16 = 28$ hráčů. Čtvrtina dostala kopačky Umbro, tedy $\frac{28}{4} = 7$. Kopačky Nike dostal zbytek hráčů, tedy $28 - 7 = 21$. Počet hráčů v kopačkách Nike byl o $21 - 12 = 9$ větší. Polovina hráčů v červených dresech byla o $\frac{16}{2} - 7 = 1$ větší než počet hráčů v kopačkách Umbro.

Odpověď:

Červené dresy mělo 16 hráčů.

Př.8

Kdybychom ze skladu vyházeli polovinu čerstvých jablek a k tomu bychom vyhodili ještě 13 dalších jablek, zbyla by nám ve skladu třetina všech jablek a $4 + \frac{4}{3}$ jablek. Kolik kusů jablek je ve skladu, jestliže víme, že shnilých jablek je stejně jako čerstvých?

Řešení:

Celkem jablek..... x
Čerstvých jablek.....y
Shnilých jablek..... y
Vyhodíme-li..... $\frac{1}{2}y + 13$ jablek
Zbude..... $\frac{1}{3}x + 4 + \frac{4}{3}$ jablek

Nyní si sestavíme soustavu dvou rovnic. První rovnice nám znázorní, že se součet čerstvých a shnilých jablek rovná celkovému počtu jablek ve skladu. Druhá rovnice nám ukáže, že součet vyhozených jablek a zbylých jablek je také roven celkovému počtu jablek ve skladu.

$$x = y + y \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{2}y + 13 + \frac{1}{3}x + 4 + \frac{4}{3} \quad (2)$$

Nyní řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. V první rovnici (1) máme vyjádřené x , a tak ho stačí jen dosadit do druhé rovnice (2).

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2}y + 6 + 7 + \frac{1}{3}x + 4 + \frac{4}{3} && || -\frac{1}{3}x \\
 \frac{2}{3}x &= \frac{1}{2}y + \frac{55}{3} && || \text{dosadíme } x = 2y \\
 \frac{2}{3} \cdot 2y &= \frac{1}{2}y + \frac{55}{3} && || \cdot 6 \\
 8y &= 3y + 110 && || - 3y \\
 5y &= 110 && || : 5 \\
 y &= 22
 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $y = 22$ do první rovnice (1) a vypočteme celkový počet jablek x .

$$\begin{aligned}
 x &= y + y && || \text{dosadíme } y = 22 \\
 x &= 44
 \end{aligned}$$

Zkouška:

Celkem je na skladě 44 jablek. Kdyby se vyhodilo $\frac{1}{2} \cdot 22 + 13 = 24$ jablek, tak by zbylo $\frac{1}{3} \cdot 44 + 4 + \frac{4}{3} = 20$ jablek.

Odpověď:

Na skladě je 44 jablek.

3.3 Neřešené slovní úlohy s více neznámými

1.Dohromady je v 6.A a 6.B 61 žáků.V 6.A a 6.C je dohromady 58 žáků. V 6.B a 6.C je dohromady 59 žáků. Kolik je žáků v jednotlivých třídách?

2.Na jednu stranu vah bylo vyskládáno pět lahví od piva a jedna láhev od vína. Na druhou stranu vah byly rozmístěny tři láhve od piva a jedna od vína a závaží o hmotnosti 1,4 kg. Jaké hmotnosti měly jednotlivé lahve, když víme, že všechny láhve vážily 7,6 kg?

3.V bance bylo navržnuto 210 smluv. Podepsáno jich bylo 85. Smlouvu podepsala $\frac{1}{3}$ mužů a 50 % žen ze všech, kteří smlouvy navrhovali. Kolik smluv navrhovaly ženy?

4.Na hasičské soutěži byla družstva z Německa, České republiky, Itálie a Franci. V týmech Německa, České republiky a Itálie bylo dohromady 47 hasičů. Když bychom sečetli polovinu německých hráčů, polovinu českých hráčů a všechny italské hráče vyšlo by nám 32 hasičů. Součet italských a francouzských hasičů je 35. A součet českých a francouzských zmenšený o počet německých hasičů je 16. Kolik je v jednotlivých družstvech hasičů?

Výsledky k neřešeným úlohám se nacházejí na následující straně

4 Výsledky neřešených úloh

Neřešené úlohy s jednou neznámou

[1] 13; 26 [2] 33; 21 [3] 6 [4] 10; 30; 27 [5] 600; 450; 550 [6] 120; 150; 140; 112 [7] 50
minut [8] 10 min [9] 8064 cm³ [10] 11 cm

Neřešené úlohy s více neznámými

[1] 30; 31; 28 [2] 0,7;1 [3] 90 [4] 16; 14; 17; 18

5 Závěr

Práci na mojí sbírce jsem začal tím, že navštívil knihovnu Jihočeské univerzity, abych získal informace z nějakých již napsaných knih. Bohužel jsem žádnou podobnou sbírku, která by se zabírala jen rovníciemi nenašel, a tak jsem si musel vypůjčit alespoň ty knihy, které se mému tématu podobaly. Z těch jsem nakonec vybíral příklady, kterými jsem se inspiroval pro vytvoření mojí práce.

Sbírku jsem sestavoval s myšlenkou, že se budu chtít co nejlépe a nejpodrobněji zabývat řešením slovních úloh. Podoby slovních úloh jsem se snažil co nejvíce odlišovat, aby postupy jejich řešení byly rozdílné. Tím jsem chtěl docílit komplexnosti sbírky. K některým úlohám jsem ještě připojil obrázky, aby bylo možno lépe pochopit zadání.

Myslím, že má sbírka je jednou z mála svého druhu, a tak by mohla být vhodná jako učební pomůcka, což bylo také hlavním cílem mé práce.

6 Seznam použitých zdrojů

Literatura:

Běloun, František, *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ*. 6. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993.

Bittnerová, Anežka, *Úlohy z matematických olympiád*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-25439-X.

Frýzek M., Müllerová J., *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy*. 1.vydání. Praha: Fortuna, 1992, ISBN 80-85298-51-1.

Charvát, Jura a kol., *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

Internetové zdroje:

[1] Dopravní prostředky | Předškoláci.cz – omalovánky, pracovní listy [online]. [cit. 2013-6-26]. Dostupné z <http://www.predskolaci.cz/?p=8018>

[2] MEZINÁRODNÍ PRAVIDLA KRASOJÍZDY [online]. [cit. 2013-6-26]. Dostupné z <http://salovacyklistika.sweb.cz/smernice46.htm>

[3] Běžec | obrázek #47365979 | Pixmac [online]. [cit. 2013-6-26]. Dostupné z <http://www.pixmac.cz/fotka/běžec/000047365979>

[4] Walking Person Silhouette clip art - vector clip art online, royalty free & public domain [online]. [cit. 2013-6-26]. Dostupné z <http://www.clker.com/clipart-14727.html>

[5] Gioppino Basketball clip art - vector clip art online, royalty free & public domain [online]. [cit. 2013-6-26]. Dostupné z <http://www.clker.com/clipart-14957.html>

[6] Youth Spring Soccer [online]. [cit. 2013-6-26]. Dostupné z <https://grahamrecreationandparks.com/Default.aspx?tabid=86>

Software:

Geogebra 3.2.47.0

Malování

Microsoft Word 2007