Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Lineární algebra a řešení slovních úloh

Bakalářská práce

Autor:	David Štěpán
Studijní program:	B1407/Chemie
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
	Chemie se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	Ing. Mgr. Eva Trojovská

Hradec Králové červenec 2021

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**David Štěpán**
Studium:	S17CH086BP
Studijní program:	B1407 Chemie
Studijní obor:	Chemie se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název bakalářské práce:	**Lineární algebra a řešení slovních úloh**
Název bakalářské práce AJ:	Linear Algebra and Solving Word Problems

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Práce se v úvodu bude zabývat obecnými teoretickými východisky problematiky matic a determinantů. Tato část bakalářské práce bude provázána s možnostmi aplikace matic a determinantů v různých oblastech praxe. Autor práce k tomuto tématu sestaví typové slovní úlohy, u kterých případně rozebere různé způsoby řešení.

BICAN, Ladislav. Lineární algebra a geometrie. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9. BRADLEY, Teresa a Paul PATTON. Essential mathematics for economics and business. 2nd ed. / edited by Teresa Bradley. New York: J. Wiley, c2002. ISBN 0-470-84466-3. NICHOLSON, W. Keith a W. Keith NICHOLSON. Linear algebra with applications. 3rd ed. Boston: PWS Pub. Co., c1995. ISBN 0-534-93666-0.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Ing. Mgr. Eva Trojovská
Oponent:	doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 23.1.2019

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Lineární algebra a řešení slovních úloh vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové dne 14.7.2021 .... Štěpán

David Štěpán

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Mgr. Evě Trojovské, vedoucí mé bakalářské práce, za trpělivost, věcné připomínky a rady při zpracovávání této bakalářské práce.

Anotace

ŠTĚPÁN, D. *Lineární algebra a řešení slovních úloh*. Hradec Králové, 2021. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Ing. Mgr. Eva Trojovská. 69 s.

Bakalářská práce se zaměřuje na metody řešení různých slovních úloh s využitím teorie lineární algebry. Práce je rozdělena na dvě části. V první části je shrnuta teorie týkající se problematiky vektorů, matic, soustav lineárních rovnic, determinantu a Markovových řetězců. Druhá část je věnována využití těchto poznatků při řešení nejrůznějších slovních úloh.

Klíčová slova

lineární algebra, soustava rovnic, matice, determinant, využití matic a determinantů, slovní úloha

Annotation

ŠTĚPÁN, D. Linear algebra and solving word problems. Hradec Králové, 2021. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Ing. Mgr. Eva Trojovská. 69 s.

The bachelor thesis focuses on methods of solving various word problems using linear algebra theory. The work is divided into two parts. In the first part, the theory is summarized on the issue of vectors, matrices, systems of linear equations, determinant and Markov chains. The second part is devoted to the use of these knowledge in solving a variety of word problems.

Keywords

linear algebra, system of equations, matrix, determinant, use of matrices and determinants, word problem

Obsah

Úvod

Již na střední škole jsme si ukazovali různé triviální způsoby řešení soustav lineárních rovnic. Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých nám nedělala tak velký problém. Jak bychom ale řešili takovou soustavu o čtyřech neznámých? To se dozvíte, když budete číst dále, protože i na tento problém se v naší práci podíváme.

Práce čtenáře nejprve seznámí s teorií vektorů, od kterých volně přejde k problematice matic, které se často využívají při řešení soustav rovnic, jichž se týká navazující kapitola. V této kapitole si také ukážeme některé metody řešení soustav rovnic a také probereme jejich řešitelnost. Z této odbočky se vrátíme zpět k dalším vlastnostem matic, které nám též pomáhají při řešení různých typů úloh. Podíváme se například na matice inverzní a na metodu jejího nalezení. Okrajově si také povíme něco o Markovových řetězcích. V další kapitole si ukážeme využití determinantů, které se využívají nejen při řešení soustav rovnic, ale mohou mít též využití například i ve výpočtech obsahů a objemů některých geometrických útvarů.

Práce dále pokračuje sérií řešených praktických slovních úloh, ve kterých jsou využity teoretické poznatky a metody, se kterými jsme se seznámili v teoretické části. Na konci každé podkapitoly této praktické části jsou navíc uvedeny úlohy k procvičení, na kterých si může čtenář vyzkoušet pochopení použitého postupu.

Cílem práce je seznámit čtenáře s teorií lineární algebry a jejím využití v praktickém životě, a ukázat některé situace, ve kterých lze danou teorii uplatnit.

Práce je určena pro čtenáře, kteří mají základní znalosti týkající se lineární algebry. Může být využita i jako učební text pro matematickou nadstavbu pro studenty středních škol či gymnázií. Řešené úlohy mohou posloužit také jako inspirace pro kantory ke tvorbě obdobných úloh.

1 Vektory, vektorový prostor

Tento text předpokládá základní znalost algebraických operací a algebraických struktur.

Definice 1.1. Nechť T je těleso a V množina s binární operací sčítání, kterou budeme značit symbolem "$+$". Nechť je dáno zobrazení kartézského součinu $T \times V$ do množiny V; dvojici prvků $a \in T$ a $v \in V$ toto zobrazení přiřazuje prvek, který značíme $a \cdot v$ nebo jednodušeji av; hovoříme o *násobení* prvků množiny V prvky tělesa T, které značíme symbolem "$\cdot$". Nechť dále platí:

(a) $\forall u, v, w \in V \quad (u + v) + w = u + (v + w)$,
(b) $\forall u, v \in V \quad u + v = v + u$,
(c) $\exists o \in V \quad \forall u \in V \quad u + o = u$,
(d) $\forall u \in V \quad \exists -u \in V \quad u + (-u) = o$,
(e) $\forall u, v \in V \quad \forall a \in T \quad a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$,
(f) $\forall u \in V \quad \forall a, b \in T \quad (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$,
(g) $\forall u \in V \quad \forall a, b \in T \quad (a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$,
(h) $\forall u \in V \quad 1 \cdot u = u$.

Potom budeme říkat, že V je *vektorový prostor* (nebo *lineární prostor*) nad tělesem T. Prvkům množiny V budeme říkat *vektory*, prvkům tělesa T *skaláry*. Vektor označený symbolem o a popsaný axiómem (c) se nazývá *nulový vektor* prostoru V, vektor označený symbolem $-u$ a popsaný axiómem (d) se nazývá *opačný vektor* k vektoru u.

Poznámka: Axiomy (a)-(d) nám vlastně říkají, že množina V s binární operací sčítání je komutativní grupa.

Vektory můžeme značit pomocí šipky, např. $\vec{u}$ značí vektor. Při tomto označení je pak jasné, že se jedná o vektor. Při označení bez šipky, tedy jako u, musíme vždy zdůraznit, že se jedná o vektor.

Jelikož budeme u slovních úloh pracovat s vektory typu $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, kde $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, tedy kdy vektor u je daný uspořádanou n-ticí prvků z množiny $\mathbb{R}$, je potřeba zde tento typ nadefinovat.

Definice 1.2. Buď n přirozené číslo. Na množině T^n všech uspořádaných n-tic prvků z množiny T definujeme binární operaci sčítání prvků předpisem

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

a operaci násobení prvku z T^n prvkem z tělesa T předpisem

$$r(u_1, u_2, \dots, u_n) = (ru_1, ru_2, \dots, ru_n).$$

Množina T^n spolu s těmito operacemi se nazývá *aritmetický vektorový prostor dimenze n nad tělesem T* nebo též *n-rozměrný aritmetický vektorový prostor nad tělesem T*.

Poznámka: Tato definice platí i pro $T = \mathbb{R}$, tedy množina $\mathbb{R}^n$ s výše definovanými operacemi sčítání prvků z množiny $\mathbb{R}$ a násobení prvku z množiny $\mathbb{R}^n$ prvkem z tělesa $\mathbb{R}$ je též aritmetický vektorový prostor.

Někdy se n-rozměrný vektorový prostor značí také jako V_n.

Vektory z vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou tedy dány uspořádanou n-ticí prvků z $\mathbb{R}$, např. vektor $u = (2, 1, 7, 2) \in \mathbb{R}^4$, je dán uspořádanou čtveřicí reálných čísel.

Prvky aritmetického vektorového prostoru nazýváme aritmetické vektory.

Mějme vektor $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Prvky $u_1, u_2, \dots, u_n$ nazýváme složkami (souřadnicemi) vektoru u.

Definice 1.3. *Skalární součin* vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je reálné číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_1.$$

1.1 Lineární kombinace vektorů

Definice 1.4. Buďte $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektory z vektorového prostoru V. *Lineární kombinací vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$* rozumíme každý vektor

$$u = r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_n u_n = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i,$$

kde $r_1, r_2, \dots, r_n \in T$. Prvky $r_1, r_2, \dots, r_n$ se nazývají *koeficienty* lineární kombinace. Lineární kombinace se nazývá *triviální*, jsou-li všechny její koeficienty rovny nule, a *netriviální* v opačném případě, tj. je-li alespoň jeden z jejích členů od nuly různý.

Příklad

Zjistěte, zda je vektor $\vec{a} = (4, -5)$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, jestliže $\vec{u} = (2, 1)$ a $\vec{v} = (3, 5)$.

Řešení

Pokud je vektor $\vec{a}$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pak musí platit rovnost

$$\vec{a} = r_1 \vec{u} + r_2 \vec{v},$$

tedy

$$(4,-5) = r_1(2,1) + r_2(3,5),$$

kde r_1 a r_2 jsou reálná čísla.

Pokud rozepíšeme rovnost podle souřadnic vektorů, dostaneme:

$$\begin{aligned} 4 &= 2r_1 + 3r_2 \\ -5 &= r_1 + 5r_2. \end{aligned}$$

Nyní použijeme například sčítací metodu tak, že nejprve vynásobíme druhou rovnici číslem -2 a následně ji přičteme k rovnici první. Dostaneme:

$$14 = -7r_2.$$

Vychází tedy, že $r_2 = -2$ a po dosazení do druhé rovnice nám vychází, že $r_1 = 5$. Jelikož má tato soustava rovnic řešení (existují reálná čísla r_1a r_2), pak je pravda, že je vektor $\vec{a}$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Cvičení

1. Zjistěte, zda je vektor $\vec{a} = (7,3)$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, jestliže $\vec{u} = (5,-1\,)$ a $\vec{v} = (-4,1\,)$.

2. Zjistěte, zda je vektor $\vec{a} = (2,5)$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, jestliže $\vec{u} = (-2,1\,)$ a $\vec{v} = (4,-2\,)$.

Řešení

1. Vektor $\vec{a}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

2. Vektor $\vec{a}$ není lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

1.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice 1.5. Skupinu vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ nazýváme *lineárně závislou*, pokud existuje netriviální lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$, která je rovna nulovému vektoru. Stručně říkáme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou *lineárně závislé*.

Definice 1.6. Skupinu vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ nazýváme *lineárně nezávislou*, pokud není lineárně závislá. Stručně říkáme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou *lineárně nezávislé*.

Poznámka: Je zřejmé, že pokud jsou vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ lineárně nezávislé, tak neexistuje netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna nulovému vektoru. Tedy pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna nulovému vektoru.

Z definic lineární kombinace a lineární závislosti vektorů také vyplývá, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou lineárně závislé, jestliže existují prvky $r_1, r_2, \dots, r_n \in T$, z nichž alespoň jeden je nenulový, tak, že platí:

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_n u_n = o.$$

Naopak vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže platí vztah

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_n u_n = o.$$

pouze tehdy, když $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

Prvek $r_i = 0$ není číslo, nýbrž nulový prvek z tělesa T. Pokud $T = \mathbb{R}$, pak je nulovým prvkem tělesa T číslo 0.

2 Úvod do teorie matic

2.1 Vlastnosti a typy matic

Definice 2.1. Soubor

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prvků z tělesa T nazýváme *maticí typu* (m, n) (nad tělesem T). Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ z T^n nazýváme *i-tým řádkem* matice A a aritmetický vektor $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ z T^m nazýváme *j-tým sloupcem* matice A.

O prvcích $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ matice A typu (m, n), kde $k = \min\{m, n\}$, říkáme, že leží na *hlavní diagonále* nebo že tvoří diagonálu matice A. Prvky $a_{1k}, a_{2,k-1}, \dots, a_{k1}$ tvoří pak *vedlejší diagonálu*.

Matice A sestávající se ze samých nul, tj. taková, že $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ se nazývá *nulová matice*.

Matice A typu (n, n) se nazývá *čtvercová matice* stupně n. Matice B typu (m, n) se nazývá matice *obdélníková*, jestliže $m \neq n$.

Čtvercová matice stupně n, která má mimo hlavní diagonálu samé 0, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, se nazývá *diagonální*.

Diagonální matice $E = (e_{ij})$ stupně n taková, že $e_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ se nazývá *jednotková matice stupně* n.

Matice A se rovná matici B, právě když $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Poznámka: Matice typu (m, n) je tedy matice s m řádky a n sloupci.

Vektorům, které tvoří řádek matice A, můžeme také říkat řádkové vektory matice A. Vektorům tvořící sloupec matice A pak můžeme tedy říkat sloupcové vektory matice A.

O matici A typu (n, n) se také někdy říká, že je řádu n (místo stupně n).

Definice 2.2. Matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) nad tělesem T se nazývá *odstupňovaná*, jestliže pro její prvky platí:

(a) Je-li $m > 1$, pak $a_{21} = 0$.
(b) Jestliže pro nějaké $i \in \{1, \dots, m-1\}$ a $k \in \{1, \dots, n-1\}$ je

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = 0,$$

potom je též

$$a_{i+1,1} = a_{i+1,2} = \cdots = a_{i+1,k+1} = 0.$$

Poznámka: Někdy se místo pojmu odstupňovaná matice používá pojem matice ve schodovitém tvaru.

Matice A je tedy odstupňovaná (resp. ve schodovitém tvaru), jestliže platí, že pokud je na i-tém řádku matice A před prvním nenulovým prvkem k nul, pak je na $(i+1)$-ním řádku matice A alespoň $k+1$ nul (pokud takový řádek existuje).

My víme, že 0 je nulový prvek tělesa T. My budeme pracovat v oboru reálných čísel, tedy $T = \mathbb{R}$, a nulový prvek reálných čísel je číslo 0. Jestliže nebude uvedeno jinak, tak se budeme pohybovat vždy v $\mathbb{R}$.

Příklad

Rozhodněte, zda jsou odstupňované následující matice:

$$A_1 = (1 \quad 2), \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Pro matici A_3 není splněna podmínka (a) z definice odstupňované matice, proto matice A_3 odstupňovaná není.

Pro matice A_2 a A_5 není splněná podmínka (b) z definice odstupňované matice, proto matice A_2 a A_5 nejsou odstupňované.

Podmínky (a) a (b) platí tedy jen pro matice A_1, A_4, A_6 a A_7, tudíž jsou tyto matice odstupňované.

Definice 2.3. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu (m, n), potom *transponovaná matice* je matice typu (n, m) tvaru $A^T = (a_{ji})$ tj. pro

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{je } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Transponovaná matice A^T nám tedy vznikne z matice A zaměněním řádků matice A za její sloupce (resp. zaměněním sloupců za řádky).

Definice 2.4. Matice $A = (a_{ij})$ se nazývá *symetrická* (resp. *antisymetrická*), platí-li $A = A^T$ (resp. $A = -A^T$), tj. $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$) pro $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Poznámka: Z definice vyplývá, že aby mohla být matice A symetrická, resp. antisymetrická, pak musí být matice A čtvercová matice řádu n.

Definice 2.5. Následující úpravy matice se nazývají *elementární řádkové úpravy (transformace) matice* nebo *elementární úpravy (transformace) matice vzhledem k řádkům*:

(a) Vynásobení nějakého řádku matice nenulovým reálným číslem.
(b) Přičtení libovolného násobku jiného řádku k nějakému řádku této matice.

Podobně pro sloupce:
Elementární sloupcové úpravy (transformace) matice nebo *elementární úpravy (transformace) matice vzhledem k sloupcům* jsou následující úpravy matice:

(a) Vynásobení nějakého sloupce matice nenulovým reálným číslem.
(b) Přičtení libovolného násobku jiného sloupce k nějakému sloupci této matice.

Věta 2.1. *Výměna dvou řádků (sloupců) matice se dá realizovat konečným počtem elementárních transformací vzhledem k řádkům (sloupcům) této matice.*

Definice 2.6. Matice A, B se nazývají *ekvivalentní*, jestliže lze převést jednu na druhou pomocí konečného počtu elementárních úprav.

Poznámka: Jestliže je matice A ekvivalentní matici B, můžeme tento fakt značit jako $A \sim B$.

Věta 2.2. *Každá matice se dá konečným počtem elementárních transformací vzhledem k řádku převést na matici ve schodovitém tvaru (resp. odstupňovanou).*

Poznámka: Nechť máme matici A nad tělesem T ve schodovitém tvaru. Nechť vektory $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nenulové řádkové vektory matice A. Vytvoříme lineární kombinaci vektorů $a_1, a_2, \dots, a_n$ a položíme ji rovnou nulovému vektoru o. Tedy

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n = o.$$

Nyní by nás mohlo zajímat, co platí pro koeficienty této lineární kombinace. Vezmeme si první nenulový řádkový vektor a_1 matice A. Nechť je i-tá souřadnice tohoto vektoru první nenulová, pak z definice matice ve schodovitém tvaru plyne, že v každém dalším vektoru $a_2, \dots, a_n$ je i-tá souřadnice nulová. Aby nám tedy vznikl lineární kombinací vektorů $a_1, a_2, \dots, a_n$ nulový vektor, musí být nutně koeficient vektoru a_1 roven nule. Tuto úvahu provedeme postupně i u vektorů $a_2, \dots, a_n$.

Dojdeme k tomu, že pro koeficienty $r_1, r_2, \dots, r_n$ platí:

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0.$$

Z toho můžeme vyvodit následující užitečnou větu.

Věta 2.3. *Nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé vektory.*

2.2 Hodnost matice

Definice 2.7. Říkáme, že soustava $\{a_1, \dots, a_k\}$ vektorů z V_n má *hodnost* h, jestliže mezi vektory $a_1, \dots, a_k$ existuje h lineárně nezávislých vektorů, ale každých $h + 1$ vektorů z $a_1, \dots, a_k$ jsou již vektory lineárně závislé. (h pak je maximální počet lineárně nezávislých vektorů dané soustavy.)

Definice 2.8. *Hodností matice* nazýváme hodnost soustavy vektorů tvořených řádky této matice.

Poznámka: Platí tedy, že má matice A hodnost h, pokud je mezi řádkovými vektory matice A h lineárně nezávislých vektorů $a_1, \dots, a_k$, ale pokud k nim přidáme další řádkový vektor a_{k+1} této matice, tak jsou vektory $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ lineárně závislé. Lze tedy říci, že je vektor a_{k+1} lineární kombinací vektorů $a_1, \dots, a_k$.

Hodnost matice A můžeme značit i jako $h(A)$.

Jelikož jsou nenulové řádkové vektory matice ve schodovitém tvaru lineárně nezávislé, pak je hodnost matice ve schodovitém tvaru rovna počtu jejích nenulových řádků. Proto je při zjišťování hodnosti libovolné matice výhodné, převést ji na ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.

Věta 2.4. *Pro hodnost h matice A typu* (m, n) *platí*

$$h \leq \min(m, n).$$

Věta 2.5. *Hodnosti matice A a transponované matice* A^T *jsou si rovny.*

Poznámka: Jelikož jsou hodnosti matice A a transponované matice A^T stejné, pak můžeme definici hodnosti matice rozšířit i o sloupcové vektory, tedy hodností matice nazýváme hodnost soustavy vektorů tvořených řádky (resp. sloupci) této matice.

Věta 2.6. *Hodnost matice se nezmění,*

(a) *zaměníme-li pořadí řádků v matici,*
(b) *vynásobíme-li jeden řádek nenulovým číslem,*
(c) *přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků,*
(d) *vynecháme-li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice.*

Poznámka: Stejné podmínky platí i pro sloupce matice.

Vidíme, že (a), (b) a (c) v předchozí větě jsou vlastně elementární transformace vzhledem k řádkům matice.

Definice 2.9. Čtvercová matice se nazývá *regulární*, jestliže je její hodnost rovna jejímu řádu; v opačném případě, tj. když je její hodnost menší než její řád, se nazývá *singulární*.

Věta 2.7. *Každá regulární matice je ekvivalentní jednotkové matici.*

Příklad

Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Je matice A regulární?

Řešení

Nejprve si matici A převedeme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 11 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 11 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků, tedy $h(A) = 3$. Jelikož je matice A řádu 5 a její hodnost je rovna 3, tak není matice A regulární.

Cvičení

1. Určete hodnost matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Je matice B singulární?

2. Určete hodnost matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Je matice C regulární?

Výsledky

1. Hodnost matice B řádu 3 je $h(B) = 3$. Řád matice je roven hodnosti matice, proto není matice B singulární.

2. Hodnost matice C řádu 4 je $h(B) = 3$. Řád matice není roven hodnosti matice, proto není matice C regulární.

3 Soustavy lineárních rovnic

Definice 3.1. *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T* rozumíme soustavu tvaru

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

kde koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ a pravé strany $b_1, b_2, \dots, b_m$ jsou prvky tělesa T.

Vyřešit tuto soustavu rovnic znamená najít všechny n-tice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ prvků tělesa T, pro které platí všech m výše uvedených vztahů; každá takováto n-tice se nazývá *řešení soustavy* $(*)$. Jestliže soustava $(*)$ má, resp. nemá řešení, nazývá se *řešitelná*, resp. *neřešitelná*. Jestliže je $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, hovoříme o *homogenní soustavě*; v opačném případě o *nehomogenní soustavě*. Matice

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, (A|b^T) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),
$$

se nazývají po řadě *matice soustavy*, *sloupec pravých stran* a *rozšířená matice soustavy* $(*)$.

Soustava lineárních rovnic $(*)$ se často zapisuje ve tvaru

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m,
$$

nebo v symbolickém tvaru

$$
Ax = b.
$$

Budeme-li hovořit o soustavě $Ax = b$, pak odpovídající homogenní soustavou budeme rozumět soustavu $Ax = o$.

Poznámka: Rozšířená matice soustavy se tedy skládá z matice soustavy a ze sloupce pravých stran, resp. vektoru $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$.

Vektoru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ můžeme říkat vektor řešení soustavy.

3.1 Řešitelnost soustavy rovnic

Věta 3.1. *Nechť A je matice systému $(*)$ lineárních rovnic, který má n neznámých a $(A|b^T)$ rozšířená matice tohoto systému. Pak platí*

(a) *Systém* $(*)$ *je řešitelný, právě když hodnost matice soustavy* $h(A)$ *je rovna hodnosti matice rozšířené* $h(A|b^T)$. *(známé jako Krenecker-Capelliova věta nebo Frobeniova věta)*
(b) *Systém* $(*)$ *má právě jedno řešení, právě když* $h(A) = h(A|b^T) = n$.
(c) *Systém* $(*)$ *má nekonečně mnoho řešení, právě když* $h(A) = h(A|b^T) < n$. *V tomto případě množina všech řešení závisí na* $n - h(A)$ *nezávislých parametrech.*

Poznámka: Jelikož má homogenní soustava rovnic pravé strany rovny 0, pak Frobeniova věta platí vždy.

Z Frobeniovy věty také vyplývá, že soustava nemá řešení, pokud hodnost matice $h(A)$ je různá od hodnosti matice rozšířené $h(A|b^T)$. Zjevně hodnost matice $h(A)$ nemůže být větší než hodnost rozšířené matice $h(A|b^T)$, tedy soustava nemá řešení, pokud $h(A) < h(A|b^T)$.

Definice 3.2. Dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

Věta 3.2. *Jestliže matice* (C, d^T) *vznikne z matice* (A, b^T) *užitím řádkových elementárních úprav, potom soustavy lineárních rovnic* $Ax = b$ *a* $Cx = d$ *jsou ekvivalentní.*

Poznámka: Při elementárních řádkových úpravách rozšířené matice soustavy budeme upravovat tedy i sloupec pravých stran. Pokud budeme hovořit v souvislosti s rozšířenou maticí soustavy pouze o matici soustavy, tak budeme myslet tu část rozšířené matice soustavy bez sloupce pravých stran soustavy.

3.2 Gaussova eliminační metoda

Při řešení soustav lineárních rovnic se využívají různé metody. Jednou z nich je tzv. Gaussova eliminační metoda. Ta spočívá v tom, že se rozšířená matice soustavy převede řádkovými elementárními transformacemi (úpravami) na matici ve schodovitém tvaru. Následně můžeme rozhodnout o řešitelnosti této soustavy. V případě řešitelné soustavy můžeme přepsat matici ve schodovitém tvaru zpět do soustavy rovnic a pomocí tzv. zpětné substituce najít řešení soustavy.

Metodu si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad

Máme dánu soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 21, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 21. \end{aligned}$$

Nalezněte řešení této soustavy, pokud existuje.

Řešení

Nejprve si napíšeme rozšířenou matice naší soustavy. Ta vypadá takto:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & 21 \end{array}\right).$$

Nyní upravíme rozšířenou matici soustavy pomocí elementárních řádkových úprav tak, abychom dostali matici ve schodovitém tvaru. První řádek neupravujeme. Pak například první řádek vynásobíme číslem -2 a přičteme ho ke druhému řádku. Následně vynásobíme první řádek číslem -3 a přičteme ho ke třetímu řádku. Tím získáme ve všech řádcích kromě prvního v prvním sloupci samé nuly. Matice bude mít tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -1 & 11 \\ 0 & -5 & -4 & 6 \end{array}\right).$$

Nyní potřebujeme ve třetím řádku druhého sloupce dostat nulu. Druhý řádek tedy vynásobíme číslem 5 a přičteme ho ke třetímu řádku vynásobeným číslem -6. Dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 19 & 19 \end{array}\right).$$

Pokud tuto matici přepíšeme jako soustavu rovnic, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ -6x_2 - x_3 &= 11, \\ 19x_3 &= 19. \end{aligned}$$

Vidíme, že $x_3 = 1$ a zpětnou substitucí do druhé rovnice (za x_3 dosadíme číslo 1) dojdeme k tomu, že $x_2 = -2$. Pokud následně uděláme substituci v první rovnici, tak nám vyjde $x_1 = 8$.

Řešením soustavy je tedy uspořádaná trojice $x_1 = 8$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, což lze zapsat jako vektor řešení $x = (8, -2, 1)$.

3.3 Gauss-Jordanova eliminační metoda

U Gauss-Jordanovy metody se postupuje nejprve stejně jako u Gaussovy eliminační metody, tedy nejprve upravujeme rozšířenou matici soustavy na schodovitý tvar. Následně však pokračujeme v úpravách tak, abychom na místě matice soustavy dostali matici jednotkovou. Pak na pravé straně takto upravené rozšířené matice nalezneme transponovaný vektor řešení naší soustavy rovnic. Tuto metodu můžeme použít pouze u regulárních matic.

Příklad

Uvažujme předchozí soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 21, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 21. \end{aligned}$$

Nalezněte řešení této soustavy Gauss-Jordanovou metodou.

Řešení

Pomocí elementárních řádkových úprav upravíme rozšířenou matici soustavy nejprve na schodovitý tvar. Následně upravujeme rozšířenou matici soustavy tak, abychom na místě matice soustavy dostali matici jednotkovou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 19 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Vektor řešení je tedy $x = (8, -2, 1)$.

Cvičení

1. Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= -11, \\ 2x_1 + 3x_3 &= 14, \\ -5x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   Najděte řešení této soustavy (pokud existuje) pomocí Gaussovy eliminační metody.

2. Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic pomocí Gauss-Jordanovy metody:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 15, \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 &= 19. \end{aligned}$$

Výsledky

1. $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4$

2. $x_1 = 7,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

4 Další vlastnosti a druhy matic

4.1 Součet a součin matic

Definice 4.1. *Součtem dvou matic*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

téhož typu (m,n) rozumíme matici

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $r \in T$ libovolný prvek, pak r-*násobkem matice* A rozumíme matici

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definice 4.2. Buď $A = (a_{ij})$ matice typu (m,n) a $B = (b_{ij})$ typu (n,p) nad tělesem T. *Součinem* AB těchto matic (v tomto pořadí) rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu (m,p), kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Věta 4.1. *Buď A matice typu (m,n), B, C buďte matice typu (n,p), D buď matice typu (p,q), E_n a E_m buďte matice stupňů n a m a $r \in T$ buď libovolný prvek. Pak platí:*

(a) $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BD + CD$,
(b) $(AB)D = A(BD)$,
(c) $(rA)B = A(rB) = r(AB)$,
(d) $E_m A = AE_n = A$.

Věta 4.2. *Buď A matice typu (m,n) a B matice typu (n,p) na tělesem T. Pak platí:*

(a) $(A^T)^T = A$,
(b) $(AB)^T = B^T A^T$.

4.2 Inverzní matice

Definice 4.3. Jestliže A je čtvercová matice řádu n nad tělesem T, potom čtvercová matice A^{-1} řádu n se nazývá *inverzní matice* k matici A, jestliže $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Matice A, ke které inverzní matice existuje, se nazývá *invertibilní*.

Věta 4.3. *Ke čtvercové matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.*

Věta 4.4. *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Potom k matici A existuje inverzní matice právě tehdy, když matice A je regulární.*

Věta 4.5. *Buďte A, B regulární čtvercové matice řádu n. Pak platí:*

(a) *součin AB je regulární matice a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,*
(b) *matice A^{-1} je regulární a platí $(A^{-1})^{-1} = A$,*
(c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4.3 Elementární transformační matice

Definice 4.4. *Elementární transformační maticí* budeme rozumět každou invertibilní matici, která se nejvýše na jednom místě liší od jednotkové matice.

Rozeznáváme dva typy elementárních transformačních matic:

(a) V matici jsou mimo hlavní diagonálu samé nuly. Na hlavní diagonále jsou jedničky s výjimkou místa ii, kde stojí nenulový prvek b (prvek b musí být nenulový, neboť matice má být invertibilní). Je-li $b = 1$, jde o jednotkovou matici.
(b) V matici jsou na hlavní diagonále samé jedničky. Mimo hlavní diagonálu jsou nuly s výjimkou místa ij, kde stojí prvek b. Je-li $b = 0$, jde o jednotkovou matici.

Poznámka: Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dále mějme elementární transformační matici prvního typu

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zkusme nyní vynásobit matici A elementární transformační maticí T_1 nejprve zleva:

$$T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že při násobení matice A elementární transformační maticí prvního typu s nenulovým prvkem b na místě ii zleva nám vznikne matice nová, která se od matice A odlišuje tím, že je její i-tý řádek b-násobkem i-tého řádku matice A.

Zkusme nyní vynásobit matici A elementární transformační maticí T_1 zprava:

$$A \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že při násobení matice A elementární transformační maticí prvního typu s nenulovým prvkem b na místě ii zprava nám vznikne matice nová, která se od matice A odlišuje tím, že je její i-tý sloupec b-násobkem i-tého sloupce matice A.

Nechť máme dále elementární transformační matici druhého typu

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podívejme se, co se stane, když vynásobíme matici A elementární transformační maticí T_2 zleva:

$$T_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Při násobení matice A elementární transformační maticí druhého typu s nenulovým prvkem b na místě ij zleva nám tedy vznikne matice nová, která se od matice A odlišuje tím, že je její i-tý řádek součtem i-tého řádku a b-násobku j-tého řádku matice A.

Zkusme nyní vynásobit matici A elementární transformační maticí T_2 zprava:

$$A \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Při násobení matice A elementární transformační maticí druhého typu s nenulovým prvkem b na místě ij zprava nám tedy vznikne matice nová, která se od matice A odlišuje tím, že je její i-tý sloupec součtem j-tého sloupce a b-násobku i-tého sloupce matice A.

4.4 Gauss-Jordanova metoda určení inverzní matice

Mějme regulární matici A řádu n. Tuto matici převedeme pomocí elementárních řádkových úprav (násobení matice A elementárními transformačními maticemi $B_1, B_2, \dots, B_k$ zleva) na matici ve schodovitém tvaru a následně na jednotkovou matici. Tedy platí:

$$B_k \cdot B_{k-1} \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot A = E.$$

Pokud vynásobíme obě strany zprava maticí A^{-1}, pak dostaneme

$$A^{-1} = B_k \cdot B_{k-1} \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot A \cdot A^{-1} = B_k \cdot B_{k-1} \cdot \ldots \cdot B_1.$$

Tedy inverzní matice k matici A je součinem elementárních transformačních matic $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Ke zjištění inverzní matice se využívá tzv. Gauss-Jordanova metoda. Tato metoda spočívá ve vytvoření matice $(A|E)$ typu $(n, 2n)$ a následném převedení této matice pomocí řádkových elementárních úprav (úpravy provádíme pro obě matice zároveň) na matici $(E|B)$.

Platí:

$$B = B_k \cdot B_{k-1} \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot E = B_k \cdot B_{k-1} \cdot \ldots \cdot B_1 = A^{-1}.$$

Z matice E nám tedy vznikla hledaná inverzní matice A^{-1} k matici A.

Příklad

Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pomocí Gauss-Jordanovy metody.

Řešení

Nejprve vytvoříme matici $(A|E)$ následně ji převedeme elementárními řádkovými úpravami na matici $(E|A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1{,}25 & 0{,}25 & -0{,}75 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 4 & -0{,}75 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{array}\right).$$

Inverzní matice k matici A vypadá tedy takto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}25 & -0{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 \\ -0{,}75 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Cvičení

1. Najděte matici inverzní k matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Najděte inverzní matici k matici

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledky

1. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Inverzní matice k matici C neexistuje.

4.5 Markovovy řetězce

Tento text předpokládá základní znalosti z teorie pravděpodobnosti.

Definice 4.5. Posloupnost diskrétních náhodných veličin $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, jejíž složky X_n nabývají hodnot z množiny stavů S, tvoří *Markovovův řetězec* s diskrétním časem, jestliže platí

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\,) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n\,),$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé $i_0, \dots, i_n, j \in S$ takové, že $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) > 0$.

Chování tohoto systému je určeno:

(a) Vektorem absolutních pravděpodobností v určitém okamžiku

$$p(n) = \big(p_1(n), p_2(n), \dots, p_m(n)\big), \qquad (**)$$

kde $p_i(n)$ značí pravděpodobnost, že proces je v okamžiku n ve stavu i, kde $i \in 1, 2, \dots, m$.

(b) Maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix},$$

kde p_{ij} značí pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j, pro $i, j \in 1, 2, \dots, m$.

Poznámka: Rovnost $(**)$ nám říká, že stav v okamžiku $n + 1$ nezáleží na stavech minulých, ale pouze na stavu v předchozím časovém okamžiku n.

Je zřejmé, že součet $p_1(n), p_2(n), \dots, p_m(n)$ je roven 1. Pro každé $i \in 1, 2, \dots, m$ je také součet $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}$ roven 1.

Věta 4.6. *Pravděpodobnost stavů vyjadřuje na počátku řádkový vektor*

$$p(0) = \big(p_1(0), p_2(0), \dots, p_m(0)\big),$$

dále se vyvíjí podle rekurentního vzorce

$$p(n+1) = p(n) \cdot P,$$

$$p(n+k) = p(n) \cdot P^k,$$

$$p(n) = p(0) \cdot P^n.$$

Příklad

Mějme dánu matici přechodu P a počáteční vektor absolutních pravděpodobností stavů $p(0) = (0{,}1; 0{,}8; 0{,}1)$. Matice přechodu P vypadá takto:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Určete $p(2)$ a $p(5)$, tedy vektory absolutních pravděpodobností stavů po dvou obdobích a po pěti obdobích.

Řešení

Víme, že platí vzorec

$$p(n) = p(0) \cdot P^n,$$

stačí do něj tedy pouze dosadit. Pak

$$p(2) = (0{,}1; 0{,}8; 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix} = (0{,}76; 0{,}2; 0{,}04),$$

$$p(5) = (0{,}1; 0{,}8; 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}^5 = (0{,}46; 0{,}38; 0{,}16).$$

Poznámka: Konkrétním jevům můžeme přiřazovat stavy, např. přeháňky v zimě mohou být sněhové (stav 1) nebo dešťové (stav 2). Tedy vektor $p(n) = (0{,}3; 0{,}7)$ nám říká, že v časovém okamžiku n je 30% pravděpodobnost, že budou přeháňky sněhové, a 70% pravděpodobnost, že budou dešťové. Matice přechodu $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ nám říká, že je 80% pravděpodobnost, že přeháňky sněhové zůstanou v příštím časovém okamžiku sněhové, 20% pravděpodobnost, že přeháňky sněhové přejdou na přeháňky dešťové, 40% pravděpodobnost, že přeháňky dešťové přejdou na přeháňky sněhové a 60% pravděpodobnost, že přeháňky dešťové nastanou i v příštím časovém okamžiku.

Mějme matici přechodu mezi třemi stavy

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Může se stát, že se bude proces nacházet na počátku v jednom ze tří daných stavů. Matice všech třech možností vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vytvoříme-li součin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^n,$$

pak je výsledkem matice P^n, která má v prvním řádku vektor absolutních pravděpodobností v čase n při počátečním stavu daným vektorem $(1, 0, 0)$, ve druhém řádku má vektor absolutních pravděpodobností v čase n při počátečním stavu daným vektorem $(0, 1, 0)$ a ve třetím řádku vektor absolutních pravděpodobností v čase n při počátečním stavu daným vektorem $(0, 0, 1)$.

Matice P^n nám pak udává pravděpodobnosti stavů v okamžiku n pro různé počáteční stavy. Dejme tomu, že $n = 3$, pak má tato matice v našem případě přibližně tvar

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}328 & 0{,}397 & 0{,}275 \\ 0{,}373 & 0{,}323 & 0{,}304 \\ 0{,}315 & 0{,}426 & 0{,}259 \end{pmatrix}.$$

Tato matice nám například říká, že v případě, že byl na počátku proces ve stavu 1, je 39,7% pravděpodobnost, že je v okamžiku $n = 3$ ve stavu 2. Nebo například v případě, že byl na začátku proces ve stavu 3, je pravděpodobnost 25,9 %, že se nachází ve stavu 3 i v čase $n = 3$

5 Determinanty

Pojem determinantu se týká čtvercových matic. Ke každé čtvercové matici $A = (a_{ij})$ řádu n existuje reálné číslo, kterému se říká determinant matice A. Tento determinant je označován jako $\det A$ nebo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

Definice 5.1. Nechť $A = (a_{ij})$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq n$ je matice typu (m, n) a nechť $i_1, \dots, i_k$, $j_1, \dots, j_l$ $(k, l \in \mathbb{N})$ jsou přirozená čísla s vlastností $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq n$. *Podmaticí matice A vybranou na řádcích* $i_1, \dots, i_k$ *a sloupcích* $j_1, \dots, j_l$ *matice A* rozumíme matici B, která vznikne z matice A, jestliže z A vypustíme všechny řádky s výjimkou řádků $i_1, \dots, i_k$ a všechny sloupce s výjimkou sloupců $j_1, \dots, j_l$. Přesněji: matice $B = (b_{uv})$ je matice typu (k, l), kde $1 \leq u \leq k$, $1 \leq v \leq l$ máme

$$b_{uv} = a_{i_u j_v}.$$

Definice 5.2. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Předpokládejme, že pro každou čtvercovou matici řádu $n - 1$ je již definován její determinant. Nechť i, j jsou přirozená čísla, $1 \leq i, j \leq n$. Determinant z podmatice A vybrané na všech řádcích matice A s výjimkou řádku i a všech sloupcích matice A s výjimkou sloupce j nazveme (i, j)-*minorem* matice A a označíme symbolem $M_{ij}(A)$. *Algebraický doplněk prvku* a_{ij} *matice A* nebo též (i, j)-*kofaktor matice A* označovaný symbolem $C_{ij}(A)$ je definován jako číslo

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A).$$

Číslo $(-1)^{i+j}$ se často nazývá *znaménko* (i, j)-*pozice*.

Definice 5.3. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a předpokládejme, že pro každou čtvercovou matice řádu $n - 1$ je již definován její determinant. Pro přirozená čísla i, j, $1 \leq i, j \leq n$ položme

$$R(i) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} C_{ir}(A), \qquad S(j) = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} C_{sj}(A).$$

Jeden z hlavních výsledků teorie determinantů je fakt, že všechny hodnoty $R(i)$ a $S(j)$ jsou si rovny, přesněji:

Pro přirozená čísla i, j, k, l, $1 \leq i, j, k, l \leq n$ máme

$$R(i) = R(k) = S(j) = S(l).$$

Tuto společnou hodnotu nazveme *determinantem matice* A. Počítáme-li $\det A$ pomocí výrazu $R(i)$, řekneme, že jsme $\det A$ počítali *Laplaceovým rozvojem podle* i*-tého řádku* nebo že jsme $\det A$ *rozvinuli podle* i*-tého řádku (Laplaceovým rozvojem)*. Podobně to platí pro sloupce.

Poznámka: V předchozí definici tedy $R(i)$ značí determinant získaný Laplaceovým rozvojem podle i-tého řádku a $S(j)$ pak determinant získaný Laplaceovým rozvojem podle j-tého sloupce, přičemž jsou si tyto hodnoty $R(i)$ a $S(j)$ rovny.

Věta 5.1. *Pro čtvercovou matici A platí:*

$$\det A = \det A^T.$$

Poznámka: Předchozí věta nám říká, že můžeme v matici A zaměnit řádky za sloupce (respektive sloupce za řádky) a determinant nově vzniklé matice A^T bude roven determinantu matice A.

Věta 5.2. *Nechť A je čtvercová matice. Pak platí:*

(a) *Jestliže některý řádek nebo sloupec matice A obsahuje samé* 0*, pak* $\det A = 0$.
(b) *Jestliže zaměníme dva řádky nebo sloupce matice A, pak výsledná matice má determinant rovný –* $\det A$.
(c) *Jestliže řádek nebo sloupec matice A násobíme reálným číslem* r*, pak výsledná matice má determinant rovný* $r \cdot (\det A)$.
(d) *Jestliže dva různé řádky nebo sloupce matice A jsou si rovny, pak* $\det A = 0$.

Věta 5.3. *Hodnota determinantu čtvercové matice se nemění, jestliže v této matici přičteme násobek nějaké řádku k jinému řádku nebo násobek nějakého sloupce k jinému sloupci.*

Definice 5.4. Nechť je matice $A = (a)$ řádu 1, pak $\det A = \det(a) = a$.

Poznámka: Nechť je matice A řádu 2, pak Laplaceovým rozvojem podle libovolného řádku nebo sloupce dojdeme k tomu, že platí:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b.$$

Příklad

Uvažujme čtvercovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte determinant matice A.

Řešení

Vypočítáme determinant matice A pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku, pak

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Jelikož víme, že jestliže některý řádek nebo sloupec determinantu obsahuje samé nuly, tak je determinant roven 0. Pak

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -7.$$

Determinant je tedy roven číslu -7.

Poznámka: Nechť máme čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n, kde je v j-tém sloupci nenulový pouze prvek a_{ij}, tedy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pokud rozvineme determinant této matice podle j-tého sloupce nebo i-tého řádku Laplaceovým rozvojem, tak platí, že

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |B|,$$

kde

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matice B je tedy podmatice, která vznikla z matice A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Stejně to platí i pro čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n, kde je v i-tém řádku nenulový pouze prvek a_{ij}.

Je tedy výhodné, pokud je to možné, upravit původní čtvercovou matici tak, aby byl v jednom řádku nebo jednom sloupci pouze jeden nenulový prvek.

Příklad

Uvažujme čtvercovou matici A ve schodovitém tvaru, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte determinant matice A.

Řešení

Z prvního pohledu vidíme, že v prvním sloupci je jen jeden nenulový prvek. Také vidíme, že ve čtvrtém řádku je jen jeden nenulový prvek. Pro jednoduchý výpočet determinantu matice A si zvolíme rozvoj podle prvního řádku (může být zvolen i rozvoj podle prvního sloupce, čtvrtého řádku nebo čtvrtého sloupce):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot B_1,$$

kde $B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Vidíme, že determinant B_1 opět můžeme vypočítat jednoduše Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku. Tedy

$$B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot B_2,$$

kde $B_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Nyní vidíme, že je možné determinant B_2 opět vypočítat jednoduše Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku. Tedy

$$B_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot |3|,$$

přičemž víme, že $|3| = \det 3 = 3$.

Pak tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 \cdot 5 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60.$$

Všimněte si, že je determinant matice A roven součinu prvků hlavní diagonály matice A.

Poznámka: Nechť máme matici $A = (a_{ij})$ řádu n ve schodovitém tvaru, tedy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n-1} & a_{k-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kde $1 \leq k \leq n$.

Pokud rozvineme determinant této matice podle prvního řádku Laplaceovým rozvojem, tak platí, že

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n-1} & a_{k-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n-1} & a_{k-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pokud budeme pokračovat rozvojem vždy podle prvního řádku, pak dostaneme vztah

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn},$$

tedy že determinant matice A je roven součinu prvků její hlavní diagonály.

Determinant matice A jsme také mohli rozvinout Laplaceovým rozvojem podle prvního sloupce, n-tého řádku nebo n-tého sloupce, výsledek by byl stejný.

Je zřejmé, že jestliže je nějaký prvek v hlavní diagonále čtvercové matice A ve schodovitém tvaru roven 0, pak platí, že $\det A = 0$.

Pokud libovolnou čtvercovou matici upravíme do schodovitého tvaru, pak bude determinant této matice roven součinu prvků její hlavní diagonály. Při úpravách nesmíme však zapomenout na to, že pokud zaměníme dva řádky nebo sloupce původní matice, pak musíme změnit znaménko determinantu upravené matice. Také platí, že pokud některý řádek či sloupec původní matice vynásobíme reálným číslem r, pak musíme tímto číslem vynásobit i determinant upravené matice.

5.1 Sarrusovo pravidlo

Nechť je matice $A = (a_{ij})$ řádu 3, pak Laplaceovým rozvojem podle libovolného řádku nebo sloupce dojdeme k tomu, že platí

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Existuje tzv. **Sarrusovo pravidlo** pro matice řádu 3, které nám usnadňuje zapamatování si daného vztahu. Za determinant matice A opíšeme první dva sloupce této matice. Pak dostaneme schéma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Nyní vypočítáme součiny trojic prvků ležících na pomyslných rovnoběžkách s hlavní diagonálou. Poté vypočítáme součiny trojic prvků ležících na pomyslných rovnoběžkách s vedlejší diagonálou a následně tyto součiny vynásobíme číslem -1 (součiny budou mít záporné znaménko). Nakonec všechny součiny sečteme a dostaneme stejný výsledek jako při Laplaceově rozvoji.

Příklad

Určitě determinant matice A pomocí Sarrusova pravidla, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Nejprve si za determinant matice A připíšeme první dva sloupce této matice a zobrazíme si rovnoběžkami i dané trojice prvků se znaménkem. Dostaneme schéma

$$\begin{array}{l} + \\ \left| \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}. \\ - \end{array}$$

Následně dané součiny trojic prvků sečteme:

$$\det A = 8 + 9 + 5 + (-60) + (-2) + (-3) = 22 - 65 = -43.$$

Determinant matice A je tedy roven číslu -43.

5.2 Cramerovo pravidlo

Při řešení soustav lineárních rovnic se používají různé postupy. Jedním z nich je také tzv. **Cramerovo pravidlo**, které k výpočtu neznámých z rovnic využívá determinanty.

Věta 5.4. *Nechť $Ax = b$ je soustava lineárních rovnic s regulární maticí A řádu n. Pro každé $i = 1, \dots, n$ označme A_i matici, která vznikne z matice A tím způsobem, že i-tý sloupec matice A nahradíme sloupcem b. Potom pro řešení soustavy rovnic $Ax = b$ platí $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, kde*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

pro každé $i = 1, \dots, n$.

Poznámka: Výhodou Cramerova pravidla je tedy například možnost vypočítat pouze jednu neznámou ze soustavy rovnic.

Z definice je patrné, že lze determinant vypočítat pouze tehdy, kdy je hodnost matice A rovna řádu matice A, tedy $h(A) = n$.

Příklad

Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 15, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Řešení

Nejprve vypočítáme determinant matice naší soustavy například pomocí Sarrusova pravidla:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (3+4+3) - (1+2+18) = -11.$$

Následně vypočítáme determinanty matic A_1, A_2 a A_3, přičemž

$$A_1 = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \begin{vmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (15+36+40) - (10+24+90) = -33, \\ \det A_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = (36+30+10) - (12+60+15) = -11, \\ \det A_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = (30+45+24) - (15+108+20) = -44. \end{aligned}$$

Pro x_1, x_2, x_3 tedy platí:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-33}{-11} = 3, \\ x_2 &= \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-11}{-11} = 1, \\ x_3 &= \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-44}{-11} = 4. \end{aligned}$$

Cvičení

1. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte neznámou x_1 ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 15, \\ 4x_1 - 7x_2 &= 17. \end{aligned}$$

2. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte neznámou x_2 ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 9, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 &= 16. \end{aligned}$$

3. Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 27, \\ 2x_1 - 7x_3 &= -8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 29. \end{aligned}$$

Výsledky

1. $x_1 = 6$
2. $x_2 = 2$
3. $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ x_3 = 2$

6 Slovní úlohy

V této části se podíváme na konkrétní slovní úlohy a jejich řešení pomocí předchozích poznatků, metod a postupů. Velmi často nás zadání slovních úloh zavedou k soustavě lineárních rovnic, které budeme následně řešit různými způsoby. Samozřejmě se zde objeví i slovní úlohy, které budeme řešit jinými metodami. Na konci každé podkapitoly jsou úlohy k procvičení. Většinu úloh jsem sám sestavil, u některých mi byly inspirací také úlohy z učebního textu Evy Valentové [20].

6.1 Vektory, vektorový prostor

Slovní úloha 1 – inspirací mi byl učební text Evy Valentové [20]

Pan Rychlý potřebuje nakoupit písek na svoji malou zahrádku. Chtěl by nakoupit směs 15 kg jemného písku, 25 kg hrubého písku a 30 kg menších kamínků. Má možnost zajet do obchodu A, obchodu B nebo obchodu C. Ceny materiálů v jednotlivých obchodech jsou uvedeny v této tabulce:

	Jemný písek	Hrubý písek	Menší kamínky
Obchod A	11 Kč/kg	8 Kč/kg	5 Kč/kg
Obchod B	13 Kč/kg	6 Kč/kg	5 Kč/kg
Obchod C	9 Kč/kg	9 Kč/kg	6 Kč/kg

Tab. 1: Ceny jednotlivého materiálu v různých obchodech

Pomozte panu Rychlému najít obchod s nejnižší celkovou cenou za danou směs.

Řešení

Hmotnosti materiálů vyjádříme vektorem $\vec{u} = (15, 25, 30)$. Vektor cen v obchodě A bude $\vec{a} = (11, 8, 5)$, v obchodě B to bude vektor $\vec{b} = (13, 6, 5)$ a v obchodě C tedy $\vec{c} = (9, 9, 6)$.

Skalárním součinem vektoru $\vec{u}$ (postupně) s vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dostaneme celkové ceny v jednotlivých obchodech:

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = (15, 25, 30) \cdot (11, 8, 5) = 15 \cdot 11 + 25 \cdot 8 + 30 \cdot 5 = 515\ k\text{č},$$
$$\vec{u} \cdot \vec{b} = (15, 25, 30) \cdot (13, 6, 5) = 15 \cdot 13 + 25 \cdot 6 + 30 \cdot 5 = 495\ k\text{č},$$
$$\vec{u} \cdot \vec{c} = (15, 25, 30) \cdot (9, 9, 6) = 15 \cdot 9 + 25 \cdot 9 + 30 \cdot 6 = 540\ k\text{č}.$$

Nejlevněji tedy pan Rychlý nakoupí v obchodě B, a to za celkem 495 Kč.

Slovní úloha 2

V kartézské soustavě souřadnic v rovině je dán rovnoběžník $KLMN$. Známe vektor $\vec{u} = \overrightarrow{KL} = (2, 1)$ a vektor $\vec{v} = \overrightarrow{KN} = (3, 5)$. Jakou velikost má úhel $\alpha = \sphericalangle NKL$?

Řešení

Pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory použijeme vzoreček

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|},$$

kde $\vec{u}\cdot\vec{v}$ je skalární součin vektorů, $|\vec{u}|$ je velikost vektoru $\vec{u}$, $|\vec{v}|$ je velikost vektoru $\vec{v}$ a α je úhel mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Pro velikost vektoru $\vec{w} = (w_1, w_2)$ platí vzorec

$$\vec{w} = \sqrt{{w_1}^2 + {w_2}^2}.$$

Pak tedy

$$\cos\alpha = \frac{6+5}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+25}} = \frac{11}{\sqrt{170}},$$
$$\alpha \doteq 32°28'.$$

Úlohy k procvičení

1. Firma potřebuje nakoupit žulové dlažební kostky na jednu zakázku. Zjistili, že budou potřebovat zhruba 100 kusů tmavě červených kostek, 500 kusů kostek šedých a 300 kostek černých. Materiál mohou zakoupit ve čtyřech obchodech, ceny materiálu v jednotlivých obchodech je dán tabulkou:

	Tmavě červená	Šedá	Černá
Obchod 1	18 Kč	10 Kč	11 Kč
Obchod 2	17 Kč	9 Kč	12 Kč
Obchod 3	15 Kč	12 Kč	10 Kč
Obchod 4	22 Kč	8 Kč	11 Kč

Tab. 2: Ceny jednotlivých dlažebních kostek v různých obchodech

Na kolik korun vyjde všechen materiál v jednotlivých obchodech? Ve kterém obchodu nakoupí firma nejvýhodněji?

Inspirací mi byl učební text Evy Valentové [20].

2. V kartézské soustavě souřadnic v rovině je dán trojúhelník ABC. Nechť víme, že vektor $\overrightarrow{AB} = (-2, 5)$ a vektor $\overrightarrow{AC} = (4, 1)$. Jak velký je úhel α v $\Delta\, ABC$?

Výsledky

1. V obchodě 1 vyjde veškerý materiál na 10100 Kč, v obchodě 2 by materiál nakoupili za 9800 Kč, v obchodě 3 by vyšel materiál na 10500 Kč a v obchodě 4 ho firma může zakoupit za 9500 Kč. Nejlevněji tedy firma nakoupí v obchodě 4.

2. $\alpha \doteq 98°$

6.2 Soustavy rovnic

Slovní úloha 1

Ve vinárně vyrobili 2000 litrů červeného vína. Ke spotřebitelům je dovážejí v sudech. Mají k dispozici sudy s objemem 40 litrů a 25 litrů. Celkem naplnili 59 sudů. Kolik sudů s objemem 40 litrů a kolik sudů s objemem 25 litrů vinárna použila?

Řešení

Označme si počet 40l sudů jako x a počet 25l sudů jako y, pak platí rovnosti

$$\begin{aligned} 40x + 25y &= 2000, \\ x + y &= 59. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme například dosazovací metodou tak, že z druhé rovnice vyjádříme třeba x, tj.

$$x = 59 - y,$$

a dosadíme do rovnice první

$$\begin{aligned} 40(59 - y) + 25y &= 2000, \\ 472 - 8y + 5y &= 400, \\ -3y &= -72, \\ y &= 24. \end{aligned}$$

Pak

$$x = 35.$$

Vinárna tedy využila 35 sudů s objemem 40 litrů a 24 sudů s objemem 25 litrů.

Slovní úloha 2

Firma dostala od dodavatele skleněné tabule o velikosti 0,5 m x 1 m. Na zakázku potřebuje rozřezat dané tabule na 240 skel typu A (0,5 m × 0,5 m), 170 skel typu B (0,4 m × 0,4 m) a 200 skel typu C (0,3 m × 0,3 m). Při řezání však nesmí překročit hranici 35 % možného odpadu. Zjistěte, kolika způsoby mohou tabule rozřezat, aby dostali dané množství jednotlivých skel pro zakázku.

Řešení

Nejprve musíme zjistit všechny možné způsoby řezání jedné tabule, tedy z jedné tabule můžeme dostat:

a) 2 skla typu A (odpad 0 %),
b) 1 sklo typu A a 1 sklo typu B (odpad 18 %),

c) 1 sklo typu A a 1 sklo typu C (odpad 32 %),
d) 1 sklo typu B a 2 skla typu C (odpad 32 %),
e) 2 skla typu B (odpad 36 %) – překračuje hranici odpadu,
f) 3 skla typ C (odpad 46 %) – překračuje hranici odpadu.

Další způsoby vypisovat nemusíme, jelikož by byl odpad při vynechání místa libovolného typu skla vždy větší, než je povolená hranice.

Odpady jsou spočítány pomocí vztahu

$$P(\%) = \left(1 - \frac{S_s}{S_t}\right) \cdot 100,$$

kde P je množství odpadu v procentech, S_s je celkový obsah skel daných typů, které vznikly rozřezáním jedné tabule, a S_t je plocha celé tabule.

Označme si nyní počet tabulí, které rozřežeme způsobem a) jako x_1, způsobem b) jako x_2, způsobem c) jako x_3 a způsobem d) jako x_4.

Pak se dá potřebné množství daných typů skel vyjádřit rovnicemi:

typ A: $2x_1 + x_2 + x_3 = 240,$

typ B: $x_2 + x_4 = 170,$

typ C: $x_3 + 2x_4 = 200.$

Ze soustavy rovnic vyplývá, že máme jednu volnou neznámou, nechť je jí x_4. Pak

$$\begin{aligned} x_4 &= t, \\ x_3 &= 200 - 2t, \\ x_2 &= 170 - t, \\ x_1 &= \frac{-130 + 3t}{2}. \end{aligned}$$

Existuje nekonečně mnoho způsobů jak zvolit t, ale my potřebujeme, aby byly x_1, x_2, x_3, x_4 nezáporná celá čísla. Platí tedy podmínky:

$$\begin{aligned} t &\geq 0, \\ 200 - 2t &\geq 0, \\ 170 - t &\geq 0, \\ \frac{-130 + 3t}{2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Z toho tedy vyplývá, že

$$44 \leq t \leq 100.$$

Zároveň však musí být čitatel $-130 + 3t$ sudé číslo, aby nám při dělení číslem 2 vyšlo celé číslo.

Potřebujeme tedy zjistit počet členů n aritmetické posloupnosti, kde $a_1 = 44$ je první člen posloupnosti, $a_n = 100$ je poslední člen posloupnosti a diference je $d = 2$. Počet členů zjistíme pomocí vzorce pro n-tý člen posloupnosti:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d, \\ 100 &= 44 + (n-1) \cdot 2, \\ n &= 29. \end{aligned}$$

Existuje tudíž 29 způsobů jak vybrat t, a tak má soustava celkem 29 možných řešení, při kterých platí dané podmínky.

Např. pro $t = 68$:

$$x_4 = 68, \qquad x_3 = 64, \qquad x_2 = 102, \qquad x_1 = 37.$$

Po kontrolním dosazení do soustavy rovnic zjistíme, že čtveřice čísel $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (37, 102, 64, 68)$ je jedním z řešení naší soustavy.

Existuje tak i 29 způsobů jak rozřezat skleněné tabule na 240 skel typu A, 170 skel typu B a 200 skel typu C.

Slovní úloha 3

Poptávka alkalických AAA baterií je na trhu dána rovnicí $Q = 23 - P$ a nabídka rovnicí $Q = 11 + 0{,}5P$. Jaká je rovnovážná cena P v Kč a jaké je rovnovážné množství Q v kusech na trhu?

Řešení

Při rovnováze musí platit, že nabídka je rovna poptávce, tedy musí platit obě rovnice zároveň. Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} Q &= 11 + 0{,}5P, \\ Q &= 23 - P. \end{aligned}$$

Porovnávací metodou dostáváme

$$\begin{aligned} 11 + 0{,}5P &= 23 - P, \\ P &= 8. \end{aligned}$$

Pak

$$Q = 23 - P = 11 + 0{,}5P = 15.$$

Rovnovážná cena je tedy 8 Kč a rovnovážné množství je 15 kusů.

Úlohy k procvičení

1. Bramborárna sklidila 1500 tun brambor. Brambory zabalili do síťovaných pytlů po 15 kg a 30 kg. Celkově použili 63 pytlů. Kolik mají nyní k dispozici 15kg pytlů s bramborami a kolik 30kg pytlů s bramborami?

2. Společnost potřebuje na zakázku nařezat 4m dřevěná prkna na 250 kusů 1,2m prken, 200 kusů 1,5m prken a 100 kusů 2m prken. Odpad při řezání nesmí být víc než 0,5 m. Zjistěte, kolika způsoby mohou rozřezat 4m prkna, aby dostali dané množství jednotlivých prken pro zakázku.

3. Poptávka cyklistických kol je na trhu dána rovnicí $Q = 1450 - 0{,}15P$ a nabídka rovnicí $Q = -440 + 0{,}06P$. Jaká je rovnovážná cena P v Kč a jaké je rovnovážné množství Q v kusech na trhu?

Výsledky

1. Bramborárna má k dispozici 26 pytlů s 15 kg brambor a 37 pytlů s 30 kg brambor.

2. Existují celkem pouze 4 způsoby jak získat ze 4m prken 250 kusů 1,2m prken, 200 kusů 1,5m prken a 100 kusů 2m prken.

3. Na trhu kol je rovnovážná cena 9000 Kč a rovnovážné množství je 100 kusů.

6.3 Matice

Slovní úloha 1

Firma potřebuje nakoupit barvu k vymalování interiéru velkého bytového domu. Musí objednat 320 kg bílé barvy, 150 kg žluté barvy, 120 kg hnědé barvy a 40 kg červené barvy.

Od dodavatele barev se dozvěděl, že k zakoupení daného množství za nejlepší cenu bude firma potřebovat tyto nabízené sady:

	Bílá	Žlutá	Hnědá	Červená
Sada A	15 kg	10 kg	5 kg	-
Sada B	25 kg	-	5 kg	-
Sada C	5 kg	10 kg	10 kg	5 kg
Sada D	-	15 kg	5 kg	5 kg

Tab. 3: Hmotnosti jednotlivých barev v různých sadách

Dodavatel ale zapomněl dodat, jaké množství jednotlivých sad má firma objednat. Poradíte?

Řešení

Jelikož víme, že zakoupením daných sad v neznámém množství dostaneme žádané celkové množství, tak úlohu můžeme řešit pomocí lineární kombinace vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ jednotlivých sad a musíme dostat vektor poptávky $\vec{x}$, kde

$$\vec{a} = (15, 10, 5, 0),$$

$$\vec{b} = (25, 0, 5, 0),$$

$$\vec{c} = (5,10,10,5),$$

$$\vec{d} = (0, 15, 5, 5),$$

$$\vec{x} = (320, 150, 120, 40).$$

Musí tedy platit rovnost

$$(320, 150, 120, 40) = k_1(15, 10, 5, 0) + k_2(25, 0, 5, 0) + k_3(5,10,10,5) +$$

$$+k_4(0, 15, 5, 5).$$

Po rozepsání podle souřadnic vektorů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 320 &= 15k_1 + 25k_2 + 5k_3, \\ 150 &= 10k_1 + 10k_3 + 15k_4, \\ 120 &= 5k_1 + 5k_2 + 10k_3 + 5k_4, \\ 40 &= 5k_3 + 5k_4. \end{aligned}$$

Po úpravách dojdeme ke tvaru

$$\begin{aligned} 3k_1 + 5k_2 + k_3 &= 64, \\ 2k_1 + 2k_3 + 3k_4 &= 30, \\ k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 &= 24, \\ k_3 + k_4 &= 8. \end{aligned}$$

Nyní pomocí Gaussovy eliminační metody převedeme rozšířenou matici soustavy na matici ve schodovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 & 64 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 30 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 18 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right).$$

Z upravené rozšířené matice soustavy plyne, že

$$\begin{aligned} k_4 &= 6, \\ 7k_3 + 12 &= 26, \text{ tedy } k_3 = 2, \\ 2k_2 + 4 - 6 &= 18, \text{ tedy } k_2 = 10, \\ k_1 + 10 + 4 + 6 &= 24, \text{ tedy } k_1 = 4. \end{aligned}$$

Firma tedy musí nakoupit 4 sady A, 10 sad B, 2 sady C a 6 sad D.

Slovní úloha 2

Dan potřebuje vypočítat, kolik ethanu je potřeba pro vznik 10 ml oxidu uhličitého pomocí dokonalého spalování. K tomu ale potřebuje nejprve vyčíslit chemickou rovnici spalování ethanu. Jaké jsou tedy stechiometrické koeficienty následující chemické rovnice dokonalého spalování ethanu?

$$C_2H_6 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Řešení

Abychom určili koeficienty u dané chemické rovnice, přiřadíme každé sloučenině v rovnici různou proměnnou a, b, c, d takto:

$$\boldsymbol{a}\, C_2H_6 + \boldsymbol{b}\, O_2 \longrightarrow \boldsymbol{c}\, CO_2 + \boldsymbol{d}\, H_2O.$$

Následně vytvoříme lineární rovnice na základě poměrů jednotlivých atomů prvků na straně výchozích látek a produktů:

C: $2a = c \quad \Rightarrow \quad 2a - c = 0,$

H: $6a = 2d \quad \Rightarrow \quad 3a - d = 0,$

O: $2b = 2c + d \quad \Rightarrow \quad 2b - 2c - d = 0.$

Soustavu těchto rovnic můžeme vyřešit za pomoci rozšířené matice soustavy a Gaussovy eliminační metody:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Z matice vyplývá, že máme jednu volnou neznámou, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení. Vezměme nyní $d = x$, kde $x \in \mathbb{R}$, pak

$$3c - 2x = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3}x,$$
$$2b - \frac{4}{3}x - 1x = 0 \Rightarrow b = \frac{7}{6}x,$$
$$2a - \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}x.$$

Všechny stechiometrické koeficienty u chemických rovnic musejí být však kladná celá čísla a jejich největší společný dělitel musí být číslo 1. Aby tomu tak bylo, je nyní nutné vynásobit koeficienty nejmenším společným násobkem jmenovatelů našich zlomků, tedy $x = 6$. Pak pro koeficienty a, b, c, d platí:

$$a = 2, \;\; b = 7, \;\; c = 4, \;\; d = 6.$$

Jelikož největší společný dělitel čísel 2, 7, 4 a 6 je číslo 1, pak jsou a, b, c, d hledané koeficienty naší chemické rovnice.

Vyčíslená chemická rovnice pak vypadá takto:

$$\mathbf{2}\, C_2H_6 + \mathbf{7}\, O_2 \longrightarrow \mathbf{4}\, CO_2 + \mathbf{6}\, H_2O.$$

Slovní úloha 3

Profesor připravil studentům dva roztoky A a B kyseliny sírové, se kterou budou pracovat. Dal jim za úkol zjistit jejich hmotnostní zlomky w_a, w_b. Poradil jim, že:

a) při smíchání 3 g roztoku A s 5 g roztoku B vznikne roztok s hmotnostním zlomkem 0,625 (tedy $m_a = 3\ g, m_b = 5\ g, w_{c_1} = 0{,}625$),
b) při smíchání 2 g roztoku A s 3 g roztoku B vznikne roztok s hmotnostním zlomkem 0,62 (tedy $m_a = 2\ g, m_b = 3\ g, w_{c_2} = 0{,}62$).

Jaké hmotnostní zlomky tedy roztoky mají?

Obecná směšovací rovnice má tvar

$$w_a m_a + w_b m_b = w_c (m_a + m_b).$$

Řešení

Nejprve dosadíme do rovnice vše, co známe. Dostaneme soustavu rovnic

$$3w_a + 5w_b = 0{,}625(3 + 5),$$
$$2w_a + 3w_b = 0{,}62(2 + 3).$$

Po úpravě bude mít tvar

$$3w_a + 5w_b = 5,$$
$$20w_a + 30w_b = 31.$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, které můžeme řešit pomocí rozšířené matice a Gaussovy eliminace:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 20 & 30 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 7 \end{array}\right).$$

Z upravené matice vyplývá, že

$$10w_b = 7 \Rightarrow w_b = 0{,}7,$$
$$3w_a + 3{,}5 = 5 \Rightarrow w_a = 0{,}5.$$

Žáci budou tedy pracovat s roztokem A o hmotnostním zlomku $w_a = 0{,}5$ a s roztokem B o hmotnostním zlomku $w_b = 0{,}7$.

Slovní úloha 4

Petr bydlí ve městě A. Vzdálenost měst A a B je s. Petr ujde tuto vzdálenost průměrnou rychlostí v za čas o 2 hodiny a 15 minut delší, než když jede na kole. Na kole se do města B z města A dostane za čas t při průměrné rychlosti o 15 km/h vyšší, než když jde pěšky. Pokud si Petr půjčí auto, urazí danou vzdálenost o 30 minut dříve, než když jede na kole, přičemž průměrná rychlost auta je o 55 km/h vyšší než průměrná rychlost chůze.

Vypočtěte vzdálenost s mezi městy A a B, rychlost Petrovy chůze v při cestě ze svého domu do města B a jak dlouho trvá Petrovi cesta z města A do města B na kole.

Vztah mezi s, v a t je

$$v = \frac{s}{t}.$$

Řešení

Vyjádříme si nyní rychlost Petrovy chůze, rychlost při jízdě na kole a rychlost auta při cestě z města A do města B (uvažujme rychlost v jednotkách km/h, dráhu tedy v km a čas v hodinách):

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t+2{,}25}, \\ v+15 &= \frac{s}{t}, \\ v+55 &= \frac{s}{t-0{,}5}. \end{aligned}$$

Upravíme danou soustavu rovnic na tvar

$$\begin{aligned} vt + 2{,}25v &= s, \\ vt + 15t &= s, \\ vt - 0{,}5v + 55t - 27{,}5 &= s. \end{aligned}$$

Vidíme, že máme tři rovnice o třech neznámých, ale že tu bude problém s tím, že mezi sebou násobíme dvě neznámé. Jelikož předpokládáme, že má soustava jedno řešení, budeme nyní považovat neznámou v za konstantu, kladné reálné číslo (rychlost v je určitě větší než nula).

Po úpravě soustavy s předchozí úvahou nám vyjde

$$\begin{aligned} vt - s &= -2{,}25v, \\ (v+15)t - s &= 0, \\ (v+55)t - s &= 0{,}5v + 27{,}5. \end{aligned}$$

Máme nyní tedy soustavu tří lineárních rovnic o dvou neznámých t a s. Znovu zde můžeme použít Gaussovu eliminaci. Převedeme si tedy rozšířenou matici soustavy na matici ve schodovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{rr|r} v & -1 & -2{,}25v \\ v+15 & -1 & 0 \\ v+55 & -1 & 0{,}5v+27{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{lr|r} v & -1 & -2{,}25v \\ 0 & -15 & -2{,}25v^2 - 33{,}75v \\ 0 & -55 & -2{,}75v^2 - 151{,}25v \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{lr|r} v & -1 & -2{,}25v \\ 0 & -1 & -0{,}15v^2 - 2{,}25v \\ 0 & 1 & 0{,}05v^2 + 2{,}75v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{lr|r} v & -1 & -2{,}25v \\ 0 & 1 & 0{,}15v^2 + 2{,}25v \\ 0 & 0 & -0{,}1v^2 + 0{,}5v \end{array}\right).$$

Aby měla daná soustava řešení, musí být pravá strana třetího řádku rovna nule, musí tedy platit rovnost

$$\begin{aligned} -0{,}1v^2 + 0{,}5v &= 0, \\ v(-0{,}1v + 0{,}5) &= 0. \end{aligned}$$

Kvadratická rovnice má dva kořeny, kterými jsou $v_1 = 0$ a $v_2 = 5$.

V předchozí úvaze jsme řekli, že v je kladné číslo a tuto podmínku splňuje pouze $v_2 = 5$.

Při dosazení v_2 zpět do matice dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & -11{,}25 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & -11{,}25 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right).$$

Z toho pak vyplývá, že pokud $v = 5$, pak

$$s = 15,$$
$$5t - 15 = -11{,}25 \;\Rightarrow\; t = 0{,}75.$$

Tedy vzdálenost mezi městy A a B je 15 km, rychlost Petrovy chůze při cestě ze svého domu do města B je 5 km/h a cesta z města A do města B trvá na kole 45 minut.

Úlohy k procvičení

1. Učitel potřebuje pro žáky nakoupit různé učebnice. Jelikož je nákup dobrovolný, tak se počet jednotlivých učebnic liší. Celkem potřebuje učitel koupit 24 učebnic matematiky, 20 učebnic fyziky, 21 učebnic chemie a 19 učebnic biologie. Našel obchod, ve kterém prodávají dané učebnice v malých sadách za velmi výhodnou cenu. Počet jednotlivých učebnic v každé sadě je dán touto tabulkou:

	matematika	fyzika	chemie	biologie
Sada 1	2 kusy	1 kus	0 kusů	0 kusů
Sada 2	1 kus	1 kus	2 kusy	2 kusy
Sada 3	1 kus	1 kus	1 kus	0 kusů
Sada 4	1 kus	1 kus	0 kusů	1 kus

Tab. 4: Počet jednotlivých učebnic v různých sadách

Učitel zjistil, že mu budou sady k zakoupení učebnic v daných počtech stačit a nebude muset dokupovat žádné další učebnice ani mu nebudou žádné učebnice přebývat. V jakých počtech bude učitel kupovat dané sady?

2. V laboratoři potřebují zjistit, kolik oxidu uhelnatého se připraví při nedokonalém spalování určitého množství propanu. K tomu potřebují vyčíslit následující rovnici nedokonalého spalování propanu:

$$C_3H_8 + O_2 \longrightarrow CO + H_2O.$$

Jaké jsou tedy stechiometrické koeficienty rovnice nedokonalého spalování propanu?

3. Studenti mají za úkol zjistit, kolik gramů 20% hydroxidu sodného a kolik gramů 45% hydroxidu sodného je třeba smíchat dohromady, aby nám vznikl roztok s hmotnostním zlomkem $w_c = 0{,}35$ o hmotnosti 15 g.

Pokud máme například 70% roztok, pak $w = \frac{70}{100} = 0{,}7$.

Obecná směšovací rovnice má tvar

$$w_a m_a + w_b m_b = w_c(m_a + m_b).$$

4. Máme dány tři elektrické obvody. Obvodem A s rezistorem, který má odpor R při napětí o 20 V nižším než je napětí u obvodu C, prochází proud o 0,5 A větší, než prochází obvodem B. Rezistor v obvodu B má odpor o 10 Ω nižší, než je odpor rezistoru v obvodu A při napětí o 7,5 V vyšším, než je napětí u obvodu C. Obvodem B prochází proud I. Rezistor v obvodu C má odpor o 5 Ω vyšší, než je odpor rezistoru v obvodu A při napětí V. Obvodem C prochází proud o 1 A vyšší než v obvodu B. Určete odpor rezistoru v obvodu A, proud procházející obvodem B a napětí na rezistoru v obvodu C.

   Vztah mezi odporem, napětím a proudem je

$$I = \frac{U}{R}.$$

Výsledky

1. Učitel bude kupovat 4 sady A, 8 sad B, 5 sad C a 3 sady D.
2. Rovnice se stechiometrickými koeficienty vypadá takto:

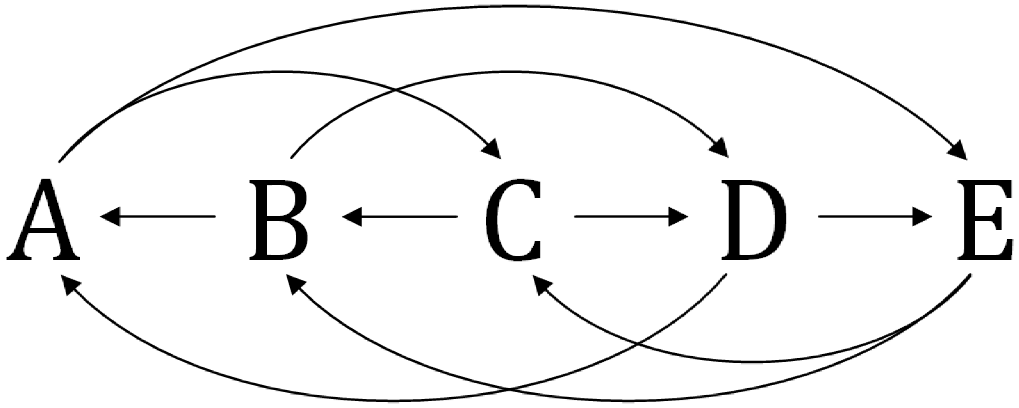
$$2C_3H_8 + 7O_2 \longrightarrow 6CO + 8H_2O.$$

3. Bude potřeba 6 g 20% roztoku hydroxidu sodného a 9 g 45% roztoku.
4. Odpor rezistoru v obvodu A je 15 Ω, proud procházející obvodem B je 1,5 A a napětí na rezistoru v obvodu C je 50 V.

6.4 Součin matic

Slovní úloha 1 – inspirována učebním textem Evy Valentové [20]

Mezi městy A, B, C, D a E je zavedena autobusová doprava. Doprava mezi těmito městy je znázorněna následujícím schématem.



Obrázek 1: Schéma autobusové dopravy

Zjistěte, jaké možnosti dopravy mají obyvatelé měst a jaké jsou jejich omezení, pokud chtějí:

a) přejet ze svého města do města cizího bez přestupu,
b) absolvovat cestu s jedním přestupem,
c) navštívit dvě města cestou do cílového města,
d) jet na dovolenou do cizího města a cestou navštívit maximálně dvě města.

Řešení

Vytvoříme si vektory $m_i = (m_{iA}, m_{iB}, m_{iC}, m_{iD}, m_{iE})$ přímých cest z města i, kde $i = A, B, \dots, E$. Pokud existuje přímá cesta z města i do města j, kde $j = A, B, \dots, E$, pak $m_{ij} = 1$ a pokud tato cesta neexistuje, pak $m_{ij} = 0$. V případě přímé cesty z města i do města i ($j = i$) budeme klást $m_{ii} = 0$.

Například vektor m_A má pak tvar

$$m_A = (m_{AA}, m_{AB}, m_{AC}, m_{AD}, m_{AE}) = (0, 0, 1, 0, 1).$$

Následně vytvoříme matici M, ve které budou vektory m_i zapsané pod sebou jako řádkové vektory. Matice M má tvar

$$M = \begin{pmatrix} m_{AA} & m_{AB} & \cdots & m_{AE} \\ m_{BA} & m_{BB} & \cdots & m_{BE} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{EA} & m_{EB} & \cdots & m_{EE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

První řádek matice M tedy reprezentuje cesty z města A do měst A, B, C, D a E. Podobně to je i s ostatními řádky matice. První sloupec matice M pak reprezentuje cesty z měst A, B, C, D a E do města A. Podobně je to i s ostatními sloupci matice.

Pokud chceme zjistit možnosti dopravy s jedním přestupem, pak musíme provést druhé umocnění naší matice M:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky matice M^2 si označíme třeba ${m^2}_{ij}$, kde $i = A, B, \dots, E$ a $j = A, B, \dots, E$. Pak například:

$$\begin{aligned} {m^2}_{DB} &= m_{DA}m_{AB} + m_{DB}m_{BB} + m_{DC}m_{CB} + m_{DD}m_{DB} + m_{DE}m_{EB}, \\ {m^2}_{DB} &= 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Tedy při umocnění na druhou se nám u prvku ${m^2}_{DB}$ zvažují všechny možnosti přejezdu z města D do města B s jednou zastávkou. Z výpočtu vidíme, že je možné přejet z města D do města B přes města A a E, ale město C přejezd neumožňuje. Celkem máme tedy dvě možnosti přejezdu z města D do města B. Z matice M^2 jdou tedy vyčíst možnosti dopravy s jedním přestupem.

Podobně zjistíme i možnosti dopravy při volbě obyvatelů navštívit dvě města cestou do cílového města (tedy cesta se dvěma přestupy) třetím umocněním matice M, případně součinem $M \cdot M^2$:

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Například vidíme, že ${m^3}_{AA} = 3$, tedy existují tři možnosti jak se dopravit z města A zpět do města A a přitom navštívit 2 cizí města. Prvek ${m^3}_{BE} = 1$ nám zase říká, že existuje jen jedna cesta se dvěma přestupy z města B do města E.

Pokud chtějí jet obyvatelé měst na dovolenou a navštívit při cestě do cílového města maximálně dvě jiná města, pak to znamená, že mohou jet přímo do cílového města (matice M), mohou se zastavit v jednom městě (matice M^2) nebo mohou udělat zastávku ve dvou městech (matice M^3). Možnosti obyvatel tedy charakterizuje matice $M + M^2 + M^3$, která vypadá takto:

$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Z matice $M + M^2 + M^3$ můžeme například vyčíst, že obyvatelé města A mají jen dvě možnosti, jak se dostat do města C s maximálně dvěma zastávkami, a obyvatelé města B mají možnosti až čtyři.

Slovní úloha 2

Cukrář vytvořil z nejoblíbenějších cukrovinek pro zákazníky různé balíčky. Do balíčků umístil v různém množství cukrovinky K, L, M a N. Počet kusů jednotlivých cukrovinek v daných balíčcích je dán tabulkou:

	K	L	M	N
Balíček 1	1 kus	1 kus	1 kus	1 kus
Balíček 2	3 kusy	3 kusy	1 kus	1 kus
Balíček 3	2 kusy	1 kus	2 kusy	4 kusy
Balíček 4	1 kus	2 kusy	4 kusy	1 kus

Tab. 5: Počet jednotlivých cukrovinek v různých balíčcích

Jaké jsou ceny jednotlivých cukrovinek, když víte, že cena balíčku 1 je 60 Kč, cena balíčku 2 je 110 Kč, cena balíčku 3 je 120 Kč a cena balíčku 4 je 160 Kč.

Řešení

Cenu cukrovinky K si označíme jako x_1, cenu cukrovinky L jako x_2, cenu cukrovinky M jako x_3 a cenu cukrovinky N jako x_4.

Pak jsou celkové ceny balíčků dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 60, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 110, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 120, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 160. \end{aligned}$$

Tuto soustavu lze zapsat také jako maticovou rovnici

$$A \cdot X = C,$$

kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 60 \\ 110 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix}$.

Zároveň platí:

$$X = A^{-1} \cdot C.$$

Potřebujeme nyní tedy najít inverzní matici k matici A. K tomu můžeme využít Gauss-Jordanovu metodu:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -6{,}5 & 1{,}5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -18 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -17{,}5 & 3{,}5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7{,}5 & -1{,}5 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Matice inverzní A^{-1} k matici A má tedy tvar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17{,}5 & 3{,}5 & 3 & 2 \\ 17 & -3 & -3 & -2 \\ -6 & 1 & 1 & 1 \\ 7{,}5 & -1{,}5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pak platí, že:

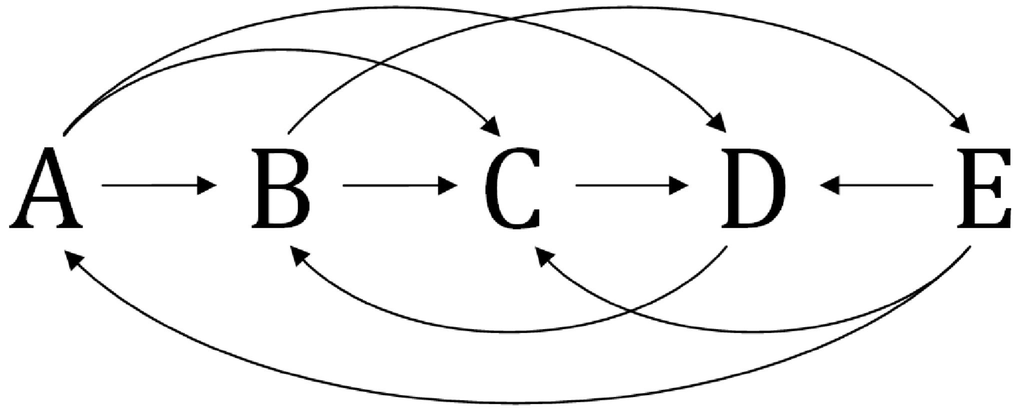
$$X = \begin{pmatrix} -17{,}5 & 3{,}5 & 3 & 2 \\ 17 & -3 & -3 & -2 \\ -6 & 1 & 1 & 1 \\ 7{,}5 & -1{,}5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 110 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1050 + 385 + 360 + 320 \\ 1020 - 330 - 360 - 320 \\ -360 + 110 + 120 + 160 \\ 450 - 165 - 120 - 160 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Cukrovinka K stojí tedy 15Kč, cukrovinka L pak 10 Kč, cukrovinka M stojí 30 Kč a cukrovinka N stojí 5 Kč.

Úlohy k procvičení

1. Nová přepravní společnost nabízí mezinárodní dopravu mezi státy A, B, C, D a E. Cesty přepravy jsou znázorněny v následujícím schématu:



Obrázek 2: Schéma mezinárodní dopravy

V jeden den jsou kurýři schopní přepravit balík z jednoho státu do státu druhého. Přepravní společnost je zatím malá a ještě nemá zřízené sklady pro uložení balíků, proto jsou balíky každý den v pohybu. Jaké možnosti mají zákazníci a kolika způsoby mohou kurýři přepravit balíky, jestliže si dle dostupnosti může zákazník zvolit doručení:

a) během jednoho dne,
b) během dvou dnů,
c) během tří dnů.
d) během čtyř dnů
e) maximálně tří dnů.

Úloha je inspirována učebním textem Evy Valentové [20].

2. V restauraci obdrželi čtyři objednávky jídel, skládající se z jídel A, B, C a D z aktuální nabídky. Počet porcí jídel A, B, C a D v každé objednávce je dán následující tabulkou:

	A	B	C	D
Objednávka 1	1 porce	1 porce	3 porce	1 porce
Objednávka 2	2 porce	2 porce	1 porce	2 porce
Objednávka 3	1 porce	3 porce	2 porce	1 porce
Objednávka 4	2 porce	1 porce	1 porce	3 porce

Tab. 6: Počet porcí jednotlivých jídel v různých objednávkách

Celková cena objednávky 1 byla 730 Kč, cena objednávky 2 byla 910 Kč, objednávka 3 stála 880 Kč a objednávka 4 byla za 870 Kč.

Jaké jsou ceny jídel A, B, C a D?

Řešte pomocí inverzní matice.

Výsledky

1. Možnosti jsou dány následujícími maticemi

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Jídlo A stojí 180 Kč, jídlo B stojí 130 Kč, jídlo C stojí 110 Kč a jídlo D je za 90 Kč.

6.5 Markovovův řetězec

Slovní úloha 1

Lidé nejčastěji tráví dovolenou na horách nebo u moře. V případě, že letos trávili dovolenou u moře, budou příští dovolenou trávit ze 70 % opět u moře, ale z 30 % pojedou raději na hory. Jestliže byli letos na horách, pak ze 40 % pojedou příští rok k moři a z 60 % budou trávit prázdniny u moře.

a) Jaká je pravděpodobnost, že za 2 roky člověk pojede k moři, v případě, že byl letos u moře?
b) Jaká je pravděpodobnosti, že za 10 let pojede člověk na hory, pokud byl letos u moře? Jak by se pravděpodobnost lišila, kdyby byl letos na horách?

Řešení

Matice pravděpodobností přechodu vypadá takto:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnosti výběru moře nebo hor za 2 roky je dán maticí

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{pmatrix}.$$

Z matice P^2 lze vyčíst, že pokud byl člověk letos u moře, pak za 2 roky pojede k moři na 61 %.

Pravděpodobnosti výběru moře nebo hor za 10 let je dán maticí

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{10} \doteq \begin{pmatrix} 0{,}57 & 0{,}43 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnost, že za 10 let pojede na hory, je zhruba 43 %, pokud byl letos u moře. Pokud byl letos na horách, pak pravděpodobnost, že za 10 let pojede znovu na hory, je též zhruba 43 %. Tedy po dostatečně dlouhé době nezáleží na tom, kde byl letos na dovolené, protože jsou pravděpodobnosti takřka stejné.

Slovní úloha 2

Na střední škole mají tři povinně volitelné předměty, jsou jimi vaření, dílny a sportovní hry. Každý žák si musí jeden z těchto předmětů každý rok vybrat, přičemž náplň předmětu se každý rok obměňuje. Z letošního prvního ročníku si 20 % žáků vybralo vaření, 30 % žáků si vybralo dílny a 50 % žáků si vybralo sportovní hry.

Při volbě vaření je 40% pravděpodobnost, že si další rok žáci vyberou znovu vaření, 30% pravděpodobnost, že si žáci vyberou dílny a 30% pravděpodobnost, že si vyberou sportovní hry.

Při volbě dílen je pak 40% pravděpodobnost, že si další rok žáci vyberou znovu dílny, 50% pravděpodobnost, že si zvolí sportovní hry a pouze 10% pravděpodobnost, že si vyberou vaření.

Při volbě sportovních her je 70% pravděpodobnost, že si žáci další rok opět zvolí sportovní hry, 20% pravděpodobnost, že si vyberou dílny a 10% pravděpodobnost, že si vyberou vaření.

Určete dle statistik, kolik procent žáků bude mít ve čtvrtém ročníku vaření, kolik procent žáků bude mít dílny a kolik procent žáků bude mít sportovní hry.

Řešení

Současný zájem žáků prvního ročníku o předměty je dán počátečním vektorem

$$p(0) = (0{,}2; 0{,}3; 0{,}5).$$

Pravděpodobnost výběru jednotlivých předmětů na další rok žáky vaření je dána vektorem

$$\vec{a} = (0{,}4; 0{,}3; 0{,}3).$$

Pravděpodobnost výběru jednotlivých předmětů na další rok žáky dílen je dána vektorem

$$\vec{b} = (0{,}1; 0{,}4; 0{,}5).$$

Pravděpodobnost výběru jednotlivých předmětů na další rok žáky sportovních her je dána vektorem

$$\vec{c} = (0{,}1; 0{,}2; 0{,}7).$$

Z vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vytvoříme matici přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Abychom zjistili pravděpodobné procentuální zastoupení žáků na jednotlivých předmětech ve čtvrtém ročníku (tedy po 3 letech), pak musíme vypočítat součin počátečního vektoru $p(0)$ a matice P^3:

$$p(3) = p(0) \cdot P^3 = (0{,}2; 0{,}3; 0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}^3 \doteq (0{,}14; 0{,}27; 0{,}59).$$

Ve čtvrtém ročníku si tedy nejspíše 14 % žáků zvolí vaření, 27 % žáků si zvolí dílny a 59 % žáků skončí u sportovních her.

Úlohy k procvičení

1. Ve městě jsou tři obchody s potravinami. Do města se přistěhovala nová rodina. Pokud si rodina vybere pro svůj první nákup obchod A, pak na 70 % půjde příště nakupovat znovu do obchodu A, na 20 % půjde do obchodu B a obchod C navštíví s pravděpodobností 10 %. Pokud půjde nejprve do obchodu B, pak se tam příště vrátí z 60 %, s pravděpodobností 20 % půjde do obchodu A a na 20 % navštíví obchod C. Pokud však půjde nejprve do obchodu C, pak pravděpodobnost, že se tam příště vrátí, je 65 %, do obchodu A půjde na 20 % a z 15 % navštíví obchod B. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru obchodu A pro svůj první nákup navštíví při desátém nákupu opět obchod A? Jaká je pravděpodobnost, že při výběru obchodu C nakoupí při desáté návštěvě v obchodě B?

2. V malém městě má 60 % lidí normální hmotnost, 30 % lidí trpí nadváhou a 10 % lidí má obezitu. Pravděpodobnost, že se z jedince s normální hmotnostní za rok stane obézní je 5 %, na 25 % začne trpět nadváhou a na 70 % bude mít stále normální hmotnost. Pravděpodobnost, že jedinec s nadváhou přibere a stane se obézním, je 30 %, z 30 % se z něj stane člověk s normální hmotností a na 40 % bude mít stále nadváhu. Pravděpodobnost, že se z obézního jedince stane člověk s normální hmotností, je 20 %, že trochu zhubne a bude mít nadváhu je 30 % a na 50 % zůstane obézním. Jaké rozložení bude ve městě příští rok, za 3 roky a za 10 let? (Berte normální hmotnost jako stav 1, nadváhu jako stav 2 a obezitu jako stav 3.)

Výsledky

1. Přibližné pravděpodobnosti při desátém nákupu jsou dány maticí
$$P^{10} \doteq \begin{pmatrix} 0,4 & 0,31 & 0,29 \\ 0,4 & 0,31 & 0,29 \\ 0,4 & 0,31 & 0,29 \end{pmatrix},$$
kde $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,15 & 0,65 \end{pmatrix}$.

2. Počáteční stav je dán vektorem
$$p(0) = (0,6; 0,3; 0,1).$$
Matice přechodu má tvar
$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,25 & 0,05 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Vektor absolutních pravděpodobností stavů po jednom roce bude vypadat takto:

$$p(1) = (0{,}53; 0{,}3; 0{,}17).$$

Po třech letech bude rozložení zhruba takovéto:

$$p(3) \doteq (0{,}478; 0{,}306; 0{,}216).$$

Po deseti letech pak přibližně:

$$p(10) \doteq (0{,}461; 0{,}308; 0{,}231).$$

6.6 Determinanty

Slovní úloha 1

Měsíční plat Lukáše je 42000 Kč, přičemž mu výplata chodí začátkem měsíce. Z něho se ještě odvádí daň 15 % státu. Tento měsíc dostal navíc k základnímu platu peněžní prémii (také zdaněnou 15 %). Na začátku každého měsíce po výplatě si navíc sám platí zdravotní připojištění ve výši 3670 Kč. Z peněz, které mu zbudou z platu po zdanění, po přičtení zdaněné prémie a odečtení připojištění, si dal stranou 11000 Kč v hotovosti na různé budoucí výdeje a zbytek uložil na nový bankovní účet s měsíčním úrokem 5 % (vždy na začátku měsíce). Na konci měsíce mu zbyla hotovost ve výši jeho prémie (před zdaněním), ale bohužel ji mohl vložit na účet až po připsání úroku. Po připsání úroku a zbylé hotovosti měl Lukáš na účtu celkem 26245 Kč. Kolik peněz vložil Lukáš na účet? Kolik mu zbylo na konci měsíce peněz v hotovosti?

Řešení

Z textu můžeme vyvodit následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 42000 \cdot 0{,}85 + 0{,}85x_1 - 3670 - 11000 &= x_2, \\ 1{,}05x_2 + x_1 &= 26245. \end{aligned}$$

Po úpravě vypadá soustava takto:

$$\begin{aligned} &0{,}85x_1 - x_2 = -21030, \\ &x_1 + 1{,}05x_2 = 26245. \end{aligned}$$

Matice této soustavy má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}85 & -1 \\ 1 & 1{,}05 \end{pmatrix}.$$

Soustavu rovnic budeme řešit pomocí determinantů. Spočítáme si tedy nejprve determinant matice A:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0{,}85 & -1 \\ 1 & 1{,}05 \end{pmatrix} = 1{,}8925.$$

Abychom zjistili x_1, budeme potřebovat zjistit hodnotu determinantu matice $A_1 = \begin{pmatrix} -21030 & -1 \\ 26245 & 1{,}05 \end{pmatrix}$, kterou jsme získali nahrazením prvního sloupce matice A sloupcem pravých stran dané soustavy. Tento determinant má hodnotu

$$\det A_1 = -22081{,}5 + 26245 = 4163{,}5.$$

Potom platí rovnost

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{4163{,}5}{1{,}8925} = 2200.$$

Stejně tak budeme ke zjištění x_2 potřebovat hodnotu determinantu matice $A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & -21030 \\ 1 & 26245 \end{pmatrix}$, kterou jsme získali nahrazením druhého sloupce matice A sloupcem pravých stran dané soustavy. Tento determinant má hodnotu

$$\det A_2 = 22308{,}25 + 21030 = 43338{,}25$$

Potom platí rovnost

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{43338{,}25}{1{,}8925} = 22900$$

Lukáš vložil na účet celkem 22900 Kč. Z hotovosti, kterou měl stranou, mu na konci měsíce zbylo 2200 Kč.

Slovní úloha 2

Firma nakupuje každý měsíc pro zaměstnance různé služební telefony, notebooky a stolní počítače. V lednu koupila firma za 35000 Kč 1 telefon, 1 notebook a 1 stolní počítač. V únoru pořídila firma za 55000 Kč 3 různé telefony, 1 notebook a 1 stolní počítač. Průměrná cena za telefon byla však v únoru o třetinu nižší, než cena telefonu koupeného v lednu. Průměrná cena za notebook byla zase 2x vyšší než za notebook v lednu a počítač byl za stejnou cenu jako počítač v lednu. V březnu koupila firma za 38000 Kč 1 telefon a 1 stolní počítač. Cena za telefon byla stejná jako cena telefonu koupeného v lednu a stolní počítač stál dvojnásobek ceny stolního počítače koupeného v lednu.

Jakou cenu měl telefon zakoupený v lednu?

Řešení

Ze zadání můžeme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 35000, \\ 3 \cdot \frac{2}{3} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 55000, \\ x_1 + 2x_3 &= 38000, \end{aligned}$$

kde x_1 je cena lednového telefonu, x_2 je cena lednového notebooku a x_3 je cena lednového stolního počítače.

K tomu, abychom vypočítali pouze x_1, využijeme determinantů.

Nejprve vypočítáme determinant matice A (matice soustavy):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 1 + 0) - (2 + 4 + 0) = -1.$$

Abychom mohli vypočítat x_1, potřebujeme vypočítat determinant matice A_1, která vznikne nahrazením prvního sloupce matice A sloupcem pravých stran naší soustavy. Matice A_1 má tedy tvar

$$A_1 = \begin{pmatrix} 35000 & 1 & 1 \\ 55000 & 2 & 1 \\ 38000 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočítáme determinant matice A_1:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 35000 & 1 & 1 \\ 55000 & 2 & 1 \\ 38000 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 35000 & 1 & 1 \\ -15000 & 0 & -1 \\ 38000 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -15000 & -1 \\ 38000 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-30000 + 38000) = -8000.$$

Pro x_1 platí vztah

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 8000.$$

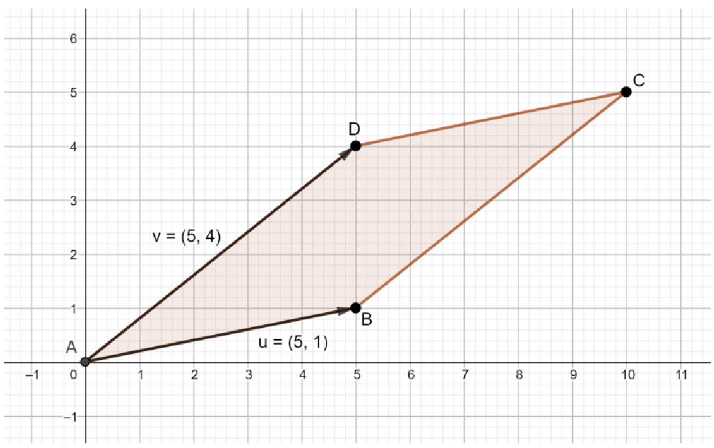
Cena telefonu zakoupeného v lednu byla tedy 8000 Kč.

Slovní úloha 3

Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic v rovině. V této rovině je dán rovnoběžník $ABCD$ tak, že vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (5, 1)$ a vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (5, 4)$. Jaký je obsah tohoto rovnoběžníku?

Řešení

Takto vypadá daný rovnoběžník v kartézské soustavě souřadnic:



Obrázek 3: Rovnoběžník daný vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$

Obsah rovnoběžníku je dán vztahem

$$S = |\det M|,$$

kde $M = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$, $|\det M|$ je absolutní hodnota $\det M$.

Platí rovnost

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2.$$

Pak

$$S = |2| = 2.$$

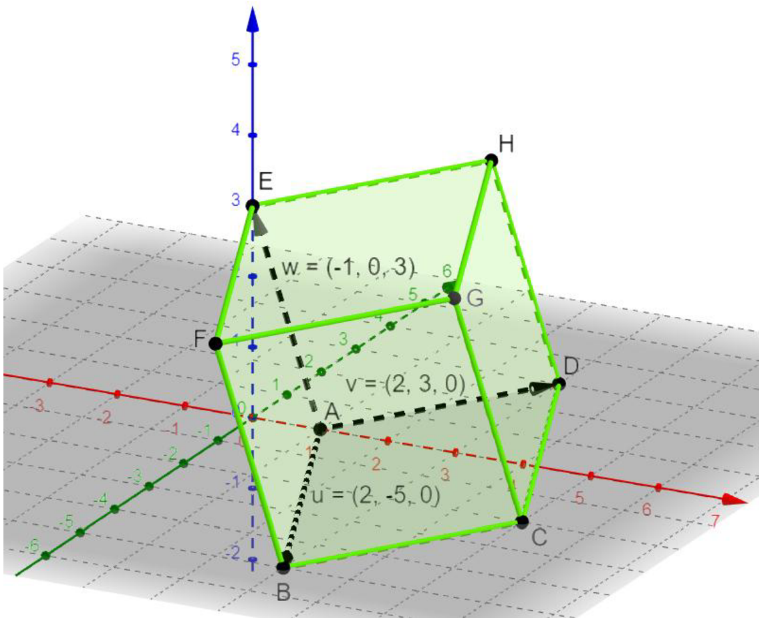
Obsah rovnoběžníku $ABCD$ je tedy roven 2 j^2.

Slovní úloha 4

Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic v prostoru. V tomto prostoru je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ tak, že vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -5, 0)$, vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (2, 3, 0)$ a vektor $\vec{w} = \overrightarrow{AE} = (-1, 0, 3)$. Jaký je objem tohoto rovnoběžnostěnu?

Řešení

Takto vypadá daný rovnoběžník v kartézské soustavě souřadnic:



Obrázek 4: Rovnoběžnostěn daný vektory $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$ a $\vec{\boldsymbol{w}}$

Pro obsah rovnoběžnostěnu platí vztah

$$S = |\det M|,$$

kde $M = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$, $|\det M|$ je absolutní hodnota $\det M$.

Pro determinant M platí:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (6 + 10) = 48.$$

Pak tedy

$$S = |48| = 48.$$

Objem rovnoběžnostěnu je 48 j^3.

Úlohy k procvičení

1. Pan Novotný měl na svém spořicím účtu v lednu 50000 Kč. Na konci měsíce dodatečně zaplatil ze spořicího účtu nájemné za říjen, listopad a prosinec. Na začátku února byly peníze na účtu zúročeny 4 %. V půlce února vložil na účet 20000 Kč. Zároveň si pan Novotný vede účet běžný, na kterém měl v lednu 19000 Kč. Na konci ledna zaplatil lednový nájem z peněz na běžném účtu. Na začátku února byly peníze na účtu zúročeny 5 %. V půlce února si pan Novotný na běžný účet vložil ještě 8400 Kč, které získal prodejem starého nábytku. Kolik měl pan Novotný peněz na konci února na běžném účtu, když na spořicím účtu měl dvojnásobek této částky? Kolik platí měsíčně za nájem?

   Počítejte pomocí determinantů.

2. Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic v rovině. V této rovině je dán rovnoběžník $KLMN$ tak, že vektor $\vec{u} = \overrightarrow{MN} = (-4, 3)$ a vektor $\vec{v} = \overrightarrow{ML} = (1, 5)$. Jaký je obsah tohoto rovnoběžníku?

3. Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic v prostoru. V tomto prostoru je dán rovnoběžnostěn $KLMNOPQR$ tak, že vektor $\vec{u} = \overrightarrow{KL} = (1, 4, 0)$, vektor $\vec{v} = \overrightarrow{KN} = (-2, 5, 0)$ a vektor $\vec{w} = \overrightarrow{KO} = (3, 1, 2)$. Jaký je objem tohoto rovnoběžnostěnu?

Výsledky

1. Měsíční nájem činí 15000 Kč. Na konci února měl pan Novotný na běžném účtu 12600 Kč.

2. Obsah rovnoběžníku $KLMN$ je 23 j^2.

3. Objem rovnoběžnostěnu $KLMNOPQR$ je 26 j^3.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře nejprve s teorií lineární algebry, abychom mohli následně řešit pomocí získaných poznatků nejrůznější slovní úlohy, které se mohou vyskytovat v běžném životě. Cíl byl z mého pohledu splněn.

Při vytváření slovních úloh jsem se snažil najít možnosti využití této teorie nejen při každodenním životě lidí, ale také v různých přírodovědných oborech (nechybí zde slovní úlohy z oboru chemie nebo fyziky), geometrii, ekonomii či statistice. Chtěl jsem tak čtenáři ukázat, že se dají získané poznatky aplikovat v nejrůznějších oblastech praxe.

Práce by se dále mohla rozšířit o další řešené slovní úlohy a úlohy k procvičení. Při dostatečném množství úloh by tak mohla vzniknout sbírka úloh s krátkým teoretickým úvodem.

Seznam použité literatury

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-867-3257-6.

[2] BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0843-8.

[3] DVOŘÁK, Jiří. Markovovy řetězce. *Výuka – Letní semestr 2014/2015 – RNDr. Jiří Dvořák Ph.D.* [online]. [cit. 2021-6-3]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~dvorak/teaching/2014_2015/NMFM310/NMFM310_2015_kap4.pdf

[4] HANUŠ, Petr. *Sbírka řešených příkladů k MB101*. Brno, 2010. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Fakulta informatiky. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/s8jca/Diplomka.pdf

[5] HAŠEK, Roman. Lineární algebra – KMA/LA. *Lineární algebra – KMA/LA* [online]. 2018 [cit. 2021-6-3]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/lalgebra/LA_TextyPrednasek_ZS18_1.pdf

[6] HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. *Markovovy řetězce a jejich aplikace*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3132-1.

[7] HRŮZOVÁ, Eva. *Některé aplikace lineární algebry*. Plzeň, 2018. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta pedagogická. Dostupné z: https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/32023/1/Hruzova%20Eva%20%20Bakalarska%20prace.pdf

[8] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: teoretická část*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005. ISBN 80-214-3100-8.

[9] KRUPKOVÁ, Olga. Lineární algebra 1. *Studijní materiály – Distanční a prezenční vzdělávání profesních informatiků: inovace pro informační společnost* [online]. Olomouc, 2008 [cit. 2021-6-3]. Dostupné z: https://phoenix.inf.upol.cz/esf/ucebni/Algebra.pdf

[10] MAŇÁK, Tomáš. Uhlovodíky. *Chemie – Učební texty – Střední průmyslová škola, Ostrava - Vítkovice* [online]. 2013 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: https://www.spszengrova.cz/wpcontent/uploads/2020/04/CHE_1_Uhlovod%C3%ADky_UT-PL.pdf

[11] MAXOVÁ, Jana. Kapitola 13: Geometrie v R^n. *Výuka – Jana Maxová* [online]. [cit. 2021-6-3]. Dostupné z: https://web.vscht.cz/~maxovaj/13%20Geometrie.pdf

[12] MIKULČÁK, J.; KLIMEŠ, B.; ZEMÁNEK, F. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, Praha: Prometheus, spol. s.r.o., 1988. ISBN 80-85849-84-4.

[13] NAVARA, Mirko. Markovovy řetězce. *Pravděpodobnost a statistika (B0B01PST)*. [online]. 2021 [cit. 2021-6-3]. Dostupné z: https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/Markov_print.pdf

[14] NEDVĚD, Přemysl. *Determinant* [online]. Praha, 2019 [cit. 2021-6-12]. ISBN 978-80-7335-583-8. Dostupné z: http://84.242.77.122/_uc%282ebnice_CS/Algebra/Matice/Operace_s_maticemi/Determinant/index.htm

[15] OLŠÁK, Petr. Lineární algebra. Praha, druhé vydání 2010. *RNDr. Petr Olšák* [online] [cit. 2021-5-20]. Dostupné z: http://petr.olsak.net/ftp/olsak/linal/linal2.pdf

[16] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 4., nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Česká matice technická (SNTL).

[17] Skalární součin. *Analytická geometrie* [online]. Praha: Univerzita Karlova, 2011 [cit. 2021-6-15]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/analyticka_geometrie/vektory.php?kapitola=skalarniSoucin

[18] ŠOMPLÁK, Radovan. *Matice, determinant a objemy těles*. Brno, 2009. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=18984

[19] TESKOVÁ, Libuše. *Lineární algebra*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. ISBN 80-708-2797-1.

[20] VALENTOVÁ, Eva. Matice, determinanty a jejich využití v praxi. *Aktuální verze sbírek – Gymnázium Botičská* [online]. 2014 [cit. 2021-5-20]. Dostupné z: http://www.gybot.cz/data/2/q/E/matice.pdf

[21] VOLEK, Tomáš a Ivana FALTOVÁ LEITMANOVÁ. Nabídka, Poptávka a Tržní rovnováha. Dostupné z: http://www2.ef.jcu.cz/~jalina/sim/S_D.pdf

Použité nástroje:

Kalkulačka matic Matrix calculator. Dostupné z: https://matrixcalc.org/cs/

Použité programy:

GeoGebra Klasik

Seznam obrázků

Obrázky 1 a 2 jsem vytvořil za pomoci MS Wordu, obrázky 3 a 4 byly vytvořeny v softwaru Geogebra Klasik.

Seznam tabulek

Všechny tabulky jsem vytvořil v aplikaci MS Word.