



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**TEORETICKÉ VLASTNOSTI A APLIKACE POKROČILÝCH  
MODELŮ PLÁNOVANÉHO EXPERIMENTU**

THEORETICAL PROPERTIES AND APPLICATIONS OF ADVANCED DESIGNS OF EXPERIMENT

**DIZERTAČNÍ PRÁCE**

DOCTORAL THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Ing. Pavel Hrabec**

**ŠKOLITEL**

SUPERVISOR

**Ing. Josef Bednář, Ph.D.**

**BRNO 2019**



## **Abstrakt**

Metodologie plánovaného experimentu se v posledních desetiletích stala nedílnou součástí optimalizace výrobních procesů. Toto téma je stále aktuální zejména pro množství odlišných přístupů využívaných ke sběru a vyhodnocení dat. V různých oblastech výzkumu a vývoje se však často nebere ohled na případné nedostatky způsobené použitím zvoleného postupu, nebo dokonce předpoklady nutné pro vybraný postup. Tato práce shrnuje teoretický základ vybraných plánovaných experimentů. Popisuje některé realizace centrálního kompozitního plánu pro pět vysvětlujících proměnných z oblasti elektroerozivního drátového řezání. Nakonec porovnává různé plány experimentu pro odezвовé plochy pěti vysvětlujících proměnných a popisuje jejich vlastnosti vzhledem k algoritmické selekci statisticky významných regresorů.

## **Abstract**

The methodology of the design of experiment has become an integral part of the optimisation of manufacturing processes in recent decades. Problems regarding designs of experiments are still up to date, especially because of a variety of approaches to collecting and evaluating data. Scientists in different research and development areas often do not take into account possible shortcomings or even essential assumptions of selected design and/or its evaluation methods. This dissertation thesis summarizes theoretical bases of selected designs of experiments. Describes several applications of central composite design on responses regarding wire electrical discharge machining process. And compares different designs of experiment for response surfaces of five parameters with regards to algorithmic selection of statistically significant parameters.

**klíčové slova**

plánovaný experiment, metodologie odezvových ploch, faktorový plán experimentu, regresní analýza, centrální kompozitní plán, Boxův-Behnkenův plán, algoritmická selekce významných regresorů

**keywords**

design of experiment, response surface methodology, factorial design, regression analysis, central composite design, Box-Behnken design, algorithmic selection of significant parameters

HRABEC, Pavel. *Teoretické vlastnosti a aplikace pokročilých modelů plánovaného experimentu*. Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2019. 70 s. Vedoucí dizertační práce Ing. Josef Bednář, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem dizertační práci Teoretické vlastnosti a aplikace pokročilých modelů plánovaného experimentu vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, jenž je součástí této práce.

4. září 2019

Ing. Pavel Hrabec



Na tomto místě bych chtěl poděkovat panu Ing. Josefu Bednářovi, Ph.D. za cenné rady, výpomoc a ochotu konzultovat jakoukoli problematiku. Dále bych chtěl poděkovat paní Ing. Kateřině Mouralové, Ph.D. za příležitost aplikovat svoje znalosti ze statistiky na reálné problémy. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat všem kolegům na ÚM, z nichž jsem v průběhu studia úspěšně vydoloval velké množství vědomostí. Velký dík pak patří mojí manželce Haně, která mě po celou dobu ve studiu bezmezně podporovala, přestože je předmětem mojí práce její „oblíbená“ statistika.

Ing. Pavel Hrabec

## OBSAH



# Obsah

---

<b>Úvod</b>	<b>11</b>
<b>1 Elektroerozivní drátové řezání</b>	<b>13</b>
<b>2 Plánovaný experiment - teorie</b>	<b>15</b>
2.1 Základní principy DoE . . . . .	15
2.2 Historie DoE . . . . .	16
2.3 Dvojúrovňový faktorový plán experimentu . . . . .	16
2.4 Metodologie odezvočných ploch . . . . .	21
2.5 Vyhodnocení DoE . . . . .	24
<b>3 Publikované modely používající DoE</b>	<b>33</b>
3.1 Model řezné rychlosti WEDM hliníkové slitiny 7475-T7351 . . . . .	35
3.2 Model drsnosti povrchu $P_q$ po WEDM čistého hliníku . . . . .	37
3.3 Model šířky mezery po WEDM hliníkové slitiny 7475-T7351 . . . . .	40
3.4 Model řezné rychlosti Hadfieldovy oceli . . . . .	45
3.5 Modely řezné rychlosti inconelu 625 pro různé orientace řezu . . . . .	47
<b>4 Vlastnosti algoritmické selekce regresorů vzhledem k DoE</b>	<b>53</b>
4.1 Přehled známých nedostatků . . . . .	53
4.2 Výsledky numerických simulací . . . . .	54
<b>Závěr</b>	<b>65</b>
<b>Literatura</b>	<b>67</b>

## OBSAH

V moderní průmyslové výrobě je již takřka nemožné dosáhnout zlepšení procesu bez použití pokročilých statistických metod. S nadsázkou se dá tvrdit, že všechna zlepšení, odhalitelná „pouhým okem“ nebo „expertním odhadem“ (bez použití statistiky), již byla implementována. Proto je v dnešním vysoce konkurenčním prostředí použití statistických metod pro zlepšování procesu naprostou nutností. Velmi oblíbenou statistickou metodou je plánovaný experiment (DoE). DoE je hojně využíván zejména pro svou efektivitu. Pokud se DoE navrhne „správně“, získáme „velké množství informací“ s použitím „výrazně menšího“ počtu měření (srovnáváme-li s podobnými experimenty bez použití metodologie DoE). K vyhodnocení naměřených dat jsou nejčastěji používány ověřené a známé nástroje regresní analýzy (shrnuté v části 2.5). Výsledkem, korektně vyhodnocených dat, získaných pomocí plánovaného experimentu, často bývá matematický model zvolené odezvy na sledovaných vstupních proměnných. Tento model pak umožňuje ve zvoleném slova smyslu „optimalizovat“ nastavení statisticky významných faktorů. Plánovaný experiment je stále aktuální, přestože základy této metodologie byly publikovány již v první polovině dvacátého století jedním z velikánů statistiky, R. A. Fisherem, (historie DoE je velmi stručně shrnuta v části 2.2).

Stinnou stránkou obrovského rozšíření metod plánovaného experimentu je, že různé, často i velmi pokročilé plány experimentů, bývají „zneužity“ k úplně jiným účelům, než byly původně odvozeny. Nejčastějším „prohřeškem“ experimentátorů bývá selekce plánu experimentu pouze na základě minimalizace počtu potřebných měření, nehledě na další vlastnosti těchto plánů. Tento fakt lze považovat za hlavní příčinu „přehnaně horlivého“ používání Taguchiho plánů experimentu, které, mimo jiné, předpokládají naprostou neexistenci interakcí mezi hlavními faktory, což v obecném případě rozhodně neplatí.

První kapitola velice stručně popisuje proces elektroerozivního drátového řezání (WEDM), neboť toto byla nejčastější problematika, na níž bylo autorovi umožněno aplikovat znalosti plánů experimentu a jejich statistického vyhodnocení. Zbytek práce se pak věnuje plánovanému experimentu a to od „teoretických“ základů, přes aplikace, až po numerické simulace algoritmické selekce statisticky významných regresorů.

## Cíle disertační práce

Cílem disertační práce bude na základě dat získaných během experimentů elektroerozivního drátového řezání vygenerovat sady „podobných“ dat, ve smyslu významnosti sledovaných faktorů a variability procesu, a na těchto datech testovat vlastnosti různých plánů experimentu, zejména těch často používaných v odborné literatuře týkající se WEDM. Cíle tedy lze rozdělit do tří hlavních bodů:

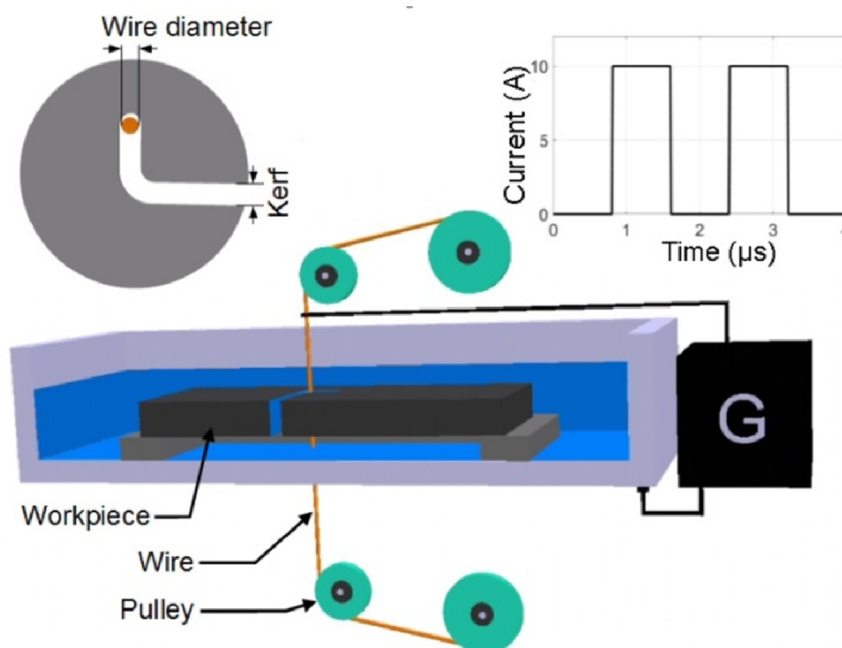
- 1) Sběr a vyhodnocení DoE aplikovaného na reálná data z procesu WEDM.
- 2) Vygenerování testovacích sad dat „podobných“ vlastností jako byly získány z procesu WEDM
- 3) Porovnání různých pokročilých plánů experimentu pro odezvové plochy. Zejména ve vztahu k algoritmické selekci regresorů.



# 1

## Elektroerozivní drátové řezání

Elektroerozivní drátové řezání (WEDM) je nekonvenční technologie obrábění využívající k obrábění materiálu termoelektrických principů. Tento proces probíhá na dvou elektrodách současně při ponoření do pracovního média, kterým je vždy dielektrikum (kapalina s vysokým elektrickým odporem). V průběhu erodování je odtavován a odpařován obráběný materiál, díky působení periodických elektrických výbojů, které jsou elektrodou přiváděny na obrobek z generátoru formou impulzů o určité frekvenci a napětí. Celý proces je schematicky znázorněn na obrázku 1.1 (obrázek je převzat z [1]).



**Obrázek 1.1:** Schematické znázornění WEDM

Při elektroerozivním obrábění se nevyskytují klasické řezné síly, což umožňuje řezat všechny elektricky vodivé materiály bez ohledu na jejich tvrdost, houževnatost nebo mechanické vlastnosti. Obrobky je proto možné obrábět na konečné rozměry až po tepelném zpracování. Tato technologie umožňuje efektivní obrábění široké škály materiálů, jako jsou např. titanové a hliníkové slitiny, které jsou uplatněny v automobilovém a leteckém průmyslu. Elektroerozivní obrábění umožňuje obrábět měkké materiály bez jakékoliv jejich deformace, protože na obrobek nepůsobí žádné mechanické zatížení. WEDM je zásadní technologická operace v mnoha výrobních odvětvích, zejména v leteckém, automobilovém, armádním průmyslu a při výrobě lékařských nástrojů. V důsledku širokého

užití tohoto obráběcího procesu nároky na výkonnostní charakteristiky neustále rostou. Jde především o rozměrovou přesnost, rychlost úběru materiálu a chemickou a topografickou jakost obrobeného povrchu. Tyto charakteristiky jsou závislé na druhu obráběného materiálu a jeho tepelném zpracování, stavu stroje a především na volbě parametrů erodovacího procesu. V [1], [2], [3], [4], [5] a podobných studiích byly po předchozím testování zvoleny jako vysvětlující parametry pro plánovaný experiment (DoE) gap voltage ( $V$ ), pulse on time ( $\mu s$ ), pulse off time ( $\mu s$ ), wire feed ( $m \cdot min^{-1}$ ) a discharge current ( $A$ ). Pozorovanými odezvami byly řezná rychlost ( $mm \cdot min^{-1}$ ), různé charakteristiky drsnosti povrchu (všechny  $\mu m$ ) a šířka mezery řezu ( $\mu m$ ).

# 2

## Plánovaný experiment - teorie

---

V následující kapitole jsou přehledně shrnuty známé a v praxi používané plány experimentu, některé jejich vlastnosti a způsob jejich vyhodnocení. Tvrzení prezentovaná v následujícím textu jsou kompilátem z [7], [8], [10], [20], [21], [26], [29], a [34].

### 2.1. Základní principy DoE

Plánovaný experiment je zkouška nebo posloupnost zkoušek, ve kterých cíleně provádíme změnu vstupních faktorů procesu, abychom mohli pozorovat a identifikovat odpovídající změny výstupní proměnné (odezvy). Metodologie plánovaného experimentu dává „návod“, jak (z pohledu statistika) co nejefektivněji získávat data. Tedy jak s použitím co nejméně měření získat co nejvíce informací. Možnosti aplikace různých plánů experimentu jsou prakticky neomezené a s úspěchem se používají ve všech odvětvích průmyslu i výzkumu, kde je nutné brát v úvahu náklady a časovou náročnost experimentu. Cílem plánovaného experimentu (v rámci této práce) je „vysvětlit“ jednu pozorovanou proměnnou (odezvu) pomocí několika vysvětlujících proměnných, případně jejich funkcí. Plánovaný experiment stojí na třech základních principech.

#### Replikace

Replikací je opakování celého experimentu nebo alespoň jeho části za účelem odhadnutí chyby vytvořeného modelu. Tento odhad pak umožní „vybrat“ pouze statisticky významné vysvětlující proměnné a ignorovat ty, které mají na odezvu pouze velmi malý (statisticky nevýznamný) vliv.

#### Blokování

Rozdělení celého experimentu do bloků je prováděno, aby bylo možné odhalit případný vliv faktorů, které nelze znáhodnit, nebo které nejsou pozorovány.

#### Znáhodnění

Cílem znáhodnění pořadí zkoušek je zlepšit šanci rozlišit vliv sledovaných vysvětlujících proměnných od těch nesledovaných, jejichž působení často bývá závislé na čase. Nebude-li znáhodnění provedeno, může se poměrně snadno stát, že některá z vysvětlujících proměnných bude statisticky nevýznamná, ale bude se jevit jako statisticky významná nebo naopak.

Nebudou-li při aplikaci DoE porušeny tyto tři základní principy plánovaného experimentu, získaná data budou „kvalitně“ vyhodnocena a pozorovaná odezva je skutečně závislá na vysvětlujících faktorech, bude výsledkem kvalitní regresní model odezvy. Tento model je možné využít například k nalezení optimálního nastavení parametrů pro maximalizaci libovolné účelové funkce odezvy v daném procesu.

## 2.2. Historie DoE

Podle [30] se inspirací pro vznik DoE stal experiment Johna Lawese, který vlastnil továrnu na umělá hnojiva. Tento muž v roce 1843 začal na farmě v Harpendenu ve Velké Británii zjišťovat vliv různých faktorů na výnosy pšenice. K samotnému experimentu přistoupil systematicky a velké lány polí rozdělil do menších pruhů, které rok co rok hnoжил stejnou směsí a zaznamenával úhrn srážek. V experimentu však chyběly replikace (části pole hnojené stejným způsobem) bloky a znáhodnění. V roce 1919 tedy už nashromáždili 76 let dat, ale bylo velmi obtížné se v nich vyznat, zejména kvůli vysoké variabilitě. Proto tehdejší ředitel této farmy najal statistika Ronalda Aylmera Fishera.

Fisher zjistil, že přestože měl k dispozici obrovské množství dat, díky „nevhodnému“ plánu experimentu nebylo možné odlišit vliv různých hnojiv a vliv počasí. První výsledky této analýzy publikoval v roce 1921 [16]. Později napsal v [18], že právě toto ho vedlo k tomu aby, zaměřil pozornost na proces vzniku dat. To se projevilo v jeho knihách [19] (1925) a [17] (1935), kde popsal základy metodologie DoE.

Plánovaný experiment se rychle šířil i mimo zemědělství a začaly se vyvíjet různé pohledy na jeho zlepšení jako například metodologie odezvových ploch [12], vývoj robustních procesů a six sigma [24], optimalita návrhu experimentu [22] a řízení kvality procesu [15]. Převážně do poslední kategorie pak spadají někdy kontroverzní práce profesora Genjiho Taguchiho. V současné době je DoE součástí většiny pokročilejších kurzů statistiky, k dostání je nepřeberné množství učebnic shrnující tuto metodologii od úplných základů např. [26] [11] až po poměrně pokročilé a specializované např. [29].

## 2.3. Dvojúrovňový faktorový plán experimentu

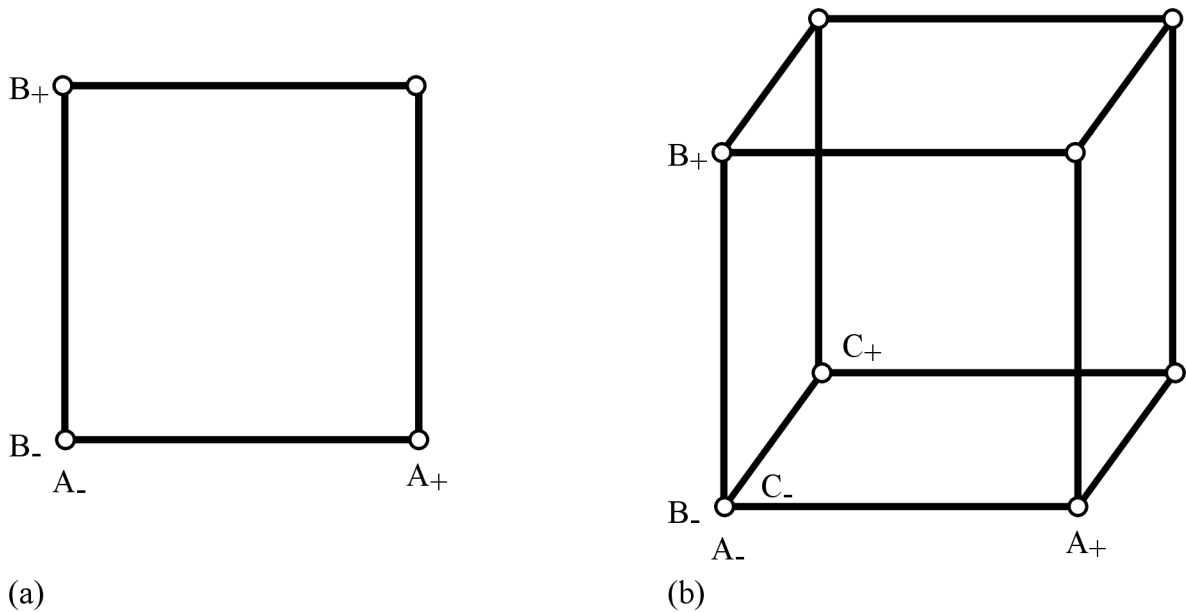
Dvojúrovňový faktorový plán experimentu byl jednou z prvních metod pro efektivnější sběr dat. Faktorový v tomto případě znamená, že bude proveden stejný počet měření v každé možné kombinaci nastavení faktorů. Pro provedení jednoho opakování dvojúrovňového faktorového plánu experimentu obsahujícího  $k$  faktorů tedy bude potřeba  $2^k$  měření. Dvojúrovňový faktorový plán experimentu umožňuje zachytit vliv jednotlivých faktorů a jejich interakcí na odezvu. V tomto prvním případě nebude žádný rozdíl mezi kategoriálními a spojitými vysvětlujícími proměnnými. Ty kategoriální pouze bude nutné překódovat na binární. Např. na 1 pro ty co patří do dané kategorie a na  $-1$  ty co tam nepatří. Matematický model dvojúrovňového faktorového experimentu pro dva faktory pak popisuje rovnice 2.1.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \epsilon, \quad (2.1)$$

kde  $\epsilon$  značí náhodnou složku odezvy, jejíž předpokládané vlastnosti jsou popsány v části 2.5. Z této rovnice je také zjevné, že  $2^k$  opakování bude stačit pouze k nalezení saturovaného modelu (funkce faktorů  $x_i$  bude procházet všemi pozorovanými hodnotami

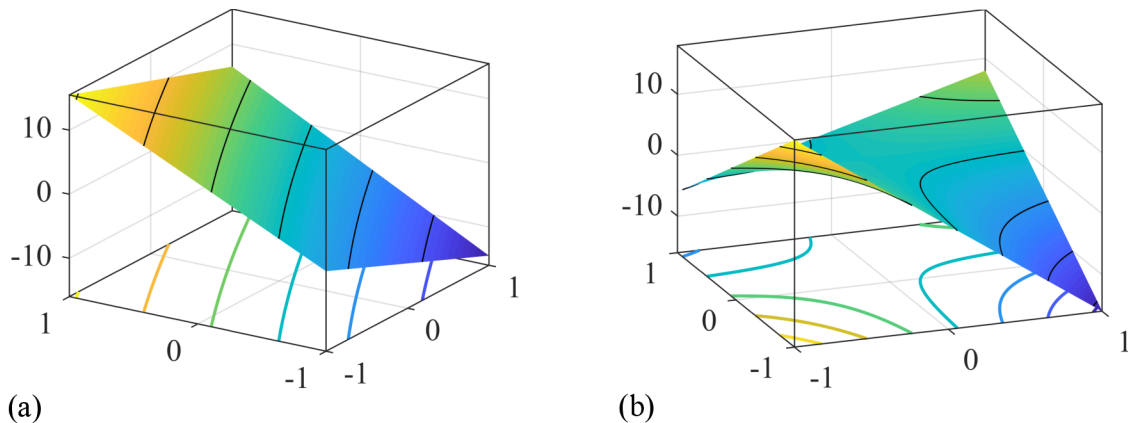


$Y$ ), proto se, obzvláště pro menší množství faktorů, celý experiment několikrát replikuje. Protože (pro spojitě faktory) předpokládáme funkci složenou pouze z lineárních členů a jejich interakcí, bude optimální zvolit minimum a maximum jako dvě úrovně každé vysvětlující proměnné. Zmíněný rozsah by měl být „malý“ ve srovnání s fyzikálními omezeními faktorů a měl by být určen ve spolupráci s expertem na danou problematiku. Interakcí v praxi chápeme vzájemné působení dvou a více faktorů na odezvu a v matematice ji modelujeme součinem těchto faktorů. Faktorový plán experimentu pro dvě a tři proměnné je schematicky znázorněn na obrázku 2.1. Pro přehlednost jsou ve schématech vysvětlující proměnné  $x_1, x_2, x_3$  označeny  $A, B, C$  s indexem  $-$  pro minimum a  $+$  pro maximum.



**Obrázek 2.1:** a) Schema faktorového plánu experimentu pro dva faktory, b) Schema faktorového plánu experimentu pro tři faktory

Odezvová plocha se statisticky nevýznamnou a statisticky významnou interakcí faktorového plánu experimentu se dvěma vysvětlujícími proměnnými je zobrazená na obrázku 2.2. Odezvovou plochu pro tři a více proměnných není možné zobrazit.

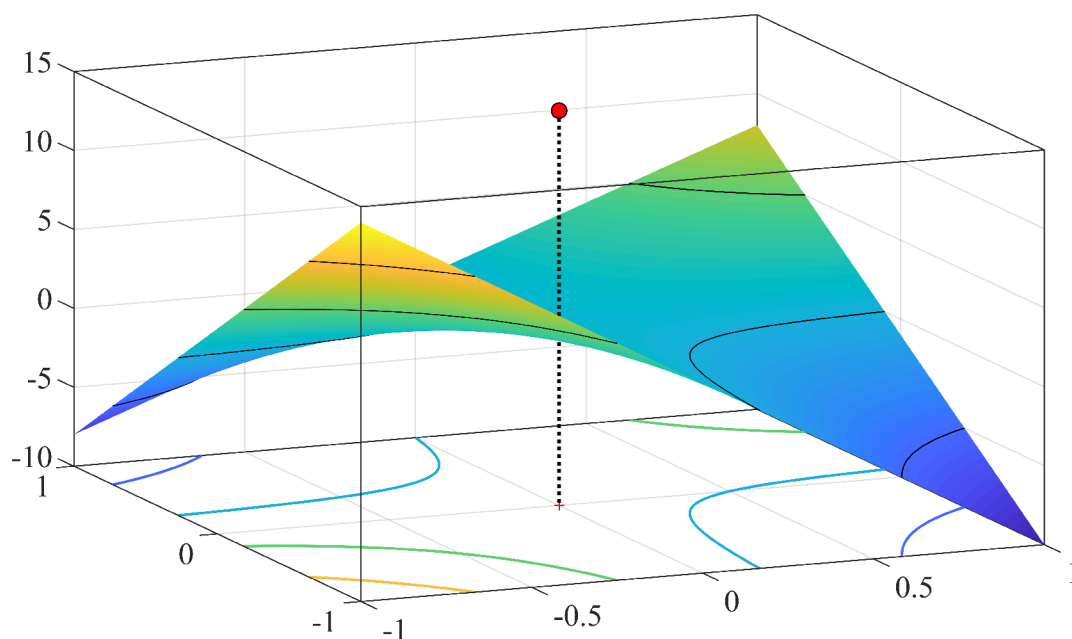


**Obrázek 2.2:** a) Odezvová plocha dvoufaktorového DoE se stat. nevýznamnou interakcí, b) Odezvová plocha dvoufaktorového DoE se stat. významnou interakcí

Označíme-li minimum vysvětlující proměnné jako  $-1$  a maximum jako  $1$ , bude mít matice plánu (v dalším  $\mathbf{X}$ ) jedné replikace pro experiment z rovnice 2.1 tvar

$$\begin{pmatrix} \textit{konst.} & x_1 & x_2 & x_1x_2 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto zápisu je zřejmé, že pokud vysvětlující proměnné transformujeme na interval  $\langle 1, -1 \rangle$  (triviální transformace bude  $\frac{x-(\max+\min)/2}{(\max-\min)/2}$ ), budou sloupce matice  $\mathbf{X}$  ortogonální. To zlepšuje numerické vlastnosti výpočtu koeficientů  $\beta_i$  a zajistí, že oblast vysvětlujících proměnných bude tvořit  $k$ -rozměrnou krychli. Jestliže lze vysvětlující proměnné považovat za spojité, často se do faktorového plánu experimentu přidává tzv. centrální bod, aby bylo možné testovat, zda je model 2.1 (případně jeho vícerozměrná varianta) vhodný, tedy že nedochází k zakřivení, které by bylo nutné popsat například kvadratickým členem (viz obrázek 2.3).



**Obrázek 2.3:** Odezvová plocha dvoufaktorového DoE se „vzdáleným“ měřením v centrálním bodě

Bude-li ve faktorovém plánu experimentu jeden centrální bod, matice plánu bude

$$\begin{pmatrix} \hline konst. & x_1 & x_2 & x_1x_2 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Počet měření v centrálním bodě může být jiný než v „okražových“ bodech, protože přidání dalšího centrálního bodu neporuší ortogonalitu sloupců matice  $\mathbf{X}$ , a žádná kombinace parametrů tedy nebude „významnější“. Nelze-li tedy opakovat celý experiment, můžou alespoň opakování v centrálním bodě poskytnout informace o variabilitě odezvy a tedy umožní použít statistických testů popsaných níže.

### 2.3.1. Částečný faktorový plán

Částečné (zlomkové) plány experimentu se často používají pokud náklady na plný faktorový plán překročí únosné meze (přidání dalšího faktoru zdvojnásobí potřebný počet měření). Například pokud proces ovlivňuje šest hlavních faktorů. Potřebný počet měření na jednu replikaci plného faktorového experimentu bez centrálních bodů bude  $2^6 = 64$ . Saturovaný model však bude obsahovat jednu konstantu, šest lineárních členů, patnáct interakcí druhého řádu, dvacet interakcí třetího řádu, patnáct interakcí čtvrtého řádu, šest interakcí pátého řádu a jednu interakci šestého řádu. Interakce vyšších řádů jsou však velice těžko interpretovatelné a v praxi se příliš nevyskytují, pročez jsou do modelu zahrnovány pouze na „doporučení experta“. V dalším proto budeme předpokládat, že členy nižšího řádu jsou pravděpodobnější, než členy vyššího řádu. Tato premisa umožní „snížit“ počet měření, pokud interakce vyššího řádu zanedbáme úplně. Uebereme-li „vhodná“ pozorování, matice plánu bude nadále ortogonální, ale „daní“ za toto zjednodušení bude to, že vliv interakcí vyššího řádu nebude možné rozlišit od vlivu interakcí nižšího řádu. Tuto situaci lze velmi dobře ilustrovat na matici plánu pro plný faktorový experiment  $2^3$ .

$$\begin{pmatrix} \hline konst. & x_1 & x_2 & x_3 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 & x_1x_2x_3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Jedna replikace plného  $2^3$  faktorového experimentu se tedy skládá z osmi měření. Pokud použijeme pouze první čtyři řádky z matice plánu dostaneme poloviční, tedy  $2^{3-1}$  plán experimentu, ale v matici plánu nyní budou totožné sloupce. Totožnost těchto sloupců znamená, že vliv příslušných regresorů nebude možné při vyhodnocení odlišit a matici plánu znovu zredukujeme na první čtyři sloupce. Tato matice plánu bude opět mít ortogonální sloupce. Obecně je pro vytvoření polovičního experimentu nutné „vhodně přidat“ nějakou identitu. Pro plán experimentu  $2^3$  jsme použili  $konst. = x_1x_2x_3$  (alternativou by bylo použití spodních čtyř řádků, tedy identita  $konst. = -x_1x_2x_3$ ). Pro vytvoření  $2^{k-m}$  plánu bude nutné vhodně zvolit  $m$  podobných identit. Pro lepší orientaci v kvalitě zlomkových experimentů se zavádí pojem Rozlišení plánu experimentu. Plán experimentu je rozlišení  $R$  právě tehdy, když každý efekt řádu  $p$  je rozlišitelný od efektů řádu menšího než  $R - p$ . Rozlišení plánu experimentu budeme značit římskými číslicemi. Příklad  $2^{3-1}$  je tedy rozlišení III, jsou nerozlišitelné interakce a hlavní efekty. V experimentu o rozlišení IV jsou nerozlišitelné hlavní efekty a interakce třech proměnných a také dvojice interakcí dvou proměnných mezi sebou.

### 2.3.2. Blokování

Jak již bylo řečeno výše, blokování se provádí pro odhalení vlivu faktorů, které nelze znáhodnit nebo nejsou měřeny. Příkladem může být čas (nestihnou se všechny experimenty v jeden den) nebo různá šarže materiálu (není k dispozici dostatek jedné šarže pro celý experiment) atp. Cílem je obvykle „prokázat“, že bloky na odezvu nemají vliv. Provádíme-li faktorový plán experimentu s více replikacemi, je blokování triviální. Stačí do matice plánu přidat další proměnnou (proměnné) „určující“ bloky. Pokud je nutné zavést bloky do jedné replikace, je nutné zvolit nějakou (obvykle nejvyšší) interakci, kterou ztotožníme s vlivem různých bloků. Například matice plánu pro  $2^3$  se dvěma bloky bude vypadat:

<i>konst.</i>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	<i>blok</i>
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

Podobně jako při tvorbě částečného plánu experimentu se matice plánu rozpadne podle znaménka v posledním sloupci na dvě menší, nyní ale bude vliv interakce třetího řádu zaměnitelný s vlivem různých bloků.

## 2.4. Metodologie odezvvých ploch

Metodologie odezvvých ploch je přirozeným rozšířením faktorových plánů. Umožňuje naplánovat experiment tak, aby odhalil i kvadratické efekty a tedy najít mnohem přesnější odezvvou plochu procesu. To může hrát významnou roli při hledání optimálního nastavení parametrů s výrazným vlivem na celý proces.

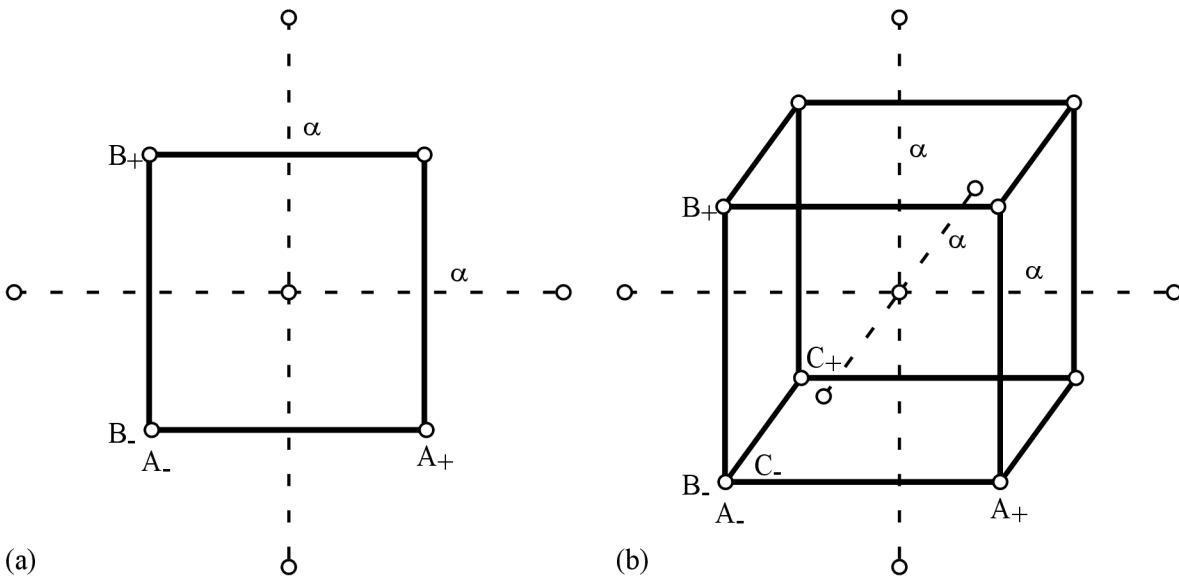
### 2.4.1. Centrální kompozitní plán

Centrální kompozitní plán umožňuje proložit změřenými daty odezvy polynom 2. stupně, používající všechny regresory  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Tedy pomocí metody nejmenších čtverců odhadnout koeficienty  $\beta$  v modelu (2.2)

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{i+k} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \sum_{j=2}^k \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (2.2)$$

Pro odhad všech parametrů v tomto modelu je nutné, aby plán experimentu obsahoval minimálně  $1 + 2k + k(k - 1)/2$  různých bodů a alespoň tři úrovně v každé ze vstupních proměnných. Plán experimentu, který splní pouze tuto podmínku však bude saturovaný, tedy bude procházet všemi naměřenými hodnotami odezvy. Proto v takovém modelu nebude možné odhadnout variabilitu chybového členu, ani testovat statistickou významnost použitých regresorů.

Na rozdíl od faktorového plánu experimentu, centrální kompozitní plán (kvadráty) umožní výskyt minima (maxima) odezvvé plochy i ve vnitřku  $k$ -rozměrné krychle. Centrální kompozitní plán experimentu je složením faktorového plánu, nebo částečného faktorového plánu s rozlišením alespoň  $V$ , s  $2k$  axiálními body. Výsledný návrh tedy obsahuje  $F = 2^{k-m}$  faktorových bodů,  $n_c$  centrálních bodů a  $2k$  axiálních bodů. Z povahy tohoto plánu je zjevné, že experimenty je možné provádět po částech. Tedy nejprve provést faktorový plán s několika opakováními v centrálním bodě a až poté (pokud při vyhodnocení zjistíme statistickou významnost zakřivení) „doměřit“ axiální body, případně pro kontrolu přidat ještě několik opakování centrálního bodu. Centrální kompozitní plán experimentu je zobrazen na obrázku 2.4.



**Obrázek 2.4:** a) Schema centrálního kompozitního plánu pro dva faktory b) Schema centrálního kompozitního plánu pro tři faktory

Pro tři faktory bude plán experimentu tvořit krychli (s axiálními body a středem), pro  $k$  faktorů to podobně bude  $k$ -dimenzionální krychle. Axiální body jsou pak obecně vzdáleny  $\pm\alpha$  od středu  $k$ -rozměrné krychle. Nejčastější volby  $\alpha$  jsou  $\sqrt[4]{F}$  a 1. Jestliže je  $\alpha = 1$ , leží axiální body ve středech stěn  $k$ -rozměrné krychle a axiální body se označují jako face centered. Bude-li vzdálenost axiálních bodů od středu  $\alpha = \sqrt[4]{F}$  pak tento centrální kompozitní plán bude rotabilní. Rotabilní plán experimentu je takový, pro který je odhad rozptylu  $\hat{Y}(x)$  konstantní na  $k$ -rozměrné sféře. Tato volba však nemusí být optimální (pokud je oblastí zájmu právě  $k$ -rozměrná krychle) a často v praxi ani není možná. Matice plánu pro dvoufaktorový centrální kompozitní plán pak bude

$$\begin{pmatrix} \text{konst.} & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

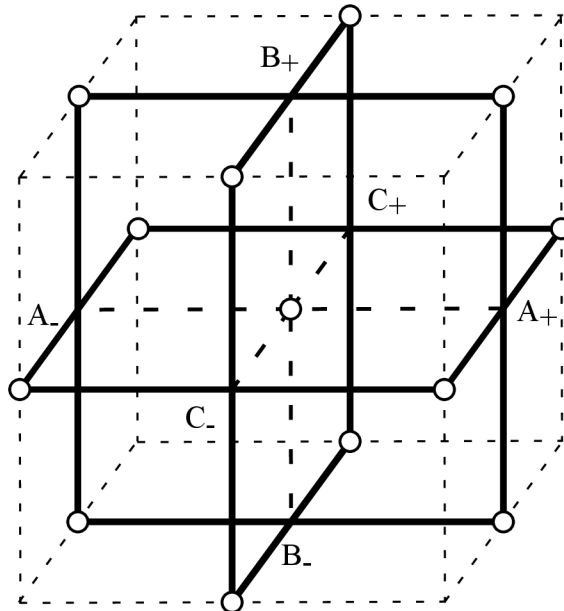
### 2.4.2. Boxův-Behnkenův plán

Máme-li alespoň tři vysvětlující proměnné, alternativou centrálního kompozitního plánu může být Boxův-Behnkenův plán, zejména pokud není možné použít více než tři úrovně

vysvětlujících proměnných. Cílem opět bude proložit daty pomocí metody nejmenších čtverců polynom 2. stupně popsáný v rovnici (2.2). Každý Boxův-Behnkenův plán je nekompletním trojúrovňovým faktorovým plánem. Na Boxovy-Behnkenovy plány pro tři až pět vysvětlujících proměnných pak lze pohlížet jako na „zkombinování“ dvojúrovňových úplných faktorových plánů experimentu pro dvě proměnné (ostatní proměnné nastavíme na „centrální hodnotu“). Pro 6, 7 a 9 vysvětlujících proměnných se Boxův-Behnkenův plán bude „skládat“ z úplných faktorových plánů pro tři proměnné. Pro deset vysvětlujících proměnných pak dokonce z faktorových plánů pro čtyři vysvětlující proměnné. V původním článku [10] autoři odvodili ještě plán experimentu pro jedenáct, dvanáct a šestnáct vysvětlujících proměnných. Označíme-li  $\pm 1$  jako vektor plus a minus jedniček seřazených tak, aby spolu v řádcích matice vytvořily všechny jedinečné kombinace. Bude matice Boxova-Behnkenova plánu pro tři vysvětlující proměnné (po přidání centrálních bodů) vypadat

$$\begin{pmatrix} \textit{konst.} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \hline 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \dots \\ 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 & \dots \\ 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Pokud se měření pokusíme schematicky zobrazit, podobně jako pro centrální kompozitní plán, budou body pro měření ležet ve středech hran krychle (viz obrázek 2.5).



**Obrázek 2.5:** Schéma Boxova-Behnkenova plánu experimentu

Tahle vlastnost bude platit (v  $k$ -rozměrné krychli) pro  $k < 6$ , tedy dokud se Boxův-Behnkenův plán „skládá“ z úplných faktorových plánů pro dvě proměnné. Pro šest vysvětlujících proměnných bude matice plánu

$$\begin{pmatrix} \textit{konst.} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \dots \\ \hline \hline 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 & \dots \\ 1 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & \dots \\ 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Výhodou Boxových-Behnkenových plánů je, že jsou i bez použití další hodnoty ( $\pm\alpha$  pro centrální kompozitní plán) vysvětlujících proměnných „téměř“ rotabilní a pro čtyři nebo sedm vysvětlujících proměnných jsou „přesně“ rotabilní.

## 2.5. Vyhodnocení DoE

Pro vyhodnocení dat získaných z plánovaného experimentu se používá známých metod lineární regrese. V následujícím textu budou shrnuty vlastnosti a předpoklady těchto metod.

Nechť naměřené hodnoty odezvy  $y_1, \dots, y_n$  jsou realizací náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = Y_1, \dots, Y_n$ . Předpokládejme, že vektor středních hodnot tohoto náhodného vektoru lze popsat pomocí  $l + 1$  neznámých lineárních parametrů jako

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 f_{i1} + \dots + \beta_l f_{il}, \quad (2.3)$$

kde  $f_{ij}$  jsou hodnoty funkcí vysvětlujících proměnných. Dále předpokládejme homogenitu rozptylu, tedy  $var(Y_i) = \sigma^2$ , kde  $\sigma$  je další zpravidla neznámý parametr. Známé hodnoty funkcí vysvětlujících proměnných uspořádáme do matice konstant o  $n$  řádcích a  $l + 1$  sloupcích

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_{11} & \dots & f_{1l} \\ 1 & f_{21} & \dots & f_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_{n1} & \dots & f_{nl} \end{pmatrix}$$

tak, že hodnota matice  $\mathbf{X}$ ,  $h(\mathbf{X}) = l$  a  $n > l$ . Náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  pak nabývá střední hodnoty  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  a variační matice  $\sigma^2\mathbf{I}$ . To znamená, že vektor středních hodnot  $\mathbf{Y}$  leží v lineárním obalu matice  $\mathbf{X}$  a jednotlivé složky náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  jsou nekorelované (navíc k homoskedasticitě). Uvedené předpoklady lze stručně zapsat jako  $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ . Lineární model lze ekvivalentně zapsat pomocí jeho náhodné složky  $\mathbf{e} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$  jako  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$ .



V dalším bude užitečné zavést speciální označení. Nechť sloupce matice  $\mathbf{Q}$  tvoří nějakou ortonormální bázi regresního prostoru  $\mathcal{M}(\mathbf{X})$  a nechť sloupce matice  $\mathbf{N}$  doplní tuto bázi na ortonormální bázi prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Dostaneme tak ortonormální matici  $\mathbf{P} = (\mathbf{Q}\mathbf{N})$  takovou, že  $\mathcal{M}(\mathbf{X}) = \mathcal{M}(\mathbf{Q})$  a  $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$ . Z ortonormality sloupců těchto matic plynou vztahy

$$\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{l+1} \quad \text{a} \quad \mathbf{N}'\mathbf{N} = \mathbf{I}_{n-l-1}.$$

Označme  $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}'$  a  $\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{N}'$ . Obě nově zavedené matice jsou symetrické a idempotentní. Protože platí  $\mathbf{H}\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , jsou sčítanci na pravé straně vztahu

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{M}\mathbf{y}$$

navzájem ortogonální, takže jde o průmět obecného vektoru  $\mathbf{y}$  do regresního prostoru  $\mathcal{M}(\mathbf{X})$  a do reziduálního prostoru  $\mathcal{M}(\mathbf{X})^\perp$ . Ze známých vlastností projekce jsou tyto průměty a tedy i projekční matice dány jednoznačně. Dále bude užitečné znát explicitní vyjádření matic  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{M}$  pomocí matice  $\mathbf{X}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \end{aligned} \tag{2.4}$$

### 2.5.1. Odhad vektoru středních hodnot

Nejprve se budeme zabývat odhadem středních hodnot náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$ . K náhodnému vektoru  $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$  nalezneme v podprostoru  $\mathcal{M}(\mathbf{X})$  nejbližší prvek, který označíme  $\hat{\mathbf{Y}}$ .

**VĚTA 2.1** (Gaussova-Markovova). V modelu  $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$  je  $\hat{\mathbf{Y}}$  nejlepším nestranným lineárním odhadem vektoru  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ .

Důkaz této věty je k nalezení například v [34].

### 2.5.2. Rezidua

V této části se budeme zabývat průmětem vektoru  $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$  do prostoru reziduí  $\mathcal{M}(\mathbf{X})^\perp$ . Vektor reziduí definovaný vztahem  $\mathbf{u} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$  porovnává pozorované hodnoty odezvy s odhadem jejich středních hodnot. Reziduální součet čtverců definovaný jako  $SS_e = \|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  porovnává tyto dva vektory pomocí čtverce jejich eukleidovské vzdálenosti v  $\mathbb{R}^n$ . Reziduální rozptyl definujeme jako  $S^2 = SS_e / (n - l - 1)$ .

**VĚTA 2.2** (Vlastnosti reziduí). V lineárním modelu  $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$  platí

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{e};$$

$$\mathbf{u} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{M});$$

$$SS_e = \mathbf{e}'\mathbf{M}\mathbf{e};$$

$$\mathbb{E}(SS_e) = (n - l - 1)\sigma^2;$$

$$E(S^2) = \sigma^2;$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Důkaz je k nalezení např v [34]. Vektor  $\mathbf{u}$  lze tedy interpretovat jako jakýsi odhad vektoru  $\mathbf{e}$ . Reziduální rozptyl  $S^2$  je nestranným odhadem rozptylu  $\sigma^2$ .

### 2.5.3. Normální rovnice

Nyní se budeme zabývat výpočtem odhadu vektoru  $\boldsymbol{\beta}$ . Tento vektor určuje střední hodnotu náhodné veličiny  $\mathbf{Y}$  jako lineární kombinaci sloupců matice  $\mathbf{X}$ . Předpokládejme, že matice  $\mathbf{X}$  je plně hodnosti, tedy že má lineárně nezávislé sloupce. Symbolem  $\mathbf{b}$  označíme řešení soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{X}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{Y}}$ . Výpočet vektoru  $\mathbf{b}$  lze provést pomocí soustavy normálních rovnic (2.5).

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}. \quad (2.5)$$

Budeme-li předpokládat plnou sloupcovou hodnost matice  $\mathbf{X}$ , pak normální rovnice (2.5) mají právě jedno řešení

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

### 2.5.4. Klasický model regrese

V dalším předpokládejme, že vektor  $\mathbf{Y}$  má normální rozdělení, tedy že platí  $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$  a že matice  $\mathbf{X}$  má plnou sloupcovou hodnost. Navíc označme matici  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  jako  $\mathbf{V}$ . Pak platí:

- $\mathbf{b}$  je nejlepším lineárním nestranným odhadem  $\boldsymbol{\beta}$ ;
- $\mathbf{b}$  má  $(l+1)$ -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou  $\boldsymbol{\beta}$  a varianční maticí  $\sigma^2\mathbf{V}$ , tedy  $\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{V})$ ;
- náhodné vektory  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{u}$  jsou nezávislé;
- statistiky  $\mathbf{b}$  a  $S^2$  jsou nezávislé;

- pro  $j = 0, 1, \dots, l$

$$T_j = \frac{b_j - \beta_j}{S\sqrt{v_{jj}}} \sim t_{n-l-1};$$

- interval

$$(b_j - S\sqrt{v_{jj}}t_{n-l-1}(\alpha/2), b_j + S\sqrt{v_{jj}}t_{n-l-1}(\alpha/2))$$

tvoří interval spolehlivosti pro  $\beta_j$  se spolehlivostí  $1 - \alpha$ ;

- množina  $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{l+1} : (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b})'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b}) < (l+1)S^2F_{l+1, n-l-1}(\alpha)\}$ ; tvoří konfidenční množinu pro  $\boldsymbol{\beta}$  se spolehlivostí  $1 - \alpha$ ;

h)  $\mathbf{b}$  je maximálně věrohodným odhadem  $\boldsymbol{\beta}$ ;

i) je-li navíc  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_l)'$  nenulový vektor pak  $\mathbf{E}(\mathbf{c}'\mathbf{b}) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$  a

$$T = \frac{\mathbf{c}'\mathbf{b} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{S^2\mathbf{c}'\mathbf{V}\mathbf{c}}} \sim t_{n-l-1};$$

j) nechť dále  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = (1, f_1(\mathbf{x}_0), f_2(\mathbf{x}_0), \dots, f_l(\mathbf{x}_0))$  je vektor použitých funkcí regresních proměnných v bodě  $\mathbf{x}_0$ , pak interval

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{b} - t_{n-l-1}(\alpha/2)S\sqrt{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{b} + t_{n-l-1}(\alpha/2)S\sqrt{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)})$$

tvorí interval spolehlivosti pro střední hodnotu regresní funkce v bodě  $\mathbf{x}_0$ ;

k) interval

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{b} - t_{n-l-1}(\alpha/2)S\sqrt{1 + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{b} + t_{n-l-1}(\alpha/2)S\sqrt{1 + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)})$$

bude intervalem spolehlivosti pro predikci hodnoty  $Y$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ ;

l)  $\hat{\mathbf{Y}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{H})$  a  $\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{M})$ ;

kde  $t_n$  značí Studentovo rozdělení pravděpodobnosti s  $n$  stupni volnosti a  $F_{n,m}$  značí Fisherovo-Snedecorovo rozdělení pravděpodobnosti s  $n$  a  $m$  stupni volnosti. Tvrzení a)-g) jsou dokázány například v [34], tvrzení h) pak v [20], tvrzení i) v [8], tvrzení j) lze velmi jednoduše odvodit z tvrzení i) a poslední dvě tvrzení jsou odvozena např. opět v [34].

### 2.5.5. Podmodel

Podmodelem budeme rozumět vynechání některých sloupců z matice  $\mathbf{X}$ . Řekneme, že platí podmodel modelu  $\mathbf{Y} \sim (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ , jestliže pro nějaký vektor  $\boldsymbol{\beta}_0$  platí  $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta}_0$ , kde  $\mathbf{X}_0$  je matice konstant, která vznikla z matice  $\mathbf{X}$  vynecháním  $k \leq l$  sloupců. Označme dále  $\hat{\mathbf{Y}}_0$  odhad střední hodnoty pomocí podmodelu  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{u}_0$  vektor reziduí podmodelu a  $SS_{e0}$  součet čtverců reziduí podmodelu.

**VĚTA 2.3** (O podmodelu). Platí-li v lineárním modelu podmodel, pak

a)  $\hat{\mathbf{Y}}_0$  je nejlepším nestranným lineárním odhadem vektoru  $\mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta}_0$ ;

b) statistika  $S_0^2 = \frac{SS_{e0}}{n-(l+1-k)}$  je nestranným odhadem rozptylu;

c) statistiky  $\hat{\mathbf{Y}}_0$  a  $\mathbf{u}_0$  jsou nekorelované;

d) pro vektor  $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  platí

$$\|\mathbf{d}\|^2 = SS_{e0} - SS_e;$$

d) má-li  $\mathbf{Y}$  navíc normální rozdělení, jsou statistiky  $\hat{\mathbf{Y}}_0$  a  $\mathbf{u}_0$  nezávislé a platí

$$F = \frac{(SS_{e0} - SS_e)/k}{SS_e/(n-l-1)} \sim F_{k,n-l-1}.$$

Důkaz je k nalezení například v [34]. Část d) věty o podmodelu potom umožňuje testovat hypotézu o nulovosti koeficientů lineární kombinace jakékoliv podmnožiny funkcí vysvětlujících proměnných. Budeme-li (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že vynecháme  $k$  posledních sloupců matice  $\mathbf{X}$ , pak testujeme hypotézu

$$H : \beta_{l-k} = \beta_{l-k-1} = \dots = \beta_l = 0$$

proti  $A$  : alespoň jeden z koeficientů v  $H \neq 0$ . Speciálním případem tohoto testu je pak test hypotézy  $H : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_l = 0$ , tedy jestli použití alespoň jedné vybrané funkce vysvětlujících proměnných bude statisticky významně, lepší než použití konstanty (průměru).

### 2.5.6. Algoritmické selekce statisticky významných regresorů

Nedlouho po odvození testů hypotéz o podmodelech a jednotlivých regresních koeficientech vznikla snaha postavit na těchto nástrojích „automatickou“ selekci statisticky významných regresorů. Nejčastěji používané metody jsou popsány níže.

#### Dopředná selekce

Dopředná selekce začíná s modelem konstanty, ke kterému postupně přidává regresory s nejvyšším testovým kriteriem, dokud lze přidávat. V každém kroku se tedy napočítají všechny „nadmodely“ rozšiřující stávající množinu použitých regresorů o jeden. Jestliže jsou podle výše popsaných testů hypotéz nalezeny statisticky významné regresory, které ještě nejsou zahrnuté v modelu, pak bude model obohacen o regresor s nejvyšším testovým kriteriem (v absolutní hodnotě). Tento proces končí, když již žádný další regresor není na zvolené hladině významnosti statisticky významný, nebo pokud jsou přidány všechny do modelu všechny regresory. Vzhledem k „závažnosti“ chyby druhého druhu (nezahrnutí statisticky významného regresoru do modelu) někteří autoři a manuály statistických softwarů doporučují používat vyšší hladinu významnosti než je běžných 5 %.

#### Zpětná eliminace

Zpětná eliminace naopak začíná s plným modelem, ze kterého postupně odebírá regresory s testovým kriteriem nejbližším nule. V každém kroku se napočítají všechny podmodely ochuzené o jeden regresor. Jestliže se ve stávajícím modelu necházejí statisticky nevýznamné regresory bude z modelu vyloučen ten s testovým kriteriem nejbližším nule. Tento proces končí, pokud v modelu již nezůstávají žádné statisticky nevýznamné regresory na zvolené hladině významnosti.

#### Stepwise

Metoda stepwise (schodovitá) pak kombinuje předešlé postupy. Začíná s modelem konstanty a v každém kroku se nejdříve pokusí o dopřednou selekci. Nelze-li přidat další regresor, pokusí se naopak pomocí zpětné eliminace některý z regresorů vyloučit. Proces končí když k danému modelu není možné na základě testů hypotéz na zvolených hladinách významnosti přidat žádný regresor, ani z modelu regresor odebrat. Podobně jako při dopředné selekci bývá doporučována větší hladina významnosti než je obvyklých 5 %.

Zvolená hladina významnosti pro vstup do modelu a pro vyřazení z modelu se může lišit. Hladina významnosti pro vstup však musí vždy být větší nebo rovna hladině významnosti pro vyřazení. V opačném případě by algoritmus uvízl v nekonečném cyklu.

### Hierarchický model

Algoritmy popsané výše lze doplnit požadavkem na hierarchický model. Hierarchický model obsahuje i statisticky nevýznamné regresory, pokud jsou „součástí“ efektů vyšších řádů. Příkladem je zahrnutí statisticky nevýznamného lineárního členu, vyskytuje-li se ve statisticky významné interakci. Důvodem pro tento požadavek může být snaha o nalezení „nejlepší“ funkce určené statisticky významnými členy vyšších řádů. Další výhodou hierarchického modelu je zjednodušená interpretace výsledků. Pokud je totiž data nutné transformovat pro výpočet a pak zpět výsledná rovnice modelu v původním rozsahu proměnných bude díky roznásobení obsahovat větší počet členů než je v modelu statisticky významných regresorů.

### 2.5.7. Regresní diagnostika

V této části budou shrnuty často používané nástroje pro odhalování nedostatků v regresních modelech a některé ukazatele kvality těchto modelů.

#### Koeficient determinace

Před zavedením koeficientu determinace označme  $SS_t = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$  jako celkový součet čtverců a  $SS_r = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$  jako regresní součet čtverců. Koeficient determinace lze definovat jako

$$R^2 = \frac{SS_r}{SS_t} = 1 - \frac{SS_e}{SS_t}.$$

Hodnota koeficientu determinace vždy spadá do intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  a udává jakou část variability v datech (reprezentovanou součtem čtverců) se podařilo vysvětlit použitím regresního modelu. Bude-li  $R^2$  rovno 1 znamená to, že všechna pozorování jsou funkční hodnotou regresního modelu a vektor reziduí je tedy nulový vektor. Tento stav však není žádoucí, neboť při nulovém rozptylu reziduí není možné testovat hypotézy o nevýznamnosti jednotlivých funkcí vysvětlujících proměnných.

Pomocí koeficientu determinace lze též testovat hypotézu pro podmodel obsahující pouze konstantu ( $E(Y_i) = \beta_0$ ) z věty 2.3 d). V tomto speciálním případě bude  $SS_{e0}$  rovno  $SS_t$  a  $k = l$ . Dále použitím vztahu  $SS_t = SS_r + SS_e$  a rozšířením zlomku o  $SS_t$  dostáváme

$$F = \frac{(SS_t - SS_e)/l}{SS_e/(n-l-1)} = \frac{SS_r/l}{SS_e/(n-l-1)} = \frac{\frac{SS_r}{SS_t l}}{\frac{SS_e}{SS_t(n-l-1)}}.$$

Z toho použitím definičních vztahů pro  $R^2$  máme

$$F = \frac{R^2/l}{(1-R^2)/(n-l-1)}.$$

Zjevnou nevýhodou koeficientu determinace jako ukazatele kvality regresního modelu je, že rozšířením modelu o další funkci vysvětlujících proměnných  $R^2$  vzroste (pokud odhad

koeficientu  $\beta$  pro tuto funkci nebude přesně roven 0). Proto podle  $R^2$  bude vždy lepší model, který používá více funkcí vysvětlujících proměnných, nehledě na jejich statistickou významnost.

### Adjustovaný koeficient determinace

Adjustovaný koeficient determinace je výsledkem snahy zavést do tohoto kritéria postih za přidávání příliš mnoha funkcí vysvětlujících proměnných. Je definován jako

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{SS_e/(n-l-1)}{SS_t/(n-1)}.$$

$R_{adj}^2$  tedy namísto podílu součtů čtverců vyžívá podíl nestranných odhadů rozptylů. Adjustovaný koeficient determinace bude totožný se standardním koeficientem determinace pouze pro model konstanty ( $l = 0$ ), pro jakýkoli složitější model bude  $R_{adj}^2$  vždy ostře menší než  $R^2$ . Bude-li mezi těmito ukazateli výrazný rozdíl, lze z toho usuzovat, že v modelu jsou použity statisticky nevýznamné funkce vysvětlujících proměnných.

### PRESS

Statistika *PRESS* (z anglického Prediction Error Sum of Squares) může být jedním z kritérií pro výběr mezi více různými regresními modely (používajícími různé funkce vysvětlujících proměnných). *PRESS* je součet čtverců odchylek pozorovaných hodnot od odhadu střední hodnoty, pomocí metody nejmenších čtverců, při kterém nebylo použito  $i$ -té pozorování odezvy (tedy ani  $i$ -tých hodnot funkcí vysvětlujících proměnných). Definiční vztah statistiky *PRESS* je

$$PRESS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_{(i)})^2,$$

kde  $\hat{Y}_{(i)}$  je odhad střední hodnoty  $Y_i$  nebude-li do výpočtu modelu zahrnuto  $i$ -té pozorování. Na první pohled by se výpočet této statistiky mohl jevit jako zdoluhavý (výpočet  $i$  různých sad konstant pro regresní modely), naštěstí lze použít výpočetně přívětivější vztah

$$PRESS = \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i}{1 - h_{ii}} \right)^2,$$

kde  $u_i$  je klasické reziduum z úplného modelu a  $h_{ii}$  je diagonální prvek projekční matice definované vztahem (2.4). Podle statistiky *PRESS* bude lepším modelem ten s nižší hodnotou této statistiky, tedy model s nižším *PRESS* bude lepší pro predikci odezvy v místech, kde neprobíhalo měření. Vysoká hodnota *PRESS* značí, že se regresní model snaží vysvětlit i chybový člen. Tedy velikost reziduí bude malá, ale přidáme-li nové pozorování, nelze očekávat, že se bude chovat podle našeho modelu. Často používaný anglický termín pro tento jev je „overfitting“.

### Koeficient determinace predikce

Tato další modifikace koeficientu determinace si dává za cíl posoudit predikční schopnosti regresního modelu. Za tímto účelem používá právě výše zmíněný *PRESS*. Definiční vztah je

$$R_{pred}^2 = 1 - \frac{PRESS}{SS_t}.$$

$R_{pred}^2$  může, na rozdíl od  $R^2$  a  $R_{adj}^2$ , v extrémních případech nabývat i záporných hodnot, neboť hodnota *PRESS* není shora omezena  $SS_t$ . Podobně jako u adjustovaného koeficientu determinace budeme považovat model za vhodný pro predikci nových pozorování, pokud se jeho hodnota nebude výrazně lišit od hodnot  $R^2$  a  $R_{adj}^2$ . Bude-li velký rozdíl v hodnotách  $R^2$  a  $R_{pred}^2$ , je pravděpodobné, že došlo k výše zmiňovanému „overfittingu“.

### Lack of fit

Lack of fit bývá často označován jako test adekvátnosti modelu a může být proveden pouze pokud jsou k dispozici opakovaná měření odezvy alespoň v jednom bodě. Adekvátností modelu je v toto případě myšleno, že použité funkce vysvětlujících proměnných byly zvoleny vhodně. Dále předpokládáme, že máme k dispozici  $n_j$  opakovaných měření odezvy v  $m$  bodech, které označíme  $Y_{ij}$ . Pro testování Lack of fit se používá rozkladu reziduálního součtu čtverců na

$$SS_e = SS_{pe} + SS_{LoF},$$

kde  $SS_{pe} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2$  a  $SS_{LoF} = \sum_{j=1}^m n_j (\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2$ . Takže reziduální součet čtverců rozdělíme na součet čtverců „čisté chyby“ ( $SS_{pe}$ ) a na součet čtverců „Lack of fit“ ( $SS_{LoF}$ ). Pro statistický test se pak použijí „průměrné“ čtverce  $MS_{pe} = SS_{pe}/(n - m)$  a  $MS_{LoF} = SS_{LoF}/(m - l - 1)$ . Testová statistika pak bude mít podobu

$$F = \frac{MS_{LoF}}{MS_{pe}} \sim F_{m-l-1, n-m}.$$

Hypotézu o adekvátnosti modelu tedy zamítneme, bude-li variabilita příslušející „čisté chybě“ mnohem menší než variabilita způsobená odchylkami průměrných hodnot v opakovaných pozorováních od hodnot vypočtených.

### Normovaná rezidua

Normovaná rezidua umožňují odhalit odlehlá pozorování, tedy taková, která jsou od vypočtené střední hodnoty „příliš“ daleko. Definiční vztah pro normovaná rezidua je

$$v_i = \frac{u_i}{S\sqrt{1 - h_{ii}}}.$$

Za odlehlá pozorování se pak považují ty, kterým přísluší  $|v_i| \geq 2$ .

### Studentizovaná rezidua

Studentizovaná rezidua (někdy označovaná jako Jackknife rezidua) používají (podobně jako *PRESS*) modely s vynechaným  $i$ -tým pozorováním. Definiční vztah je

$$v_i^* = \frac{u_i}{S_{(i)}\sqrt{1 - h_{ii}}} \sim t_{n-l-2},$$

kde  $S_{(i)}$  je odmocnina z nestranného odhadu rozptylu v modelu s vynechaným  $i$ -tým pozorováním. Odlehlost daného pozorování lze tedy testovat proti kritické hodnotě příslušného Studentova rozdělení. Studentizovaná rezidua lze též vyjádřit pomocí normovaných reziduí a to vztahem

$$v_i^* = \sqrt{\frac{n-l-2}{n-l-1-v_i^2}} v_i.$$



# 3

## Publikované modely používající DoE

---

V dalším budou popsány a rozšířeny studie používající DoE pro modelování odezev po WEDM. Konkrétně se jedná o experimenty sledující drsnosti povrchu po obrobení čistého hliníku [5], řezné rychlosti různých materiálů ([4], [2] a [3]) a šířku mezery řezu hliníkové slitiny [1]. Vzorky byly vždy obráběny na vysoce přesném pětiosém přístroji MAKINO EU64 s elektrodou z bronzového drátu o průměru  $0,25\text{ mm}$ . Jako dielektrikum byla v obráběcím procesu použita deionizovaná voda. Na základě důkladné studie [27] bylo identifikováno 5 parametrů, které by měly mít největší vliv na proces WEDM. To jsou gap voltage ( $V$ ), pulse on time ( $\mu s$ ), pulse off time ( $\mu s$ ), wire feed ( $m \cdot \text{min}^{-1}$ ) a discharge current ( $A$ ). Rozsah pozorování zmíněných parametrů byl zapsán do tabulky 3.1

**Tabulka 3.1:** Maxima a minima parametrů WEDM vstupujících do DoE

parametr	gap voltage ( $V$ )	pulse on time ( $\mu s$ )	pulse off time ( $\mu s$ )	wire feed ( $m \cdot \text{min}^{-1}$ )	discharge current ( $A$ )
minimum	50	6	30	10	25
maximum	70	10	50	14	35

Hladina významnosti pro veškeré další testování hypotéz bylo zvolena 5 %. Jako nejvhodnější plán experimentu byl zvolen centrální kompozitní plán, skládající se z polovičního faktorového plánu pro 5 faktorů ( $2^{5-1}$ ) doplněného „face centered“ axiálními body a 7 centrálními body. Celkem tedy bylo provedeno 33 experimentů. Hlavním důvodem výběru tohoto plánu byla minimalizace nákladů na experimenty. Pro 5 faktorů a více použití částečných faktorových plánů umožňuje „stlačit“ nutný počet měření pod počet nutný k implementaci Boxova-Bhenkenova plánu. Nastavení parametrů pro pozorování libovolné odezvy podle zvoleného DoE jsou shrnuta v tabulce 3.2.

**Tabulka 3.2:** Pozorovaná nastavení paramerů WEDM

číslo vzorku	typ bodu	gap voltage (V)	pulse on time ( $\mu s$ )	pulse off time ( $\mu s$ )	wire feed ( $m \cdot min^{-1}$ )	discharge current (A)
1	axiální	70	8	40	12	30
2	axiální	60	8	30	12	30
3	axiální	60	8	40	12	25
4	axiální	60	10	40	12	30
5	axiální	50	8	40	12	30
6	axiální	60	8	50	12	30
7	axiální	60	6	40	12	30
8	axiální	60	8	40	12	35
9	axiální	60	8	40	10	30
10	axiální	60	8	40	14	30
11	centrální	60	8	40	12	30
12	faktorový	50	6	30	10	35
13	faktorový	70	10	50	10	25
14	faktorový	70	10	30	10	35
15	centrální	60	8	40	12	30
16	faktorový	70	6	50	10	35
17	faktorový	70	10	50	14	35
18	centrální	60	8	40	12	30
19	centrální	60	8	40	12	30
20	faktorový	70	6	50	14	25
21	faktorový	50	6	30	14	25
22	centrální	60	8	40	12	30
23	faktorový	70	10	30	14	25
24	faktorový	50	6	50	10	25
25	centrální	60	8	40	12	30
26	faktorový	50	10	50	14	25
27	faktorový	50	10	30	10	25
28	faktorový	50	6	50	14	35
29	faktorový	50	10	50	10	35
30	faktorový	70	6	30	14	35
31	faktorový	50	10	30	14	35
32	centrální	60	8	40	12	30
33	faktorový	70	6	30	10	25

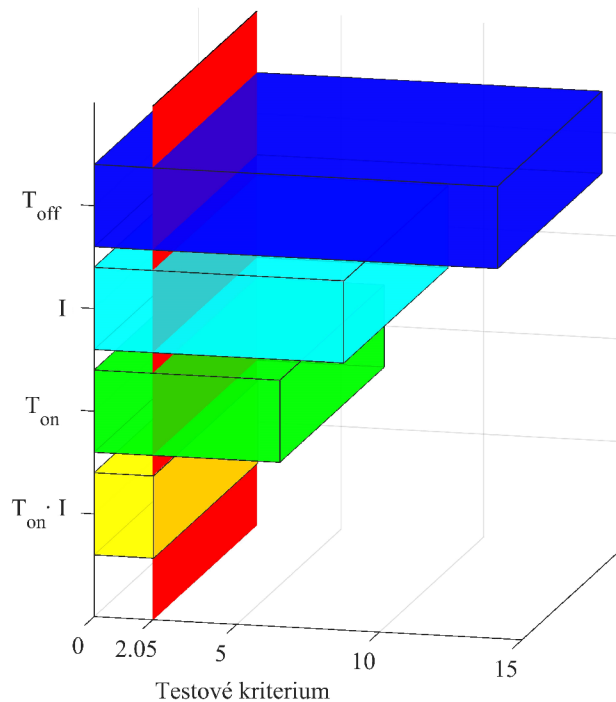
Z tabulky 3.2 je zřejmé, že pořadí experimentů bylo znáhodněno a opakovaná měření probíhají alespoň v centrálním bodě. Kromě toho byl experiment rozdělen do dvou bloků. První blok tvoří prvních jedenáct pozorování (axiální body a jeden centrální bod), druhý blok tvoří 22 pozorování (faktorové body a 6 centrálních bodů). Plán experimentu podle tabulky 3.2 byl použit ke sběru dat ve všech následujících studiích.

### 3.1. Model řezné rychlosti WEDM hliníkové slitiny 7475-T7351

Tato sekce je shrnutím a rozšířením výsledků [4]. Cílem této sady experimentů bylo nalezení optimálního nastavení parametrů pro maximalizaci řezné rychlosti WEDM hliníkové slitiny 7475-T7351. Kromě řezné rychlosti byl během experimentů zaznamenáván i počet přetržení elektrody. Zvolený centrální kompozitní plán experimentu pro 5 vybraných parametrů je shrnut v tabulce 3.2. Pro vyloučení statisticky významných regresorů byla použita metoda „stepwise“. Výsledný model je matematicky popsán v rovnici 3.1.

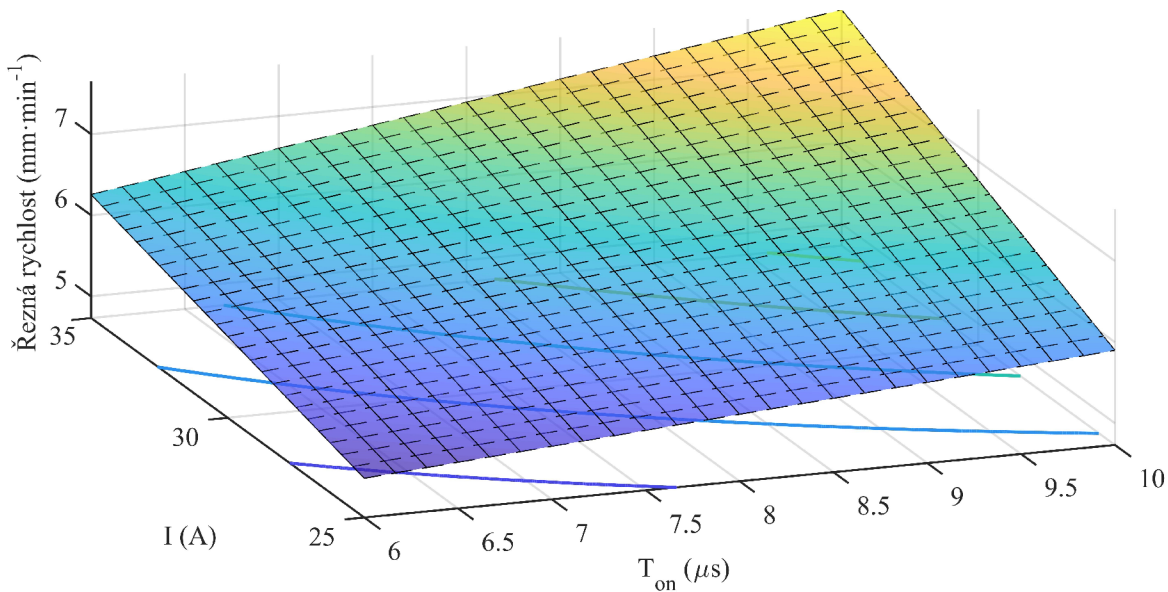
$$v_c = 8,71 - 0,0011 \cdot I - 0,267 \cdot T_{on} - 0,11222 \cdot T_{off} + 0,01750 \cdot I \cdot T_{on}, \quad (3.1)$$

kde  $v_c$  je řezná rychlost,  $I$  je discharge current,  $T_{on}$  je pulse on time a  $T_{off}$  je pulse off time. Na obrázku 3.1 jsou zobrazeny absolutní hodnoty testového kritéria počítaného dle 2.5.4 pro každý z použitých regresorů s vyznačeným kvantilem Studentova rozdělení pro zvolenou hladinu významnosti. Obrázek je převzatý z [4].



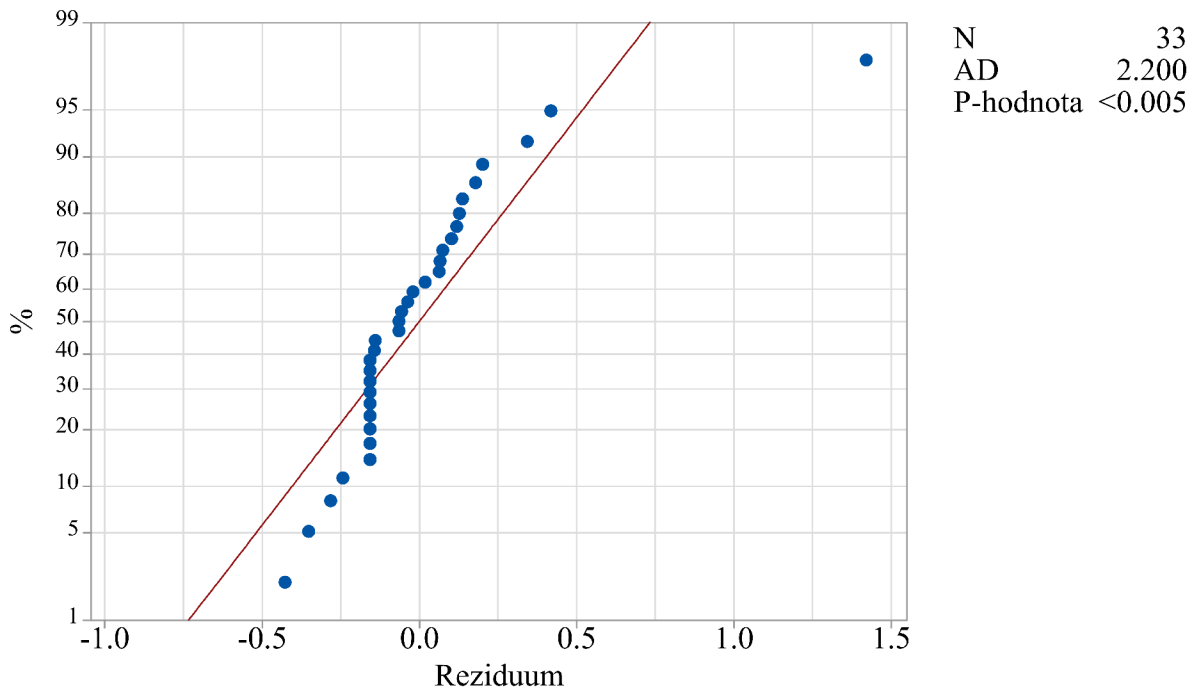
**Obrázek 3.1:** Parettův diagram použitých regresních koeficientů s vyznačenou hraniční hodnotou

V tomto modelu tedy na řeznou rychlost nemá statisticky významný vliv gap voltage, ani wire feed. Model 3.1 popisuje 92,02 % variabilty odezvy (koeficient determinace). Tato vysoká hodnota je ještě podpořena podobnými hodnotami adjustovaného koeficientu determinace (90,88 %) a koeficientu determinace predikce (89,57 %). Odezvová plocha zobrazující závislost řezné rychlosti na discharge current a na pulse on time (pro pulse off time = 40  $\mu$ s) je zobrazena na obrázku 3.2.



**Obrázek 3.2:** Odezvová plocha řezné rychlosti závislé na discharge current a pulse on time (pulse off time =  $40 \mu s$ ).

Predikovanému maximu řezné rychlosti ( $8,7659 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ ) pak odpovídá nastavení discharge current =  $35 \text{ A}$ , pulse on time =  $10 \mu s$  a pulse off time  $30 \mu s$ . Drobnou vadou na kráse tohoto modelu však je, že pomocí Anderson-Darlingova testu zamítáme hypotézu o normalitě reziduí (obrázek 3.3).



**Obrázek 3.3:** Normal probability plot reziduí modelu 3.1

To je však s největší pravděpodobností způsobeno extrémně odlehlou hodnotou jednoho z experimentů. Příslušné normované reziduum je  $4,41$  a pozorovaná řezná rychlost v tomto bodě je maximální. Během tohoto experimentu však došlo ke dvěma přetržením elektrody, což jednak toto pozorování činí nestandardním i z „nestatistického“ hlediska,

a zároveň neoptimálním kvůli nutnému režijnímu času. Toto měření není vhodné z výpočtů modelu odstranit, protože tím budou ztraceny všechny výhody použitého plánu experimentu spojené s ortogonalitou prediktorů. Dalším nedostatkem je zamítnutí testu adekvátnosti modelu lack of fit. Ač nebyly předpoklady regresního modelu perfektně splněny, získané optimální nastavení obráběcích parametrů výrazně zvyšuje efektivitu celého procesu.

## 3.2. Model drsnosti povrchu $Pq$ po WEDM čistého hliníku

Shrnutí a rozšíření statistického vyhodnocení studie [5]. Cílem této sady experimentů bylo nalezení optimálního nastavení parametrů WEDM pro minimalizaci drsnosti obroběného povrchu čistého hliníku. Jako plán experimentu byl opět zvolen centrální kompozitní plán pro 5 faktorů popsáný v tabulce 3.2. Zvolený rozsah nastavení parametrů, i parametry samotné, jsou totožné jako v tabulce 3.1. Tabulka s plánem experimentu je taktéž totožná jako v experimentu pro hliníkovou slitinu (tabulka 3.2). Pořadí experimentů bylo znáhodněno a experiment byl rozdělen do dvou bloků. Měřeními různých charakteristik drsnosti povrchu však bylo většinou zjištěno, že na rozdíl od řezné rychlosti, zvolené vysvětlující proměnné nemají na změnu odezvy statisticky prokazatelný vliv. Výjimku tvoří charakteristika drsnosti  $Pq$ .  $Pq$  je průměrná kvadratická odchylka počítaná k základnímu profilu povrchu.  $Pq$  je měřený v jedné dimenzi, a pokud by bylo možné měřit „spojitě“, výpočet tohoto parametru by probíhal podle rovnice (3.2)

$$Pq = \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l Z^2(x) dx}, \quad (3.2)$$

kde  $l$  je délka vzorkovací úsečky a  $Z(x)$  funkce popisující povrch vzorku. Pro vyloučení statisticky nevýznamných regresorů byla použita zpětná eliminace. Výsledný hierarchický model je popsán rovnicí (3.3).

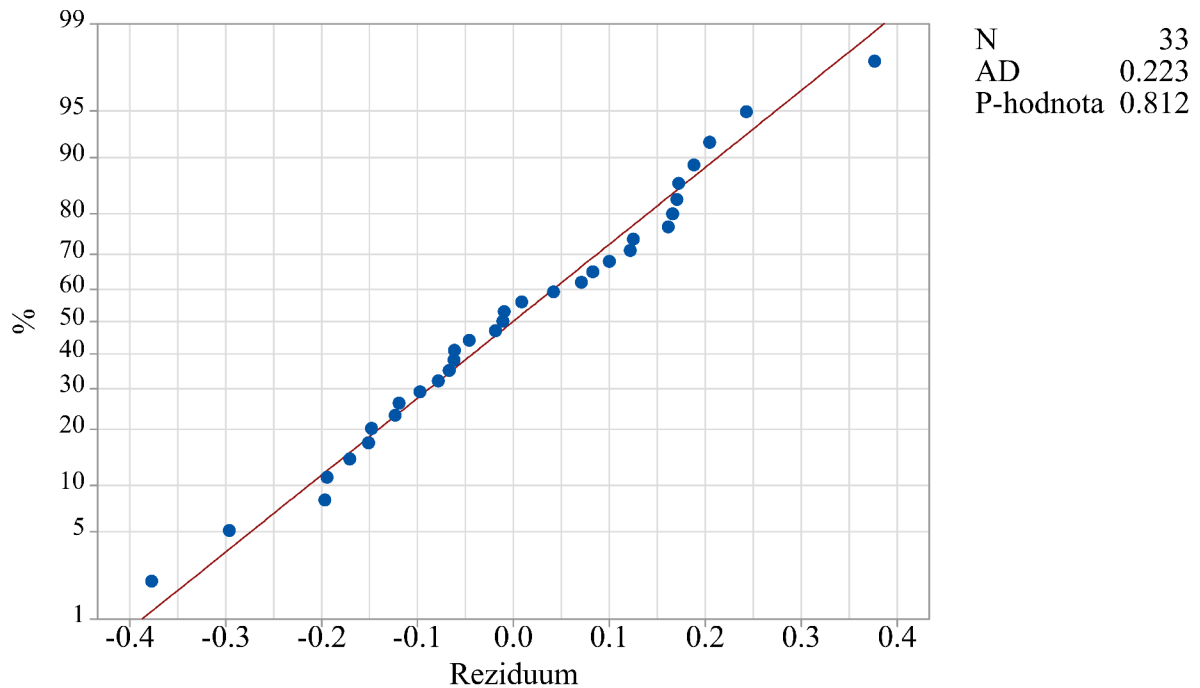
$$Pq = -3,24 + 0,0401 \cdot U + 0,360 \cdot T_{on} + 0,0679 \cdot T_{off} + 0,763 \cdot WF - 0,139 \cdot I + 0,00673 \cdot I^2 - 0,001044 \cdot U \cdot T_{off} - 0,0263 \cdot T_{on} \cdot WF - 0,01735 \cdot WF \cdot I, \quad (3.3)$$

kde  $U$  je gap voltage,  $T_{on}$  je pulse on time,  $T_{off}$  je pulse off time,  $WF$  je wire feed a  $I$  je discharge current. P-hodnoty vypočtených regresních koeficientů jsou shrnuty v tabulce 3.3.

regresor	P-hodnota
Lineární část	0,000
$U$	0,000
$T_{on}$	0,725
$T_{off}$	0,065
$WF$	0,265
$I$	0,173
Kvadratická část	0,022
$I^2$	0,022
Interakce	0,001
$U \cdot T_{off}$	0,044
$T_{on} \cdot WF$	0,043
$WF \cdot I$	0,002

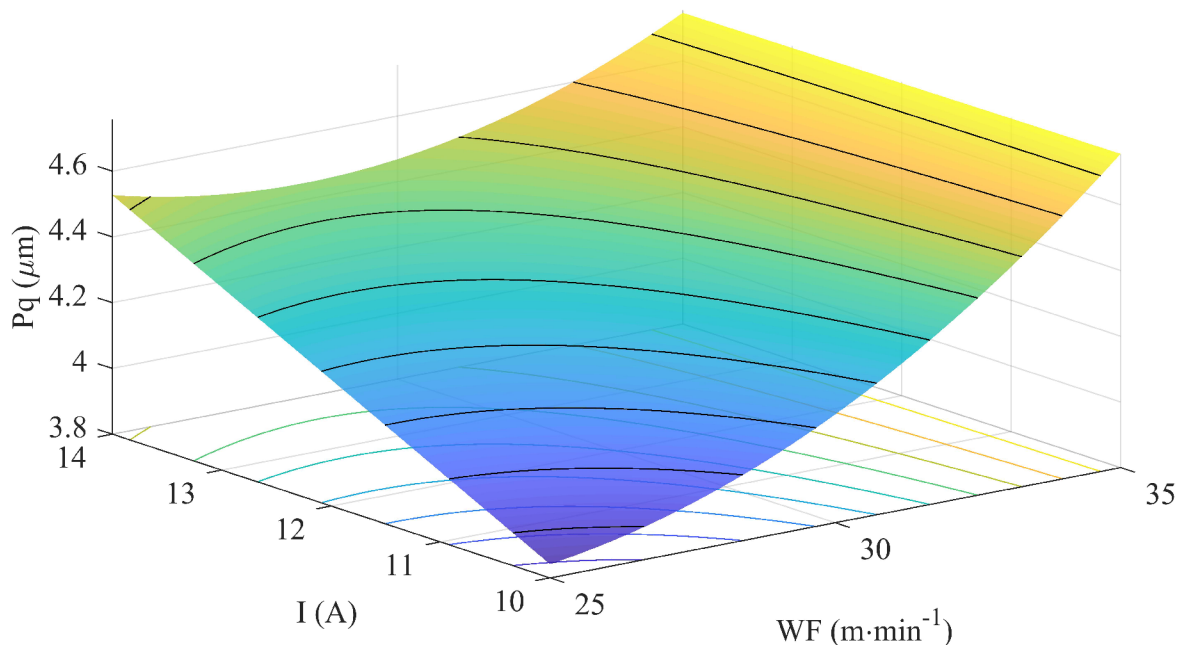
**Tabulka 3.3:** P-hodnoty použitých regresorů

Model (3.3) popisuje 76,02 % variability odezvy (měřeno koeficientem determinace). Adjustovaný koeficient determinace je 66,63 % a koeficient determinace pro predikci dokonce jen 49,81 %. Normovaná rezidua v modelu identifikují jediné odlehle pozorování (normované reziduum 2,05). To však vzhledem k počtu provedených pokusů není přehnaným důvodem ke znepokojení. Pozitivu modelu drsnosti  $Pq$  je nezamítnutí testu adekvátnosti modelu lack of fit a nezamítnutí Andersonova-Darlingova testu o normalitě reziduí (obrázek 3.4).



**Obrázek 3.4:** Normplot reziduí modelu drsnosti  $Pq$

Optimální nastavení parametrů podle modelu bude gap voltage = 40 V, pulse on time = 6  $\mu s$ , pulse off time = 30  $\mu s$ , wire feed = 10  $m \cdot min^{-1}$  a discharge current = 25 A. Predikovaná hodnota drsnosti  $Pq$  v toto nastavení pak je 3,86532  $\mu m$ . Odezvová plocha ilustrující toto nastavení je zobrazena na obrázku 3.5.



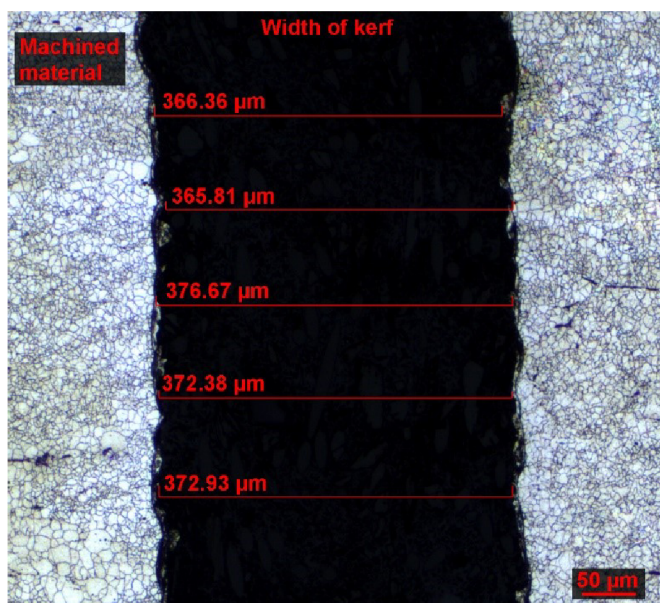
**Obrázek 3.5:** Odezvová plocha znázorňující závislost  $Pq$  na wire feed a discharge current, při nastavení ostatních parametrů na hodnoty zajišťující minimum  $Pq$

Přestože došlo k signifikantnímu zlepšení pozorované drsnosti, je vhodné upozornit, že model (3.3) obsahuje několik jen „těsně“ statisticky významných regresorů. Navíc koeficient determinace pro predikci je výrazně nižší než „čistý“ koeficient determinace, což

naznačuje možné nedostatky v prediktivních schopnostech modelu. Toto může být obzvláště nepříjemné, neboť predikované minimum drsnosti  $Pq$  se nachází v „nepoužité“ polovině faktorové části plánu experimentu, a tudíž nebylo měřeno.

### 3.3. Model šířky mezery po WEDM hliníkové slitiny 7475-T7351

Shrnutí a rozšíření statistického vyhodnocení studie [1]. Cílem této studie bylo minimalizovat šířku mezery vzniklé po WEDM hliníkové slitiny 7475-T7351. Užší mezera umožňuje vyrobít při tomto způsobu obrábění menší vnitřní radius oblouku, což může vést ke zlepšení rozměrové přesnosti výrobního stroje. Pro tento experiment byly využity vzorky vyrobené při předchozí studii (studie [4]). Šířka mezery pak byla měřena pomocí invertovaného světelného mikroskopu Axio Observer Z1m od firmy ZEISS. Každá vzniklá mezera byla systematicky měřena na 5 místech řezu, jak je znázorněno na obr 3.6.



**Obrázek 3.6:** Příklad měření šířky mezery pro vzorek č. 24, kde byla změřena nejmenší průměrná šířka mezery

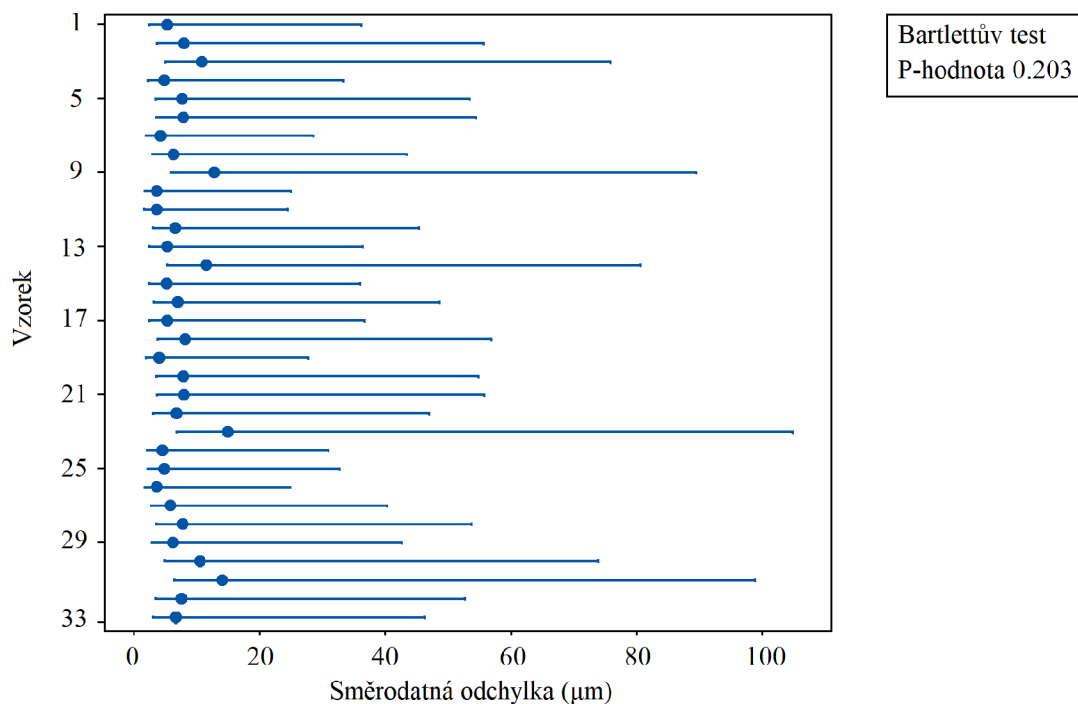
Výsledkem tedy je 5 replikací použitého plánu experimentu čítajícího 33 pokusů (viz tabulka 3.2). Průměry a směrodatné odchylky šířek mezer jednotlivých vzorků jsou shrnuty v tabulce 3.4.



**Tabulka 3.4:** Průměry a směrodatné odchylky získané z pěti měření mezery řezu pro každý vzorek

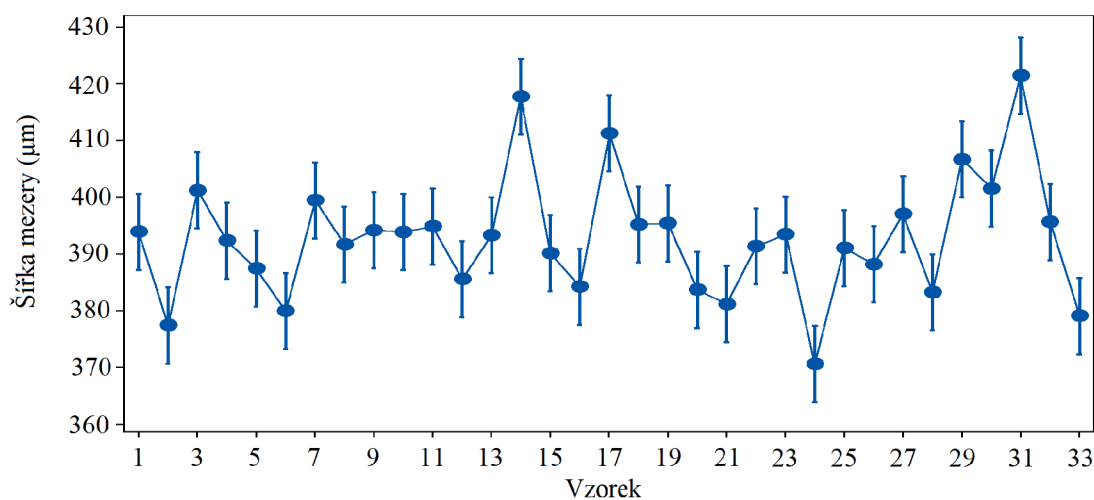
číslo vzorku	průměr ( $\mu m$ )	směrodatná odchylka ( $\mu m$ )	číslo vzorku	průměr ( $\mu m$ )	směrodatná odchylka ( $\mu m$ )
1	393,9	5,068	18	395,164	7,981
2	377,434	7,802	19	395,386	3,874
3	401,204	10,637	20	383,662	7,68
4	392,334	4,659	21	381,154	7,814
5	387,4	7,498	22	391,332	6,587
6	379,94	7,632	23	393,414	14,708
7	399,438	3,998	24	370,63	4,336
8	391,66	6,078	25	391	4,582
9	394,182	12,548	26	388,145	3,474
10	393,856	3,486	27	397,022	5,639
11	394,84	3,424	28	383,228	7,531
12	385,528	6,359	29	406,664	5,968
13	393,298	5,1	30	401,52	10,36
14	417,726	11,304	31	421,448	13,868
15	390,122	5,04	32	395,604	7,381
16	384,212	6,813	33	379,064	6,483
17	411,264	5,15			

„Nevýhodou“ replikací však je, že žádný regresní model nedokáže vysvětlit variabilitu v opakovaných pozorováních stejného nastavení. Maximum vysvětlitelné variability lze určit pomocí jedno-faktorové analýzy rozptylu, použitím čísla vzorku jako faktoru. Jedním z předpokladů analýzy rozptylu je homogenita rozptylu všech skupin, tento předpoklad lze „otestovat“ pomocí Bartlettova testu 3.7.



**Obrázek 3.7:** Bartlettův test homoskedasticity a Bonferroniho 95% intervaly spolehlivosti pro směrodatné odchylky šířky mezery řezu

Hypotéza o homoskedasticitě tedy na základě Bartlettova testu zamítnuta nebyla a tudíž lze tento předpoklad analýzy rozptylu považovat za splněný. Statistická významnost tohoto modelu jednoznačně ( $p$ -hodnota = 0,000) ukazuje rozdíly v šířce mezery pro jednotlivá pozorování a nepřímo ukazuje na závislost mezi parametry WEDM a šířkou mezery po obrábění. Tyto rozdíly ilustrují intervalové odhady středních hodnot na obrázku 3.8.



**Obrázek 3.8:** 95% intervalové odhady středních hodnot šířky mezery řezu

Horním limitem pro jakýkoli regresní model používající parametry nastavované podle plánu experimentu pak bude koeficient determinace modelu analýzy rozptylu, a sice

71,48 %. Zbytek variability (měřeno pomocí součtů čtverců) se „skrývá“ v opakovaných měřeních stejných vzorků. Opět pomocí metody stepwise byl sestaven regresní model obsahující pouze statisticky významné regresory. Tento model popisuje rovnice (3.4) a p-hodnoty byly sestaveny do tabulky 3.5.

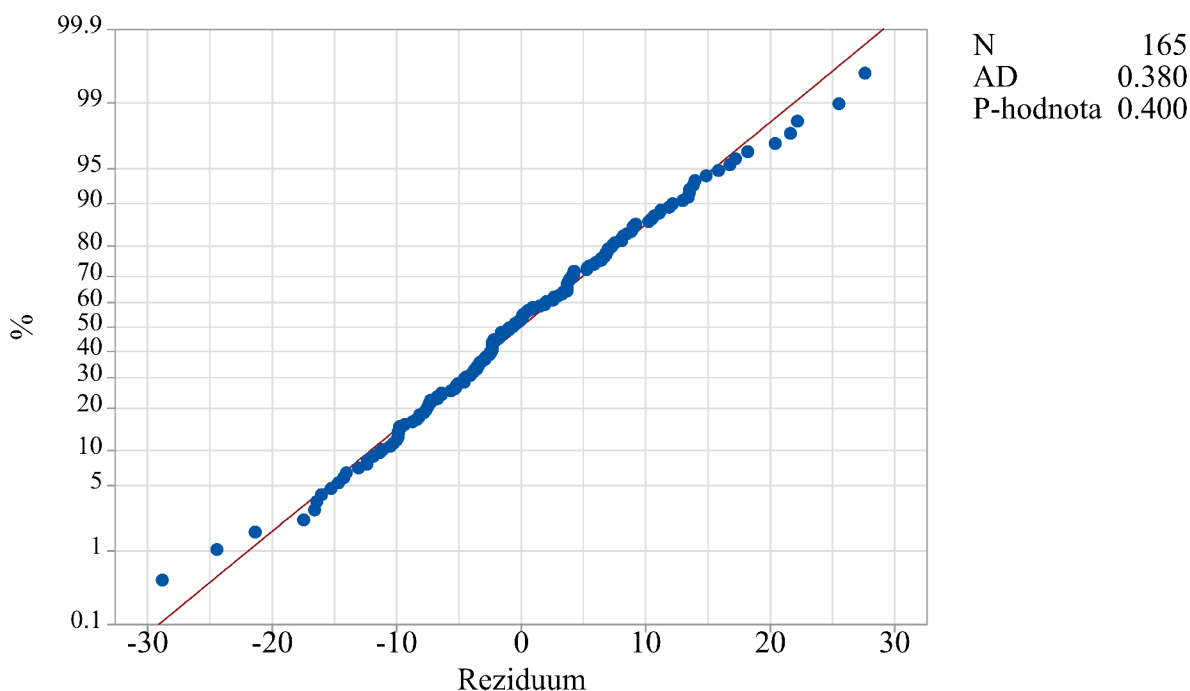
$$W = 387,7 + 0,205 \cdot U - 0,43 \cdot T_{on} - 0,296 \cdot T_{off} - 0,977 \cdot I + 0,283 \cdot T_{on} \cdot I, \quad (3.4)$$

kde  $W$  je šířka mezery,  $U$  je gap voltage,  $T_{on}$  je pulse on time,  $T_{off}$  je pulse off time a  $I$  je discharge current.

regresor	P-hodnota
Lineární část	0,000
$U$	0,044
$T_{on}$	0,000
$T_{off}$	0,004
$I$	0,000
Interakce	0,009
$T_{on} \cdot I$	0,009

**Tabulka 3.5:** P-hodnoty použitých regresorů

Koeficient determinace tohoto regresního modelu je však „pouhých“ 45,23 %. To je sice 63,28 % z možného maxima, ale ani toto číslo není nijak oslnivé. Pozitivní pak je nezamítnutí Andersonova-Darlingova testu o normalitě reziduí (viz obrázek 3.9).



**Obrázek 3.9:** Normal probability plot reziduí modelu šířky mezery

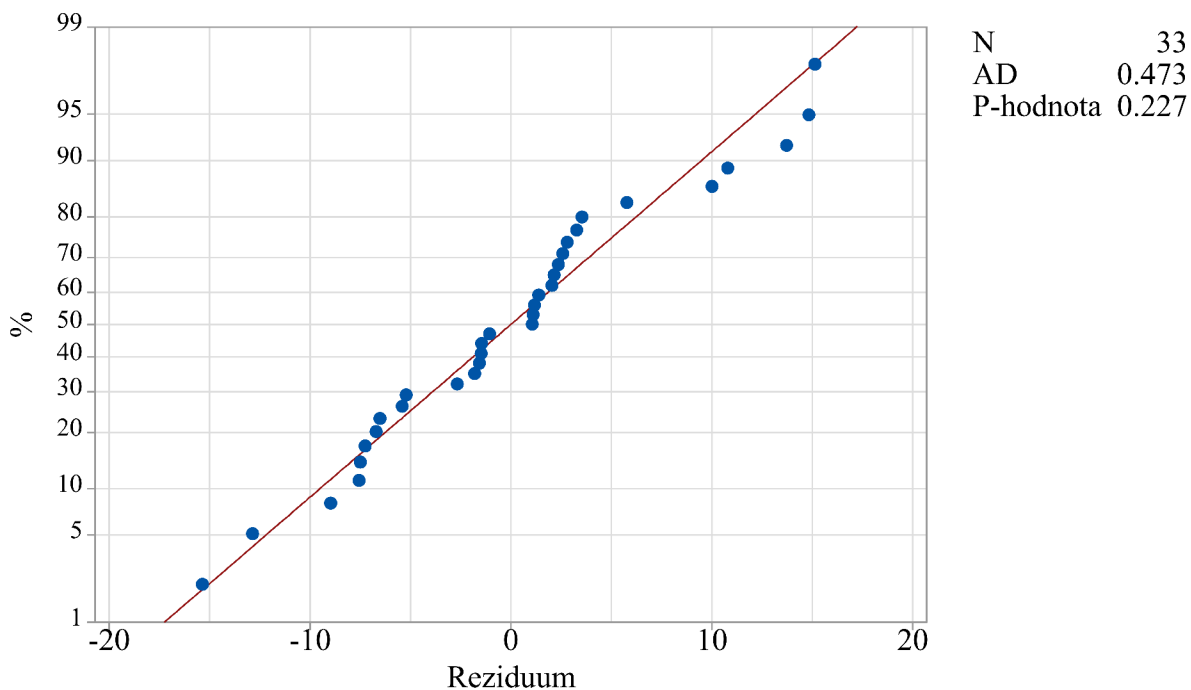
Negativem pak je poměrně razantní zamítnutí hypotézy o adekvátnosti modelu pomocí testu lack of fit (P-hodnota = 0,000), i přes 5 replikací celého plánu experimentu. Drobnou

vadou na kráse pak je i přítomnost 8 odlehlých pozorování (normované reziduum větší než 2).

Pomocí analýzy systému měření však bylo zjištěno, že použitý měřicí systém není způsobilý pro měření šířky mezery, kvůli přílišné variabilitě příslušné opakovatelnosti měření stejných vzorků. Z toho je zjevné, že jediné měření obsahuje příliš velké množství šumu v poměru k obsažené informaci, a proto bude vhodnější pracovat s průměry měření totožných vzorků, pro které je systém měření alespoň podmíněně způsobilý. Budou-li použity průměry, plán experimentu se zredukuje opět jen na jedinou replikaci o 33 pozorováních. Výběr statisticky významných regresorů metodou stepwise tentokrát odhalil pouze dva statisticky významné parametry ovlivňující průměrnou šířku mezery (viz rovnice(3.5))

$$W_{avg} = 320,3 + 4,247 \cdot T_{on} + 1,283 \cdot I, \quad (3.5)$$

kde  $W_{avg}$  je průměrná šířka mezery po řezu WEDM počítaná z 5 pozorování. Koefficient determinace tohoto modelu je 53,77 %, což při použití průměrování ukazuje na přítomnost nějakého dalšího nesledovaného vysvětlujícího faktoru, nebo na nutnost ještě zpřesnit měřicí systém. Pozitivem je nezamítnutí normality reziduí 3.10,



**Obrázek 3.10:** Normal probability plot reziduí modelu průměrů šířky mezery

avšak zamítnutí lack of fit ukazuje další nedostatky. Minimální šířku mezery pak podle modelu zajistí nastavení pulse on time na  $6 \mu s$  a discharge current na  $25 A$ . Ačkoli oba získané modely jsou nesporně statisticky významné a přínosné pro optimalizaci šířky mezery po řezu WEDM, pro lepší výsledky by bylo nutné pokračovat v experimentování a v ideálním případě i zlepšit měřicí systém (např. použitím více měření pro průměr), který je i přes použití průměrů „pouze“ podmíněně způsobilý.

### 3.4. Model řezné rychlosti Hadfieldovy oceli

V dalším je popsána a drobně rozšířena statistická část studie [2]. Podobně jako v předchozích studiích bylo cílem maximalizovat řeznou rychlost WEDM Hadfieldovy oceli. Oblast zkoumání včetně vybraných parametrů je popsána v tabulce 3.1 i plán experimentu byl zvolen stejně (viz tabulka 3.2). Pro vyloučení statisticky nevýznamných regresorů byla opět použita metoda stepwise. V tomto případě však vybere stejný model jako zpětná eliminace i dopředná selekce. Tento model je matematicky popsán rovnicí (3.6)

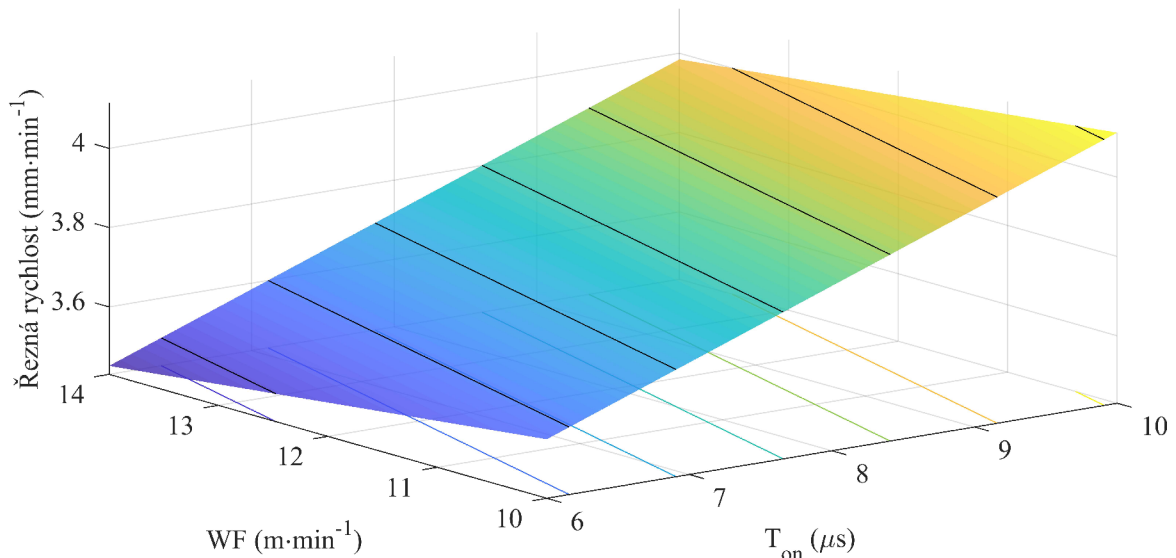
$$v_c = 3,836 + 0,1333 \cdot T_{on} - 0,0933 \cdot T_{off} - 0,144 \cdot WF + 0,05889 \cdot I + 0,00375 \cdot T_{off} \cdot WF, \quad (3.6)$$

kde použité symboly mají v textu obvyklý význam, tedy  $v_c$  je řezná rychlost pro různou orientaci řezu,  $T_{on}$  je pulse on time,  $T_{off}$  je pulse off time,  $WF$  je wire feed a  $I$  je discharge current. P-hodnoty použitých regresorů byly zapsány do tabulky 3.6.

regresor	P-hodnota
Lineární část	0,000
$T_{on}$	0,000
$T_{off}$	0,000
$WF$	0,735
$I$	0,000
Interakce	0,038
$T_{off} \cdot WF$	0,038

**Tabulka 3.6:** P-hodnoty použitých regresorů

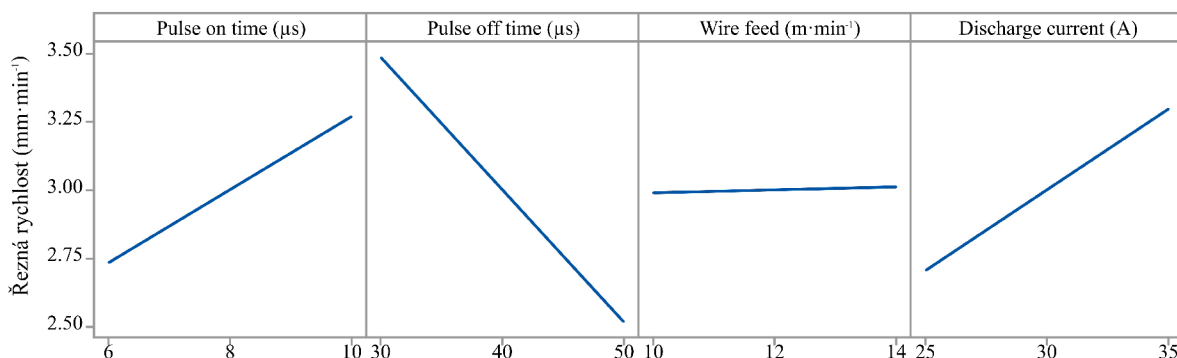
Z tabulky 3.6 je zřejmé, že aby model zůstal hierarchickým obsahuje statisticky nevýznamný regresor wire feed. Příslušná odezvovala plocha je pro ilustraci zobrazena na obrázku 3.11.



**Obrázek 3.11:** Závislost řezné rychlosti na wire feed a na pulse on time, pro pulse on time =  $40 \mu s$  a discharge current =  $30 A$

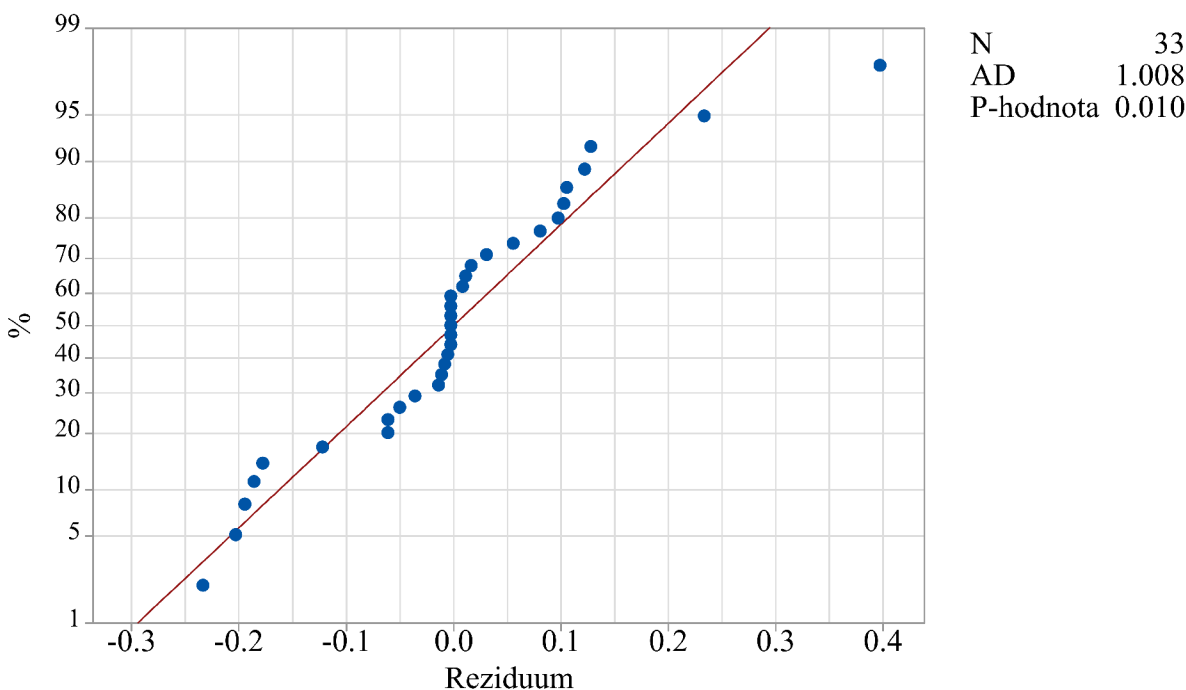
### 3. PUBLIKOVANÉ MODELY POUŽÍVAJÍCÍ DOE

Z grafu 3.11 je zřejmé, že přestože je vliv interakce statisticky významný, ve srovnání se členem pulse on time se jeho vliv na odezvu příliš neprojevuje. Tento model popisuje 93,31 % variability řezné rychlosti (měřeno koeficientem determinace). Adjustovaný koeficient determinace pak dosahuje hodnoty 92,07 % a koeficient determinace predikce 89,31 %. Optimálním nastavením pro řeznou rychlost WEDM hadfieldovy oceli je pulse on time = 10  $\mu s$ , pulse off time = 30  $\mu s$ , wire feed = 10  $mm \cdot min^{-1}$  a discharge current = 35 A. Což ilustruje main effects plot na obrázku 3.12.



Obrázek 3.12: Main effects plot modelu Hadfieldovy oceli

Další z pozitivních vlastností tohoto modelu je nezamítnutí testu lack of fit, model tedy z tohoto hlediska lze považovat za adekvátní. Drobným nedostatkem je pak přítomnost tří odlehlých pozorování (standardizované reziduum větší než 2). Dalším nedostatkem je opět zamítnutí hypotézy o normalitě reziduí (viz obrázek 3.13).



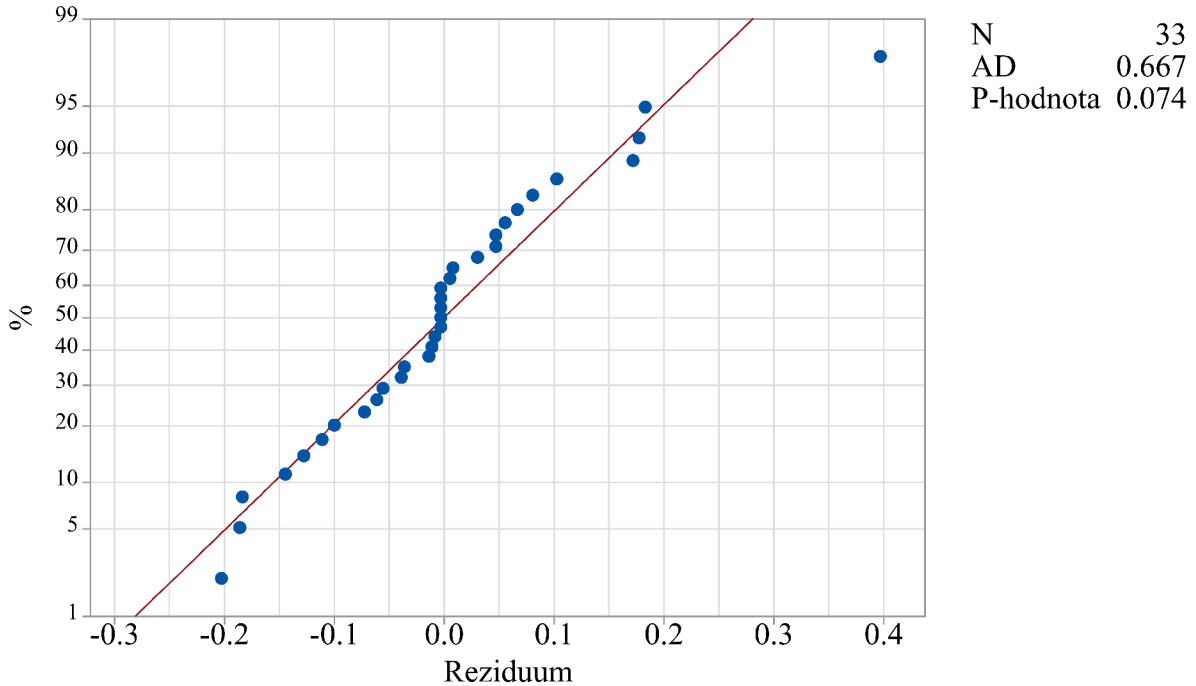
Obrázek 3.13: Normal probability plot reziduí modelu řezné rychlosti pro Hadfieldovu ocel

Tato studie ukázala, že ačkoli se matematický model řezné rychlosti od modelu hliníkové slitiny (3.1) liší použitými regresory, optimální nastavení je totožené. Model Hadfieldovy oceli jen „navíc“ fixuje wire feed na minimum. Zajímavostí této sady dat je, že bude-li model doplněn o poslední statisticky nevýznamný lineární člen (gap voltage), hypotéza

o normalitě reziduí již pomocí Andersonova-Darlingova testu zamítnuta nebude (obrázek 3.14). Rovnice tohoto doplněného modelu je (3.7).

$$v_c = 3,536 + 0,00500 \cdot U + 0,1333 \cdot T_{on} - 0,0933 \cdot T_{off} - 0,1444 \cdot WF + 0,05889 \cdot I + 0,00375 \cdot T_{off} \cdot WF. \quad (3.7)$$

Rovnost koeficientů, kromě konstanty a přidaného gap voltage, je dána ortogonalitou sloupců v použité matici plánu.



**Obrázek 3.14:** Normal probability plot modelu řezné rychlosti Hadfieldovy oceli po přidání gap voltage

Kromě drobného zvýšení všech variant koeficientu determinace a podobného výsledku testu lack of fit, zůstane poslední odlehlé pozorování (vzorek číslo 32), jehož normované reziduum je však tentokrát větší než 3. Protože je vzorek 32 centrálním bodem plánu experimentu, je možné jej vyřadit bez ztráty výhod spojených s ortogonalitou. Pro toto vyřazení však nebyl jiný než „statistický“ důvod, protože byl ve studii použit model (3.6), získaný „standardním“ postupem.

### 3.5. Modely řezné rychlosti inconelu 625 pro různé orientace řezu

Shrnutí a rozšíření studie [3]. Cílem této studie bylo ukázat zda existuje rozdíl v řezné rychlosti při různé orientaci řezu během WEDM slitiny inconel 625. Vybrané parametry i DoE byly totožné jako při experimentech se slitinou hliníku (3.2), v tomto případě však probíhaly dvě sady experimentů pro dvě různé orientace řezu materiálem. Proběhlo tedy dvakrát 33 experimentů. Aby bylo možné testovat rozlišitelnost řezné rychlosti podle orientace řezu, byly spočteny difference řezných rychlostí získané při stejném nastavení

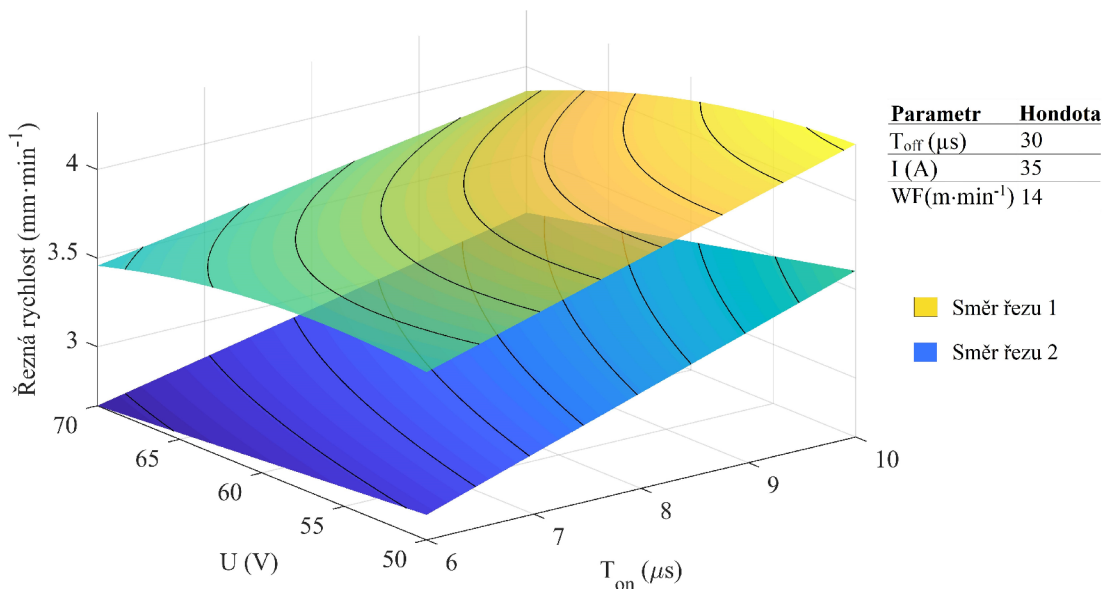
### 3. PUBLIKOVANÉ MODELY POUŽÍVAJÍCÍ DOE

parametrů. Byla testována hypotéza o nulové střední hodnotě diferencí pomocí Studentova testu (párový test dvou souborů). Výsledkem bylo poměrně razantní zamítnutí této hypotézy (P-hodnota 0,000, testové kritérium 21,68). Lze tedy konstatovat, že existuje statisticky významný rozdíl mezi pozorovanými orientacemi řezu. Tento rozdíl je zjevný dokonce i „nestatisticky“, protože všechny difference mají stejné znaménko. Tento fakt lze navíc považovat za zamítnutí, ať už znaménkového nebo Wilcoxonova neparametrického testu hypotézy o nulovém mediánu. Vyšší řezné rychlosti byly pozorovány při řezu ve směru 1. Pro každou orientaci řezu pak byl sestaven matematický model. V obou případech bylo tentokrát využito metody zpětné eliminace pro identifikaci statisticky významných regresorů. Model řezné rychlosti pro první orientaci řezu je popsán rovnicí 3.8, model pro druhou orientaci řezu je popsán rovnicí 3.9.

$$v_{cD1} = -6,34 + 0,1877 \cdot U + 0,3639 \cdot T_{on} - 0,0886 \cdot T_{off} + 0,15 \cdot WF + 0,1708 \cdot I + 0,0009568 \cdot U^2 + 0,001032 \cdot T_{off}^2 - 0,003750 \cdot U \cdot T_{on} - 0,001625 \cdot U \cdot I - 0,003750 \cdot T_{off} \cdot WF, \quad (3.8)$$

$$v_{cD2} = +2,95 + 0,0295 \cdot U + 0,007 \cdot T_{on} - 0,0426 \cdot T_{off} - 0,1913 \cdot WF - 0,0233 \cdot I - 0,003594 \cdot U \cdot T_{on} + 0,000594 \cdot U \cdot T_{off} - 0,000938 \cdot U \cdot I + 0,01324 \cdot T_{on} \cdot WF + 0,00531 \cdot T_{on} \cdot I - 0,002656 \cdot T_{off} \cdot WF + 0,00781 \cdot WF \cdot I, \quad (3.9)$$

kde  $v_{cD1}$  a  $v_{cD2}$  jsou řezné rychlosti pro různou orientaci řezu,  $U$  je gap voltage,  $T_{on}$  je pulse on time,  $T_{off}$  je pulse off time,  $WF$  je wire feed a  $I$  je discharge current. Pro ilustraci podobnosti obou modelů je na obrázku 3.15.



**Obrázek 3.15:** Závislost řezné rychlosti pro různou orientaci řezu na gap voltage a pulse on time.

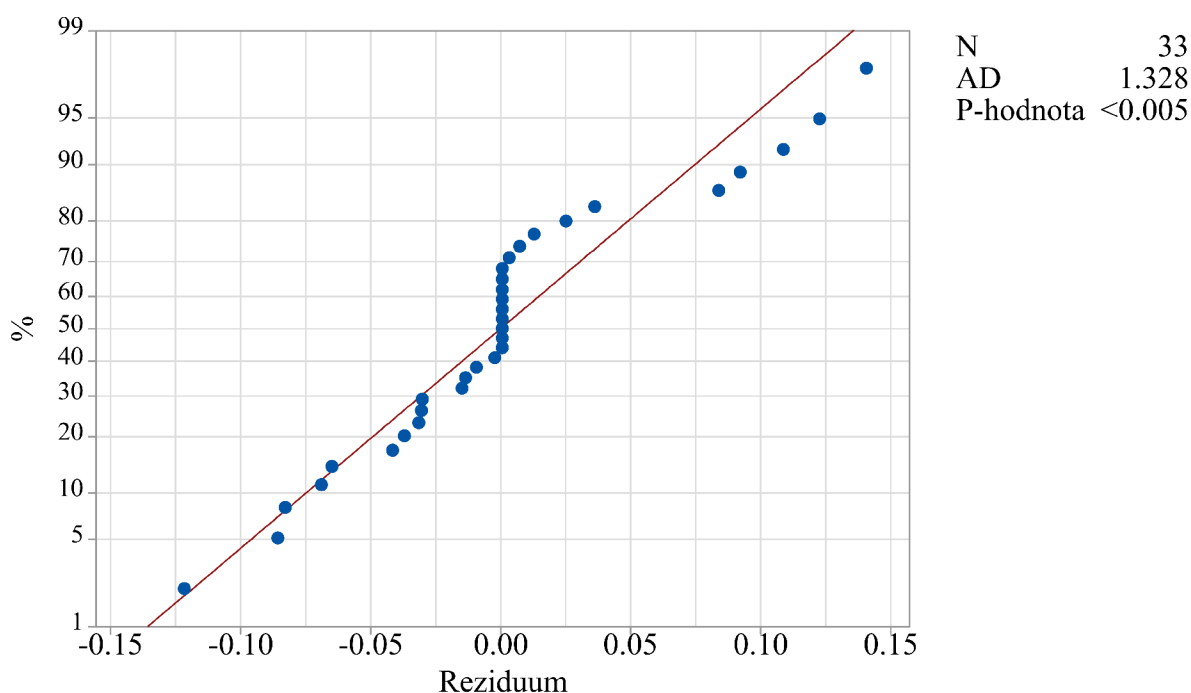
V obou případech rovnice popisuje hierarchický model, tedy obsahuje i nevýznamné regresory, pokud jsou součástí nějakého členu vyššího stupně. P-hodnoty použitých regresorů jsou pro oba modely shrnuty v tabulce 3.7.



**Tabulka 3.7:** P-hodnoty modelů řezné rychlosti pro oba směry řezu

Směr řezu 1		Směr řezu 2	
regresor	P-hodnota	regresor	P-hodnota
Lineární část	0,000	Lineární část	0,000
$U$	0,000	$U$	0,064
$T_{on}$	0,000	$T_{on}$	0,000
$T_{off}$	0,000	$T_{off}$	0,000
$WF$	1,000	$WF$	0,000
$I$	0,000	$I$	0,000
Kvadratická část	0,031	Interakce	0,000
$U^2$	0,017	$U \cdot T_{on}$	0,002
$T_{off}^2$	0,012	$U \cdot T_{off}$	0,007
Interakce	0,000	$U \cdot I$	0,026
$U \cdot T_{on}$	0,000	$T_{on} \cdot WF$	0,013
$U \cdot I$	0,000	$T_{on} \cdot I$	0,013
$T_{on} \cdot WF$	0,000	$T_{off} \cdot WF$	0,013
		$WF \cdot I$	0,001

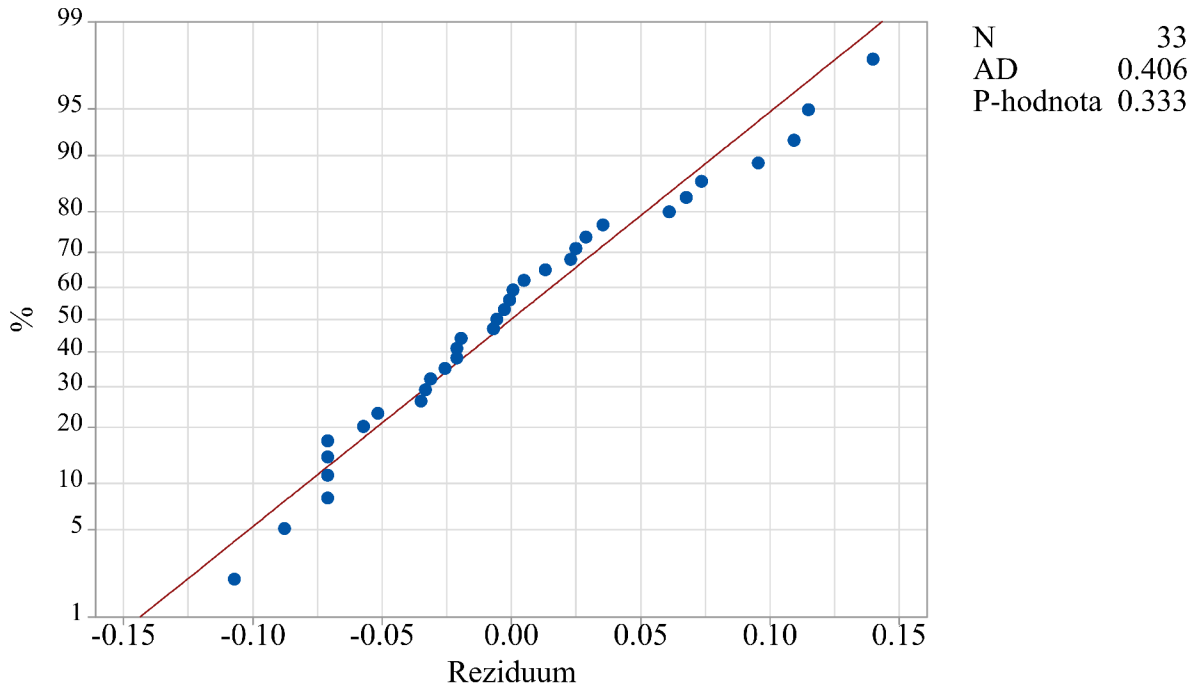
Pro rezidua modelu řezné rychlosti ve směru jedna (3.8) však Andersonův-Darlingův test opět zamítá normalitu reziduí (obrázek 3.16).



**Obrázek 3.16:** Normplot reziduí modelu řezné rychlosti ve směru řezu 1

Důvodem zamítnutí však je pravděpodobně 9 nulových reziduí, z nichž 7 odpovídá hodnotám v centrálním bodě. Z toho vyplývá, že během experimentu byly pozorované hodnoty řezné rychlosti ve všech centrálních bodech totožné. Jako pozitivum se mohou jevit „obrovské“ koeficienty determinace (98,8 %, adjustovaný 98,25 %, pro predikci 96,29 %). Vysoké hodnoty koeficientů determinace však způsobuje fakt, že (na rozdíl od ostatních modelů v této práci) pomocí lineárního regresního modelu lze vysvětlit veškerou variabilitu v odezvě. Protože byla pozorována nulová variabilita v centrálním bodě nelze také testovat adekvátnost modelu pomocí testu lack of fit. Chybějící variabilita v centrálním bodě pak bude příčinou zaznamenání dvou odlehlých pozorování pomocí normovaných reziduí (v obou případech jsou normovaná rezidua větší než 2). Další, spíše numerickou, zajímavostí je P-hodnota 1 faktoru wire feed. Koeficient tohoto regresoru vyšel v transformovaných souřadnicích přesně 0, tedy po transformaci zpět na původní rozsah je koeficient wire feed v regresním modelu tvořen pouze roznásobením členu z interakce. Nebýt konečnosti desetinného rozvoje číselné reprezentace v počítači, lze tuto kuriozitu považovat za „nastoupení“ jevu s pravděpodobností 0. I přes diskretizaci „počítačové“ číselné osy však jde o mimořádně nepravděpodobný jev tím spíš, že byl vypočten z „reálného“ experimentu a nikoli z matematické simulace.

Model řezné rychlosti ve směru řezu 2 pak vysvětluje 97,87 % variability (měřeno koeficientem determinace). Adjustovaný koeficient determinace je 96,59 % a koeficient determinace pro predikci 93,77 %. Takto vysoké hodnoty jsou způsobeny opět minimální pozorovanou variabilitou v centrálním bodě. Byly pozorovány pouze dvě různé hodnoty řezné rychlosti (jedna pětkrát a druhá dvakrát), které se liší o pouhých 5 setin. Tato alespoň minimální variabilita umožňuje nezamítnout Andersonův-Darlingův test normality reziduí (obrázek 3.17).

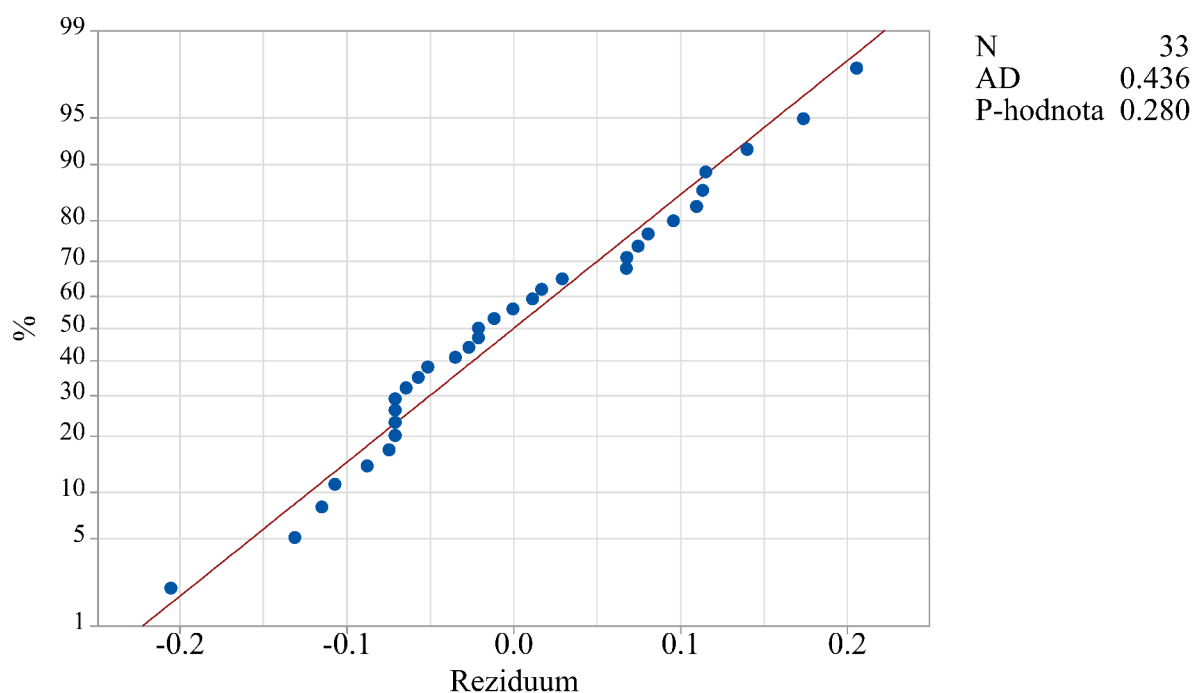


**Obrázek 3.17:** Normplot reziduí modelu řezné rychlosti ve směru řezu 2

Avšak právě minimální variabilita v opakovaném pozorování způsobuje relativně „těsné“ zamítnutí testu adekvátnosti modelu lack of fit (P-hodnota 0,026). Za velké plus lze považovat fakt, že se v tomto modelu nevyskytují žádná odlehlá pozorování (všechny výše 2.5.7 popsané způsoby detekce odlehlých pozorování nebyly úspěšné). Další zajímavostí této sady dat je, že použití jiného způsobu selekce statisticky významných regresorů způsobí významnou změnu v celém modelu. Bude-li použita metoda stepwise, nebo dopředná selekce bude hierarchický model řezné rychlosti ve směru řezu 2 popsán rovnicí (3.10).

$$v_{CD2_{stepwise}} = 3,36 + 0,0014 \cdot U + 0,3253 \cdot T_{on} - 0,0745 \cdot T_{off} - 0,1913 \cdot WF - 0,0371 \cdot I + 0,00359 \cdot U \cdot T_{on} + 0,000594 \cdot U \cdot T_{off} + 0,00781 \cdot WF \cdot I \quad (3.10)$$

Zjevnou výhodou tohoto modelu oproti tomu získanému zpětnou eliminací (3.9) je pouze osm použitých regresorů (model (3.9) jich obsahuje 12). Všechny varianty koeficientu determinace však dosáhnou zjevně nižších hodnot (94,89 %, adjustovaný koeficient determinace 93,18 % a predikce 85,08 %). Zamítnutí testu adekvátnosti modelu bude razantnější (P-hodnota 0,001), tedy model (3.10) je ve srovnání s (3.9) horší v centrálním bodě. V modelu vytvořeném metodou stepwise pak byla pomocí normovaných reziduí detekována tři odlehlá pozorování (normované reziduum větší než 2). Normalita reziduí však zůstává zachována (obrázek 3.18).



**Obrázek 3.18:** Normplot reziduí modelu řezné rychlosti ve směru řezu 2 vytvořeném pomocí metody stepwise

Nastavení parametrů maximalizující řeznou rychlost je pak totožné pro oba směry řezu i pro všechny tři modely. Maximum modelů řezné rychlosti odpovídá nastavení parametrů gap voltage = 50 V, pulse on time = 10  $\mu s$ , pulse off time 30  $\mu s$ , wire feed = 14  $m \cdot min^{-1}$  a discharge current = 35 A. Predikovaná hodnota řezné rychlosti ve směru řezu 1 je 4,3149  $mm \cdot min^{-1}$ . Ve směru řezu 2 pak podle modelu vzniklého zpětnou eliminací je predikovaná řezná rychlost 3,6007  $mm \cdot min^{-1}$  a podle modelu vzniklého metodou stepwise 3,3945  $mm \cdot min^{-1}$ . Toto nastavení na rozdíl od modelu Hadfieldovy vyžaduje maximalizovat wire feed (bude-li ignorován v modelu Hadfieldovy oceli statisticky nevýznamný parametr gap voltage). Ostatní parametry pak zůstávají totožné, pouze je nutné navíc zafixovat gap voltage na minimum. Rozdílné nastavení pro WEDM Hadfieldovy oceli a inconelu 625 ukazuje na přítomnost interakce mezi obráběným materiálem a nastavovanými parametry.

## Vlastnosti algoritmické selekce regresorů vzhledem k DoE

---

### 4.1. Přehled známých nedostatků

Rozdíly v modelech, při odlišném způsobu selekce regresorů, autora motivovali k níže popsaným numerickým simulacím úspěšnosti výběru „správných“ regresních proměnných. Je vhodné na tomto místě podotknout, že na nedokonalosti „automatizovaných“ způsobů selekce významných proměnných bylo poukazováno již od sedmdesátých let minulého století, většinou však v souvislosti přímo se selekcí parametrů pro pozdější modelování a obvykle bez přímé vazby na odezvové plochy v DoE. Již v roce 1972 autoři studie [31] ukazují na nedodržování všech předpokladů během procedury selekce. V této studii autoři navrhnou použít pro vstup do modelu hladinu významnosti výrazně větší než 5 % (až 25 %), protože považují chybu druhého druhu (nezahrnutí významného regresoru do modelu) za „horší“. Aitkin ve své studii [6] tvrdí, že nelze vybrat „nejlepší“ model pouze pomocí testování hypotéz o regresních koeficientech. Dokonce dává větší váhu „kontextu“ a znalostem odborníků. Tehdejší hlavní výzvy a nedostatky spojené s touto problematikou shrnul v roce 1974 Cox ve studii [14]. Bendel a Afifi v [9] zkoumali různá zastavovací kritéria pro stepwise metody. Miller v roce 1984 ve své studii [25] dochází k závěru, že není možné použít stejnou sadu dat pro selekci proměnných ovlivňujících odezvu a k modelování odezvy. Texty zaměřené na tuto problematiku byly publikovány i v časopisech, jejichž hlavním zaměřením není statistika. Například studie [33], kde autoři pro selekci proměnných upřednostňují statistiky založené na teorii informace, nebo článek [23], kde autoři poukazují na zahrnutí „šumových“ proměnných do modelu metodou stepwise. Studie [28] ukazuje, že testování hypotéz o statistické významnosti proměnných je „úspěšné“, pouze pokud není použito opakovaně. Studie [32] srovnává metodu stepwise s její alternativou best subset a konstatuje nevalné výsledky při selekci vysvětlujících proměnných pro obě metody. V souvislosti s DoE je problematika zmiňována ve studii [13] v souvislosti s DoE pro směsi, které nejsou předmětem této práce. Většina zmíněných prací však pochází ještě z dob před masivním rozšířením statistických softwarů, které právě metody stepwise pro selekci regresorů často využívají a doporučují nehledě na výše popsané nedokonalosti.

## 4.2. Výsledky numerických simulací

Cílem následujících numerických simulací bylo porovnat rozdíly různých plánů experimentu odezvových ploch pro pět faktorů. Vzhledem k inspiraci WEDM byl zvolen uvažovaný rozsah proměnných popsany v tabulce 4.1.

**Tabulka 4.1:** Maxima a minima parametrů vstupujících do DoE

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
minimum	50	6	30	10	25
maximum	70	10	50	14	35

Pro podrobnější studii byl vybrán centrální kompozitní plán obsahující poloviční faktorovou část čítající 33 měření (16 faktorových bodů, 10 face centered axiálních bodů a 7 centrálních bodů), viz tabulka 4.2, centrální kompozitní plán využívající úplný faktorový plán pro pět vysvětlujících proměnných čítající 54 měření (32 faktorových bodů, 10 face centered axiálních bodů a 12 centrálních bodů, viz tabulka 4.3) a Boxův-Bhenkenův plán pro pět vysvětlujících proměnných skládající se ze 46 měření (z toho 6 centrálních bodů, viz tab 4.4). Zde je vhodné podotknout, že oblastí, na které lze považovat model za platný v případě Boxova-Bhenkenova plánu, by rozhodně neměl být pětidimenzionální interval určený extrémními hodnotami z tabulky 4.1. Po standardizaci všech vysvětlujících proměnných na interval  $\langle -1; 1 \rangle$  by bylo správnější mluvit o pětidimenzionální sféře s poloměrem  $\sqrt{2}$  (bez standardizace tedy pětidimenzionální elipsoid s délkami poloos určenými rozsahem vysvětlujících proměnných). Protože v plánu nejsou zahrnuty extrémní kombinace vysvětlujících proměnných, hodnoty získaného matematického modelu ve vrcholech pětidimenzionální krychle (nebo jen mimo zmíněnou sféru) jsou extrapolací mimo měřenou oblast a v praxi je velmi vhodné ověřit dalším experimentem. Pro přehlednost nebylo v následujících tabulkách znáhodněno pořadí pokusů a hodnoty vysvětlujících proměnných jsou standardizovány na rozsah  $\langle -1; 1 \rangle$  (jako při statistickém vyhodnocení).

**Tabulka 4.2:** Centrální kompozitní plán s poloviční faktorovou částí

č.	typ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	axiální	-1	0	0	0	0
2	axiální	1	0	0	0	0
3	axiální	0	-1	0	0	0
4	axiální	0	1	0	0	0
5	axiální	0	0	-1	0	0
6	axiální	0	0	1	0	0
7	axiální	0	0	0	-1	0
8	axiální	0	0	0	1	0
9	axiální	0	0	0	0	-1
10	axiální	0	0	0	0	1
11	centrální	0	0	0	0	0
12	centrální	0	0	0	0	0
13	centrální	0	0	0	0	0
14	centrální	0	0	0	0	0
15	centrální	0	0	0	0	0
16	centrální	0	0	0	0	0
17	centrální	0	0	0	0	0
č.	typ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
18	faktorový	-1	-1	-1	-1	1
19	faktorový	1	-1	-1	-1	-1
20	faktorový	-1	1	-1	-1	-1
21	faktorový	1	1	-1	-1	1
22	faktorový	-1	-1	1	-1	-1
23	faktorový	1	-1	1	-1	1
24	faktorový	-1	1	1	-1	1
25	faktorový	1	1	1	-1	-1
26	faktorový	-1	-1	-1	1	-1
27	faktorový	1	-1	-1	1	1
28	faktorový	-1	1	-1	1	1
29	faktorový	1	1	-1	1	-1
30	faktorový	-1	-1	1	1	1
31	faktorový	1	-1	1	1	-1
32	faktorový	-1	1	1	1	-1
33	faktorový	1	1	1	1	1

**Tabulka 4.3:** Centrální kompozitní plán s úplnou faktorovou částí

č.	typ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	axiální	-1	0	0	0	0
2	axiální	1	0	0	0	0
3	axiální	0	-1	0	0	0
4	axiální	0	1	0	0	0
5	axiální	0	0	-1	0	0
6	axiální	0	0	1	0	0
7	axiální	0	0	0	-1	0
8	axiální	0	0	0	1	0
9	axiální	0	0	0	0	-1
10	axiální	0	0	0	0	1
11	centrální	0	0	0	0	0
12	centrální	0	0	0	0	0
13	centrální	0	0	0	0	0
14	centrální	0	0	0	0	0
15	centrální	0	0	0	0	0
16	centrální	0	0	0	0	0
17	centrální	0	0	0	0	0
18	centrální	0	0	0	0	0
19	centrální	0	0	0	0	0
20	centrální	0	0	0	0	0
21	centrální	0	0	0	0	0
22	centrální	0	0	0	0	0
23	faktorový	-1	-1	-1	-1	-1
24	faktorový	1	-1	-1	-1	-1
25	faktorový	-1	1	-1	-1	-1
26	faktorový	1	1	-1	-1	-1
27	faktorový	-1	-1	1	-1	-1
28	faktorový	1	-1	1	-1	-1
29	faktorový	-1	1	1	-1	-1
30	faktorový	1	1	1	-1	-1
31	faktorový	-1	-1	-1	1	-1
32	faktorový	1	-1	-1	1	-1
33	faktorový	-1	1	-1	1	-1
34	faktorový	1	1	-1	1	-1
35	faktorový	-1	-1	1	1	-1
36	faktorový	1	-1	1	1	-1
37	faktorový	-1	1	1	1	-1
38	faktorový	1	1	1	1	-1
39	faktorový	-1	-1	-1	-1	1
40	faktorový	1	-1	-1	-1	1
41	faktorový	-1	1	-1	-1	1
42	faktorový	1	1	-1	-1	1
43	faktorový	-1	-1	1	-1	1
44	faktorový	1	-1	1	-1	1
45	faktorový	-1	1	1	-1	1
46	faktorový	1	1	1	-1	1
47	faktorový	-1	-1	-1	1	1
48	faktorový	1	-1	-1	1	1
49	faktorový	-1	1	-1	1	1
50	faktorový	1	1	-1	1	1
51	faktorový	-1	-1	1	1	1
52	faktorový	1	-1	1	1	1
53	faktorový	-1	1	1	1	1
54	faktorový	1	1	1	1	1



**Tabulka 4.4:** Boxův-Bhenkenův plán experimentu

č.	typ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	č.	typ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	B-B	-1	1	0	0	0	24	B-B	0	1	0	1	0
2	B-B	1	1	0	0	0	25	B-B	0	-1	0	0	-1
3	B-B	-1	-1	0	0	0	26	B-B	0	1	0	0	-1
4	B-B	1	-1	0	0	0	27	B-B	0	-1	0	0	1
5	B-B	-1	0	-1	0	0	28	B-B	0	1	0	0	1
6	B-B	1	0	-1	0	0	29	B-B	0	0	-1	-1	0
7	B-B	-1	0	1	0	0	30	B-B	0	0	1	-1	0
8	B-B	1	0	1	0	0	31	B-B	0	0	-1	1	0
9	B-B	-1	0	0	-1	0	32	B-B	0	0	1	1	0
10	B-B	1	0	0	-1	0	33	B-B	0	0	-1	0	-1
11	B-B	-1	0	0	1	0	34	B-B	0	0	1	0	-1
12	B-B	1	0	0	1	0	35	B-B	0	0	-1	0	1
13	B-B	-1	0	0	0	-1	36	B-B	0	0	1	0	1
14	B-B	1	0	0	0	-1	37	B-B	0	0	0	-1	-1
15	B-B	-1	0	0	0	1	38	B-B	0	0	0	1	-1
16	B-B	1	0	0	0	1	39	B-B	0	0	0	-1	1
17	B-B	0	-1	-1	0	0	40	B-B	0	0	0	1	1
18	B-B	0	1	-1	0	0	41	centrální	0	0	0	0	0
19	B-B	0	-1	1	0	0	42	centrální	0	0	0	0	0
20	B-B	0	1	1	0	0	43	centrální	0	0	0	0	0
21	B-B	0	-1	0	-1	0	44	centrální	0	0	0	0	0
22	B-B	0	1	0	-1	0	45	centrální	0	0	0	0	0
23	B-B	0	-1	0	1	0	46	centrální	0	0	0	0	0

Jako testovací odezva byla použita funkce popsaná rovnicí (4.1).

$$\begin{aligned}
y = & 6,60 - 0,0297 \cdot x_1 + 0,5240 \cdot x_2 - 0,1180 \cdot x_3 - 0,4340 \cdot x_4 - 0,749 \cdot x_5 + \\
& + 0,000556 \cdot x_3^2 - 0,005156 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,000844 \cdot x_1 \cdot x_3 + \\
& + 0,002656 \cdot x_1 \cdot x_4 - 0,002344 \cdot x_2 \cdot x_3 + 0,01031 \cdot x_4 \cdot x_5.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Tato funkce byla modelem zatím nepublikované sady dat získané z procesu WEDM pomocí plánu experimentu popsaném v tabulce 3.2. Koefficient determinace tohoto modelu byl 98,00 % a reziduální směrodatná odchylka modelu  $S$  byla 0,0759584. Tato hodnota posloužila jako směrodatná odchylka při generování šumu během numerických simulací.

#### 4. VLASTNOSTI ALGORITMICKÉ SELEKCE REGRESORŮ VZHLDEM K DoE

V každé sadě experimentů bylo vytvořeno 100 000 sad dat, ze kterých byly pomocí metody stepwise vyloučeny statisticky nevýznamné regresory. Pro každý plán experimentu byla uvažována jedna, tři, pět a deset replikací celého plánu. Správným modelem se v následujícím textu rozumí model obsahující stejné regresory jako (4.1), přestože hodnoty spočtených regresních koeficientů se mohou lišit. Modely označené jako obsahující správný model pak obsahují navíc alespoň jeden regresor nepřítomný ve funkci (4.1). Relativní četnost nalezení správné regresní funkce za použití výše popsanych parametrů je shrnuta v tabulce 4.5.

**Tabulka 4.5:** Relativní četnosti nalezených modelů metodou stepwise s použitými hladinami významnosti 0,05 a použitou směrodatnou odchylkou získanou z reálných dat

Centrální kompozitní částečný plán		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,09411	0,16409	0,83591
	3	0,09160	0,16236	0,83764
	5	0,47884	0,70799	0,29201
	10	0,64401	0,97904	0,02096
Boxův-Bhenkenův plán experimentu		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,00875	0,01818	0,98182
	3	0,00891	0,01930	0,98070
	5	0,22465	0,36425	0,63575
	10	0,61094	0,96652	0,03348
Centrální kompozitní úplný plán		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,23828	0,37478	0,62522
	3	0,23750	0,37691	0,62309
	5	0,50275	0,73498	0,26502
	10	0,64699	0,98064	0,01936

Z četností v tabulce 4.5 je zjevné, že pro danou odezvu dosahuje nejhorších výsledků Boxův-Bhenkenův plán, přestože obsahuje druhý nejvyšší počet měření. Toto tvrzení bylo testováno statistickým testem pro porovnání dvou parametrů pravděpodobnosti dvou binomických rozdělení (testování probíhalo po dvojicích). Kromě toho se ukazuje, že ani tři opakování celého experimentu nepřinesou výrazné zlepšení výsledků. Výrazné zlepšení nalezení skutečného modelu přichází až s použitím pěti celých replikací plánu experimentu, což znamená 230 měření pro Boxův-Bhenkenův plán, 165 měření pro Centrální kompozitní plán s poloviční faktorovou částí a 270 měření pro Centrální kompozitní plán s úplnou faktorovou částí. Ačkoli při pěti opakováních dochází ke značnému zlepšení, stále

úspěšnost ve dvou ze třech případů nedosahuje ani 50 % a ve třetím případě je jen velice těsně vyšší. Pozitivnější se může jevit četnost modelů obsahujících správný model, je však nutné podotknout, že tyto modely nesplňují předpoklady regresního modelu, neboť obsahují „šumové“ proměnné a tedy chybový člen nebude mít předpokládané rozdělení pravděpodobnosti. Alespoň trochu „uspokojivých“ výsledků dosahuje proces selekce regresorů až při deseti replikacích. Zde je však nutno podotknout, že experimentování takového rozsahu čítá stovky pokusů, což je v naprosté většině studií využívajících DoE neproveditelné, jakkoli by to mohlo být z pohledu použitých metod přínosem. Ukazuje se, že samotný vysoký počet uvažovaných měření nemusí být výhodou, protože tři replikace centrálního kompozitního plánu s úplnou faktorovou částí čítají 162 měření, což je podobné jako pět replikací centrálního kompozitního plánu s poloviční faktorovou částí. Na základě těchto výsledků lze tedy doporučit používat pro pět nebo více faktorů spíše méně unikátních pozorování, ale ušetřené náklady vynaložit na opakování celého experimentu.

Zvýšíme-li hladinu významnosti používanou v testech během každého kroku stepwise, dostaneme po numerické simulaci výsledky shrnuté v tabulkách 4.6 (hladina významnosti 10 %) a 4.7 (hladina významnosti 25 %).

**Tabulka 4.6:** Relativní četnosti nalezených modelů metodou stepwise s použitými hladinami významnosti 0,1 a použitou směrodatnou odchylkou získanou z reálných dat

Centrální kompozitní částečný plán		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,09117	0,27897	0,72149
	3	0,09226	0,27920	0,72080
	5	0,09001	0,27851	0,72149
	10	0,38479	0,87871	0,12129
Boxův-Bhenkenův plán experimentu		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,01872	0,06716	0,93284
	3	0,01849	0,06641	0,93359
	5	0,01857	0,06573	0,93427
	10	0,31175	0,80966	0,19034
Centrální kompozitní úplný plán		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,17352	0,43955	0,56045
	3	0,17367	0,43946	0,56054
	5	0,17367	0,44278	0,44722
	10	0,39657	0,87519	0,12481

#### 4. VLASTNOSTI ALGORITMICKÉ SELEKCE REGRESORŮ VZHLDEM K DoE

Tabulka 4.6 ukazuje, že zvýšení obou hladin významnosti v testech během selekce metodou stepwise nezlepšuje četnost nalezených správných modelů (kromě Boxova-Bhenkenova plánu, jehož výsledky jsou však ve srovnání s s alternativami stále tristní). Kromě pěti replikací celého experimentu však došlo ke zvýšení počtu nalezení nadmnožiny správných regresorů. Tento posun byl způsoben „přelitím“ pravděpodobnosti z chyby druhého druhu do chyby prvního druhu. Nepříjemné je však zjištění, že pro prudký nárůst četnosti odhalení správných modelů je tentokrát (narozdíl od nižší hladiny významnosti v tabulce 4.5) potřeba celých deset replikací plánu experimentu.

**Tabulka 4.7:** Relativní četnosti nalezených modelů metodou stepwise s použitými hladinami významnosti 0,25 a použitou směrodatnou odchylkou získanou z reálných dat

Centrální kompozitní částečný plán		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,02827	0,48073	0,51927
	3	0,02789	0,48008	0,51992
	5	0,02736	0,47962	0,52038
	10	0,08559	0,93130	0,0687
Boxův-Bhenkenův plán experimentu		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,01243	0,24244	0,75756
	3	0,01249	0,24411	0,75589
	5	0,01288	0,24334	0,75666
	10	0,06880	0,92517	0,07483
Centrální kompozitní úplný plán		relativní četnost		
		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,04501	0,54455	0,45545
	3	0,04566	0,54953	0,45047
	5	0,04540	0,54895	0,45015
	10	0,08886	0,93287	0,06713

Při dalším navýšení použitých hladin významnosti testů hypotéz během metody stepwise (na 25 %) dojde ke snížení četnosti odhalení správného modelu, ale zároveň nastane k prudký nárůst četnosti modelů obsahujících správný model. Při deseti replikacích celého experimentu se relativní četnost vynechání části funkce tvořící závislost odezvy na vysvětlujících proměnných dokonce dostává pod 10 % . Narůstajícím problémem však je již jednou zmíněné nedodržení předpokladů o rozdělení pravděpodobnosti chybového členu v důsledku přidání „falešných“ funkcí do regresního modelu.

Dále byla simulována úspěšnost metody stepwise při popisování šumu nezávislého na vysvětlujících proměnných. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce

**Tabulka 4.8:** Relativní četnosti nezahrnutí žádného regresoru do modelu metodou stepwise z odezvy nezávislé na vysvětlujících proměnných (hladiny významnosti 0,05)

Centrální kompozitní		relativní četnost		
částečný plán		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,33710	—	0,66290
	3	0,38336	—	0,61664
	5	0,33419	—	0,66581
	10	0,38944	—	0,61056
Boxův-Bhenkenův		relativní četnost		
plán experimentu		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,30939	—	0,69061
	3	0,34616	—	0,65384
	5	0,30980	—	0,69020
	10	0,35008	—	0,64992
Centrální kompozitní		relativní četnost		
úplný plán		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,37271	—	0,62729
	3	0,39861	—	0,60139
	5	0,37358	—	0,62652
	10	0,40354	—	0,59646

Z tabulky 4.8 je zjevné, že všechny plány experimentu si vedou podobně, pokud metoda stepwise nemá zahrnout do modelu žádný regresor. Četnosti „falešných“ závislostí v tomto případě podle autora nelze považovat za problém, protože na nevhodnost modelu by měl upozornit „nevelký“ koeficient determinace (případně jeho modifikace).

Závislost četnosti identifikace správného modelu na směrodatné odchylce je věnována tabulka 4.9. Získána byla podobným způsobem jako tabulka 4.5, jen směrodatná odchylka šumu byla zdvojnásobena.

#### 4. VLASTNOSTI ALGORITMICKÉ SELEKCE REGRESORŮ VZHLDEM K DoE

**Tabulka 4.9:** Relativní četnosti nalezených modelů metodou stepwise s použitými hladinami významnosti 0,05 a dvojnásobkem směrodatné odchylky získané z reálných dat

Centrální kompozitní		relativní četnost		
částečný plán		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,00046	0,00126	0,99874
	3	0,000044	0,00118	0,99882
	5	0,04520	0,07089	0,92911
	10	0,17269	0,25965	0,74035
Boxův-Bhenkenův		relativní četnost		
plán experimentu		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,00001	0,00006	0,99994
	3	0,00001	0,00004	0,99996
	5	0,00197	0,00324	0,99676
	10	0,02097	0,03384	0,96616
Centrální kompozitní		relativní četnost		
úplný plán		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,00731	0,01338	0,98662
	3	0,00649	0,01254	0,98746
	5	0,16275	0,24749	0,75151
	10	0,31195	0,46659	0,53341

Z tabulky 4.9 je vidět zřetelný pokles četností identifikování správného modelu i četností modelů obsahujících správný model ve srovnání s tabulkou 4.5. Vkládat do textu podobnou tabulku pro čtyřnásobek směrodatné odchylky šumu považuje autor za naprosto zbytečné, protože obsahuje pouze nuly ve všech sloupcích zmiňujících správný model. Původní směrodatná odchylka přitom tvoří pouhých 3,2 % z rozsahu použité funkce na zvolené oblasti. Tedy již při směrodatné odchylce 12,8 % z rozsahu funkce závislosti odezvy na vysvětlujících proměnných nebyl nalezen správný model prakticky nikdy.

Relativní četnosti identifikace správného modelu pomocí metody stepwise pro všechny tři uvažované plány experimentu při použití odezvy bez interakcí, ale se všemi pěti kvadratickými členy jsou zapsány do následující tabulky. Závislost odezvy na proměnných tedy byla popsána právě pěti lineárními a pěti kvadratickými členy.

**Tabulka 4.10:** Relativní četnosti nalezených modelů metodou stepwise s použitými hladinami významnosti 0,05 bez interakcí (5 lineárních členů, 5 kvadratických členů)

Centrální kompozitní		relativní četnost		
částečný plán		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,00810	0,02489	0,97511
	3	0,00814	0,02462	0,97538
	5	0,19643	0,34853	0,65147
	10	0,44407	0,75241	0,24759
Boxův-Bhenkenův		relativní četnost		
plán experimentu		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,20917	0,39509	0,60491
	3	0,21292	0,39851	0,60149
	5	0,58665	0,99133	0,00867
	10	0,59326	0,99994	0,00006
Centrální kompozitní		relativní četnost		
úplný plán		správný model	obsahuje správný model	zbytek
replikace	1	0,00692	0,01568	0,99432
	3	0,00745	0,01651	0,98349
	5	0,20321	0,35003	0,64997
	10	0,44992	0,75649	0,24351

Tabulka 4.10 ukazuje, že úspěšnost výběru regresorů metodou stepwise je závislá na skutečné závislosti odezvy na vysvětlujících proměnných. Pokud bude tato závislost obsahovat pouze lineární a kvadratické členy (žádné interakce), bude pro identifikování správného modelu s přehledem nejlepší Boxův-Bhenkenův plán. Tento zásadní rozdíl ve výsledné regresní funkci závislé na poloze měření by bylo vhodné brát v úvahu již při výběru plánu experimentu (pokud je to možné). Jestliže lze očekávat přítomnost interakcí bude vhodnější zvolit centrální kompozitní plán, pokud ale z nějakého důvodu společné působení více proměnných neočekáváme, bude pro zahrnutí kvadratických efektů do modelu vhodnější použít Boxův-Bhenkenův plán.

Nelichotivým shrnutím této sady numerických simulací pro různé plány experimentu je fakt, že pro nalezení „skutečné“ odezvové plochy (bez šumových proměnných) je nutná buďto apriori znalost tvaru regresní funkce (čímž se výzkumník vyhne testování statistických hypotéz o významnosti regresních koeficientů), nebo výrazně větší množství pozorování než autor považuje za možné uvažovat během implementace DoE. Z provedených numerických simulací nelze obecně tvrdit, že některý z plánů experimentu je „lepší“ než ostatní (vzhledem ke schopnostem najít správnou regresní funkci metodou stepwise). Vhodnost zvoleného plánu experimentu je zjevně funkcí počtu opakování celého

plánu experimentu, velikosti směrodatné odchylky chybového členu a zejména, většinou apriori neznámé, skutečné funkce závislosti odezvy na vysvětlujících proměnných.



Předložená disertační práce se podrobně zabývá různými plány experimentu a jejich vyhodnocením. Volba „vhodného“ plánu experimentu je důležitý krok při optimalizaci jakéhokoli procesu, protože přímo ovlivňuje informace, které je z tohoto experimentu možné získat, a zároveň musí brát v úvahu časové, finanční i jiné náklady na provedení experimentu.

V první kapitole je velmi zevrubně popsána nekonvenční obráběcí technologie elektroerozivního drátového řezání. Právě sběr dat podle centrálního kompozitního plánu a jejich následné vyhodnocení, většinou za účelem „optimalizace“ nastavení parametrů tohoto procesu, bylo nejčastějším přínosem autora v publikovaných studiích.

Druhá kapitola je věnována rešeršní části k plánovanému experimentu. V práci jsou popsány počátky plánovaných experimentů a základní principy DoE, jak je formuloval již R. A. Fisher. Dále jsou popsány faktorové plány experimentu a způsob tvorby částečných faktorových plánů jako jakýsi předstupeň pro metodologii odezvových ploch. Z této metodologie práce obsahuje centrální kompozitní plán a Boxův-Bhenkenův plán. V dalším je kompaktně shrnut matematický aparát používaný při vyhodnocení dat získaných pomocí DoE. V této části byly připomenuty předpoklady pro použití lineární regrese, byly naznačeny testy statistických hypotéz o koeficientech a podmodelech lineárního regresního modelu včetně jejich využití při algoritmické selekci statisticky významných regresorů, a v neposlední řadě hojně používané nástroje regresní diagnostiky.

Třetí kapitola je kompilátem a doplněním autorem vyhodnocených plánů experimentu, jenž byly publikovány ve vědeckých časopisech s příslušnou tematikou. V této kapitole byl kladen důraz spíše na „statistický“ obsah než na vazbu k reálnému experimentu, protože je vyhodnocení (na rozdíl od publikovaných modelů) doplněno o některé nedostatky, případně o celé „alternativní“ modely odezvy.

Čtvrtá kapitola pak shrnuje způsob vygenerování testovacích sad dat i samotné numerické experimenty srovnávající tři různé plány experimentu pro pět vstupních faktorů (vzhledem k algoritmické selekci statisticky významných regresorů metorou stepwise). Toto srovnání ukazuje, že při použití algoritmické selekce regresorů založené na testování statistických hypotéz, nelze vybrat vhodný plán experimentu bez značných znalostí procesu nebo bez předchozího experimentování. Každý ze simulovaných plánů experimentu má (alespoň dle autora) svoje výhody i nedostatky. „Bláhovou“ nadějí autora pak je, že pro výběr plánu experimentu začnou být používána i další kritéria než jen nutný počet měření, nehledě na to, jestli jsou zmíněny v této práci.

## ZÁVĚR

## Přehled publikací

- [1] HRABEC, P.; BEDNÁŘ, J.; ZAHRADNÍČEK, R.; PROKEŠ, T.; MACHOVÁ, A. Statistical Analysis of the Width of Kerf Affecting the Manufacture of Minimal Inner Radius. In *Recent Advances in Soft Computing*. [v tisku] 2018. s. 1-12. ISBN: 978-3-319-58088-3.
- [2] MOURALOVÁ, K.; BENEŠ, L.; BEDNÁŘ, J.; ZAHRADNÍČEK, R.; PROKEŠ, T.; MATOUŠEK, R.; HRABEC, P. Using a Design of Experiment for a Comprehensive Analysis of the Surface Quality and Cutting Speed in WED-Machined Hadfield Steel. *Journal of Mechanical Science and Technology*, [v tisku] 2018, roč. 32, č. 11, s. 1-11. ISSN: 1976-3824.
- [3] MOURALOVÁ, K.; BENEŠ, L.; ZAHRADNÍČEK, R.; BEDNÁŘ, J.; HRABEC, P.; PROKEŠ, T.; HRDÝ, R. Analysis of cut orientation through half-finished product using WEDM. *Materials and Manufacturing Processes*, [v tisku] 2018, roč. 33, č. 16, s. 1-11. ISSN: 1532-2475.
- [4] MOURALOVÁ, K.; BENEŠ, L.; ZAHRADNÍČEK, R.; BEDNÁŘ, J.; HRABEC, P.; PROKEŠ, T.; MATOUŠEK, R.; FIALA, Z. Quality of Surface and Subsurface Layers after WEDM Aluminum Alloy 7475-T7351 Including Analysis of TEM Lamella. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, [v tisku] 2018, roč. 98, č. 9, s. 1-18. ISSN: 1433-3015.
- [5] MOURALOVÁ, K.; KOVÁŘ, J.; PROKEŠ, T.; BEDNÁŘ, J.; HRABEC, P. Optimization of WEDM settings parameters when machining pure aluminium using DoE. *MM Science Journal*, 2017, roč. 2017, č. 4, s. 2105-2108. ISSN: 1803-1269.

## Citovaná literatura

- [6] AITKIN, Murray A. Simultaneous Inference and the Choice of Variable Subsets in Multiple Regression. *Technometrics*. 1974, **16**(2). DOI: 10.2307/1267942. ISSN 00401706. Dostupné také z: <https://www.jstor.org/stable/1267942?origin=crossref>
- [7] ANDĚL, Jiří. *Statistické metody*. 4., upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 80-737-8003-8.
- [8] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-162-0.
- [9] BENDEL, Robert B. a A. A. AFIFI. Comparison of Stopping Rules in Forward "Stepwise" Regression. *Journal of the American Statistical Association*. 1977, **72**(357),

## LITERATURA

- 46-53. DOI: 10.1080/01621459.1977.10479905. ISSN 0162-1459. Dostupné také z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1977.10479905>
- [10] BOX, G. E. P. a D. W. BEHNKEN. Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables. *Technometrics*. 1960, **2**(4), 455-475. DOI: 10.1080/00401706.1960.10489912. ISSN 0040-1706. Dostupné také z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1960.10489912>
- [11] BOX, George E. P, J. Stuart HUNTER and William Gordon HUNTER. *Statistics for experimenters: design, innovation, and discovery*. 2nd ed. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience, c2005. Wiley series in probability and statistics. ISBN 04-717-1813-0.
- [12] BOX, G. E. P. a K. B. WILSON. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Breakthroughs in Statistics*. New York, NY: Springer New York, 1992, 1992, , 270-310. Springer Series in Statistics. DOI: 10.1007/978-1-4612-4380-9\_23. ISBN 978-0-387-94039-7. Dostupné také z: [http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-4380-9\\_23](http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-4380-9_23)
- [13] CORNELL, John A. Fitting a Slack-Variable Model to Mixture Data: Some Questions Raised. *Journal of Quality Technology*. 2018, **32**(2), 133-147. DOI: 10.1080/00224065.2000.11979985. ISSN 0022-4065. Dostupné také z: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00224065.2000.11979985>
- [14] COX, D. R., E. J. SNELL a William L. THOMPSON. The Choice of Variables in Observational Studies: Problems, Prevalence, and an Alternative. *Applied Statistics*. 1974, **23**(1). DOI: 10.2307/2347053. ISSN 00359254. Dostupné také z: <https://www.jstor.org/stable/10.2307/2347053?origin=crossref>
- [15] DEMING, W. Edwards. *The new economics: for industry, government, education*. 2nd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2000. ISBN 978-026-2541-169.
- [16] FISHER, R. A. Studies in crop variation. I. An examination of the yield of dressed grain from Broadbalk. *The Journal of Agricultural Science*. 1921, **11**(02), 107-135. DOI: 10.1017/S0021859600003750. ISSN 0021-8596. Dostupné také z: [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0021859600003750](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0021859600003750)
- [17] FISHER, Ronald Aylmer. *The design of experiments*. Oliver And Boyd; Edinburgh; London, 1937.
- [18] FISHER, Ronald Aylmer. *Development of the theory of experimental design*. In: Proceedings of the International Statistical Conferences. 1947. p. 434-439.
- [19] FISHER, Ronald Aylmer. *Statistical methods for research workers*. 13th ed., rev. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1958. Biological monographs and manuals.
- [20] HEBÁK, Petr, Jiří HUSTOPECKÝ, Eva JAROŠOVÁ a Ivana MALÁ. *Vícerozměrné statistické metody*. Praha: Informatorium, 2005. ISBN 80-733-3036-9.
- [21] HRABEC, P. *Zavedení a aplikace obecného regresního modelu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 38 s. Vedoucí Ing. Josef Bednář, Ph.D.

- [22] CHERNOFF, Herman. Gustav Elfving's impact on experimental design. *Statistical Science*. 1999, **14**(2), 201-205. DOI: 10.1214/ss/1009212246. ISSN 0883-4237. Dostupné také z: <http://projecteuclid.org/euclid.ss/1009212246>
- [23] DERKSEN, Shelley a H. J. KESELMAN. Backward, forward and stepwise automated subset selection algorithms: Frequency of obtaining authentic and noise variables. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*. 1992, **45**(2), 265-282. DOI: 10.1111/j.2044-8317.1992.tb00992.x. ISSN 00071102. Dostupné také z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.2044-8317.1992.tb00992.x>
- [24] MI DAHLGAARD-PARK, Su, Roy ANDERSSON, Henrik ERIKSSON a Håkan TORSTENSSON. Similarities and differences between TQM, six sigma and lean. *The TQM Magazine*. 2006, **18**(3), 282-296. DOI: 10.1108/09544780610660004. ISSN 0954-478X. Dostupné také z: <http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/09544780610660004>
- [25] MILLER, Alan J. Selection of Subsets of Regression Variables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. 1984, **147**(3). DOI: 10.2307/2981576. ISSN 00359238. Dostupné také z: <https://www.jstor.org/stable/10.2307/2981576?origin=crossref>
- [26] MONTGOMERY, Douglas C. *Design and analysis of experiments*. 5th ed. New York: John Wiley, 2001. ISBN 04-713-1649-0.
- [27] MOURALOVA, K., R. MATOUSEK, J. KOVAR, J. MACH, L. KLAKURKOVA a J. BEDNAR. Analyzing the surface layer after WEDM depending on the parameters of a machine for the 16MnCr5 steel. *Measurement*. 2016, **94**, 771-779. DOI: 10.1016/j.measurement.2016.09.028. ISSN 02632241. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263224116305310>
- [28] MUNDRY, Roger a Charles L. NUNN. Stepwise Model Fitting and Statistical Inference: Turning Noise into Signal Pollution. *The American Naturalist*. 2009, **173**(1), 119-123. DOI: 10.1086/593303. ISSN 0003-0147. Dostupné také z: <https://www.journals.uchicago.edu/doi/10.1086/593303>
- [29] MYERS, Raymond H., Douglas C. MONTGOMERY a Christine M. ANDERSON-COOK. *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*. Fourth edition. Hoboken, New Jersey: Wiley, [2016]. ISBN 978-1-118-91601-8.
- [30] NIEDZ, Randall P. a Terence J. EVENS. *Design of experiments (DOE)—history, concepts, and relevance to in vitro culture*. 2016, **52**(6), 547-562. DOI: 10.1007/s11627-016-9786-1. ISSN 1054-5476.
- [31] POPE, P. T. a J. T. WEBSTER. The Use of an F -Statistic in Stepwise Regression Procedures. *Technometrics*. 1972, **14**(2), 327-340. DOI: 10.1080/00401706.1972.10488919. ISSN 0040-1706. Dostupné také z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1972.10488919>

## LITERATURA

- [32] OLEJNIK, Stephen, Jamie MILLS a Harvey KESELMAN. Using Wherry's Adjusted  $R^2$  and Mallows's  $C_p$  for Model Selection From All Possible Regressions. *The Journal of Experimental Education*. 2000, **68**(4), 365-380. DOI: 10.1080/00220970009600643. ISSN 0022-0973. Dostupné také z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00220970009600643>
- [33] WHITTINGHAM, MARK J., PHILIP A. STEPHENS, RICHARD B. BRADBURY a ROBERT P. FRECKLETON. Why do we still use stepwise modelling in ecology and behaviour?. *Journal of Animal Ecology*. 2006, **75**(5), 1182-1189. DOI: 10.1111/j.1365-2656.2006.01141.x. ISSN 00218790. Dostupné také z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1365-2656.2006.01141.x>
- [34] ZVÁRA, Karel. *Regrese*. Praha: Matfyzpress, 2008. ISBN 978-1-118-91601-8.