



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**VYUŽITÍ ZOBECNĚNÝCH FUNKCÍ V MECHANICE  
KONTINUA**

UTILIZATION OF GENERALIZED FUNCTIONS (DIRAC) IN CONTINUUM MECHANICS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Petr Procházka**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**prof. Ing. František Pochylý, CSc.**

**BRNO 2016**



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Petr Procházka</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>prof. Ing. František Pochylý, CSc.</b>
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Využití zobecněných funkcí v mechanice kontinua

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Využití zobecněných funkcí k tvorbě nových operátorů mechaniky kontinua se zahrnutím nespojitostí (hydraulických prvků, mechanických prvků) v systému.

### Cíle bakalářské práce:

1. Literární rešerše využití zobecněných funkcí v mechanice, zejména v pružnosti – pevnosti a hydromechanice.
2. Formulace matematického modelu nosníku uloženého na pružných podpěrách a zatíženého nespojitým zatížením.
3. Formulace matematického modelu jednorozměrného hydraulického systému s lokálními hydraulickými prvky.

### Seznam literatury:

Netuka, H.: Distribuce. Rukopisné poznámky, Olomouc, 1984

Rippl, J.: Jedno a dvourozměrné úlohy pružnosti - pevnosti s využitím zobecněných funkcí. Výzkumná zpráva

Pochylý, F.: Rukopisné poznámky

Angot, A.: Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1971

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato práce se zabývá využitím zobecněných funkcí. Nejprve jsou představeny základy teorie zobecněných funkcí jakožto funkcionalů a operace na jejich prostoru. Následně jsou zde uvedeny příklady a vytvořen obecný model pro výpočet průhybové čáry nosníku zatíženého nespojitými zatíženími pomocí distribucí. Na závěr se řeší tlakové ztráty při proudění reálné nestlačitelné kapaliny v přímém potrubním systému s hydraulickým prvkem a zobecnění problému na potrubí s několika prvky.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Zobecněné funkce, distribuce, ohybová čára nosníku, tlakové ztráty v potrubí

## **ABSTRACT**

The aim of this thesis is utilization of generalized functions. Firstly, basis of generalized functions theory and operations on their space are introduced. Secondly, examples and general model for calculating deflection lines of discontinuously loaded beams using distributions are shown. Towards the end, pressure loss in real incompressible fluid flowing in straight pipe system with hydraulic features is calculated.

## **KEYWORDS**

Generalized function, distributions, beam deflection, pressure loss in pipes

PROCHÁZKA, Petr *Využití zobecněných funkcí v mechanice kontinua*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematického inženýrství, 2016. 45 s. Vedoucí práce prof. Ing. Frentišek Pochylý, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Využití zobecněných funkcí v mechanice kontinua* vypracoval samostatně pod vedením pana prof. Ing. Františka Pochylého, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury .

V Brně 26. 05. 2016

.....  
Petr Procházka

Tímto děkuji svému školiteli panu prof. Ing. Františku Pochylému, CSc., za odborné vedení mé bakalářské práce, vstřícnost, cenné rady a připomínky.

Petr Procházka





# OBSAH

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Teorie</b>	<b>3</b>
1.1 Prostor testovacích funkcí . . . . .	3
1.2 Distribuce . . . . .	5
1.3 Operace na prostoru distribucí . . . . .	7
<b>2 Využití v pružnosti a pevnosti</b>	<b>15</b>
2.1 Odvození průhybové čáry nosníku . . . . .	15
2.2 Výpočtové modely . . . . .	17
2.2.1 Příklad 1. . . . .	17
2.2.2 Příklad 2. . . . .	20
2.2.3 Obecný model . . . . .	24
<b>3 Využití v hydromechanice</b>	<b>31</b>
3.1 Výpočtové modely . . . . .	32
3.1.1 Příklad 1. . . . .	32
3.1.2 Příklad 2. . . . .	33
3.1.3 Obecný model . . . . .	37
<b>Závěr</b>	<b>41</b>
<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>43</b>
<b>Seznam použitých symbolů a zkratek</b>	<b>45</b>



# ÚVOD

V řadě oborů se setkáváme s proměnnými veličinami, které se, alespoň přibližně, rovnají nule pro všechny hodnoty nezávisle proměnné (obvykle času nebo polohy). Výjimkou je však velmi malé okolí určitého bodu, ve kterém nabývají velmi velkých funkčních hodnot, přičemž integrál přes celý definiční obor je konečný. Takový průběh má například úder baseballovou pálkou do míčku, elektrický impuls v elektrotechnice nebo působení síly v bodě.

Při modelování popsanych problémů se s úspěchem užívalo tzv. *Diracovo*  $\delta$ , jehož teoretické závěry odpovídaly výsledkům z praxe. *Paul Dirac* popsal tuto funkci třemi základními vlastnostmi:

- $\delta(x) = 0$ , pro  $x \neq 0$
- $\delta(0) = +\infty$
- $\int \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int \delta(x) dx = 1$ .

Ve skutečnosti to však žádná funkce není, neboť *Lebesgueův* integrál z funkce skoro všude rovné nule je roven nule. Tato skutečnost je tak v rozporu se třetí definiční vlastností *Diracova*  $\delta$ . Lze si také všimnout, že by funkce  $k\delta(x)$  nabývala stejných hodnot 0 a  $+\infty$  jako funkce  $\delta(x)$ , avšak její integrál je pro  $k \neq 1$  různý od 1.

S nápravou přišel na přelomu roku 1944 *Laurent Schwartz*, který *teorii distribucí* neboli *zobecněných funkcí* vystavěl na pojmu *funkcionál*. Uplatnění distribucí je nyní široké a mnohé známé modely se díky nim dají zjednodušit.

Cílem této práce je, na základě literární rešerše teorie zobecněných funkcí, využití matematicky korektně definovaných distribucí k vytvoření obecného modelu nosníku na pružných podporách s nespojitými zatíženími, a to např. momentem, silou působící v bodě nebo pružinou. A dále ve třetí kapitole formulace matematického modelu vývoje tlaku v jednorozměrném hydraulickém systému s lokálními hydraulickými prvky.



# 1 TEORIE

Abychom mohli vystavět a následně využít poznatků teorie distribucí, je nutné nejdříve zavést některé základní pojmy, na kterých je celá teorie vystavěna. Ve srovnání s obyčejnými funkcemi, které jsou zobrazením nějaké množiny do množiny čísel nebo vektorového prostoru, se v případě funkcí jedná o zobrazení z množiny nějakých „pěkně se chovajících funkcí“ do množiny reálných, případně komplexních čísel. Po vytvoření množiny takových funkcí zavedeme pojem a prostor distribucí matematicky korektně.

Ve druhé části teoretického úvodu ukážeme některé vlastnosti vytvořeného prostoru a základní operace, se kterými budeme dále pracovat. Ke zpracování této kapitoly byla využita především literatura [9], [10] a [13] na které se v textu vyskytují odkazy a lze v nich nalézt doplňující informace.

## 1.1 Prostor testovacích funkcí

Mějme otevřenou souvislou množinu v  $\mathbb{R}^n$ , kterou budeme nazývat oblast  $\Omega$ . Symbolem  $C^{(k)}(\Omega)$  rozumíme množinu všech funkcí, které jsou v  $\Omega$  spojité i se svými parciálními derivacemi až do řádu  $k$  včetně. Dále zavedeme pojem kompaktní nosič funkce, což je uzávěr množiny všech bodů  $x \in \Omega$ , pro které je funkční hodnota v těchto bodech různá od nuly. Matematicky nosič funkce zapisujeme

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

**Definice 1.** Prostorem testovacích funkcí  $\mathcal{D}(\Omega)$  nazveme množinu všech funkcí třídy  $C^{(\infty)}(\Omega)$  s omezeným kompaktním nosičem. Jednotlivé funkce  $\varphi \in \mathcal{D}$  jsou testovacími funkcemi.

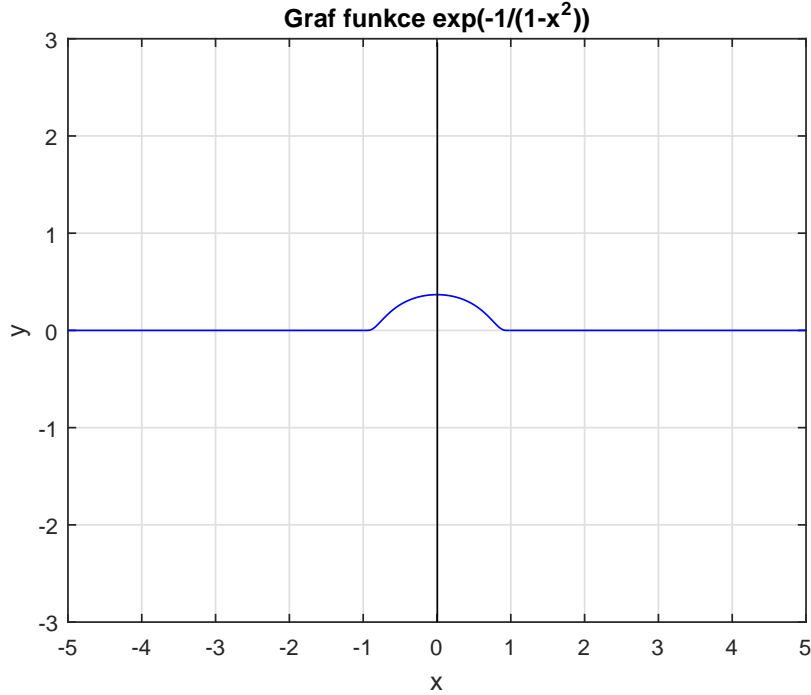
Podle definice je tedy každá testovací funkce  $\varphi \in \mathcal{D}$  nekonečně mnohokrát spojitě diferencovatelná v  $\Omega$  a zároveň nabývá nenulové hodnoty pouze na určitém uzavřeném intervalu, který je obecně pro každou funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  jiný.

Snadno lze ukázat, že prostor  $\mathcal{D}$  je vektorovým podprostorem prostoru reálných funkcí na  $\mathbb{R}^n$ . Platí

$$\begin{aligned} \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{D} &\Rightarrow \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \in \mathcal{D}, \\ \varphi(x) \in \mathcal{D}, \lambda \in \mathbb{C} &\Rightarrow \lambda\varphi(x) \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Jako příklad uvedeme známou testovací funkcí  $\varphi(x)$ , která je definována

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a-x^2}) & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad (1.1)$$



Obr. 1.1: Testovací funkce (1.1) pro  $a = 1$

Z obrázku 1.1 je vidět, že funkce  $\varphi(x)$  je testovací funkcí, neboť splňuje požadavky definice 1.

Nyní, podle [9], zavedeme takzvanou slabou konvergenci v prostoru  $\mathcal{D}$ . Necht'  $\{\varphi_k\}$  je posloupnost testovacích funkcí, kde  $\varphi \in \Omega$ . Řekneme, že  $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$  v  $\mathcal{D}$ , jestliže existuje taková podoblast  $\Omega'$  oblasti  $\Omega$ , kde  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ , a ve které platí

$$\text{supp } \varphi_k \subset \Omega' \wedge \text{supp } \varphi \in \Omega',$$

a konverguje-li i posloupnost funkcí  $\varphi_k$  a všech jejích derivací<sup>1</sup>  $D^p \varphi_n$  stejnoměrně k funkci  $\varphi$  a jejím derivacím  $D^p \varphi$ . Vzhledem k uvedené konvergenci jsou operace v  $\mathcal{D}$  spojité, tj.

$$\begin{aligned} \varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi \text{ v } \mathcal{D}, \psi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi \text{ v } \mathcal{D} &\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \varphi_k + \beta \psi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha \varphi + \beta \psi \text{ v } \mathcal{D}, \\ \varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi \text{ v } \mathcal{D}, \forall g \in C^\infty &\Rightarrow g \varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \varphi \text{ v } \mathcal{D}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>p je zde tzv. *multiindex*, více ve druhé poznámce na straně 8.

## 1.2 Distribuce

**Definice 2.** Necht'  $X$  je lineární prostor. Funkci  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , resp. funkci  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , nazýváme *funkcionálem*.

Funkcionál  $f$  se nazývá *aditivní*, jestliže

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ pro } x, y \in X.$$

Funkcionál  $f$  se nazývá *homogenní*, jestliže

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \text{ pro } x \in X, \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Definice 3.** Aditivní homogenní funkcionál se nazývá *lineární*. Množinu všech lineárních (spojitých i nespojitých) funkcionálů na prostoru  $X$  nazýváme duální prostor a značíme ho  $X^*$ .

**Definice 4.** Necht'  $(X, \|\cdot\|)$  je normovaný prostor a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  je nějaký funkcionál. Funkcionál  $f$  se nazývá *spojitý v bodě*  $x_0 \in X$ , jestliže ke každému  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in X$  splňující  $\|x - x_0\| \leq \delta$  platí  $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ . Funkcionál  $f$  se nazývá *spojitý* v prostoru  $X$ , jestliže je spojitý v každém bodě  $x_0 \in X$ .

*Poznámka.* Výše uvedené definice byly převzaty z [7], kde lze najít doplňující informace.

**Definice 5.** Distribucí  $T$  nazveme spojitý lineární funkcionál na vektorovém prostoru  $\mathcal{D}$ . Hodnotu funkcionálu  $T$  na testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  budeme značit  $\langle T, \varphi \rangle$ .

Ukážeme, že množina všech distribucí je rovněž vektorovým prostorem, který je podprostorem prostoru  $\mathcal{D}^*$ , a budeme jej značit  $\mathcal{D}'$ .

Součet  $T_1 + T_2$ , pro  $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$  a součin  $\lambda T$  pro  $T \in \mathcal{D}'$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definujeme v tomto prostoru následovně

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \quad (1.2)$$

$$\langle \lambda T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi \rangle. \quad (1.3)$$

*Poznámka.* Vidíme tedy, že takto definované operace tvoří na prostoru  $\mathcal{D}'$  bilineární formu.

Distribuci  $T_f$ , která je zadána pomocí lokálně integrovatelné funkce  $f$  (tj. funkcí, která je integrovatelná na každé omezené množině), definujeme jako

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int f(x) \varphi(x) dx. \quad (1.4)$$

Integrál v (1.4) má jistě smysl, neboť neintegrujeme přes celé  $\mathbb{R}^n$ , ale pouze přes omezený nosič funkce  $\varphi$ , na němž je  $f$  integrovatelná a zároveň je zde  $\varphi$  spojitá funkce, tudíž  $f\varphi$  je na daném intervalu integrovatelná. Snadno vidíme, že integrál (1.4) je lineární funkcionál proměnné  $\varphi$ , ale abychom tento funkcionál mohli považovat za distribuci, musíme ukázat spojitost.

Uvažujme posloupnost testovacích funkcí  $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$  v  $\mathcal{D}$  a necht' existuje omezená množina  $\mathbb{K}$ , která obsahuje nosiče všech testovacích funkcí  $\varphi_k$ , platí

$$|\langle \mathbf{T}_f, \varphi_k \rangle - \langle \mathbf{T}_f, \varphi \rangle| \leq \left( \int \int_{\mathbb{K}} \dots \int |f(x)| \varphi(x) dx \right) \max |\varphi_k - \varphi|.$$

Jelikož na pravé straně  $|\varphi_k - \varphi| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , musí levá strana nutně konvergovat k 0, čímž jsme dokázali spojitost funkcionálu definovaného předpisem (1.4).

*Poznámka.* Distribuce vyhovující předpisu (1.4) budeme označovat jako *regulární*, distribuce, které toto vyjádření nemají, nazýváme *singulárními*.

**Věta 1.** Dvě funkce  $f, g$  určují tentýž funkcionál,  $\mathbf{T}_f = \mathbf{T}_g$ , právě tehdy, když jsou si rovny skoro všude.

*Poznámka.* Důkaz této věty lze nalézt v [13] na straně 75.

Dále uvažujme dvě lokálně integrovatelné funkce  $f$  a  $g$ , které jsou sobě rovny skoro všude (z toho vyplývá, že budeme hovořit pouze o třídách lokálně integrovatelných funkcí). Nyní můžeme považovat distribuce za zobecnění lokálně integrovatelných funkcí. Ztotožníme tedy lokálně integrovatelnou funkci  $f$ , definovanou skoro všude, s funkcionálem  $\mathbf{T}_f$ , který určuje a píšeme

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \mathbf{T}_f, \varphi \rangle = \int \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int |f(x)| \varphi(x) dx.$$

*Diracovu*  $\delta$  distribuci definujeme vztahem:  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$  a obdobně také *posunutou Diracovu*  $\delta_a$  distribuci v bodě  $a$  jako:  $\langle \delta, \varphi_a \rangle = \varphi(a)$ . Ukážeme, že takto zadaný spojitý lineární funkcionál je singulární distribucí. Kdyby totiž existovala lokálně integrovatelná funkce  $\delta(x)$ , pro kterou platí

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx,$$

muselo by také

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

pro funkci (1.1) a tedy

$$\int_{-a}^{+a} \delta(x) e^{-a^2/(a^2-x^2)} dx = e^{-1}.$$

Avšak s  $\lim_{a \rightarrow 0^+}$  se levá strana blíží k nule, a to je spor.



*Poznámka.* Dále budeme psát *Diracovu*  $\delta$  distribuci jako  $\delta(x - \mathbf{a}) = \delta_a$ , ale stále musíme mít na paměti, že se jedná o distribuci, a výraz  $\delta(x - \mathbf{a})$  nevyjadřuje funkční hodnotu „*Diracovy delta funkce*“ v bodě  $a$ .

*Poznámka.* *Diracovu*  $\delta_a$  distribuci můžeme interpretovat jako soustředění jednotkové hmoty v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$ . Rozložení náboje o hustotě  $f$  můžeme modelovat využitím distribuce odpovídající lokálně integrovatelné funkci  $f$ . Část prostoru  $V^n \subset \mathbb{R}^n$  potom obsahuje náboj  $\int \int_{V^n} \dots \int |f(x)| \varphi(x) dx$ . Další modely rozložení a bližší informace k problému lze nalézt v [1]. Tyto modely rozložení, neboli distribuce, mohou být důvodem pojmenování celé teorie vybudované *Laurentem Schwartzem*.

**Definice 6.** Řekneme, že distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  je na otevřené oblasti  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  rovna nule právě tehdy, když je rovnost  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  splněna pro všechny testovací funkce  $\varphi \in \mathcal{D}$ , pro které platí  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ .

S využitím předchozí definice označíme nosičem  $\text{supp } T$  dané distribuce  $T$  nejmenší uzavřenou množinu, na jejímž doplnku je tato distribuce rovna nule. Nosičem funkce může být například i jednobodová množina  $\{a\}$ , která je  $\text{supp } \delta(x - \mathbf{a})$ . Snadno vidíme, že pokud jsou množiny  $\text{supp } T$  a  $\text{supp } \varphi$  disjunktní, potom  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

## 1.3 Operace na prostoru distribucí

V následující podkapitole uvedeme několik základních operací na prostoru distribucí a ukážeme, jak se s nimi pracuje. Poznatky dále využijeme ve druhé a třetí kapitole při praktických výpočtech v teorii *Pružnosti a pevnosti* a *Hydromechaniky*.

### Sčítání distribucí a násobení distribucí skalárem

Uvedené operaci již byly ukázány v (1.2) a (1.3) na straně 5.

### Translace distribucí

Translací distribuce  $T(x) \in \mathcal{D}'$  o vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  rozumíme distribuci  $T(x - \mathbf{a}) \in \mathcal{D}'$ , pro niž  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  platí

$$\langle T(x - \mathbf{a}), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi(x + \mathbf{a}) \rangle.$$

Jako příklad uvedeme posunutí *Diracovy*  $\delta(x)$  distribuci o vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \delta(x - \mathbf{a}), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + \mathbf{a}) \rangle.$$

## Derivace distribucí

Při hledání nejvhodnějšího způsobu definice derivace  $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_1}$  distribuce  $\mathbf{T}(x) \in \mathbb{R}^n$  podle proměnné  $x_1$  byl kladen požadavek rovnosti derivace distribuce derivaci  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  spojitě diferencovatelné funkce  $f$  v obvyklém smyslu.

Uvažujme tedy spojitě diferencovatelnou funkci  $f$  proměnné  $x$ , s využitím *Fubiniho* věty platí

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \varphi(x) \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \varphi(x) dx_1 \right) dx_2, \dots, dx_{n-1}, dx_n, \end{aligned}$$

dále integrací per partes dostáváme

$$[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx_1.$$

Snadno vidíme, že menšenec tohoto rozdílu se rovná nule, jelikož  $\varphi$  je rovna nule mimo svůj nosič. Přejdeme k

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1}, dx_n = \\ = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx = \left\langle f(x), \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Budeme tedy definovat derivaci  $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_1}$  distribuce  $\mathbf{T}(x)$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{T}(x)}{\partial x_i}, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \mathbf{T}(x), \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right\rangle.$$

*Poznámka.* Důkaz toho, že takto definovaná derivace distribucí je rigorózně přesná lze nalézt v [13] na straně 82.

*Poznámka.* Zavedeme tzv. *multiindex*, necht'  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  je posloupnost  $n$  nezáporných celých čísel, symbolem  $D^p$  označíme diferenciální operátor

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{p_2} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{p_n}.$$

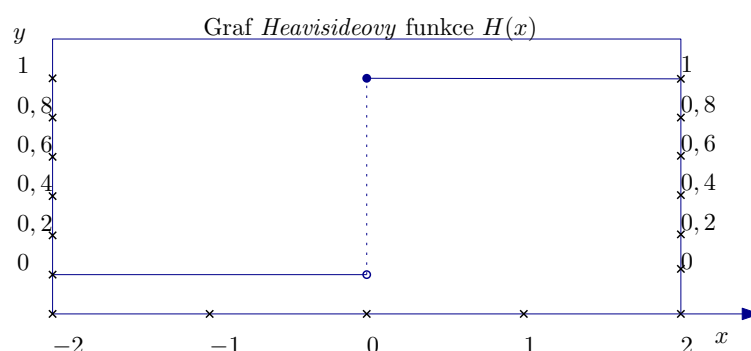
Položme  $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ , což představuje řád derivace.

**Věta 2.** Každá distribuce  $\mathbf{T}$  má derivace všech řádů a pořadí derivování lze libovolně zaměnit. Platí

$$\langle D^p \mathbf{T}, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle \mathbf{T}, D^p \varphi \rangle. \quad (1.5)$$

*Poznámka.* V praxi se často setkáváme s požadavkem sestavit funkci, která je složena na různých intervalech z rozdílných funkcí. Názorným příkladem může být vypínač světla, ve kterém zůstává signál nulový do doby, kdy je sepnut, a setrvává v zapnutém stavu, dokud ho dalším stiskem nevypneme. Matematickým aparátém vhodně zpracovávajícím tuto skutečnost je *Heavisideova* funkce (tzv. jednotkový skok), kterou definujeme jako

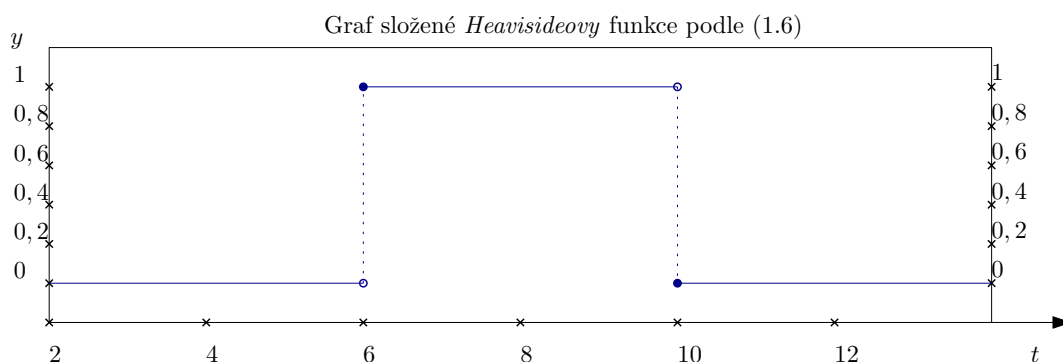
$$H(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ 1 & \text{pro } x \geq a \end{cases}$$



Obr. 1.2: Heavisideova funkce  $H(x)$

**Příklad.** Uvažujme dříve popsaný vypínač, který je vypnutý a zapneme jej v čase  $t_1 = 6$  s a zpět vypneme v čase  $t_2 = 10$  s. Funkce  $y(t)$  popisující stav vypínače, kde 0 značí stav vypnuto a 1 zapnuto, je dána rovnicí

$$y(t) = H(t - 6) - H(t - 10). \quad (1.6)$$



Obr. 1.3: Graf funkce  $y(t) = H(t - 6) - H(t - 10)$

Ukážeme, čemu je rovna derivace *Heavisideovy* funkce  $H$ . Položme distribuci  $\mathbf{T}_H$  rovnou  $H$ , následně platí

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}'_H(x), \varphi(x) \rangle &= -\langle \mathbf{T}_H(x), \varphi(x)' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{T}(x) \varphi'(x) dx = \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že derivací *Heavisideovy* funkce je *Diracova*  $\delta$  distribuce.

## Laplaceova transformace distribucí

*Laplaceovou transformací* nazýváme zobrazení, které každé lokálně integrovatelné komplexní funkci  $f(t)$ , reálné proměnné  $t$ , která má nulové funkční hodnoty pro  $t < 0$  a konvergující alespoň pro jedno  $s \in \mathbb{R}^n$ , přiřazuje funkci  $F(s)$  zvanou *Laplaceův obraz* funkce  $f(t)$  vztahem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

*Poznámka.* Další vlastnosti *Laplaceovy transformace* lze nalézt například v [10].

Dle teorie *Lebesgueova integrálu* platí, že změna funkce  $f$  na množině míry nula nezmění její *Lebesgueův integrál*. Tato vlastnost nám tedy dělí vzory *Laplaceovy transformace* do tříd, které budou mít stejný obraz a navzájem se liší pouze na množině míry nula. S využitím této skutečnosti můžeme zavést zobecnění *Laplaceovy transformace* pro distribuce. Všechny předpoklady, které je nutné splnit při tomto přechodu, lze dohledat ve [13] na straně 219.

Nechť  $\mathbf{T}(t) \in \mathcal{D}'_+$ , kde  $t \geq 0$ , potom má  $\mathbf{T}$  *Laplaceův obraz*

$$\mathcal{L}(s) = \langle \mathbf{T}(t), e^{-st} \rangle.$$

**Příklad.** *Laplaceův obraz* posunuté *Diracovy* distribuce  $\delta(t - \mathbf{a})$  je tedy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta(t - \mathbf{a})\} &= F(s) = \int_0^{+\infty} \delta(t - \mathbf{a}) e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \delta(t - \mathbf{a}) e^{-sa} dt = e^{-sa} \int_0^{+\infty} \delta(t - \mathbf{a}) dt = e^{-sa}.\end{aligned}$$

**Příklad.** *Laplaceův obraz* derivace posunuté *Diracovy* distribuce  $\delta'(t - \mathbf{a})$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta'(t - \mathbf{a})\} &= F(s) = \int_0^{+\infty} \delta'(t - \mathbf{a}) e^{-st} dt = \\ &= 0 - \int_0^{+\infty} \delta(t - \mathbf{a}) (-s) e^{-st} dt = s e^{-sa} \int_0^{+\infty} \delta(t - \mathbf{a}) dt = s e^{-sa},\end{aligned}$$

a obecně pro  $m \in \mathbb{N}^+$

$$\mathcal{L}\{D^m \delta(t - \mathbf{a})\} = s^m e^{-s\mathbf{a}}.$$

*Poznámka.* Důležitou vlastností *Laplaceovy transformace*, na kterou se velmi často zapomíná, je *věta o translaci*, a tak zde uvedeme její hlavní myšlenku. Buď  $f(t)$  předmět standardního typu (viz [10], strana 17) a  $\theta$  nezáporná konstanta, potom  $\mathcal{L}\{f(t - \theta)\} = e^{-s\theta} \mathcal{L}\{f(t)\}$ . V předpokladech věty je uvedeno, že funkce  $f(t)$  je nulová pro všechna záporná  $t$ , a tedy  $f(t - \theta)$  je nulová pro všechny  $t < \theta$ . Právě zde se ovšem často chybuje, a proto je vhodné *větu o translaci* uvádět ve vhodnější formě, a to

$$\mathcal{L}\{f(t - \theta)H(t - \theta)\} = e^{-s\theta} \mathcal{L}\{f(t)H(t)\}, \text{ pro } \theta \leq 0.$$

V praktické části této práce budeme často využívat tvrzení předchozí věty při tzv. *zpětné Laplaceově transformaci* ve tvaru

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(t) e^{-s\theta}\} = f(t - \theta) H(t - \theta).$$

## Násobení distribucí

Obecně nelze dvě libovolné distribuce  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{S}$  násobit. Příkladem mějme lokálně integrovatelnou funkci  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ , jenž určuje distribuci, avšak její druhou mocninu  $f^2(x) = \frac{1}{|x|}$  nelze lokálně integrovat, takže nemůže být distribucí. Budeme tedy uvažovat definici součinu za předpokladu, že jedna z distribucí bude zcela libovolná a druhá bude nekonečněkrát diferencovatelná funkce  $\alpha$  v obvyklém smyslu. Za daných předpokladů existuje distribuce „*součinu*“  $\alpha\mathbf{T}$  definována jako

$$\langle \alpha\mathbf{T}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{T}, \alpha\varphi \rangle.$$

**Příklad.**  $\langle \alpha(x)\delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \langle \alpha(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle$ .

## Tenzorový součin distribucí

Uvažujme dva prostory  $X^m$  a  $Y^n$  se skalárním součinem a eukleidovskou metrikou, jejich dva body  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ ,  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  a dvě funkce  $f(x)$ ,  $g(y)$ . Symbolem  $Z^{m+n}$  budeme značit  $(m+n)$ -rozměrný prostor, který je produktem kartézského součinu  $X^m \times Y^n$ . Bodem prostoru  $Z^{m+n}$  myslíme

$$(x, y) = [x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n].$$

*Tenzorovým součinem*  $f(x) \otimes g(y)$  rozumíme funkci  $h(x, y) = f(x)g(y)$ , jenž je definována na  $Z^{m+n}$ . Pokud jsou  $f(x)$  a  $g(y)$  lokálně integrovatelné v prostorech  $X^m$  a  $Y^n$ , tak i  $h(x, y)$  je lokálně integrovatelnou funkcí na prostoru  $Z^{m+n}$ .

Označme postupně symboly  $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_y, \mathcal{D}_{x,y}$  prostor  $\mathcal{D}$  nekonečněkrát diferencovatelných funkcí s omezenými nosiči na prostorech  $X^m, X^n, X^m \times Y^n$  a dále uvažujme  $\mathcal{D}'_x, \mathcal{D}'_y, \mathcal{D}'_{x,y}$  jako příslušné prostory distribucí. Funkci  $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}_{x,y}$  vezmeme ve tvaru  $u(x)v(y)$ , kde  $u(x) \in \mathcal{D}_x$  a  $v(y) \in \mathcal{D}_y$ . Následně dostáváme

$$\begin{aligned} \langle f(x) \otimes g(y), u(x)v(y) \rangle &= \int \dots \int_{X^m \times Y^n} f(x)g(y)u(x)v(y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{X^m} f(x)u(x) \, dx \int_{Y^n} g(y)v(y) \, dy = \langle f(x), u(x) \rangle \langle g(y), v(y) \rangle. \end{aligned}$$

Jestliže má funkce  $\varphi$  jiné vyjádření, dostáváme s využitím *Fubiniho* věty

$$\begin{aligned} \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x, y) \rangle &= \int \dots \int_{X^m \times Y^n} f(x)g(y)\varphi(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{X^m} f(x) \, dx \int_{Y^n} g(y)\varphi(x, y) \, dy = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

případně

$$\langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x, y) \rangle = \dots = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle. \quad (1.7)$$

Zobecněním je

**Věta 3.** Necht<sup>2</sup>  $\mathbf{S}_x \in \mathcal{D}'_x$  a  $\mathbf{T}_y \in \mathcal{D}'_y$ , potom existuje právě jedna distribuce  $W_{x,y} \in \mathcal{D}'_{x,y}$  tak, že pro všechny funkce  $\varphi \in \mathcal{D}_{x,y}$ , ve tvaru  $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ , kde  $u(x) \in \mathcal{D}_x$  a  $v(y) \in \mathcal{D}_y$ , a platí

$$\langle W_{x,y}, u(x)v(y) \rangle = \langle \mathbf{S}, u \rangle \langle \mathbf{T}, v \rangle. \quad (1.8)$$

Distribuci  $W$  tedy nazveme tenzorovým součinem distribucí  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{T}$ , který značíme  $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$ .

*Poznámka.* Tenzorový součin distribucí lze rozšířit i na součin několika distribucí, více na straně 112 ve [13].

## Konvoluce distribucí

Uvažujme dvě alespoň po částech spojitě komplexní funkce  $f(t), g(t)$  reálné proměnné  $t$ . Konvolucí, značenou  $f(t) * g(t)$ , máme na mysli tzv. *konvoluční integrál* ve tvaru

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau.$$

Necht<sup>2</sup>  $\mathbf{S}, \mathbf{T}$  jsou dvě distribuce na  $\mathbb{R}^n$ , jejich konvolucí  $\mathbf{S} * \mathbf{T}$  rozumíme distribuci definovanou v  $\mathbb{R}^n$  vztahem

$$\langle \mathbf{S} * \mathbf{T}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{S}_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle. \quad (1.9)$$

<sup>2</sup>Indexy  $x, y$  u těchto distribucí zdůrazňují, že tyto distribuce patří do uvedených prostorů.

*Tenzorový součin*  $\mathbf{S}_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta$  existuje vždy. Jsou-li  $A$  a  $B$  nosiče  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{T}$  v  $\mathbb{R}^n$ , je nosičem  $\mathbf{S}_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta$  množina  $A \times B$ , kde z definice kartézského součinu množin plyne, že je to množina uspořádaných dvojic  $(\xi, \eta)$  takových, že  $\xi \in A$ ,  $\eta \in B$ . Funkce  $\varphi(\xi + \eta)$  je nekonečněkrát diferencovatelná jako funkce proměnných  $\xi, \eta$ , avšak nemá omezený nosič. Jestliže má nosič distribuce  $\mathbf{S}_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta$  a nosič funkce  $\varphi(\xi, \eta)$  omezený průnik, potom má pravá strana rovnice (1.9) vždy smysl.

**Příklad.** Uvažujme konvoluci  $\mathbf{S} * \mathbf{T}$  a necht'  $\mathcal{L}$  je její *Laplaceův obraz*, potom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s) &= \langle \mathbf{S} * \mathbf{T}, e^{-sx} \rangle = \langle \mathbf{S}_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta, e^{-s(\xi+\eta)} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{S}_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta, e^{-s\xi} e^{-s\eta} \rangle = \langle \mathbf{S}_\xi, e^{-s\xi} \rangle \langle \mathbf{T}_\eta, e^{-s\eta} \rangle = \mathcal{S}(s) \mathcal{T}(s). \end{aligned}$$

**Příklad.** Konvoluce Diracovy  $\delta$  distribuce

- (a)  $\delta(x) * \mathbf{T}(x) = \mathbf{T}(x)$
- (b)  $\delta(x - a) * \mathbf{T}(x) = \tau_a \mathbf{T}$
- (c)  $\delta'(x) * \mathbf{T}(x) = \mathbf{T}'(x)$

(a)

můžeme považovat za speciální případ (b), pro  $a = 0$ ,

(b)

$$\begin{aligned} \langle \delta(x - a) * \mathbf{T}(x), \varphi \rangle &= \langle \delta(x - a)_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta, \varphi(\xi, \eta) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{T}_\eta, \langle \delta(x - a)_\xi, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \langle \mathbf{T}_\eta, \varphi(a + \eta) \rangle = \langle \tau_a \mathbf{T}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \langle \delta'(x) * \mathbf{T}(x), \varphi \rangle &= \langle \delta'(x)_\xi \otimes \mathbf{T}_\eta, \varphi(\xi, \eta) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{T}_\eta, \langle \delta'(x)_\xi, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \langle \mathbf{T}_\eta, -\varphi' \rangle = \langle \mathbf{T}', \varphi \rangle. \end{aligned}$$





## 2 VYUŽITÍ V PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

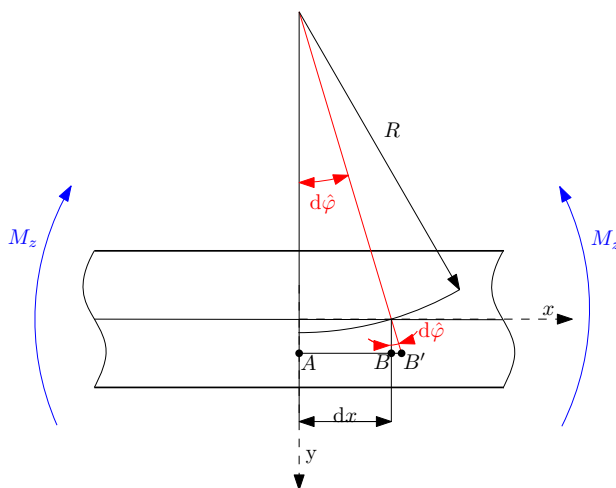
V této kapitole se zaměříme na praktické využití *Diracovy*  $\delta$  distribuce v teorii pružnosti a pevnosti. Výpočtům bude předcházet odvození<sup>1</sup> průhybové čáry, se kterou budeme dále pracovat. Na dvou příkladech ukážeme, jak se s distribucemi počítá a na jejich základě vytvoříme obecný model pro výpočet průhybové čáry nosníku zatíženého nespojitými zatíženími.

Budeme uvažovat nosníky, což jsou konstrukční prvky, které mohou kromě tahového a tlakového zatížení přenášet i zatížení příčné. Při odvozování všech vztahů budeme předpokládat:

- příčné deformace nosníku jsou malé
- ohyb se uskutečňuje pouze v některé z hlavních os
- nosník je přímý a po částech prizmatický
- zanedbání malých posunů prvků nosníku ve směru podélné osy nosníku
- roviny kolmé na podélnou osu nosníku se nedeformují

### 2.1 Odvození průhybové čáry nosníku

Nechť pro malé  $\hat{\varphi}$  platí  $dx \doteq R d\hat{\varphi}$  a základní ohyb se uskutečňuje kolem osy  $z$ .



Obr. 2.1: Základní ohyb, překresleno z [15]

Pro poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  platí

$$\varepsilon_x(y) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} \doteq \frac{y d\hat{\varphi}}{R d\hat{\varphi}} = \frac{y}{R}, \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Odvozeno z [15] a přednášek *Pružnost a pevnost I, jaro 2015*.

pro tutéž veličinu máme zároveň z *Hookeova zákona* a průběhu napětí v ohybu

$$\varepsilon_x(y) = -\frac{M_z}{EI_z}y. \quad (2.2)$$

Porovnáním rovnic (2.1) a (2.2) dostáváme

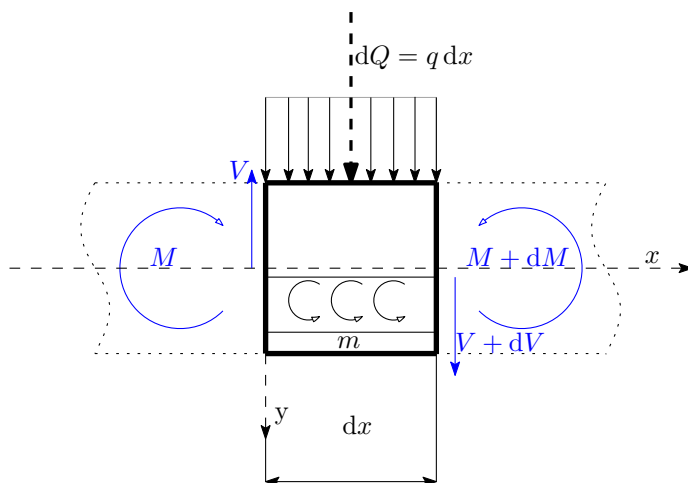
$$\frac{1}{R} = -\frac{M_z}{EI_z}. \quad (2.3)$$

Výraz na levé straně rovnice je známý jako křivost a je dán vztahem, který se při uvažování malých průhybů podstatně zjednoduší

$$\frac{1}{R} = \frac{y''(x)}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \doteq y''(x), \quad (2.4)$$

dosadíme-li (2.4) do (2.3), dostaneme tzv. diferenciální rovnici průhybové čáry

$$EIy''(x) = -M_z(x). \quad (2.5)$$



Obr. 2.2: Uvolněný element nosníku, upraveno z [3]

Z diferenciálních podmínek rovnováhy přímého nosníku jsou odvozeny následující vztahy<sup>2</sup> mezi vnitřními silami ( $V$ - posouvací síla) a vnějším spojitým zatížením  $q$

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad (2.6)$$

$$\frac{dM}{dx} = V. \quad (2.7)$$

Dosazením (2.7) do (2.6) a následně do (2.5) dostáváme konečnou podobu vztahu dávající do souvislosti zatížení s průhybem ve tvaru

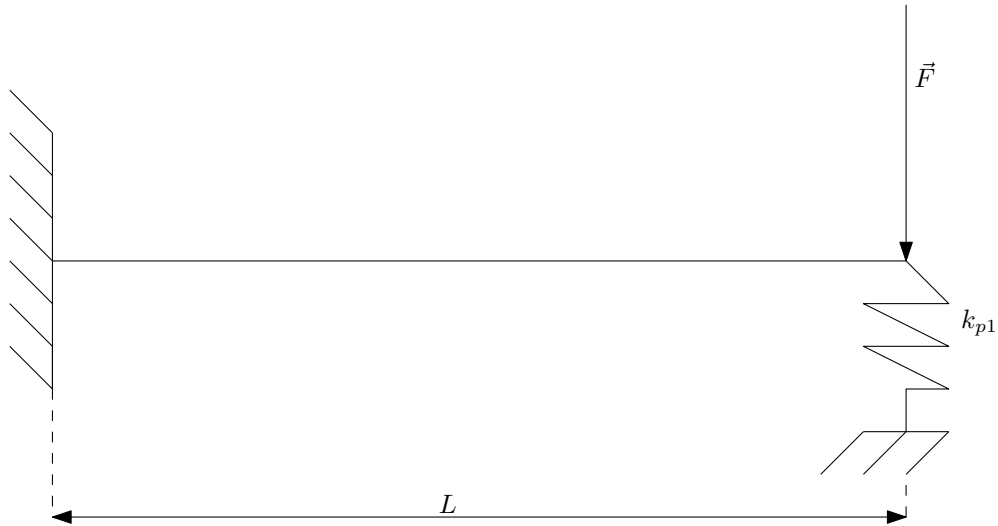
$$y^{(IV)} = \frac{q}{EI}. \quad (2.8)$$

<sup>2</sup>Vztahy (2.6) a (2.7) jsou známy jako *Schwedlerovy věty*, více v [3] a [15].

## 2.2 Výpočtové modely

### 2.2.1 Příklad 1.

Máme zadaný nosník podle obrázku 2.3, jehož levý konec je vetknutý a zároveň je na druhé straně podepřen pružnou podporou a zatížen ve stejném místě neproměnnou silou o velikosti  $F$ .



Obr. 2.3: Vlevo vetknutý nosník

Zatížení tohoto nosníku modelujeme pomocí *Diracovy*  $\delta$  distribuce

$$q = -k_{p1} y(L) \delta(x - L) + F \delta(x - L).$$

Dosazením do rovnice průhybové čáry (2.8) dostáváme

$$y^{(IV)} = -\frac{k_{p1}}{EI} y(L) \delta(x - L) + \frac{F}{EI} \delta(x - L). \quad (2.9)$$

Použitím *Laplaceovy transformace*  $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$  přejde (2.9) na

$$s^4 Y - \frac{s^3}{EI} y(0) - \frac{s^2}{EI} y'(0) - \frac{s}{EI} y''(0) - \frac{1}{EI} y'''(0) = -\frac{k_{p1}}{EI} y(L) e^{-sL} + \frac{F}{EI} e^{-sL}.$$

Uložení nosníku definuje okrajové podmínky

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y''(L) &= 0 \\ y'(0) &= 0 & y'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} s^4 Y - \frac{s}{EI} y''(0) - \frac{1}{EI} y'''(0) &= -\frac{k_{p1}}{EI} y(L) e^{-sL} + \frac{F}{EI} e^{-sL}, \\ Y &= \frac{1}{s^3 EI} y''(0) + \frac{1}{s^4 EI} y'''(0) - \frac{k_{p1}}{s^4 EI} y(L) e^{-sL} + \frac{F}{s^4 EI} e^{-sL}. \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(x)$  máme

$$y(x) = \frac{x^2}{2EI} y''(0) + \frac{x^3}{6EI} y'''(0) - \frac{k_{p1}}{6EI} y(L)(x-L)^3 H(x-L) + \frac{F}{6EI} (x-L)^3 H(x-L). \quad (2.11)$$

Neznámé konstanty  $y''(0)$ ,  $y'''(0)$  vyjádříme z okrajových podmínek (2.10) a rovnice (2.11) postupným derivováním

$$y'(x) = \frac{x}{EI} y''(0) + \frac{x^2}{2EI} y'''(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{2EI} (x-L)^2 H(x-L),$$

$$y''(x) = \frac{1}{EI} y''(0) + \frac{x}{EI} y'''(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} (x-L) H(x-L), \quad (2.12)$$

$$y'''(x) = \frac{1}{EI} y'''(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} H(x-L). \quad (2.13)$$

Z rovnice (2.13) a okrajových podmínek (2.10) s přihlédnutím k (1.3) dostaneme

$$0 = \frac{1}{EI} y'''(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} H(L-L),$$

$$\mathbf{y}'''(\mathbf{0}) = \mathbf{k}_{p1} \mathbf{y}(\mathbf{L}) - \mathbf{F}, \quad (2.14)$$

a zpětným dosazením (2.14) do (2.12)

$$0 = \frac{1}{EI} y''(0) + \frac{L}{EI} y'''(0),$$

$$\mathbf{y}''(\mathbf{0}) = -\mathbf{L} \mathbf{y}'''(\mathbf{0}) = -\mathbf{L} \mathbf{k}_{p1} \mathbf{y}(\mathbf{L}) + \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (2.15)$$

Dosazením konstant (2.14) a (2.15) do rovnice (2.11) máme

$$y(x) = \frac{x^2}{2EI} (L F - L k_{p1} y(L)) + \frac{x^3}{6EI} (k_{p1} y(L) - F) - \frac{k_{p1} y(L)}{6EI} (x-L)^3 H(x-L) + \frac{F}{6EI} (x-L)^3 H(x-L). \quad (2.16)$$

Dosud neznámou konstantu  $y(L)$  vyjádříme jako průhyb v bodě  $L$

$$y(L) = \frac{L^2}{2EI} (L F - L k_{p1} y(L)) + \frac{L^3}{6EI} (k_{p1} y(L) - F),$$

$$y(L) = k_{p1} y(L) \left( \frac{L^3}{6EI} - \frac{L^3}{2EI} \right) + F \left( \frac{L^3}{2EI} - \frac{L^3}{6EI} \right),$$

$$y(L) = -k_{p1} y(L) \frac{L^3}{3EI} + F \frac{L^3}{3EI},$$

$$y(L)[3EI + L^3 k_{p1}] = L^3 F,$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{L}) = \frac{\mathbf{L}^3 \mathbf{F}}{\mathbf{3EI} + \mathbf{L}^3 \mathbf{k}_{p1}}.$$

A konečně dosazením  $y(L)$  do (2.16) máme rovnici

$$y(x) = \frac{k_{p1}L^3}{6EI} \frac{Fx^2}{3EI + k_{p1}L^3}(x - 3L) + \frac{Fx^2}{6EI}(3L - x) - \frac{k_{p1}}{6EI} \frac{L^3F}{3EI + k_{p1}L^3}(x - L)^3H(x - L) + \frac{F}{6EI}(x - L)^3H(x - L). \quad (2.17)$$

Pokud budeme uvažovat pouze řešení průhybové čáry, které dává smysl, což je pro  $x \in \langle 0, L \rangle$ , výsledná rovnice (2.17) se redukuje na

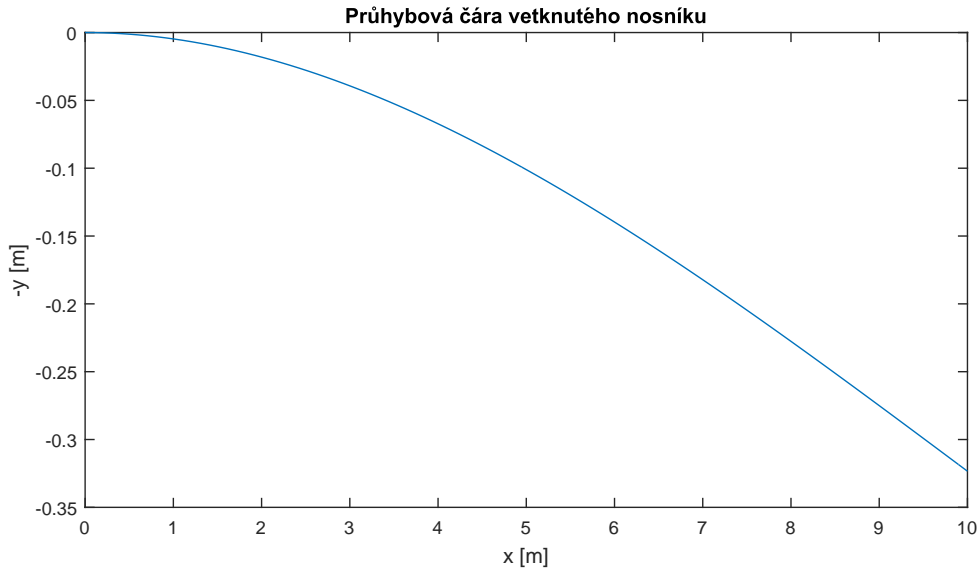
$$y(x) = \frac{k_{p1}L^3}{6EI} \frac{Fx^2}{3EI + k_{p1}L^3}(x - 3L) + \frac{Fx^2}{6EI}(3L - x). \quad (2.18)$$

V [5] je pro vetknutý nosník, který je na pravém volném konci zatížen silou  $F$  uveden vzorec ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{6} \frac{P}{EI} x^2 L \left( 3 - \frac{x}{L} \right), \quad (2.19)$$

kde  $P = F$  je síla působící na levém konci. Zřejmě (2.18) je při volném levém konci, tedy když  $k_{p1} = 0$ , roven uvedenému vzorci z literatury.

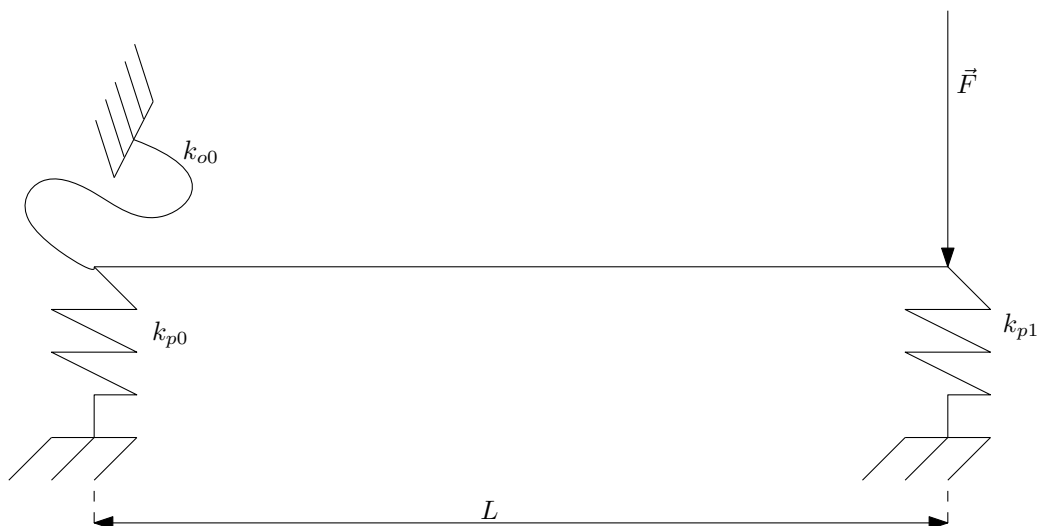
Uvažujme nosník s parametry:  $L = 10$  m,  $E = 210$  GPa,  $d = 0,1$  m,  $F = 1000$  N. Dále určíme  $I = \frac{\pi d^4}{64} = 4,908 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup> a vykreslíme průběh průhybové čáry nosníku.



Obr. 2.4: Vetknutý nosník, zatížen silou  $F$

## 2.2.2 Příklad 2.

Zadání je velmi podobné zadání předcházejícího příkladu, avšak nosník je zde vlevo upevněn na pružných podporách. Na konci příkladu ale ukážeme, že tento případ je zobecněním prvního způsobu uložení.



Obr. 2.5: Vlevo vetknutý nosník, modelovaný pružinami

Uložení nosníku na dvou pružných podporách dostáváme okrajové podmínky

$$\begin{aligned} y''(0) &= 0 & y''(L) &= 0 \\ y'''(0) &= 0 & y'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Zatížení nosníku vyjádřené pomocí *Diracovy*  $\delta$  distribuce

$$q = -k_{p0} y(0) \delta(x) + k_{o0} y'(0) \delta'(x) - k_{p1} y(L) \delta(x - L) + F \delta(x - L).$$

Dosazením zatížení do rovnice průhybové čáry (2.8), užitím *Laplaceovy transformace* a aplikací okrajových podmínek (2.21) dostaneme

$$Y = \frac{1}{sEI} y(0) + \frac{1}{s^2 EI} y'(0) - \frac{k_{p0}}{s^4 EI} y(0) + \frac{k_{o0}}{s^3 EI} y'(0) - \frac{k_{p1}}{s^4 EI} y(L) e^{-sL} + \frac{F}{s^4 EI} e^{-sL},$$

zpětnou *Laplaceovou transformací*  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(x)$  máme

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{EI} y(0) + \frac{x}{EI} y'(0) - \frac{k_{p0}}{6EI} y(0) x^3 H(x) + \frac{k_{o0}}{2EI} y'(0) x^2 H(x) - \\ &\quad - \frac{k_{p1}}{6EI} y(L) (x - L)^3 H(x - L) + \frac{F}{6EI} (x - L)^3 H(x - L). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Neznámé konstanty  $y(0)$ ,  $y'(0)$  opět vyjádříme z okrajových podmínek (2.20) a rovnice (2.21) postupným derivováním

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{EI} y'(0) - \frac{k_{p0} x^2}{2EI} y(0) + \frac{k_{o0} x}{EI} y'(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{2EI} (x - L)^2 H(x - L), \\ y''(x) &= -\frac{k_{p0} x}{EI} y(0) + \frac{k_{o0}}{EI} y'(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} (x - L) H(x - L), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$y'''(x) = -\frac{k_{p0}}{EI} y(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} H(x - L). \quad (2.23)$$

Z rovnice (2.23) s využitím  $y'''(L) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{k_{p0}}{EI} y(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} H(L - L), \\ \mathbf{y(0)} &= \frac{\mathbf{F - k_{p1} y(L)}}{\mathbf{k_{p0}}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

a zpětným dosazením (2.24) do (2.22)

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{k_{p0} L F - k_{p1} y(L)}{EI} + \frac{k_{o0}}{EI} y'(0) - \frac{k_{p1} y(L) - F}{EI} (L - L) H(L - L), \\ \mathbf{y'(0)} &= \frac{\mathbf{F L - k_{p1} L y(L)}}{\mathbf{k_{o0}}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dosazením konstant (2.24) a (2.25) do rovnice (2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{F}{k_{p0} EI} - \frac{k_{p1}}{k_{p0} EI} y(L) + \frac{F L x}{k_{o0} EI} - \frac{k_{p1} L y(L) x}{k_{o0} EI} - \frac{F x^3}{6EI} + \frac{k_{p1} x^3}{6EI} y(L) + \frac{F L x^2}{2EI} - \\ &- \frac{k_{p1} L y(L) x^2}{k_{o0} EI} - \frac{k_{p1}}{6EI} y(L) (x - L)^3 H(x - L) + \frac{F}{6EI} (x - L)^3 H(x - L). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Vyjádřením průhybu  $y(L)$  v bodě  $L$  získáme neznámou konstantu

$$\begin{aligned} y(L) &= \frac{F}{k_{p0} EI} - \frac{k_{p1}}{k_{p0} EI} y(L) + \frac{F L^2}{k_{o0} EI} - \frac{k_{p1} L^2 y(L)}{k_{o0} EI} - \\ &- \frac{F L^3}{6EI} + \frac{k_{p1} L^3}{6EI} y(L) + \frac{F L^3}{2EI} - \frac{k_{p1} L^3 y(L)}{k_{o0} EI} \\ y(L) &= \frac{F L^3}{3EI} - \frac{k_{p1} L^3 y(L)}{3EI} + \frac{F}{k_{p0} EI} - \frac{k_{p1}}{k_{p0} EI} y(L) + \frac{F L^2}{k_{o0} EI} - \frac{k_{p1} L^2 y(L)}{k_{o0} EI} \\ y(L) &\left[ EI + \frac{k_{p1} L^3}{3} + \frac{k_{p1}}{k_{p0}} + \frac{k_{p1} L^2}{k_{o0}} \right] = \frac{F L^3}{3} + \frac{F L^2}{k_{o0}} + \frac{F}{k_{p0}} \\ y(L) &= \frac{\frac{F L^3}{3} + \frac{F L^2}{k_{o0}} + \frac{F}{k_{p0}}}{EI + \frac{k_{p1} L^3}{3} + \frac{k_{p1}}{k_{p0}} + \frac{k_{p1} L^2}{k_{o0}}}. \end{aligned}$$

Vztah pro konstantu  $y(L)$  necháme vyjádřen v tomto tvaru, jelikož z něj nedostaneme kompaktnější výraz, a co je důležitější, tento tvar je praktický v modelování různých situací a to například vetknutí. Jestliže  $\lim_{k_{p0}, k_{o0} \rightarrow +\infty} y(x)$ , dostaneme na levé straně vetknutí, což odpovídá zadání prvního příkladu. Uvedený postup podrobněji rozepíšeme

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left( \frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} - \frac{Lx}{k_{o0}} - \frac{1}{k_{p0}} - \frac{1}{6}(x-L)^3 H(x-L) \right) \left( \frac{y(L)k_{p1}}{EI} - \frac{F}{EI} \right) \\
&= \left( \frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} - \frac{Lx}{k_{o0}} - \frac{1}{k_{p0}} - \frac{1}{6}(x-L)^3 H(x-L) \right) \left( \frac{k_{p1}}{EI} \frac{\frac{FL^3}{3} + \frac{FL^2}{k_{o0}} + \frac{F}{k_{p0}}}{EI + \frac{k_{p1}L^3}{3} + \frac{k_{p1}}{k_{p0}} + \frac{k_{p1}L^2}{k_{o0}}} - \frac{F}{EI} \right). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\lim_{k_{p0}, k_{o0} \rightarrow +\infty} \frac{\frac{FL^3}{3} + \frac{FL^2}{k_{o0}} + \frac{F}{k_{p0}}}{EI + \frac{k_{p1}L^3}{3} + \frac{k_{p1}}{k_{p0}} + \frac{k_{p1}L^2}{k_{o0}}} = \frac{\frac{FL^3}{3}}{EI + \frac{k_{p1}L^3}{3}} = \frac{FL^3}{3EI + k_{p1}L^3}.$$

A stejným limitním přechodem pro  $\frac{Lx}{k_{o0}}, \frac{1}{k_{p0}}$  přejde rovnice (2.27) do tvaru

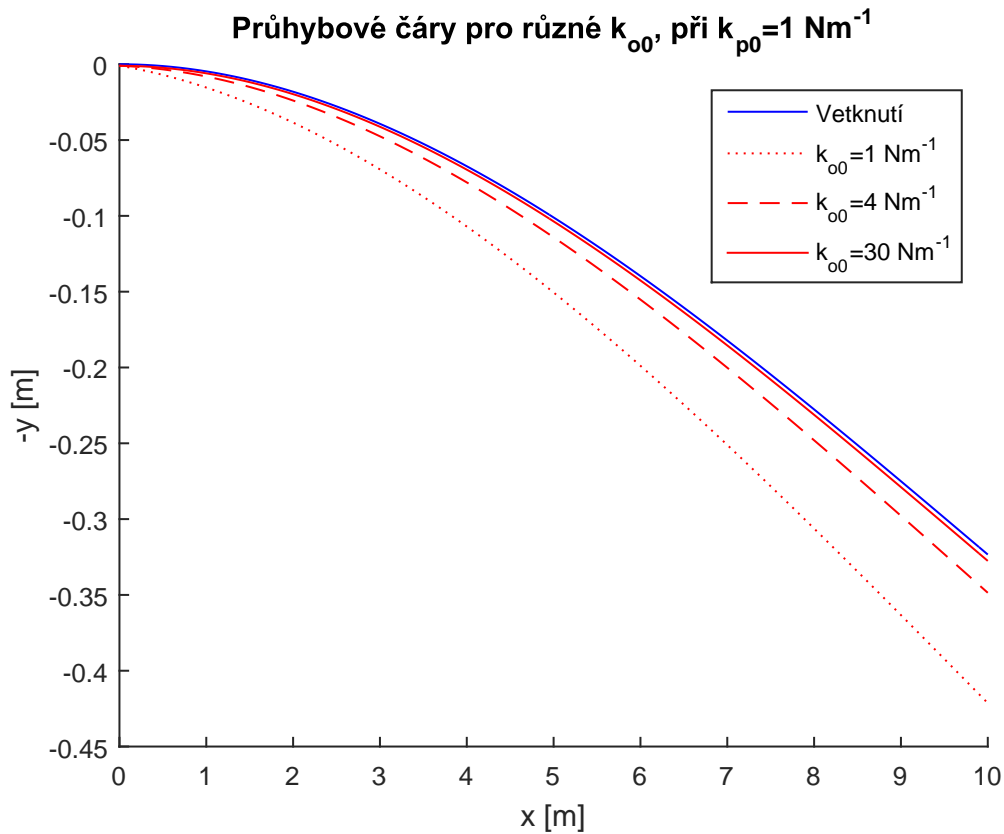
$$\begin{aligned}
y(x) &= \left( \frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} - \frac{1}{6}(x-L)^3 H(x-L) \right) \left( \frac{k_{p1}}{EI} \frac{FL^3}{3EI + k_{p1}L^3} - \frac{F}{EI} \right) = \\
&= \frac{k_{p1}L^3}{6EI} \frac{Fx^2}{3EI + k_{p1}L^3} (x-3L) + \frac{Fx^2}{6EI} (3L-x) - \frac{k_{p1}}{6EI} \frac{L^3F}{3EI + kL^3} (x-L)^3 H(x-L) + \\
&\quad + \frac{F}{6EI} (x-L)^3 H(x-L). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Pokud budeme opět uvažovat pouze řešení na nosníku, tedy pro  $x \in \langle 0; L \rangle$  máme

$$y(x) = \frac{k_{p1}L^3}{6EI} \frac{Fx^2}{3EI + k_{p1}L^3} (x-3L) + \frac{Fx^2}{6EI} (3L-x), \tag{2.29}$$

vidíme tedy, že (2.29) je shodná s (2.17).





Obr. 2.6: Graf průhybových čar při různých  $k_{o0}$ ,  $k_{p0} = 1 \text{ Nm}^{-1}$

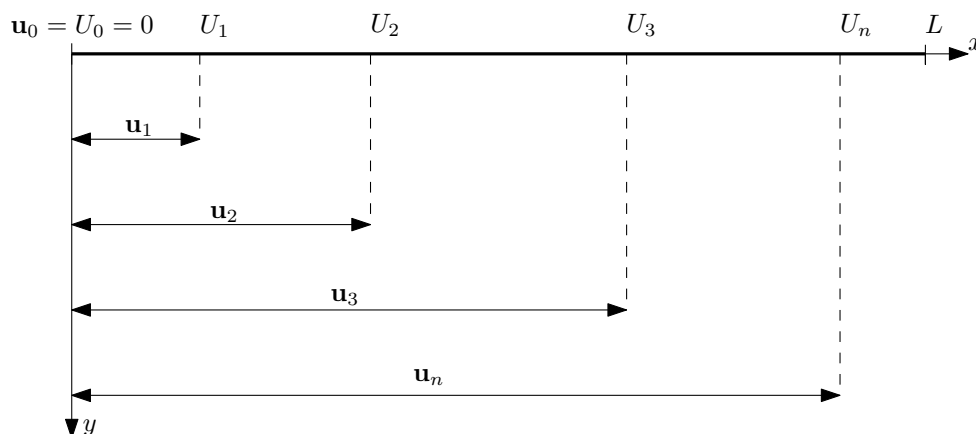
Tab. 2.1: Závislost relativní odchylky řešení na vlastnostech pružin v porovnání s vetknutím ze vzorce (2.19).

$k_{p0} [\text{Nm}^{-1}]$	1	1	1	1	2	4	2000
$k_{o0} [\text{Nm}^{-1}]$	1	2	4	20	1	1	1
relativní odchylka [%]	40,66	20,72	10,75	2,78	40,26	40,06	39,86

Z tabulky 2.1 je zřejmé, že vliv  $k_{p0}$  je zanedbatelný vůči vlivu ohybové pružiny  $k_{o0}$  při modelování vetknutí. Budeme tedy při aproximaci vetknutí pomocí pružin upřednostňovat změnu tuhosti ohybové pružiny. Tento výsledek je způsoben malým koeficientem jmenovatele zlomku, ve kterém se  $k_{p0}$  vyskytuje ve jmenovateli, v rovnici (2.27).

### 2.2.3 Obecný model

Na základě uvedených příkladů sestavíme obecný model pro výpočet ohybové čáry nosníku. V modelu budeme uvažovat působení nespojitých zatížení v  $n$  bodech  $U_i$ , pro  $i = 1, \dots, n$ , na po částech prizmatický nosník o celkové délce  $L$ . Každý bod je posunut o vektor  $\mathbf{u}_i$  od levého konce nosníku a může v něm působit libovolné zatížení z tabulky 2.2. Za jeden z bodů budeme vždy uvažovat levý okraj nosníku, který ovšem nemusí, ale může být zatížen a budeme ho značit  $U_0$ , s posunutím  $\mathbf{u}_0 = 0$ .



Obr. 2.7: Model obecně zatíženého nosníku

Obecnosti nebrání předpoklad o volných koncích, a jestliže bude některý z konců nosníku zatížen pružinou nebo ohybovou pružinou, okrajové podmínky se nezmění a stále máme

$$\begin{aligned} y''(0) &= 0 & y''(L) &= 0 \\ y'''(0) &= 0 & y'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vycházet budeme z obecné rovnice průhybové čáry, kterou jsme odvodili v odstavci 2.1.

$$y^{(IV)}(x) = \frac{q(x)}{EI}.$$

Pro ilustraci uvažujme prizmatický nosník zatížený silou  $\vec{F}_1$  v  $\mathbf{u}_1 = 0,4L$ , momentem  $\vec{M}_2$  v  $\mathbf{u}_2 = 0,6L$ , který je v levém konci vetknutý pružinami o tuhostech  $k_{p0}$  a  $k_{o0}$

$$y^{(IV)}(x) = -\frac{k_{p0}}{EI}y(0)\delta(x) + \frac{k_{o0}}{EI}y'(0)\delta'(x) + \frac{F_1}{EI}\delta(x - 0,4L) + \frac{M_2}{EI}\delta'(x - 0,6L).$$

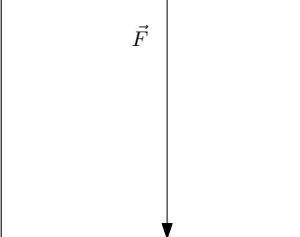
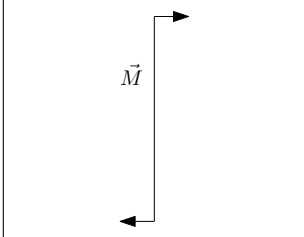
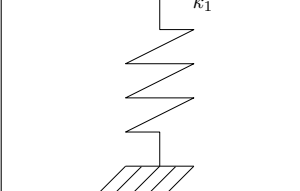
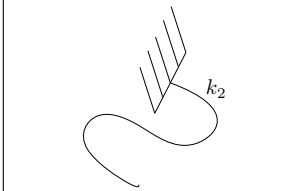
Celou rovnici snadno zobecníme na tvar

$$y^{(IV)}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{F_i}{E_i I_i} \delta(x - \mathbf{u}_i) + \sum_{i=0}^k \frac{M_i}{E_i I_i} \delta'(x - \mathbf{u}_i) - \sum_{i=0}^k \frac{k_{pi}}{E_i I_i} y(\mathbf{u}_i) \delta(x - \mathbf{u}_i) + \sum_{i=0}^k \frac{k_{oi}}{E_i I_i} y'(\mathbf{u}_i) \delta'(x - \mathbf{u}_i). \quad (2.31)$$

*Poznámka.* Kde  $k = \begin{cases} n - 1 & \text{pokud je levý konec nosníku zatížen} \\ n & \text{pokud není levý konec nosníku zatížen} \end{cases}$

- $E_i$  Youngův modul pružnosti mezi body  $U_i$  a  $U_{i+1}$
- $I_i$  Osový kvadratický moment k ose z, mezi body  $U_i$  a  $U_{i+1}$
- $F_i$  Velikost síly působící v bodě  $U_i$
- $M_i$  Velikost momentu působícího v bodě  $U_i$
- $k_{pi}$  Tuhost podpurné pružiny působící v bodě  $U_i$
- $k_{oi}$  Tuhost ohybové pružiny působící v bodě  $U_i$
- $\mathbf{u}_i$  Vektor posunutí bodu  $U_i$  od levého konce nosníku

Tab. 2.2: Přehled nespojitých zatížení.

Grafické znázornění	Zatížení v $\mathbf{u}_i$	Grafické znázornění	Zatížení v $\mathbf{u}_i$
	Síla $\vec{F}$ $F \delta(x - \mathbf{u}_i)$		Moment $\vec{M}$ $M \delta'(x - \mathbf{u}_i)$
	Pružina $-k_{pi} y(\mathbf{u}_i) \delta(x - \mathbf{u}_i)$		Ohybová pružina $-k_{oi} y'(\mathbf{u}_i) \delta'(x - \mathbf{u}_i)$

Po aplikaci *Laplaceovy transformace*, *zpětné Laplaceovy transformace* a užití okrajových podmínek (2.30) na levém konci, na rovnici (2.31) dostaneme

$$\begin{aligned}
y(x) = & \frac{F_0}{6E_0I_0}x^3H(x) - \frac{k_{p0}y(0)}{6E_0I_0}x^3H(x) + \frac{M_0}{2E_0I_0}x^2H(x) + \frac{k_{o0}y'(0)}{2E_0I_0}x^2H(x) + \\
& + \frac{F_1}{6E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)^3H(x - \mathbf{u}_1) - \frac{k_{p1}y(\mathbf{u}_1)}{6E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)^3H(x - \mathbf{u}_1) + \\
& + \frac{M_1}{2E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)^2H(x - \mathbf{u}_1) + \frac{k_{o1}y'(\mathbf{u}_1)}{2E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)^2H(x - \mathbf{u}_1) + \dots + \\
& + \frac{F_n}{6E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)^3H(x - \mathbf{u}_n) - \frac{k_{pn}y(\mathbf{u}_n)}{6E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)^3H(x - \mathbf{u}_n) + \\
& + \frac{M_n}{2E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)^2H(x - \mathbf{u}_n) + \frac{k_{on}y'(\mathbf{u}_n)}{2E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)^2H(x - \mathbf{u}_n) + \frac{y(0)}{E_0I_0} + \frac{y'(0)x}{E_0I_0},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

k užití okrajových podmínek, které máme pro pravý konec, musíme (2.32) postupně derivovat

$$\begin{aligned}
y'(x) = & \frac{F_0}{2E_0I_0}x^2H(x) - \frac{k_{p0}y(0)}{2E_0I_0}x^2H(x) + \frac{M_0}{E_0I_0}xH(x) + \frac{k_{o0}y'(0)}{E_0I_0}xH(x) + \\
& + \frac{F_1}{2E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)^2H(x - \mathbf{u}_1) - \frac{k_{p1}y(\mathbf{u}_1)}{2E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)^2H(x - \mathbf{u}_1) + \\
& + \frac{M_1}{E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)H(x - \mathbf{u}_1) + \frac{k_{o1}y'(\mathbf{u}_1)}{E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)H(x - \mathbf{u}_1) + \dots + \\
& + \frac{F_n}{2E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)^2H(x - \mathbf{u}_n) - \frac{k_{pn}y(\mathbf{u}_n)}{2E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)^2H(x - \mathbf{u}_n) + \\
& + \frac{M_n}{E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)H(x - \mathbf{u}_n) + \frac{k_{on}y'(\mathbf{u}_n)}{E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)H(x - \mathbf{u}_n) + \frac{y'(0)}{E_0I_0},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
y''(x) = & \frac{F_0}{E_0I_0}xH(x) - \frac{k_{p0}y(0)}{E_0I_0}xH(x) + \frac{M_0}{E_0I_0}H(x) + \frac{k_{o0}y'(0)}{E_0I_0}H(x) + \\
& + \frac{F_1}{E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)H(x - \mathbf{u}_1) - \frac{k_{p1}y(\mathbf{u}_1)}{E_1I_1}(x - \mathbf{u}_1)H(x - \mathbf{u}_1) + \\
& + \frac{M_1}{E_1I_1}H(x - \mathbf{u}_1) + \frac{k_{o1}y'(\mathbf{u}_1)}{E_1I_1}H(x - \mathbf{u}_1) + \dots + \\
& + \frac{F_n}{E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)H(x - \mathbf{u}_n) - \frac{k_{pn}y(\mathbf{u}_n)}{E_nI_n}(x - \mathbf{u}_n)H(x - \mathbf{u}_n) + \\
& + \frac{M_n}{E_nI_n}H(x - \mathbf{u}_n) + \frac{k_{on}y'(\mathbf{u}_n)}{E_nI_n}H(x - \mathbf{u}_n),
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
y'''(x) = & \frac{F_0}{E_0I_0}H(x) - \frac{k_{p0}y(0)}{E_0I_0}H(x) + \frac{F_1}{E_1I_1}H(x - \mathbf{u}_1) - \frac{k_{p1}y(\mathbf{u}_1)}{E_1I_1}H(x - \mathbf{u}_1) + \\
& + \dots + \frac{F_n}{E_nI_n}H(x - \mathbf{u}_n) - \frac{k_{pn}y(\mathbf{u}_n)}{E_nI_n}H(x - \mathbf{u}_n).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Zaměříme se na počet neznámých a počet rovnic, které budeme potřebovat. Vidíme, že užitím *Laplaceovy transformace* se budou v rovnici (2.32) vyskytovat dvě neznámé konstanty  $y(0), y'(0)$ . Další neznámé konstanty jsou průhyby  $y(\mathbf{u}_i)$  a natočení  $y'(\mathbf{u}_i)$ , které vzniknou v bodě  $U_i$  při zatížení podpůrnou, případně ohybovou pružinou. Celkem tedy máme  $2(k+1)$  konstant, které musíme vyjádřit a dosadit do (2.32). Tuto soustavu  $2(k+1)$  rovnic budeme řešit maticově, převedeme tedy problém na maticovou rovnici

$$LY = P, \quad (2.36)$$

kde matice  $Y$  tvoří neznámé konstanty

$$Y = \left. \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(\mathbf{u}_1) \\ y'(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ y(\mathbf{u}_n) \\ y'(\mathbf{u}_n) \end{pmatrix} \right\} 2(k+1). \quad (2.37)$$

Obecné vyjádření matice  $L$  je však složitější, ale má určitou pravidelnost. Matici sestavíme z blokových submatic a poslední dva řádky vyjádříme z (2.34) a (2.35).

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{S}_{2,1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{S}_{3,1} & \mathbf{S}_{3,2} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_4 & \mathbf{S}_{4,1} & \mathbf{S}_{4,2} & \mathbf{S}_{4,3} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_k & \mathbf{S}_{k,1} & \mathbf{S}_{k,2} & \mathbf{S}_{k,3} & \mathbf{S}_{k,4} & \dots & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 & \mathbf{V}_4 & \dots & \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_0 & \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 & \dots & \mathbf{W}_k \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \begin{pmatrix} A_i & A_i^* \\ \widehat{A}_i & \widehat{A}_i^* \end{pmatrix} & \mathbf{S}_{i,j} &= \begin{pmatrix} B_{i,j} & B_{i,j}^* \\ \widehat{B}_{i,j} & \widehat{B}_{i,j}^* \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_u &= \begin{pmatrix} k_{pj} & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{W}_u &= \begin{pmatrix} k_{pj}(L - \mathbf{u}_j) & -k_{oj} \end{pmatrix} \\ \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matice  $L$  tedy má tvar

$$L = \left( \begin{array}{cccccc} A_1 & A_1^* & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \widehat{A}_1 & \widehat{A}_1^* & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ A_2 & A_2^* & B_{2,1} & B_{2,1}^* & 1 & 0 & \dots \\ \widehat{A}_2 & \widehat{A}_2^* & \widehat{B}_{2,1} & \widehat{B}_{2,1}^* & 0 & 1 & \dots \\ A_3 & A_3^* & B_{3,1} & B_{3,1}^* & B_{3,1} & B_{3,1}^* & \ddots \\ \widehat{A}_3 & \widehat{A}_3^* & \widehat{B}_{3,1} & \widehat{B}_{3,1}^* & \widehat{B}_{3,2} & \widehat{B}_{3,2}^* & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A_k & A_k^* & B_{k,1} & B_{k,1}^* & B_{k,2} & B_{k,2}^* & \dots \\ \widehat{A}_k & \widehat{A}_k^* & \widehat{B}_{k,1} & \widehat{B}_{k,1}^* & \widehat{B}_{k,2} & \widehat{B}_{k,2}^* & \dots \\ k_{p0} & 0 & k_{p1} & 0 & k_{p2} & 0 & \dots \\ \underbrace{k_{p0}(L - \mathbf{u}_0) \quad -k_{o0} \quad k_{p1}(L - \mathbf{u}_1) \quad -k_{o1} \quad k_{p2}(L - \mathbf{u}_2) \quad -k_{o2} \quad \dots}_{2(k+1)} \end{array} \right) \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{k_{p0}}{6E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)^3 - \frac{1}{E_{i-1}I_{i-1}} & B_{i,j} &= \frac{k_{pj}}{6E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)^3 \\ \widehat{A}_i &= \frac{k_{p0}}{2E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)^2 & \widehat{B}_{i,j} &= \frac{k_{pj}}{2E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)^2 \\ A_i^* &= -\frac{k_{o0}}{2E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)^2 - \frac{\mathbf{u}_i}{E_{i-1}I_{i-1}} & B_{i,j}^* &= -\frac{k_{oj}}{E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)^2 \\ \widehat{A}_i^* &= -\frac{k_{o0}}{E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0) - \frac{1}{E_{i-1}I_{i-1}} & \widehat{B}_{i,j}^* &= -\frac{k_{oj}}{E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \end{aligned}$$

Matici pravé strany  $P$  vytvoříme jako součet dvou sloupcových matic  $\psi, \chi$ , kde je  $k$ -tý řádek jednotlivých matic vyjádřen

$$\begin{aligned} \psi_k &= \sum_{i=1}^k \frac{F_{i-1}}{6E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{i-1})^3 + \frac{M_{i-1}}{2E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1})^2 \\ \chi_k &= \sum_{i=1}^k \frac{F_{i-1}}{2E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{i-1})^2 + \frac{M_{i-1}}{E_{i-1}I_{i-1}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\psi = \left( \begin{array}{c} \frac{F_0}{6E_0I_0}\mathbf{u}_1^3 + \frac{M_0}{2E_0I_0}\mathbf{u}_1^2 \\ \frac{F_0}{6E_0I_0}\mathbf{u}_2^3 + \frac{M_0}{2E_0I_0}\mathbf{u}_2^2 + \frac{F_1}{6E_1I_1}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^3 + \frac{M_1}{2E_1I_1}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 \\ \vdots \\ \psi_k \end{array} \right)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{2E_0I_0}\mathbf{u}_2^2 + \frac{M_0}{E_0I_0}\mathbf{u}_2 + \frac{F_0}{2E_0I_0}\mathbf{u}_1^2 + \frac{M_0}{E_0I_0}\mathbf{u}_1 \\ \frac{F_1}{2E_1I_1}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 + \frac{M_1}{E_1I_1}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \chi_k \end{pmatrix}$$

Řádky matic  $\psi, \chi$  se postupně seřadí do matice  $P$ , kde poslední dva řádky vyjádříme opět ze (2.34) a (2.35).

$$P = \left( \begin{array}{c} \psi_1 \\ \chi_1 \\ \psi_2 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \psi_k \\ \chi_k \\ \sum_{i=0}^k F_i \\ \sum_{i=0}^k F_i(L - \mathbf{u}_i) + M_i \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \psi_1 \\ \chi_1 \\ \psi_2 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \psi_k \\ \chi_k \\ \sum_{i=0}^k F_i \\ \sum_{i=0}^k F_i(L - \mathbf{u}_i) + M_i \end{array}} \right\} 2k \quad (2.40)$$

**Příklad.** Mějme zadání z příkladu 1, tedy s parametry:  $L = 10$  m,  $E = 210$  GPa,  $d = 0,1$  m,  $F_1 = 1000$  N,  $k_{p0} = k_{o0} = 50$  Nm<sup>-1</sup>,  $I = \frac{\pi d^4}{64} = 4,908 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>.

$$L = \begin{pmatrix} \frac{k_{p0}}{6EI}L^3 - \frac{1}{EI} & -\frac{k_{o0}}{2EI}L^2 - \frac{L}{EI} & 1 & 0 \\ \frac{k_{p0}}{2EI}L^2 & -\frac{k_{o0}}{EI}L - \frac{1}{EI} & 0 & 1 \\ k_{p0} & 0 & 0 & 0 \\ Lk_{p0} & -k_{o0} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(L) \\ y'(L) \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Vyřešením maticové rovnice  $LY = P$ , dostaneme  $Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \\ 0,325322 \\ 0,048698 \end{pmatrix}$

Dosazením konstant z  $Y$  do rovnice (2.32)

$$y(x) = -1,616\,812 \times 10^{-4} x^3 H(x) + 4,850\,436 \times 10^{-3} x^2 H(x) + \\ + 1,940\,175 \times 10^{-4} x + 1,940\,175 \times 10^{-5} \quad (2.42)$$

Porovnání se vzorcem z [5]

$$y(x) = -1,616\,812 \times 10^{-4} x^3 + 4,850\,436 \times 10^{-3} x^2$$

Výsledky nejsou zcela totožné, což je způsobeno tuhostmi použitých pružin ve výpočtovém modelu a jejich srovnání s vetknutím. Pokud uvažujeme uvedené tuhosti pružin a vyneseme oba výsledky pomocí vhodného softwaru, například v programu *MATLAB*, graficky, nebo je numericky vyčíslíme, dostaneme maximální absolutní odchylku pro zadané hodnoty 0,001 996 m a to na pravém konci nosníku.

Pokud budeme uvažovat stále větší tuhosti pružin  $k_{p0}$ ,  $k_{o0}$ , popřípadě je limitním přechodem „pošleme“ do nekonečna, absolutní člen a člen s  $x$  v (2.42) jdou k 0 a výsledky se rovnají.



### 3 VYUŽITÍ V HYDROMECHANICE

V teorii *hydromechaniky* budeme uvažovat tzv. cylindrické souřadnice<sup>1</sup>. K odvození rovnice vývoje tlaku v potrubí využijeme *rovnici kontinuity* v cylindrických souřadnicích, viz [2]-rovnice (13.1.21), pro stacionární proudění nestlačitelné kapaliny ve tvaru

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (3.1)$$

Při zanedbání objemové síly ( $G_i = 0$ ) uvažujeme *Navier-Stokesovy* rovnice ve tvaru

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (3.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi v_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad (3.3)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z. \quad (3.4)$$

Kde  $\Delta$  je *Laplaceův operátor*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Uvažujme proudění kapaliny pouze v ose trubice, pro které platí:  $v_r = v_\varphi = 0$ , rovnice (3.1) tedy přejde do tvaru

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.5)$$

z čehož plyne, že  $v_z = f(r, \varphi)$ . Při jednorozměrném proudění se rovnice (3.2), (3.3), (3.4) značně zjednoduší

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.6)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (3.7)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3.8)$$

Předpokládejme, že součinitel dynamické viskozity  $\eta = \nu \rho$  bude *konstantní* a tedy

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3.9)$$

Vidíme, že v (3.9) je podle (3.6) a (3.7) výraz na levé straně funkcí pouze proměnné  $z$  a výraz na opačné straně je vzhledem k (3.5) funkcí  $r, \varphi$ . Aby tedy tato rovnost podle parciálních derivací nastala, musí být obě strany rovny konstantě. Další derivací tedy dostaneme

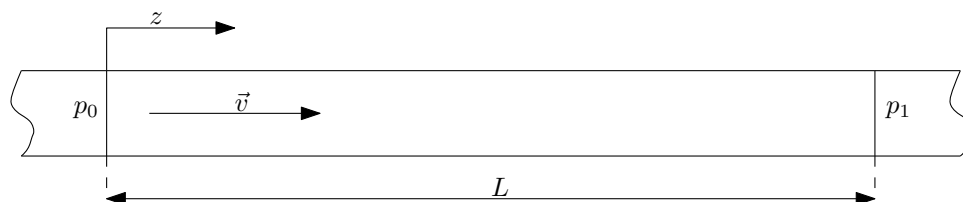
$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>Více o cylindrických (válcových) souřadnicích lze nalézt v [12].

## 3.1 Výpočtové modely

### 3.1.1 Příklad 1.

Uvažujme jednoduché přímé potrubí, kterému přísluší dvě okrajové podmínky. Nejdříve vyřešíme daný problém klasickou<sup>2</sup> metodou



Obr. 3.1: Jednoduché přímé potrubí

Okrajové podmínky pro uvažovanou část potrubí mají tvar

$$p(0) = p_0 \quad p(L) = p_1. \quad (3.11)$$

Předpokládejme, že vývoj tlaku v potrubí má lineární průběh a budeme tedy hledat koeficienty rovnice:  $p(z) = a + bz$ . Dosazením okrajových podmínek (3.11) dostáváme

$$\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow a = p_0 \\ z = L &\Rightarrow b = \frac{p_1 - p_0}{L}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

vyjádřené koeficienty dosadíme

$$p(z) = p_0 - \left( \frac{p_1 - p_0}{L} \right) z. \quad (3.13)$$

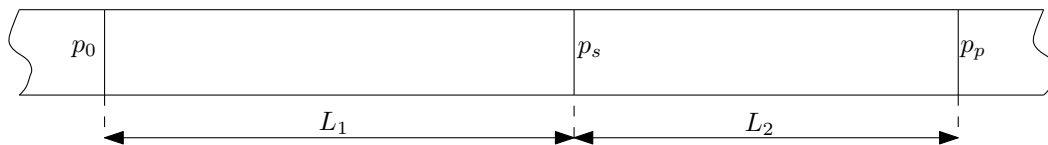
Tento příklad byl značně zjednodušený, v dalším budeme uvažovat hydraulický prvek s odporem, kde tento problém vyřešíme obdobně.

---

<sup>2</sup>K tomuto způsobu řešení bylo využito zejména [11].

### 3.1.2 Příklad 2.

Potrubí rozdělíme na dvě části, budeme tedy řešit dvě rovnice,  $p(z)$  a  $q(z)$ .



Obr. 3.2: Přímé potrubí, rozdělené na dvě části

Okrajové podmínky pro uvažovanou část potrubí

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 & q(0) &= p_s \\ p(L_1) &= p_s & q(L_2) &= p_p \end{aligned} \quad (3.14)$$

s využitím okrajových podmínek

$$p(z) = p_0 + Az_1 \quad q(z) = p_s + Bz_2, \quad (3.15)$$

evidentně

$$p(L_1) = p_0 + AL_1 = q(0) = p_s,$$

vyjádřenou konstantu  $p_s$  dosadíme zpět do (3.15)

$$q(z) = p_0 + AL_1 + Bz_2,$$

nyní několik jednoduchých úprav

$$\begin{aligned} p_p &= q(L_2) = p_0 + AL_1 + BL_2, \\ B &= \frac{p_p - p_0}{L_2} - A \frac{L_1}{L_2}, \\ q(z) &= p_0 + AL_1 + \frac{p_p - p_0}{L_2} z_2 - A \frac{L_1}{L_2} z_2, \\ q(z) &= p_0 + A \left( L_1 - \frac{L_1}{L_2} z_2 \right) + \frac{p_p - p_0}{L_2} z_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Zavedeme

$$\frac{\partial q(z)}{z_2} = -bv^n, \quad (3.17)$$

a další úpravy (3.16) vzhledem k (3.17)

$$\begin{aligned} -bv^n &= -A \frac{L_1}{L_2} + \frac{p_p - p_0}{L_2}, \\ A &= \frac{p_p - p_0}{L_1} + \frac{L_2}{L_1} bv^n, \end{aligned}$$

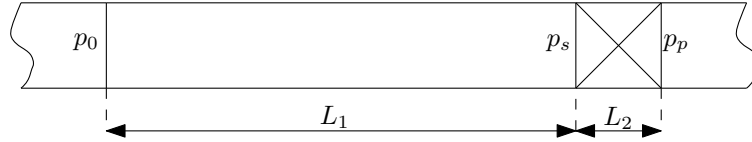
$$\begin{aligned}
p(z) &= p_0 + \left( \frac{p_p - p_0}{L_1} + \frac{L_2}{L_1} b v^n \right) z_1, \\
q(z) &= p_0 + \left( \frac{p_p - p_0}{L_1} + \frac{L_2}{L_1} b v^n \right) \left( L_1 - \frac{L_1}{L_2} z_2 \right) + \frac{p_p - p_0}{L_2} z_2, \\
q(z) &= p_0 + (p_p - p_0) - \frac{p_p - p_0}{L_2} z_2 + L_2 b v^n - b v^n z_2 + \frac{p_p - p_0}{L_2} z_2, \\
q(z) &= p_p + L_2 b v^n - b v^n z_2 = p_p + (L_2 - z_2) b v^n.
\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy dvě rovnice

$$p(z) = p_0 + \left( \frac{p_p - p_0}{L_1} + \frac{L_2}{L_1} b v^n \right) z_1, \quad (3.18)$$

$$q(z) = p_p + L_2 b v^n - b v^n z_2 = p_p + (L_2 - z_2) b v^n. \quad (3.19)$$

Uvažujme, že pravou část potrubí o délce  $L_2$  zkrátíme až na infinitezimální hodnotu a budeme ji brát za hydraulický odpor s vlastností (3.17).



Obr. 3.3: Přímé potrubí s hydraulickým prvkem

Tlak před hydraulickým prvkem  $b v^n$  tedy vychází

$$p(L_1) = p_p + L_2 b v^n = q(0), \quad (3.20)$$

těsně za hydraulickým prvkem

$$q(L_2) = p_p. \quad (3.21)$$

Nyní stejný příklad vypočítáme pomocí distribucí a *Laplaceovy transformace* obdobně jako ve 2. kapitole. Základní rovnicí, ze které budeme vycházet, je dříve odvozená rovnice (3.10).

Hydraulický prvek vzdálený o  $\mathbf{u}$  od levého konce potrubí modelujeme pomocí *Diracovy distribuce*

$$q = -b v^n \delta'(z - \mathbf{u}),$$

dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -b v^n \delta'(z - L). \quad (3.22)$$

Okrajové podmínky zůstávají stejné a tedy

$$p(0) = p_0 \quad p(L) = p(L_1 + L_2) = p_s + b v^n = p_p. \quad (3.23)$$

Užitím *Laplaceovy transformace*  $\mathcal{L}\{p(z)\} = P(s)$  na (3.27)

$$\begin{aligned} s^2 P - s p(0) - p'(0) &= -b v^n s e^{-sL}, \\ P &= \frac{1}{s} p(0) + \frac{1}{s^2} p'(0) - \frac{b v^n}{s} e^{-sL}, \end{aligned}$$

zpětnou *Laplaceovou transformací*  $\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = p(z)$

$$p(z) = p(0) + p'(0) z - b v^n H(z - L).$$

Z okrajových podmínek postupně dostaneme

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad p(0) = p_0,$$

$$p(z) = p_0 + p'(0) z - b v^n H(z - L),$$

využitím podmínky na druhém okraji

$$z = L \quad \Rightarrow \quad p(L) = p_s + b v^n = p_p,$$

$$p(L) = p_p = p_0 + p'(0)L - b v^n \quad \Rightarrow \quad p'(0) = \frac{p_p + b v^n - p_0}{L},$$

dosazením vyjádřených konstant  $p(0)$ ,  $p'(0)$  do (3.1.3)

$$p(z) = p_0 + \left( \frac{p_p + b v^n - p_0}{L} \right) z - b v^n H(z - L). \quad (3.24)$$

Při výpočtech s distribucemi bereme délku potrubí  $L$  od levého konce, až za hydraulický prvek. Budeme-li chtít zjistit tlak před hydraulickým prvkem, budeme muset k výsledku pro  $z = L$

$$p(L) = p_0 + \left( \frac{p_p + b v^n - p_0}{L} \right) L - b v^n H(L - L) = p_p,$$

přičíst uvažovanou změnu tlaku v hydraulickém prvku

$$p(L - L_2) = p_p + b v^n$$

Hydraulické ztráty v nějakém hydraulickém prvku (tzv. místní ztráty), obecně s parametrem  $b v^n$ , ovšem nejsou jediné ztráty. Při proudění skutečné (viskózní) kapaliny potrubním systémem vznikají vlivem tření o mezní vrstvu kapaliny tzv. délkové ztráty. Vlivem tření vzniká teplo, které odebírá část tlakové energie a způsobuje tedy tlakovou diferenci na daném potrubním úseku.

Pro výpočet těchto ztrát lze použít *Weissbachův*<sup>3</sup> vztah pro dílčí ztrátovou měrnou energii

$$Y_{zt} = \sum_{j=1}^n \left( \lambda_j \frac{L_j}{D_j} \frac{v_j^2}{2} \right), \quad (3.25)$$

Pro ztrátovou diferenci tlaku, mezi bodu  $A, B$  platí

$$\Delta p_{A,B} = \rho Y_{zt(A,B)} = \rho \lambda_{A,B} \frac{L_{A,B}}{D_{h(A,B)}} \frac{v_{A,B}^2}{2}. \quad (3.26)$$

$\rho$	hustota proudící kapaliny
$\lambda_{A,B}$	Součinitel třecích ztrát mezi body $A$ a $B$
$L_{A,B}$	Osová délka potrubí mezi body $A$ a $B$
$D_{hA,B}$	Hydraulický průměr potrubí mezi body $A$ a $B$
$v_{A,B}^2$	Střední rychlost proudící kapaliny mezi body $A$ a $B$

Kde hydraulický průměr potrubí vypočítáme jako

$$D_h = \frac{4S_h}{O_h},$$

tedy pro kruhový průřez o průměru  $d$

$$D_h = \frac{4\pi d^2}{4\pi d} = d.$$

K určení součinitele třecích ztrát turbulentního proudění se užívá několik vztahů<sup>4</sup>

$\lambda$	
$0,3164 \text{Re}^{-0,25}$	ocelové potrubí - <i>Blausiův</i> vztah
$0,0032 + 0,221 \text{Re}^{-0,237}$	ocelové potrubí - <i>Advaniho</i> vztah
$0,0054 + 0,395 \text{Re}^{-0,3}$	ocelové potrubí - <i>Hermanův</i> vztah
$\frac{0,288}{\text{Re}^{0,226}}$	plastové potrubí - <i>Ševelevův</i> vztah <sup>5</sup>

Podle [8] mají plastová potrubí velmi významné hydraulické vlastnosti. Vyniká především velmi nízká drsnost stěn omývaných proudící kapalinou, v porovnání s ocelovým potrubím, což se projevuje nižším součinitelem třecích ztrát  $\lambda$ .

<sup>3</sup>Další podrobnosti v [14].

<sup>4</sup>Uvedené a mnohé další lze nalézt v [4].

<sup>5</sup>Podle [6].

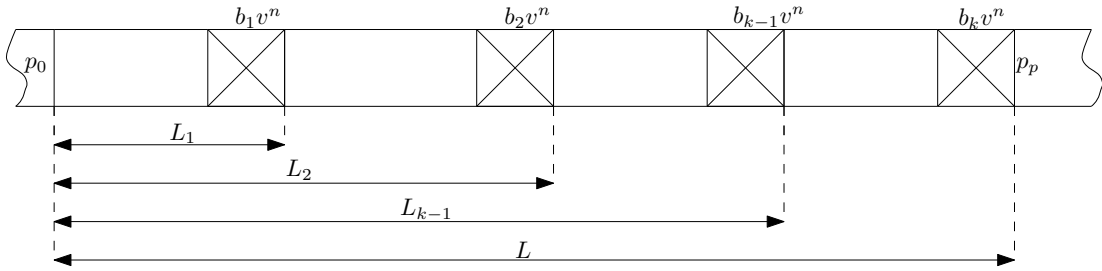
*Reynoldsovo* číslo  $Re$  je důležitým parametrem, který představuje vliv vnitřního tření kapaliny vlivem viskozity při proudění.

$$Re = \frac{vD_h}{\nu}$$

- $v$  střední rychlost proudící kapaliny v profilu
- $D_h$  Hydraulický průměr potrubí
- $\nu$  Součinitel kinematické viskozity

### 3.1.3 Obecný model

V obecném modelu budeme uvažovat působení  $k$  hydraulických prvků na přímém potrubí o celkové délce  $L$



Obr. 3.4: Přímé potrubí s hydraulickými prvky

Rovnici (3.10) máme ve tvaru

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = - \sum_{i=1}^k b_i v^n \delta'(z - \mathbf{z}_i). \quad (3.27)$$

Okrajové podmínky

$$p(0) = p_0 \quad p(L) = p_p \quad (3.28)$$

Užitím *Laplaceovy transformace*  $\mathcal{L}\{p(z)\} = P(s)$  na (3.27)

$$s^2 P - s p(0) - p'(0) = - \sum_{i=1}^k s b_i v^n e^{-s \mathbf{u}_i},$$

$$P = \frac{1}{s} p(0) + \frac{1}{s^2} p'(0) - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^k b_i v^n e^{-s \mathbf{u}_i},$$

zpětnou Laplaceovou transformací  $\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = p(z)$

$$p(z) = p(0) + p'(0)z - \sum_{i=1}^k b_i v^n H(z - \mathbf{z}_i)$$

Z okrajových podmínek postupně dostaneme

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad p(0) = p_0,$$

$$p(z) = p_0 + p'(0)z - \sum_{i=1}^k b_i v^n H(z - \mathbf{z}_i),$$

využitím podmínky na druhém okraji

$$z = L \quad \Rightarrow \quad p(L) = p_p$$

$$p(L) = p_p = p_0 + p'(0)L - \sum_{i=1}^k b_i v^n \Rightarrow p'(0) = \frac{p_p + \sum_{i=1}^k b_i v^n - p_0}{L}$$

dosazením vyjádřených konstant  $p(0)$ ,  $p'(0)$  do (3.1.3)

$$p(z) = p_0 + \left( \frac{p_p + \sum_{i=1}^k b_i v^n - p_0}{L} \right) z - \sum_{i=1}^k b_i v^n H(z - \mathbf{z}_i). \quad (3.29)$$

Při započtení vztahů (3.26) a (3.5), je zřejmě tlakový úbytek způsobený třením proudící kapaliny o stěny potrubí klesající lineární funkcí

$$\Delta p_{z,0} = p(0) - p(z) = \rho \lambda \frac{z}{D_h} \frac{v^2}{2}.$$

Pokud se potrubí skládá z po částech různých potrubí

$$\Delta p_{z,0} = p(0) - p(z) = \sum_{i=1}^{\kappa} \left( \rho \lambda_i \frac{l_i}{D_{h_i}} \frac{v_i^2}{2} \right) + \rho \lambda_{\kappa+1} \frac{z - \sum_{i=1}^{\kappa} l_i}{D_{h_{\kappa+1}}} \frac{v_{\kappa+1}^2}{2},$$

kde

- $\lambda_i$  Součinitel třecích ztrát potrubí  $i$
- $l_i$  Osová délka potrubí  $i$
- $D_{h_i}$  Hydraulický průměr potrubí  $i$
- $v_i$  Střední rychlost proudící kapaliny v potrubí  $i$
- $\kappa$  Počet potrubí které jsou před posunutím  $\mathbf{z}$



Konečný vztah pro celkovou změnu tlaku je tedy

$$p(z)^6 = p_0 + \left( \frac{\hat{p}_p + \sum_{i=1}^k b_i v^n - p_0}{L} \right) z - \sum_{i=1}^k b_i v^n H(z - \mathbf{z}_i) - \sum_{i=1}^{\kappa} \rho \lambda_i \frac{l_i}{D_{h_i}} \frac{v_i^2}{2} - \rho \lambda_{\kappa+1} \frac{z - \sum_{i=1}^{\kappa} l_i}{D_{h_{\kappa+1}}} \frac{v_{\kappa+1}^2}{2} \quad (3.30)$$

Jako příklad uvažujme potrubní systém se třemi hydraulickými prvky propojen jedním typem potrubí.

$p_0 = 30\,000$  Pa,  $p_p = 6\,000$  Pa,  $v = 1000$  m s<sup>-1</sup>,  $n = 1$ ,  $b_1 = 3$  kg m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>,  $b_2 = 1$  kg m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>,  $b_3 = 5$  kg m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>,  $\nu = 1,596\,519 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $D_h = 1$  m,  $l = 6$  m,  $z_1 = 2$  m,  $z_2 = 4$  m,  $z_3 = 6$  m,  $\rho = 1$  kg m<sup>-3</sup>

$$\text{Re} = \frac{v D_h}{\nu} = \frac{1000}{1,596519 \times 10^{-6}} = 626\,362\,742 \Rightarrow \lambda = 0,3164 \text{Re}^{-0,25} = 2 \times 10^{-3}$$

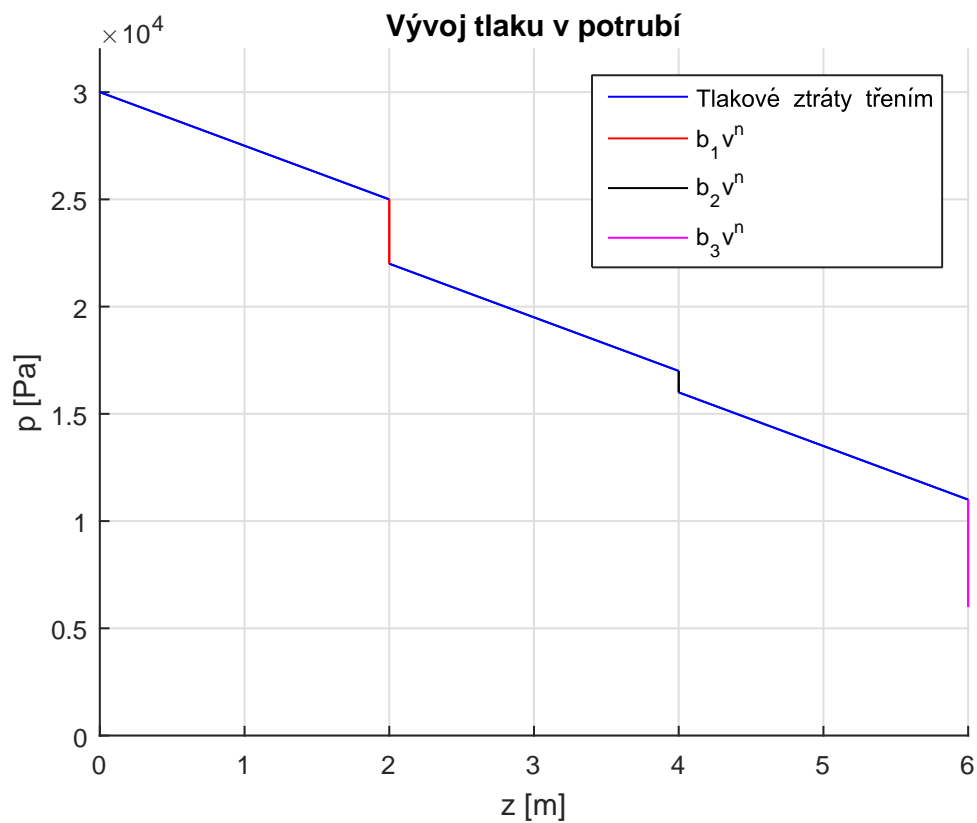
$$Y_{zt} = \lambda \frac{z}{D_h} \frac{v^2}{2} = 2 \times 10^{-3} \frac{6 \cdot 1000^2}{1 \cdot 2} = 6\,000 \text{ Pa}$$

dosazením konstant do (3.30)

$$\begin{aligned} p(z) &= 30000 + \frac{(6000 + 6000) + (3000 + 1000 + 5000) - 30000}{6} z - \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \left( 1000 b_i H(z - \mathbf{z}_i) \right) - \frac{1000^2}{1000} z = \\ &= 30\,000 - 2500 z - \sum_{i=1}^k \left( 1000 b_i H(z - \mathbf{z}_i) \right) \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup> $\hat{p}_p = p_p + Y_{zt}$ , tedy  $p_p$  musíme korigovat na tlak, který by byl na pravém konci potrubí při zanedbání tlakových ztrát třením o stěny potrubí.



Obr. 3.5: Přímé potrubí se třemi hydraulickými prvky

Vidíme tedy, že vývoj tlaku v přímém potrubí při proudění viskózní kapaliny je po částech lineární funkcí, ve které se směrnice přímek skládají ze dvou funkcí, a to úbytku tlaku při tření kapaliny o stěny potrubí, a o ztráty při vnitřním tření kapaliny.

## ZÁVĚR

Cílem této práce je rešerše teorie zobecněných funkcí a formulace matematických modelů v teorii *Pružnosti a pevnosti* a *Hydromechaniky*. Text tedy kromě nezbytné teorie naznačuje možné využití distribucí a *Laplaceovy* transformace při řešení diferenciálních rovnic v mechanice kontinua.

V první kapitole jsou distribuce zavedeny jako spojité lineární funkcionály na prostoru testovacích funkcí, nejsou tedy funkcemi. Ve druhé části teoretického úvodu jsou ukázány důležité základní operace s distribucemi, a to především s *Diracovou*  $\delta$  distribucí, které se využily v následujících kapitolách. Jsou zde také uvedeny další důležité poznámky, například o translaci *Laplaceovy* transformace.

Kapitola druhá se věnuje výpočtům průhybové čáry nosníků, která zde byla odvozena, pomocí distribucí. Použití bylo ukázáno na příkladu, na kterém bylo zřejmé použití distribucí a modelování vetknutí pomocí pružin. Obecný model pro výpočet průhybové čáry nosníku zatíženého nespojitými zatíženími z tabulky 2.2 byl sestaven jako alternativa ke standardnímu postupu rozdělení nosníku na jednotlivé části a jejich postupné řešení nebo k metodě využívající tzv. *Macaulyho* funkce. Jádrem obecného model je *Laplaceova* transformace, která definované zatížení nosníku pomocí *Diracova*  $\delta$ , převede na soustavu lineárních rovnic, která je snadno řešitelná. Výsledkem jsou koeficienty polynomu čtvrtého stupně, který představuje rovnici průhybové čáry nosníku.

V závěrečné kapitole je přiblížen problém tlakových ztrát při proudění kapaliny přímým potrubním systémem způsoben třecími silami a hydraulickými odpory v potrubí. Obecný model počítá s působením několika hydraulických prvků o různých vlastnostech, které jsou propojeny potrubním systémem z různých částí.



## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ANGOT, André. *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. 2. nezměn. vyd. Praha: SNTL, 1971, 819 s. : il.
- [2] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinuua*. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia, 2011, 878 s. : il. ; 24 cm. ISBN 9788020020390.
- [3] JURČÍKOVÁ, Anežka, Martin KREJSA a Vladimíra MICHALCOVÁ. *Stavební statika: Vzdělávací pomůcka* [online]. Ostrava: VŠB- Technická univerzita, 2013 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: <http://www.stavebniinzenyrstvi.cz/wp-content/uploads/2014/07/stavebni-statika.pdf>
- [4] KOLÁŘ, Václav a Stanislav VINOPAL. *Hydraulika průmyslových armatur: (příručka praktických výpočtů)*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1963.
- [5] KRUTINA, Jaroslav. *Sbírka vzorců z pružnosti a pevnosti*. 3. uprav. vyd. Praha: ROH, 1973, 236 s.
- [6] LIŠKA, Antonín a Pavel NOVÁK. *Technika stlačeného vzduchu*. Praha: České vysoké učení technické, 1999. ISBN 8001019470.
- [7] LOMTATIDZE, Alexander. *Lineární funkcinální analýza I*. Brno, 2015.
- [8] MELICHAR, Jan a Jaroslav BLÁHA. *Problematika soudobé čerpací techniky: vybrané partie*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 9788001037195.
- [9] NETUKA, Horymír. *Distribuce*. Olomouc, 1984. Rukopisné poznámky.
- [10] PÍRKO, Zdeněk a Jan VEIT. *Laplaceova transformace*. Praha: SNTL, 1972.
- [11] POCHYLÝ, František. Rukopisné poznámky.
- [12] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 3., nezměn. vyd. Praha: SNTL- Nakladatelství technické literatury, 1973. Česká matice technická (SNTL).
- [13] SCHWARTZ, Laurent a Jiří BRABEC. *Matematické metody ve fyzice*. Praha: SNTL, 1972, 357 s.
- [14] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 9788021435780.
- [15] VRBKA, Jan. *Pružnost a pevnost I*. Brno: VUT FSI, 2012, 280 s.



# SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbol	Rozměr	Veličina
$b$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-(n+1)} \cdot \text{s}^{-(2-n)}]$	Ztrátový součinitel
$C^\infty$	$[-]$	Množina funkcí, které jsou spojité i se svými parciálními derivacemi všech řádů
$D_h$	$[\text{m}]$	Hydraulický průměr potrubí
$\mathcal{D}$	$[-]$	Prostor testovacích funkcí
$\mathcal{D}^*$	$[-]$	Prostor distribucí
$\mathcal{D}'$	$[-]$	Duální prostor k prostoru distribucí
$E$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$	Youngův modul pružnosti
$F_k$	$[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	Velikost síly působící v bodě $U_k$
$H(x)$	$[-]$	<i>Heavisideova funkce</i>
$\mathbf{I}$	$[-]$	Jednotková matice ( $2 \times 2$ )
$I_z$	$[\text{m}^4]$	Osový kvadratický moment k ose $z$
$k_p$	$[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$	Tuhost tlačné pružiny
$k_o$	$[\text{N} \cdot \text{m}]$	Tuhost ohybové pružiny
$L$	$[\text{m}]$	Délka nosníku/ potrubí
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$[-]$	<i>Laplaceova</i> transformace předmětu $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$	$[-]$	Zpětná <i>Laplaceova</i> transformace předmětu $f(t)$
$M_y$	$[\text{N} \cdot \text{m}]$	Základní ohyb kolem osy $z$
$M_k$	$[\text{N} \cdot \text{m}]$	Velikost momentu působícího v bodě $U_k$
$\mathbf{O}$	$[-]$	Nulová matice ( $2 \times 2$ )
$O_h$	$[\text{m}]$	Omočený obvod potrubí
$p$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$	Tlak
$p(z), q(z)$	$[-]$	Tlakové funkce v potrubí
$r$	$[\text{m}]$	Poloměr potrubí
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	$[-]$	Množina reálných, komplexních čísel
$\mathbf{R}_i, \mathbf{S}_{i,j}$	$[-]$	Blokové matice ( $1 \times 2$ )
$\text{Re}$	$[-]$	Reynoldsovo podobnostní číslo
$S_h$	$[\text{m}^2]$	Průtočný plocha
$\text{supp } f(x)$	$[-]$	Nosič funkce $f(x)$
$\mathbf{T}$	$[-]$	Distribuce
$\mathbf{T}_H$	$[-]$	<i>Heavisideova</i> distribuce
$\mathbf{u}_k, \mathbf{z}_k$	$[\text{m}]$	Posunutí bodu $U_k, Z_k$ ve směru osy $x, z$
$v$	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	Střední rychlost proudící kapaliny
$v_r, v_\varphi, v_z$	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	Rychlosti kapaliny v cyl. souřadnicích
$y$	$[\text{m}]$	Průhyb nosníku v ose $y$
$Y(s), P(s)$	$[-]$	Obrazy <i>Laplaceovy</i> transformace

Symbol	Rozměr	Veličina
$\delta(x)$	$[\text{m}^{-1}]$	<i>Diracova</i> distribuce
$\varepsilon_x$	$[-]$	Poměrné přetvoření v ose $x$
$\eta$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$	Dynamická viskozita
$\nu$	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	Součinitel kinematické viskozity
$\rho$	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	Hustota kapaliny
$\varphi$	$[-]$	Testovací funkce
$\hat{\varphi}$	$[\text{rad}]$	Úhel natočení střednice
$\Omega$	$[-]$	Oblast prostoru $\mathbb{R}^n$
$\otimes$	$[-]$	Symbol tenzorového součinu distribucí
$*$	$[-]$	Symbol konvoluce