



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV VODNÍCH STAVEB

INSTITUTE OF WATER STRUCTURES

## NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ PROUDĚNÍ V BEZPEČNOSTNÍM PŘELIVU VYBRANÉHO VODNÍHO DÍLA

MODELLING OF FLOW OVER SPILLWAY OF A DAM

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Martina Desatová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. JAN JANDORA, Ph.D.

BRNO 2020



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV VODNÍCH STAVEB**

INSTITUTE OF WATER STRUCTURES

**NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ PROUDĚNÍ  
V BEZPEČNOSTNÍM PŘELIVU VYBRANÉHO  
VODNÍHO DÍLA**

MODELLING OF FLOW OVER SPILLWAY OF A DAM

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

DIPLOMA THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Bc. Martina Desatová

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. JAN JANDORA, Ph.D.

**BRNO 2020**



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

## FAKULTA STAVEBNÍ

<b>Studijní program</b>	N3607 Stavební inženýrství
<b>Typ studijního programu</b>	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
<b>Studijní obor</b>	3607T027 Vodní hospodářství a vodní stavby
<b>Pracoviště</b>	Ústav vodních staveb

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>Student</b>	Bc. Martina Desatová
<b>Název</b>	Numerické modelování proudění v bezpečnostním přelivu vybraného vodního díla
<b>Vedoucí práce</b>	doc. Ing. Jan Jandora, Ph.D.
<b>Datum zadání</b>	31. 3. 2019
<b>Datum odevzdání</b>	10. 1. 2020

V Brně dne 31. 3. 2019

---

prof. Ing. Jan Šulc, CSc.  
Vedoucí ústavu

---

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.  
Děkan Fakulty stavební VUT

## PODKLADY A LITERATURA

Kolář, V., Patočka, C., Bém, J. 1983. Hydraulika. SNTL/ALFA, Praha.

Čihák, F., Valenta, P., Vaněček, S., Zeman, E. 1991. Automatizace inženýrských úloh. ČVUT, Praha.

Rodi W. 1980. Turbulence models and their application in hydraulics. International Association for hydraulic research, state-of-the-art paper, Delft.

Jandora, J. 2008. Matematické modelování ve vodním hospodářství. VUT v Brně.

## ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

V diplomové práci bude nejprve provedena rešerše prací zabývajících se problémem matematického modelování proudění vody na bezpečnostních objektech vodních děl. Poté bude následovat vlastní modelování přepadu vody u vybraného vodního díla pro návrh bezpečnostního přelivu. K řešení bude použito dostupných programů na Ústavu vodních staveb.

Diplomová práce bude obsahovat:

- Úvodní část
- Účel a popis práce
- Matematický popis problému
- Numerické modelování proudění vody
- Výsledky modelování
- Závěrečné zhodnocení

## STRUKTURA DIPLOMOVÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část závěrečné práce zpracovaná podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (povinná součást závěrečné práce).

2. Přílohy textové části závěrečné práce zpracované podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání, a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (nepovinná součást závěrečné práce v případě, že přílohy nejsou součástí textové části závěrečné práce, ale textovou část doplňují).

---

doc. Ing. Jan Jandora, Ph.D.

Vedoucí diplomové práce

## ABSTRAKT

Diplomová práca sa zaoberá matematickým modelovaním prúdenia vody cez bezpečnostný objekt. Vysvetľuje princíp matematického modelovania a jeho zákony. Taktiež uvádza matematické modely, ktoré numerické modelovanie využíva. V diplomovej práci sú predstavené výsledky matematického modelovania na vodnom diele Koryčany a porovnanie týchto výsledkov s hydraulickými výpočtami a fyzikálnym modelom.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Bezpečnostný preliv, spadisko, prelivná hrana, prepadová výška, hladina, matematický model, fyzikálny model, FLOW 3D, výpočtová sieť.

## ABSTRACT

This thesis deals with mathematical modelling of water flow through the safety object. It explains the principle of mathematical modelling and its laws. There is also presented the mathematical models used by numerical modelling. The results of mathematical model Koryčany are included in this thesis compared with hydraulic calculations and physical model.

## KEYWORDS

Spillway, trough, overspill edge, overflow height, level, mathematical model, physical model, FLOW 3D, computing mesh.

#### BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

Bc. Martina Desatová *Numerické modelování proudění v bezpečnostním přelivu vybraného vodního díla*. Brno, 2020. 79 s., 7 s. příl. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav vodních staveb. Vedoucí práce doc. Ing. Jan Jandora, Ph.D.

## PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané diplomové práce s názvem *Numerické modelování proudění v bezpečnostním přelivu vybraného vodního díla* je shodná s odevzdanou listinnou formou.

V Brně dne 4. 1. 2020

---

Bc. Martina Desatová  
autor práce

## PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem *Numerické modelování proudění v bezpečnostním přelivu vybraného vodního díla* zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 4. 1. 2020

---

Bc. Martina Desatová  
autor práce

## POĎAKOVANIE

Moje poďakovanie patrí hlavne doc. Ing. Janovi Jandorovi, Ph.D. za vedenie diplomovej práce, ústretovosť a odborné rady popri spracovaní práce. V neposlednom rade ďakujem Ing. Davidovi Duchanovi, Ph.D. za pomoc s inštaláciou i prácou s programom Flow 3D, za odborné rady a za čas, ktorý mi ochotne venoval.



## OBSAH:

A. ÚVODNÁ ČASŤ .....	1
A.1 Účel a popis práce .....	1
A.2 Terminológia .....	1
B. ZÁKLADY HYDRAULIKY .....	2
B.1 Prepady .....	2
B.2 Hydraulický výpočet .....	3
B.3 Nerovnomerné prúdenie .....	8
B.3.1. Riešenie nerovnomerného prúdenia metódou po úsekoch .....	9
B.3.1.a Problematika stanovenia drsnosti koryta .....	12
B.3.2. Riešenie nerovnomerného prúdenia metódou podľa Hindsa .....	15
B.3.3. Riešenie nerovnomerného prúdenia metódou podľa Favreho .....	17
C. MATEMATICKÉ MODELOVANIE .....	18
C.1 Základné rovnice hydrodynamiky .....	19
C.1.1. Zákon zachovania hmotnosti .....	20
C.1.2. Zákon zachovania hybnosti .....	21
C.1.3. Zákon zachovania energie .....	23
C.1.4. Stavové rovnice .....	24
C.2 Navier – Stokesovy rovnice .....	24
C.3 Reynoldsove rovnice .....	26
C.4 Turbulentné modely .....	27
C.4.1. Modely turbulencie s turbulentnou viskozitou .....	28
C.4.1.a Algebraické modely .....	28
C.4.1.b Jednorovnicový model .....	29
C.4.1.c Dvojrovnicový model .....	29
C.5 Numerické metódy .....	32
C.5.1. Metóda konečných prvkov .....	32
C.5.2. Metóda konečných diferencií .....	33
D. ZÁUJMOVÁ LOKALITA .....	35
D.1 Vodné dielo Koryčany .....	35
D.2 Rekonštrukcia VD Koryčany .....	36
D.2.1. Hradiace teleso .....	37
D.2.2. Bezpečnostný preliv .....	38

D.2.3. Sklz .....	39
E. VLASTNÁ ÚLOHA MODELOVANIA .....	43
E.1 Použité programy .....	43
E.1.1. Autodesk Inventor Professional .....	43
E.1.1.a Formát STL .....	44
E.1.2. Blender .....	46
E.1.3. Flow 3D.....	49
E.1.3.a Základné nastavenia výpočtu.....	50
E.2 Zjednodušujúce predpoklady .....	54
E.3 Simulácie a výsledky.....	54
E.3.1. Analýza citlivosti.....	54
E.3.1.a Analýza citlivosti zameraná na veľkosť bunky .....	55
E.3.1.b Analýza citlivosti zameraná na vplyv drsnosti.....	57
E.3.2. 2D model .....	58
E.3.3. Výpočet simulácií na 3D modeli .....	61
F. FYZIKÁLNE MODELOVANIE .....	68
F.1 Využitie 3D tlače pri fyzikálnom modelovaní .....	70
G. ZÁVER .....	72
H. POUŽITÉ PODKLADY .....	73
I. ZOZNAM TABULIEK .....	75
J. ZOZNAM OBRÁZKOV .....	75
K. ZOZNAM SKRATIEK A SYMBOLOV .....	77
K.1 Zoznam symbolov.....	77
K.2 Zoznam skratiek.....	78
L. ZOZNAM PRÍLOH .....	79

# A. ÚVODNÁ ČASŤ

## A.1 Účel a popis práce

V nedávnej minulosti spočívala bežná prax vodohospodárskych projektantov vo využívaní 2D aplikácií. Tento trend sa však v rýchlo napredujúcej spoločnosti zmenil. Pri vyhotovení akéhokoľvek projektu je 3D model žiadúci, priam až potrebný. Vyhotovenie 3D modelu pomôže nájsť správne a najvhodnejšie riešenie, a taktiež dokáže oslovit' aj ľudí, ktorí sa v stavebnej praxi nepohybujú. Nutnosť 3D modelu je teda neodškriepiteľná, avšak častou témou je porovnávanie fyzikálneho a matematického modelu. Dokáže matematický aparát nahradiť fyzikálny model, na ktorom sú všetky javy zrejme? Vieme využiť nespočetné množstvo aplikácií a programov k tomu najefektívnejšiemu riešeniu? Odpovede na tieto otázky sú účelom tejto práce. Objekt, na ktorom boli vytvárané simulácie, je vodné dielo Koryčany. Na tomto diele prebieha rekonštrukcia súboru objektov pre bezpečné prevedenie KPV<sub>10 000</sub> (kontrolnej povodňovej vlny s dobou opakovania  $N = 10\ 000$  rokov). V nadväznosti na spomínanú rekonštrukciu bol v dobe riešenia projektu vyhotovený fyzikálny model na ČVUT v Praze.

V úvodných kapitolách diplomovej práce sú popísané základné hydraulické javy spojené s bezpečnostným objektom a taktiež metódy pre výpočet nerovnomerného ustáleného prúdenia. V ďalších kapitolách je obsah smerovaný na matematické modelovanie, riadiace rovnice a modely, ktoré sú v práci využívané. Obsah posledných kapitol smeruje k vlastnému riešeniu. V krátkosti sa venuje popisu VD Koryčany a následne vzniku modelu a prezentovaniu výsledkov.

## A.2 Terminológia

V terminológii týkajúcej sa problematike prepadov pozorujeme medzi slovenskou a českou literatúrou rozpor. Rozhodli sme sa využívať terminológiu, ktorá odpovedá dostupnému zdroju [1].

Prepad – výtok kvapaliny otvorom zhora otvoreným, alebo otvorom, v ktorom hladina nedosahuje k hornému obrysu otvoru. [1]

Preliv – konštrukcia, cez ktorú voda prepadá. [1]

Bočný preliv – konštrukcia s prelivnou hranou súbežnou so smerom toku. [2]

Prelivná hrana – najvyššia časť prelivu (koruna prelivu). [1]

Prepadový lúč – prepadajúci prúd vody. [1]

## B. ZÁKLADY HYDRAULIKY

### B.1 Prepady

Prepad môžeme definovať ako pohyb vody s voľnou hladinou cez objekt, pre ktorý je charakteristický rozdiel hladín hornej a dolnej vody. Pri tomto jave dochádza ku konvexnému zakriveniu prúdových vlákien spojeného so zmenami rýchlostného a tlakového poľa. [6]

Horná hrana objektu, cez ktorý voda prepadá, je nazývaná prelivná hrana alebo koruna prelivu. Samotný objekt, či konštrukcia, cez ktorý je prevedený prepádový prietok sa označuje ako preliv. Preliv sa využíva k udržiavaniu hladiny v nádrži a k bezpečnému prevedeniu povodňových prietokov danej periodicity podľa legislatívy [4]. Každá prietočná nádrž musí byť vybavená bezpečnostným prelivom. Prelivy môžu byť hradené a nehradené, pričom sa uprednostňujú nehradené, kvôli bezobslužnosti. Podľa umiestnenia prelivu vo vzťahu k hrádzi rozlišujeme:

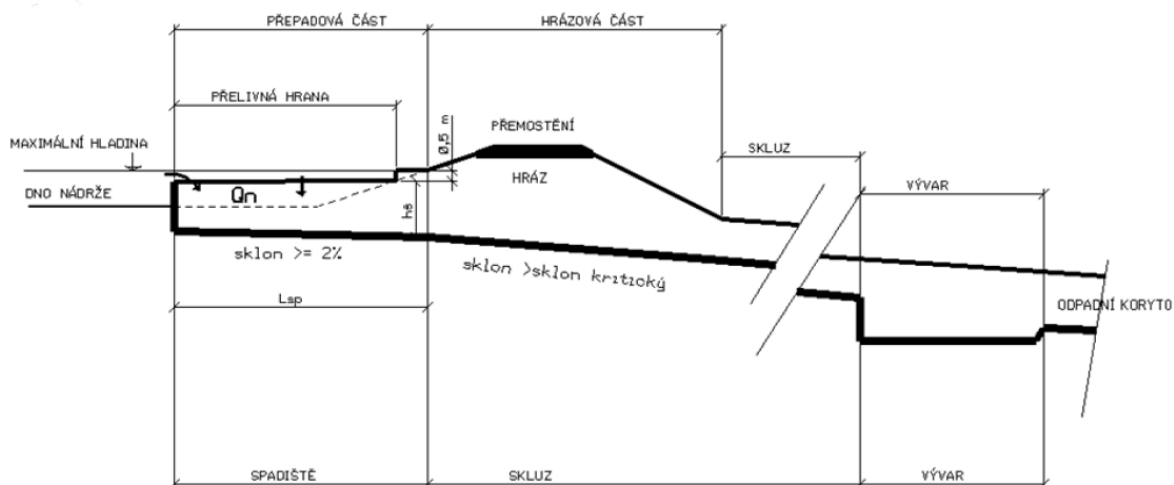
- čelný preliv,
- kašnový preliv,
- bočný preliv,
- šachotvý preliv,
- labyrintový preliv,
- združené funkčné bloky,
- špeciálne (násosky).

Rozdelenie podľa situovania odtoku:

- po vzdušnom líci príslušného bloku do vývaru v dolnej zdrži,
- po vzdušnom líci príslušného bloku do kaskádového sklzu,
- sklzom realizovaným za spadiskom v bočnom svahu,
- odpadnou štôľňou. [5]

V tejto práci sa bližšie venujeme prelivu bočnému, ktorý je umiestnený na VD Koryčany. Konštrukčne je bočný preliv rozdelený (Obrázok 1) na:

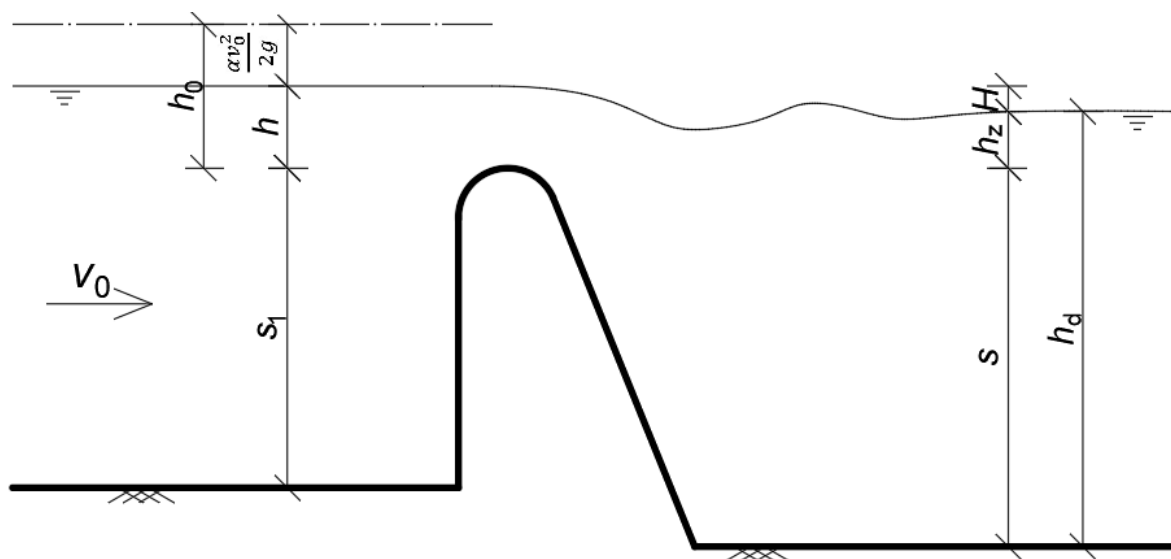
- spadisko,
- sklz,
- tlmenie energie (vývar).



Obrázok 1: Časti bočného prelivu [5]

## B.2 Hydraulický výpočet

Pre výpočet prepádového množstva využijeme teóriu prepádu cez haťové telesá. Prepád definujeme ako výtok kvapaliny otvorom, ktorý je zhora otvorený, alebo ak hladina nedosahuje horného obrysu otvoru.



Obrázok 2: Schéma haťového prelivu [1]

Popis veličín na Obrázku 2:

- $s_1$  výška prelivnej hrany nad horným dnom [m],
- $h$  prepádová výška [m],
- $h_0$  energetická prepádová výška [m],
- $s$  výška prelivnej hrany nad dolným dnom [m],
- $h_z$  výška zatopenia [m],
- $H$  rozdiel úrovne hornej a dolnej vody [m],

$h_d$  hĺbka dolnej vody [m],  
 $v_0$  prítoková rýchlosť [m/s].

K vyčísleniu prepadového množstva je používaná prepadová rovnica pre haťové telesá [1]:

$$Q = \sigma_s \sigma_z m b_0 \sqrt{2g} h_0^{3/2}, \quad (1)$$

kde

$Q$  prepadové množstvo [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  
 $\sigma_s$  súčiniteľ pôdorysnej šikmosti [-],  
 $\sigma_z$  súčiniteľ zatopenia [-],  
 $b_0$  účinná šírka prelivnej hrany [m],  
 $g$  gravitačné zrýchlenie [ $\text{m}/\text{s}^2$ ],  
 $h_0$  energetická prepadová výška [m],  
 $m$  súčiniteľ prepadu [-].

Energetická prepadová výška  $h_0$  je prepadová výška zväčšená o prítokovú rýchlostnú výšku [1]:

$$h_0 = h + \frac{\alpha v_0^2}{2g}, \quad (2)$$

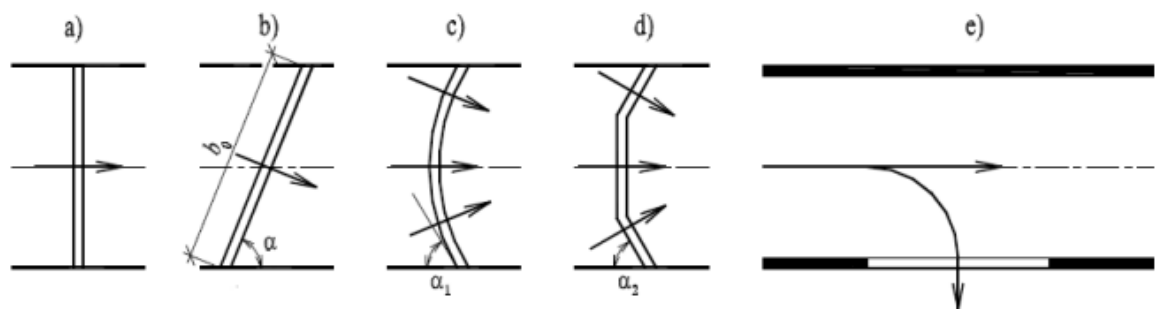
kde

$h_0$  energetická prepadová výška [m],  
 $h$  prepadová výška [m],  
 $\alpha$  Coriolisovo číslo [-],  
 $v_0$  prietoková rýchlosť [m/s],  
 $g$  gravitačné zrýchlenie [ $\text{m}/\text{s}^2$ ].

Prepadové množstvo cez prekážku (preliv) je ovplyvnené dispozičným usporiadaním prekážky, tvarom a dĺžkou prelivnej hrany a mierou zatopenia. Preto do prepadovej rovnice vstupujú súčinitele, ktoré tento vplyv zohľadňujú.

Pôdorysne môže byť prelivná hrana odklonená od priameho smeru. Toto riešenie zväčšuje dĺžku prelivnej hrany, avšak prúdnice menia smer, takže kapacita na jednotku dĺžky je menšia. Môže sa jednať o tieto typy prelivu (Obrázok 3):

- a) čelný,
- b) šikmý,
- c) zakrivený,
- d) zalomený,
- e) bočný.



**Obrázok 3: Typy prelivov podľa pôdorysného usporiadania [5]**

Súčiniteľ pôdorysnej šikmosti  $\sigma_s$  je závislý na pomernej prepadovej výške  $h/s$  (Obrázok 2) a uhlu odklonu  $\alpha$  (Obrázok 3) od brehovej čiary, Istomina preň udáva tabuľku (Tabuľka 1). Lomené prelivné hrany sa rozložia na časti a tie sa riešia samostatne. U oblúkových prelivných hrán považujeme za odchýlku  $\alpha$  uhol' dotyčnice s brehovou čiarou. [5]

**Tabuľka 1: Súčiniteľ pôdorysnej šikmosti [7]**

$h/s$	0,4	0,3	0,2	0,1
$\alpha = 45^\circ$	0,847	0,878	0,907	0,936
$\alpha = 60^\circ$	0,942	0,958	0,970	0,987
$\alpha = 75^\circ$	0,987	0,994	0,998	1,000

Nedokonalý alebo zatopený prepád nastáva pri zvýšení hladiny dolnej vody do úrovne, ktorá spôsobí ovplyvnenie prepádových charakteristík a znižuje kapacitu prelivu. [6]

Zníženie prepádového množstva spôsobené zatopením zohľadňuje súčiniteľ zatopenia  $\sigma_z$ .

Podľa Pavlovského, nedokonalý prepád nastáva, ak sú splnené podmienky [1]:

- $h_d > s$  a zároveň,
- $\frac{H}{s} < \left(\frac{H}{s}\right)_*$ .

**Tabuľka 2: Medzné hodnoty pre nedokonalý prepád cez ostrú hranu [1]**

$\frac{h}{s}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	3,00
$\left(\frac{H}{s}\right)_*$	1,00	0,90	0,83	0,78	0,75	0,73	0,68	0,67	0,67	0,71	0,85

Súčiniteľ zatopenia  $\sigma_z$  je závislý na pomere  $\frac{h_z}{h}$ , a čiastočne taktiež na tvare prelivnej hrany. Jeho orientačné hodnoty podľa Oficerova a Istominy udáva Tabuľka 3.

**Tabuľka 3: Súčiniteľ zatopenia pre prepad cez hať [5]**

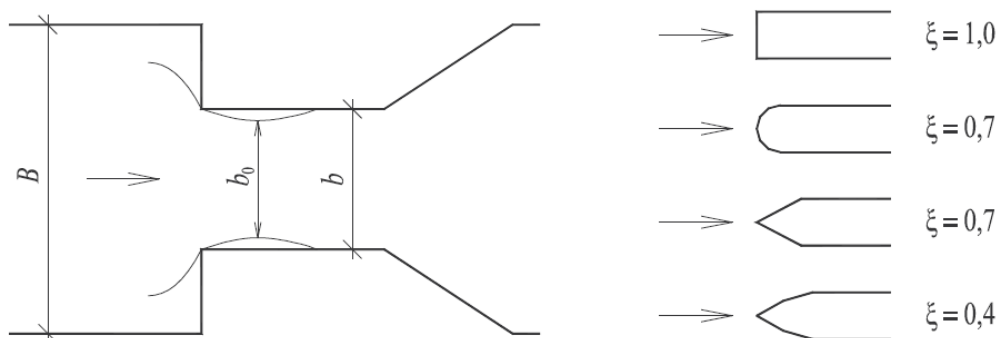
$h_z/h$	$\sigma_z$	$h_z/h$	$\sigma_z$	$h_z/h$	$\sigma_z$	$h_z/h$	$\sigma_z$	$h_z/h$	$\sigma_z$
0,400	0,990	0,650	0,940	0,740	0,869	0,820	0,756	0,900	0,575
0,450	0,986	0,660	0,930	0,750	0,858	0,840	0,719	0,920	0,515
0,500	0,980	0,680	0,921	0,760	0,846	0,850	0,699	0,940	0,449
0,550	0,970	0,700	0,906	0,780	0,820	0,860	0,677	0,950	0,412
0,600	0,960	0,720	0,886	0,800	0,790	0,880	0,629	1,000	0,000

Na prepadové množstvo majú taktiež vplyv aj bočné kontrakcie. Ak zúženie prietochného profilu nie je plynulé, prúdové vlákna nemôžu kopírovať ostré záhyby konštrukcie a zotrvačnosťou pokračujú aj v zúženom profile v pôvodných trajektóriách. Dochádza k odtrhnutiu prúdu od obtekaného objektu, čo má za následok kontrakciu lúča. Pri stenách sa vytvoria víry so zvislou osou. Musíme zaviesť účinnú šírku  $b_0$ , ktorú dostaneme po dosadení do vzorca [1]:

$$b_0 = b - 0,1\xi n_k h_0, \quad (3)$$

kde

- $b_0$  účinná šírka prelivnej hrany [m],
- $b$  celková šírka prelivnej hrany [m],
- $\xi$  súčiniteľ straty podľa tvaru bočných pilierov (Obrázok 4) [-],
- $n_k$  počet kontrakcií [-],
- $h_0$  energetická prepadová výška [m].



**Obrázok 4: Bočné kontrakcie a súčiniteľ bočného zúženia pri pilieri [1]**

Vplyv tvaru prelivnej hrany zahrňuje súčiniteľ prepadu. Ten sa môže v závislosti na tvare haťového telesa odlišovať, takisto vzorce pre vyčíslenie súčiniteľa sú závislé na type konštrukcie. Ďalej sa venujeme kruhovo zaoblenej hrane, aká sa nachádza aj na VD Koryčany. Kruhové zaoblenie koruny patrí k jednoduchým, ale hydraulicky účelným úpravám. Prepadový



lúč má plynulé vedenie a súčiniteľ prepadu dosahuje pomerne vysokých hodnôt. Avšak pri veľkých prepadových výškach, vzhľadom k polomeru zaoblenia  $r$ , môžu vznikať na korune prelivu podtlaky. Pre kruhové zaoblenie koruny udal Rehbock výraz pre súčiniteľ prepadu [7]:

$$m = \frac{2}{3} \left[ 0,312 + 0,09 \frac{h}{s_1} + \sqrt{0,30 - 0,01 \left( 5 - \frac{h}{r} \right)} \right], \quad (4)$$

kde

- $m$  súčiniteľ prepadu [-],
- $h$  výška prepadového lúču [m],
- $s_1$  výška prepadovej konštrukcie nad horným dnom [m],
- $r$  polomer prepadovej hrany [m].

Vzťah platí v medziach  $s_1 > r > 0,02$  m;  $\frac{h}{r} < \left( 6 - \frac{20r}{s_1 + 3r} \right)$ . Ak prevyšuje pomer  $\frac{h}{r}$ , lúč vody sa odtrháva a prepadový súčiniteľ je nižší. [6]

V prípade, že podmienky platnosti pre rovnicu podľa Rehbocka nebudú splnené, je možné využiť výskum o súčiniteli prepadu prelivu s kruhovo zaoblenou korunou z fyzikálnych experimentov od doc. Stara a dr. Koutkovej. Cieľom tohto výskumu bola snaha o vyjadrenie závislosti prepadového súčiniteľa  $m$  na štyroch premenných, a to prepadovej výške  $h$ , výške koruny prelivu nad horným  $s$  a dolným  $s_1$  dnom a na polomere prelivnej hrany  $r$ . Autori uvádzajú dva modely:

- vyjadrenie prepadového súčiniteľa  $m$  pomocou polynómu tretieho stupňa (*Model 1*),
- vyjadrenie prepadového súčiniteľa  $m$  pomocou nelineárneho regresného modelu (*Model 2*),

pričom odporúčajú v praxi vychádzať z *Modelu 2*, ktorý udáva bezpečnejšie hodnoty prepadového súčiniteľa. Tvar rovnice vyjadrujúcej prepadový súčiniteľ v *Modeli 2* [25]:

$$m = 0,349494 + 0,307084 \frac{x}{x^{1,62877} + y^{-1,45694} + 0,223402}, \quad (5)$$

kde

- $x = h/s_1$ ,
- $y = s_1/2r$ ,
- $s_1$  prevýšenie koruny prelivu nad horným dnom [m],
- $h$  prepadová výška [m],
- $r$  polomer kruhového zaoblenia koruny prelivu [m].

Aproximácia závislosti prepadového súčiniteľa *Modelom 2* lepšie vystihuje závislosť  $m=f(h/r, s_1/2r)$  ak je splnená podmienka  $1 \leq s_1/2r \leq 4$ . [25]

### B.3 Nerovnomerné prúdenie

Pre nerovnomerné prúdenie je charakteristická zmena rýchlosti pri stálom prietoku. Táto zmena môže byť spôsobená zmenou prietochného prierezu koryta, zmenou sklonu dna, drsnosti či prekážkou v toku. Plynulosť zmeny rýchlosti a malé zakrivenie prúdnic tak, že ich môžeme považovať za rovnobežné s dnom koryta, umožňuje predpokladať hydrostatické rozdelenie tlakov. Popritom ide o prúdenie ustálené, a teda hydraulické charakteristiky nie sú závislé na čase. [6]

Pri odvodení základnej diferenciálnej rovnice sa vychádza z Bernoulliho rovnice a z týchto predpokladov:

- sklon dna je malý, takže nezáleží na tom, či sa ako hĺbka prúdu uvažuje zvislica alebo kolmica ku dnu,
- drsnostný súčiniteľ nezávisí na hĺbke prúdu a je uvažovaný ako konštantný,
- súčiniteľ kinetickej energie (Coriolisovo číslo)  $\alpha$  je taktiež konštantný. [6]

Pri uvažovaní predchádzajúcich predpokladov môžeme zostaviť Bernoulliho rovnicu, ktorá má tvar [1]:

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{konšt}, \quad (6)$$

kde

$h$	polohová (geodetická) výška uvažovanej častice alebo ťažisko prietochného prierezu nad ľubovoľnou zrovnávanou rovinou [m],
$\frac{p}{\rho g}$	tlaková výška [m],
$\frac{u^2}{2g}$	rýchlostná výška [m].

Podľa Bernoulliho rovnice pre ustálené prúdenie ideálnej kvapaliny vyplýva, že pre všetky prierezy určitého prúdového vlákna je súčet polohovej, tlakovej a rýchlostnej výšky stály [1]:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (7)$$

Nerovnomerné prúdenie môžeme riešiť viacerými metódami. Najstaršou metódou riešenia nerovnomerného pohybu v prizmatických korytách je podľa Bachmeteva. Metódy Pavlovského a Chowa z tejto metódy vychádzajú a v podstate modifikujú Bachmetevovu metódu, pričom umožňujú všeobecný výpočet pre krivky vzdutia aj zníženia pri kladnom, nulovom aj

zápornom sklone dna. V tejto práci sa ďalej venujeme metóde po úsekoch, metóde podľa Hindsa a Favreho. [6]

### B.3.1. Riešenie nerovnomerného prúdenia metódou po úsekoch

Princípom tejto metódy je rozdelenie celej riešenej dĺžky úseku  $x$  na menšie úseky  $\Delta x$  (Obrázok 5). Rozdelenie celkového úseku je prevedené vložением viacerých profilov. Tieto profily nemôžu byť volené ľubovoľne, ale volia sa podľa charakteru pohybu a podľa jeho zmien. Výpočtové profily sa vkladajú:

- do smerových lomov,
- do výškových lomov,
- do drsnostných zmien.

Predpoklady:

- známa hĺbka v prvom profile (predstavuje okrajovú podmienku),
- sklon čiary energie je konštantný.

Známú hĺbku v počiatočnom profile zistíme ako:

- hĺbka vody pred haťou,
- kritická hĺbka vody pre prechode z riečného do bystrinného prúdenia,
- kritická hĺbka pri prechode z bystrinného do riečného prúdenia.

Postup výpočtu priebehu hladiny je v závislosti na režime prúdenia:

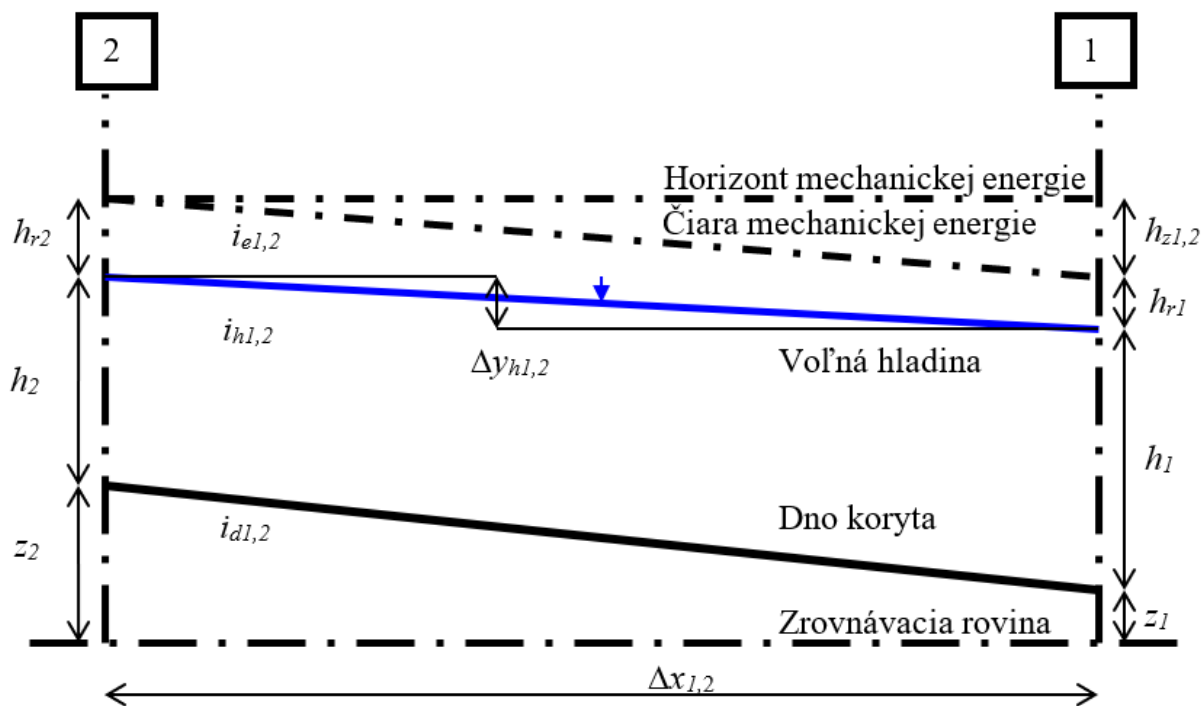
- pri riečnom prúdení vychádzame zo zadanej hĺbky v dolnom profile a pokračujeme smerom proti prúdu,
- pri bystrinnom prúdení vychádzame zo zadanej hĺbky v hornom profile a postupujeme smerom po prúde. [7]

Následne môžeme pre dva susedné profily zostaviť Bernuolliho rovnicu (Obrázok 5) [7]:

$$z_1 + h_1 + h_{r2} + h_{z1,2} = z_2 + h_2 + h_{r2}, \quad (8)$$

kde

$z_1, z_2$	geodetická výška profilu [m n. m.],
$h_1, h_2$	výška hladiny [m],
$h_{r1}, h_{r2}$	rýchlostná výška [m],
$h_{z1,2}$	stratová výška [m].



Obrázok 5: Schéma k zostaveniu Bernuolliho rovnice [7]

Rýchlostná výška [7]:

$$h_r = \frac{\alpha v^2}{2g}, \quad (9)$$

kde

- $h_r$  rýchlostná výška [m],
- $\alpha$  Coriolisovo číslo [-],
- $v$  rýchlosť [m/s],
- $g$  gravitačné zrýchlenie [m/s<sup>2</sup>].

Rozdiel hladín na úseku 1 a 2 je teda [7]:

$$\Delta y_{hl,2} = h_{r1} + h_{z1,2} - h_{r2} \quad (10)$$

kde

- $\Delta y_{hl,2}$  rozdiel hladín [m],
- $h_{r1}, h_{r2}$  rýchlostná výška [m],
- $h_{z1,2}$  stratová výška [m].

Stratová výška sa rozdelí na stratovú výšku miestnu  $h_{zm}$  a trením  $h_{zt}$  [7]:

$$h_{z1,2} = h_{zm1,2} + h_{zt1,2}. \quad (11)$$

Miestne straty dosiahneme ako [7]:

$$h_{zm1,2} = \mp \xi \left| \frac{v_1^2 + v_2^2}{2g} \right|, \quad (12)$$

kde

- $h_{zm1,2}$  miestna stratová výška [m],  
 $\zeta$  súčiniteľ miestnych strát [-], kde kladná hodnota platí u krivky vzduťia,  
záporná hodnota u krivky zníženia,  
 $v_{1,2}$  rýchlosť prúdenia [m/s],  
 $g$  gravitačné zrýchlenie [m/s<sup>2</sup>].

Straty trením vznikajúce po dĺžke úseku vypočítame podľa [7]:

$$h_{zt1,2} = i_{e1,2} x_{1,2}, \quad (13)$$

kde

- $h_{zt1,2}$  stratová výška trením [m],  
 $i_{e1,2}$  skon čiarj mechanickej energie [-],  
 $\Delta x_{1,2}$  dĺžka úseku [m].

Výpočet sklonu čiarj mechanickej energie v úseku podľa vzorca [7]:

$$i_{e1,2} = \frac{Q_{1,2}^2}{C_{1,2}^2 S_{1,2}^2 R_{1,2}}, \quad (14)$$

sa prevádza najčiasnejšie na základe priemerných hodnôt:

- $C$  Chézyho rýchlostný súčiniteľ ( $C_{1,2} = \frac{C_1 + C_2}{2}$ ) [m<sup>0,5</sup>/s],  
 $S$  prietochný prierez ( $S_{1,2} = \frac{S_1 + S_2}{2}$ ) [m<sup>2</sup>],  
 $R$  hydraulický polomer ( $R_{1,2} = \frac{R_1 + R_2}{2}$ ) [m],  
 $Q$  prietok ( $Q_{1,2} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$ ) [m<sup>3</sup>/s].

Hydraulický polomer je [7]:

$$R = \frac{S}{O}, \quad (15)$$

kde

- $R$  hydraulický polomer [m],  
 $S$  prietochný prierez [m<sup>2</sup>],  
 $O$  omočený obvod [m].

Chézyho rýchlostný súčiniteľ  $C$  môžeme stanoviť napríklad z rovnice podľa Manninga [7]:

$$C = \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n}, \quad (16)$$

kde

- $n$  Manningov súčiniteľ drsnosti [-].

Z predpokladu vzniku kritickej hĺbky na začiatku výpočtového úseku volíme okrajovú podmienku  $h_k$  [7]:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g b^2}}, \quad (17)$$

kde

$h_k$       kritická hĺbka [m],

$b$         šírka žľabu [m].

Výpočet realizujeme postupným odčítaním alebo pričítaním prietoku [7]:

$$Q_{p1,2} = \frac{Q}{b} \Delta x_{1,2}. \quad (18)$$

Zhrnutie postupu výpočtu (počiatočný profil je označený indexom 1, nasledujúci profil označený indexom 2) :

- dĺžka riešeného úseku  $x$  sa rozdelí na kratšie úseky  $\Delta x$ ,
- vychádzame zo známej polohy hladiny  $h_{k1}$  a odhadneme veľkosť  $\Delta y_{h1,2}$ ,
- použitím  $\Delta y_{h1,2}$  vypočítame potrebné charakteristiky prierezu 2, a z toho potrebné priemerné charakteristiky,
- riešime rovnicu (10), pričom ak vyjde odlišná hodnota  $\Delta y_{h1,2}$  od hodnoty odhadnutej, postup opakujeme, až do akceptovateľnej zhody odhadnutej a vypočítanej hodnoty  $\Delta y_{h1,2}$ ,
- vypočítané  $\Delta y_{h1,2}$  s požadovanou úrovňou zhody určuje úroveň hladiny v profile 2, tento profil sa stáva počiatočným profilom pri výpočte ďalšieho úseku.

### **B.3.1.a Problematika stanovenia drsnosti koryta**

Pri vyjadrení Chézyho rýchlostného súčiniteľa  $C$  narazíme na problém stanovenia hodnoty Manningovho súčiniteľa drsnosti  $n$ . Chézyho rýchlostný súčiniteľ v podstate vyjadruje hydraulické odpory. Na celkové hydraulické odpory má vplyv:

- povrchová drsnosť, predstavujúca výslednicu odporov jednotlivých zrn materiálu koryta,
- tvarové odpory, spôsobené väčšími drsnostnými prvkami (veľké kamene, balvany, prekážky v prúde)
- rôzne typy dnových útvarov a aluviálnych tokov,
- odpory pri obtekaní prekážok u neprizmatických korýt, oblúky a pod.,
- odpory spôsobené pohybom splavenín a deformáciami koryta. [8]

Drstnostný súčiniteľ  $n$  je vyjadrovaný jednou hodnotou, ktorá musí postihnúť všetky vplyvy na hydraulické odpory. Toto vyjadrenie býva veľmi náročné. Možnosti určenia Manningovho súčiniteľa drsnosti:

- empirické vzorce,
- metóda podľa Cowana,
- tabuľky,
- katalógy – Barnesov prístup. [8]

Empirické vzorce, ktoré zahrňujú charakteristické zrno materiálu dna, ale aj ďalšie parametre, ktoré vychádzajú z hydraulických parametrov stanovili napr. Jobson a Froehlich (1988) alebo Griffiths (1981). Niekoľko ďalších autorov zahrnulo do svojich vzorcov sklon hladiny alebo sklon čiary energie, jedná sa o vzťahy podľa Braya (1979), Sauera (cit. v Coon 1998), Jarretta (1984) a Mattasa (1998, 2003). Každý vzťah je obmedzený rozsahom platnosti, a teda nie je úplne univerzálny. [8]

Cowanova metóda predstavuje štandardizovaný postup pre určenie súčiniteľa drsnosti  $n$ . Vychádza z identifikácie niekoľkých parametrov, ktoré majú na súčiniteľ drsnosti zásadný vplyv:

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4)m_5, \quad (19)$$

kde

$n_0$	bazálna hodnota pre priame, pravidelné, hladké koryto odpovedajúce materiálu,
$n_1$	zohľadňuje vplyv nerovností povrchu,
$n_2$	variácie tvaru a veľkosti priečneho profilu,
$n_3$	prekážky,
$n_4$	vplyv vegetácie a pomeru prúdenia,
$m_5$	korekčný faktor zohľadňujúci zakrivenie (meandrovanie) koryta.

Hodnoty jednotlivých parametrov sú stanovené tabuľkou. Táto metóda však neuvažuje s vplyvom splavenín a plavenín a výsledky u širokých korýt sú menej presné. [8]

Tabuľky priradujú k slovnému popisu koryta, či jeho materiálu číselnú hodnotu  $n$ , ktorá vyjadruje dobrý, priemerný alebo zlý stav. Nevýhodou tejto metódy je stručný popis stavu koryta, ktorý dáva nejasnú predstavu o drsnosti. Odhadnutie súčiniteľa drsnosti je vždy značne subjektívne. Pre úplnosť uvádzame hodnoty Manningovho súčiniteľa drsnosti v Tabuľke 4 v závislosti na popise koryta, príp. objektu. [1], [8]

**Tabuľka 4: Drsnostný súčiniteľ  $n$  [1]**

<b>Popis koryta</b>	<b><math>n</math></b>
výnimočne hladké steny, smaltované povrchy	0,009
čisto ohobľované dosky, dobrá omietka z čistého cementu	0,010
dobrá cementová omietka, hobľované dosky, liatinové a oceľové trubky dobre spojované	0,011
nehobľované dosky, vodovodné trubky v bežných podmienkach – bez inkrustácie, čisté stokové trubky	0,012
kvádrové murivo, dobre prevedené tehelné murivo, stokové trubky v bežných podmienkach, trochu zanesené trubky vodovodné, hladký betón	0,013
znečistené trubky vodovodné aj stokové, obetónovanie kanálov bežného prevedenia	0,014
obyčajné telové murivo, obloženie z pritesaného kameňa	0,015
dobré lomové murivo, staré tehelné murivo, pomerne hrubé obetónovanie, výnimočne hladká skala	0,017
obyčajné lomové murivo, kamenní dlažba, kanály pomerne hladko vyrúbané v skale, kanály v uľahnutom štrku alebo v uľahnutej zemine v dobrom stave	0,020
kanály v hutnej zemine alebo uľahnutom štrku, veľké zemné kanály veľmi dobre udržiavané	0,023
dobré murivo na sucho veľké zemné kanály pri priemernej údržbe, malé zemné kanály pri dobrej údržbe, rieky v najlepšom stave	0,025
veľké zemné kanály s podpriemernou údržbou, malé zemné kanály priemerne udržiavané	0,028
zemné kanály v pomerne zlom stave	0,030
kanály v zlom stave (nepravidelný prierez, zarastené, zanesené), rieky v dobrých podmienkach, ale prúd je čiastočne ovplyvnený kameňmi alebo rastlinami	0,035
kanály vo výnimočne zlom stave (výmole, nánosy, zarastené koryto, zanesené kameňmi), rieky s horšími podmienkami prietoku	0,040
horské bystriny	0,080

V neposlednom rade treba spomenúť stanovenie súčiniteľa drsnosti  $n$  na základe Barnesovho prístupu. Jedná sa o niekoľko príručiek a katalógov s fotografiami typických riečnych úsekov, priečnymi rezmi a ďalšími relevantnými údajmi. Na základe týchto fotografií stanovíme najviac podobný typ riešeného koryta a teda aj jeho drsnosť. Táto metóda je opäť zaťažená chybou subjektívneho stanovenia podobnosti korýt. [8]

Voľba súčiniteľa drsnosti je vždy problematická a založená na skúsenostiach, ktoré sa získavajú dlho a náročne.



### B.3.2. Riešenie nerovnomerného prúdenia metódou podľa Hindsa

Pre výpočet priebehu hladín v spadisku musíme preskúmať, aký druh prúdenia nastane. V spadisku najčastejšie vzniká podkritický prietok. Pre tento druh prúdenia vieme použiť teoretické rovnice, ktoré dávajú postačujúci výsledok.

Hinds na základe detailného rozboru prúdenia v prepadoch žľaboch zistil, že základná diferenciálna rovnica, ktorá v podstate správne vystihuje študovaný jav, je založená na impulzovej vete. Pri odvodení rovnice zaviedol nasledovné predpoklady:

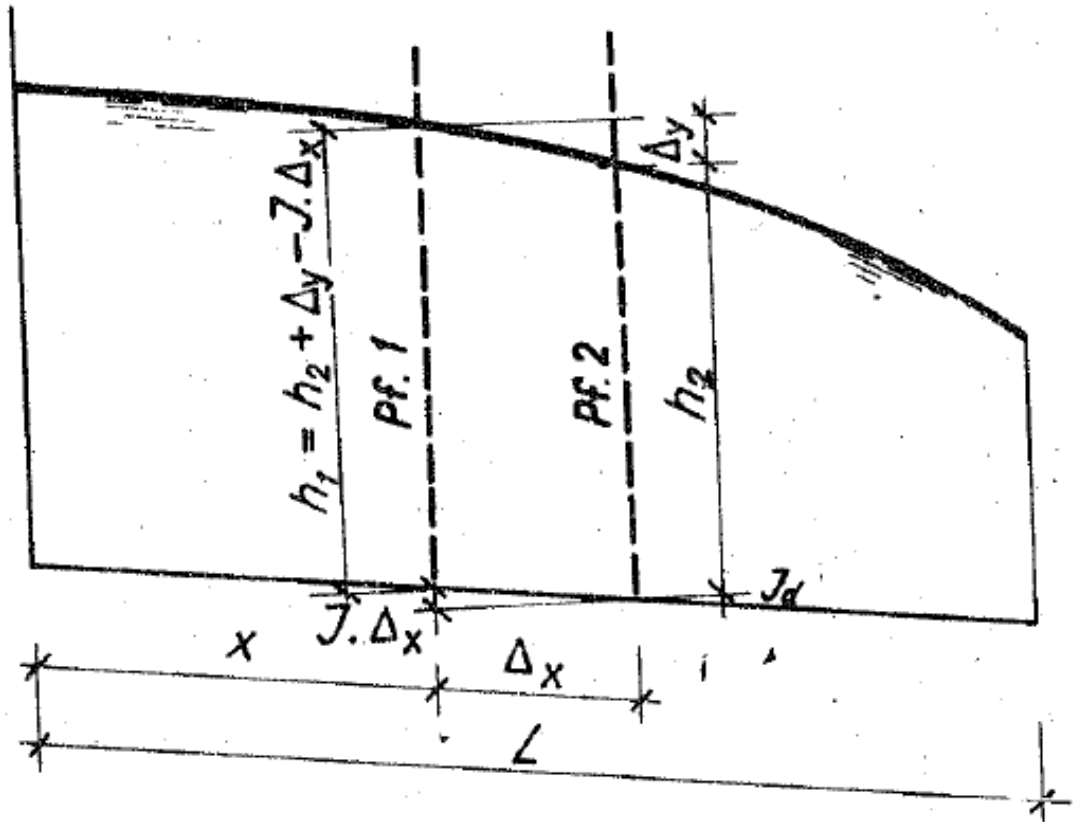
- prúdenie v prepadovom žľabe je rovinné,
- hladina v priečných profiloch je vodorovná,
- rýchlosti v smere toku sú rovnomerne rozdelené,
- tlak v jednotlivých prierezoch je hydrostatický,
- strhávanie vzduchu a straty trením v prepadoch žľaboch možno zanedbať. [3]

Výslednú rovnicu udáva v tvare (Obrázok 6) [3]:

$$\Delta y = \frac{Q_1}{g} \frac{v_1 + v_2}{Q_1 + Q_2} \left( \Delta v + \frac{v_2 q \Delta x}{Q_1} \right), \quad (20)$$

kde

$\Delta y$	rozdiel hladín medzi profilmi 1 a 2 [m],
$\Delta x$	vzdialenosť medzi profilmi 1 a 2 [m],
$Q_1, v_1$	prietok vody [m <sup>3</sup> /s] a stredná profilová rýchlosť [m/s] v profile 1,
$Q_2, v_2$	prietok vody [m <sup>3</sup> /s] a stredná profilová rýchlosť [m/s] v profile 2,
$q$	špecifický prietok vody [m <sup>2</sup> /s],
$\Delta v = v_2 - v_1$ ,	
$Q_2 = Q_1 + q \Delta x$ .	



Obrázok 6: Schéma pre výpočet hladín v prepadovom žľabe [3]

V prípade dlhých spadísk musíme uvažovať pri výpočte aj s vplyvom trenia. Ak uvažujeme, že straty trením v spadisku sú totožné ako pri rovnomernom prúdení, môžeme použiť Manningovu rýchlostnú rovnicu. V takomto prípade dostaneme rovnicu pre výpočet priebehu hladín v tvare [3]:

$$\Delta y = \frac{Q_1}{g} \frac{v_1 + v_2}{Q_1 + Q_2} \left( \Delta v + \frac{v_2 q \Delta x}{Q_1} \right) + \Delta y', \quad (21)$$

$$\Delta y' = \frac{v_s^2 n_s^2}{R_s^{\frac{4}{3}}} \Delta x, \quad (22)$$

kde

- |     |  |
|-----|--|
| $n$ | Manningov súčiniteľ drsnosti [-],              |
| $R$ | hydraulický polomer [m],                       |
| $s$ | index (stredné hodnoty v uvažovaných úsekoch). |

Stanoveniu hodnoty Manningovho súčiniteľa drsnosti sa podrobne venujeme v kapitole B.3.1.a.

### B.3.3. Riešenie nerovnomerného prúdenia metódou podľa Favreho

Favre odvodil úplnejšiu rovnicu, v ktorej zahrňuje vplyv drsnosti a aj vplyv zužovania spadiska smerom proti prúdu. Drsnosť vyjadruje pomocou Mannigovej rovnice, a tak Favreho rovnica nadobúda tvar [3]:

$$\Delta y = \frac{v_s^2 n_s^2}{R_s^3} \Delta x + \left(1 - \frac{v_b}{v_s}\right) \frac{Q_2^2 Q_1^2}{2 g F_s^2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 g}, \quad (23)$$

$$v_b = \sqrt{2 g} h_s \tan \varphi, \quad (24)$$

kde

$\varphi$	uhol, ktorý zvierá pôdorysne prelivná hrana s osou spadiska [°],
$g$	gravitačné zrýchlenie [m/s <sup>2</sup> ],
$h$	hĺbka vody [m],
$F$	prietoková plocha [m <sup>2</sup> ],
$S$	index (stredné hodnoty v uvažovaných úsekoch).

Výsledky, ktoré sa dosiahnu výpočtom podľa Hindsa a podľa Favreho, sú pre prax dostatočné. Podľa Favreho rovnice sú výsledné hladiny o niečo vyššie, ako hladiny vypočítané podľa Hindsa. Rozdiel narastá so zväčšujúcou sa dĺžkou spadiska a pri zužovaní spadiska proti prúdu. Rovnice odvodené Hindsom a Favreom možno použiť pre všetky tvary korýt aj pri zmenách sklonu dna a šírky spadiska. Nevýhodou týchto rovníc je zdĺhavosť riešenia spôsobená výpočtom priebehu hladiny postupným približovaním. Pri výpočte priebehu hladín v oblasti podkritického prúdenia je nutné vychádzať z hĺbky vody na konci spadiska, ktorá by mala predstavovať hĺbku kritickú. [3]

## C. MATEMATICKÉ MODELOVANIE

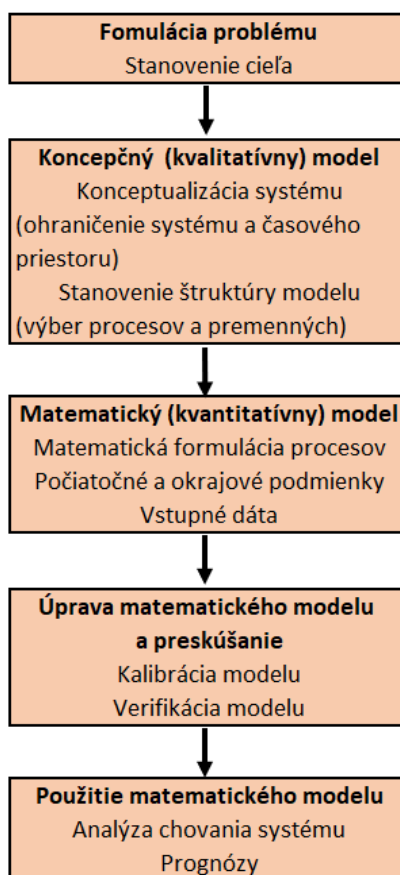
Modelovanie je proces, pri ktorom sa reálnemu systému priraduje iný systém, nazývaný model. Model účelovo zjednodušuje zobrazenie reálneho alebo abstraktného sveta. K riešeniu hydrodynamických problémov sa používajú:

- fyzikálne modely založené na teórii podobnosti,
- matematické modelovanie,
- experimentálny výskum prúdenia na prototype. [9]

Matematické modelovanie je teoretický nástroj, ktorý umožňuje riešiť zložité fyzikálne a technické úlohy. Matematický model využíva k popisu matematické prostriedky, a pozostáva z:

- vlastného modelu prostredia,
- matematického vyjadrenia fyzikálnych vzťahov medzi veličinami, ktoré sa v skúmanom jave vyskytujú,
- diskretizácie matematického modelu a metódy numerického riešenia sústavy rovníc, na ktoré diskretizácia modelu vedie. [9]

Schéma postupu zostavenia matematického modelu je zobrazená na Obrázku 7:



Obrázok 7: Stavba matematického modelu [10]

Formulácia problému a stanovenie cieľu, ktorý má byť modelovaním dosiahnutý, je dôležitý faktor v procese modelovania. Súčasne so stanovením cieľu, by mala byť určená aj presnosť modelu a predpokladaná doba, počas ktorej má model slúžiť danému účelu. [11]

Koncepcný model by mal predstavovať súhrn hypotéz o správaní skúmaného systému, prehľadne zobrazovať fungovanie systému a jeho premenných. Obsahuje súbor veličín, ktoré na systém vplyvujú. Môže sa jednať o veličiny extenzívne, intenzívne alebo externé. [10]

Matematická formulácia problému pri modelovaní hydrodynamických javov využíva ako základný teoretický aparát zákon zachovania hmotnosti, zákon zachovania hybnosti, zákon zachovania energie a stavové rovnice (pozri C.1). K riešeniu týchto rovníc musia byť prijaté zjednodušujúce predpoklady. Následne prebieha výber a aplikácia metódy riešenia. Pri väčšine úloh sa využívajú metódy numerické tzn. metóda diferenčná, metódy variačné a metódy spektrálne. [9]

Kalibrácia modelu predstavuje získanie dát systematickým pozorovaním a meraním na reálnom objekte. Výsledkom kalibrácie sú parametre modelu. [9]

K následnej verifikácii modelu sa používajú iné dáta, ako boli použité pri kalibrácii. Verifikácia predstavuje overenie funkčnosti modelu. Ak model udáva výsledky v dostatočnej miere zhody s výsledkami nameranými, môžeme model považovať za verifikovaný a môže sa využiť k predikcii. [9]

Medzi kalibráciou modelu a verifikáciou môžeme vykonať citlivostnú analýzu. Citlivostná analýza slúži k posúdeniu závislosti vplyvu vstupných parametrov na výsledky riešenia. Účelom je teda určiť citlivosť výstupov na jednotlivé alebo kombinované vstupy. K posúdeniu tejto závislosti sa využívajú metódy štatistickej analýzy.

Matematickým modelovaním vieme predpovedať účinky prúdenia na vodohospodárske stavby, taktiež simulovať prúdenie za účelom návrhu tvaru a rozmerov vodohospodárskych stavieb, stanoviť straty energie vplyvom prúdenia, posúdiť parametre ovplyvňujúcich hydrobiologické javy v kvapaline, ale aj stanoviť vplyv ľudskej činnosti na prúdenie a čistotu vody. [11]

### **C.1 Základné rovnice hydrodynamiky**

Hydrodynamika sa zaoberá skúmaním rovnováhy a pohybu kvapalín a vzájomným pôsobením kvapalín a tuhých telies. Avšak hydrodynamika neskúma pohyb jednotlivých molekúl kvapaliny, ale zavádza pojem *elementárny objem kvapaliny*. Elementárny objem kvapaliny je, vzhľadom k oblasti prúdenia, tak malý, že sa na ňom s presnosťou I. rádu môžu aproximovať neznáme funkcie konštantou. [9]

Hydrodynamika uvažuje, že kvapaliny odolávajú pomerne veľkým tlakovým silám, pričom podstatne nemenia svoj objem. Kvapaliny teda považujeme za málo stlačiteľné. Taktiež dokážu prenášať ťahové napätia iba vo veľmi malej miere, a preto neuvažuje s pevnosťou kvapaliny v ťahu. [11]

K zostaveniu základných rovníc hydrodynamiky sa používajú všeobecne platné zákony klasickej mechaniky:

- zákon zachovania hmotnosti,
- zákon zachovania hybnosti,
- zákon zachovania energie,
- stavové rovnice. [9]

### C.1.1. Zákon zachovania hmotnosti

Rovnica kontinuity prúdenia je diskretným vyjadrením 1. zákona zachovania. Zo zákona zachovania hmotnosti prúdiacej kvapaliny vyplýva, že rozdiel hmotnosti kvapaliny do elementu vstupujúcej a z elementu vystupujúcej za časový interval  $dt$ , sa musí rovnať časovej zmene hmotnosti kvapaliny obsiahnutej v tomto elemente (Obrázok 8). [9]

$$\boxed{\text{hmotnosť kvapaliny vstupujúcej do elementu}} - \boxed{\text{hmotnosť kvapaliny vystupujúcej z elementu}} + \boxed{\text{zdroj}} = \boxed{\text{časová akumulácia hmotnosti kvapaliny v elemente}}$$

**Obrázok 8: Zákon zachovania hmotnosti**

Rozdiel medzi hmotnosťou kvapaliny do elementu vstupujúcej a z elementu vystupujúcej v smere osi  $x$ , za časový interval  $dt$  (Obrázok 9), môžeme vyjadriť ako [9]:

$$\rho v_x dy dz dt - \left( \rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt = - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dy dz dt, \quad (25)$$

kde

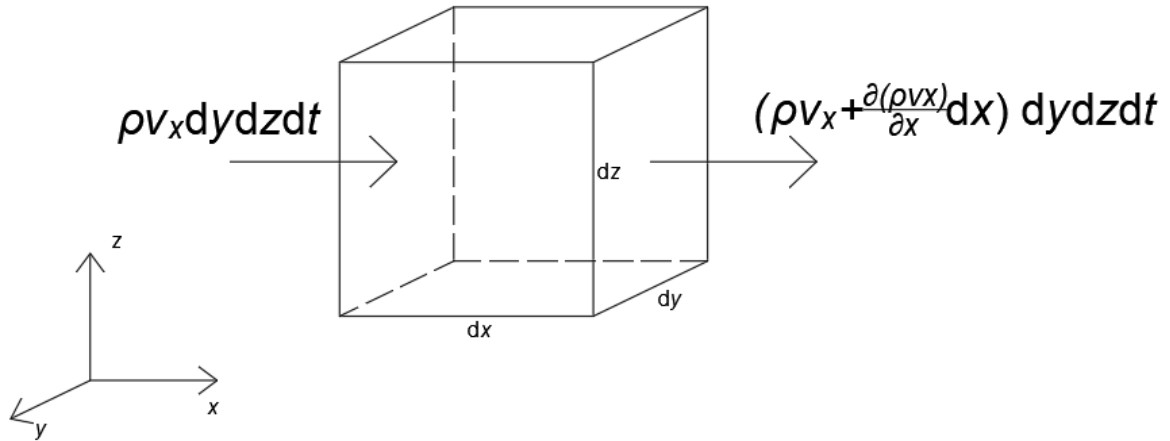
$v_x(x,y,z,t)$  zložka vektoru rýchlosti v smere osy  $x$ ,

$\rho(x,y,z,t)$  hustota, ktorá je funkciou tlaku  $p$  a teploty  $T$ .

Obdobným spôsobom môžeme vyjadriť rozdiel hmotnosti kvapaliny do elementu vstupujúcej a z elementu vystupujúcej v smere osi  $y$  a  $z$ , za časový interval  $dt$  [9]:

$$\bullet - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx dy dz dt, \quad (26)$$

$$\bullet - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx dy dz dt. \quad (27)$$



**Obrázok 9: Spojitosť prúdu v elemente [9]**

Časovú zmenu hmotnosti kvapaliny obsiahnutej v elemente môžeme vyjadriť:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (28)$$

Porovnaním rovnice (25), (26), (27) a rovnice (28) získame [9]:

$$-\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (29)$$

Predpokladá sa, že oblasť riešenia je vzhľadom k danej súradnicovej sústave a k času konštantná, preto môžeme deliť výrazom  $dx dy dz dt$ . Ďalším predpokladom je konštantná hustota, a teda nestlačiteľnosť kvapaliny. Inými slovami, predpokladané tlakové zmeny sú tak malé, že zmeny hustoty, ktoré vyvolajú, sú zanedbateľné. Ak sú rýchlosti prúdenia omnoho menšie ako rýchlosť zvuku v rovnakom prostredí, nie je nutné sa so zmenami hustoty zaoberať a aproximácia konštantnou hodnotou  $\rho$  plne vyhovuje. [6]

Po prijatí predchádzajúcich predpokladov obdržíme diferenciálnu rovnicu popisujúcu zákon zachovania hmotnosti kvapaliny, nazývanú tiež ako rovnica kontinuity pre nestlačiteľnú kvapalinu:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (30)$$

ktorá platí pre ustálené aj neustálené prúdenie a pre konštantnú hustotu prúdiacej kvapaliny.

### **C.1.2. Zákon zachovania hybnosti**

V dynamike kvapalín sa sleduje infinitesimálny kontrolný element vyrezaný z oblasti prúdenia a uvažuje sa jeho dynamická rovnováha pri jeho posunutí a pri jeho pretvorení. Veta o hybnosti hovorí, že časová zmena (prírastok) úhrnnej hybnosti sústavy hmotných bodov sa rovná výslednici (impulzu) vonkajších síl pôsobiacich na sústavu, a má s ňou rovnaký smer. Vnútorne sily sa podľa princípu akcie a reakcie vyrušia. Veta o hybnosti sa vzťahuje na pomery

na plochách kontrolného elementu, takže nie je nutné poznať priebeh prúdenia. [6]  
Z Newtonovho druhého pohybového zákona teda plynie [9]:

$$F_i - \frac{D}{Dt}(mv_i) = 0, \quad (31)$$

kde

$F_i$  zložka vektoru sily,  
 $m$  hmotnosť,  
 $v_i$  vektor rýchlosti.

Objem  $dV$  infinitesimálneho objemu uvažujeme ako  $dx dy dz$ , a hmotnosť ako  $dm$ . Ak prijmeme predpoklad, že hmotnosť  $m$  je konštantná, po aplikácii druhého Newtonovho zákona rovnica (31) nadobudne formu [9]:

$$dF_i = dm \frac{Dv_i}{Dt}. \quad (32)$$

Celkové zrýchlenie v danom bode vyjadruje substanciálna (materiálová) derivácia zložky rýchlosti  $v_i$ . Materiálová derivácia je zložená z lokálnej a konvektívnej zložky zrýchlenia. Konvektívna zložka je časť zrýchlenia, ktorá vzniká prúdením častíc do miest s inou rýchlosťou. Lokálna zložka predstavuje podiel zrýchlenia, ktorý vyplýva z časovej zmeny v pôvodnom mieste častice. Materiálovú deriváciu môžeme teda definovať ako [9]:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (33)$$

kde

$\frac{\partial v_i}{\partial t}$  lokálna zložka zrýchlenia,  
 $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  konvektívna zložka zrýchlenia.

Pre ďalší člen rovnice (32) platí [9]:

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz, \quad (34)$$

kde

$\rho$  hustota kvapaliny.

Na infinitesimálny kontrolný element, ktorý je vyrezaný z oblasti prúdenia všeobecne pôsobia tieto sily:

- povrchové sily (tlakové, šmykové viskózne sily),
- objemové sily (gravitačné, Coriolisove sily, elektromagnetické sily).

Povrchové sily vyjadrujú interakciu elementu s okolím. Tieto sily pôsobia na povrch kontrolného elementu a užitím tenzorového zápisu ich vyjadríme ako [9]:

$$dF_{si} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dx dy dz, \quad (35)$$



kde

$dF_{si}$  zložka vektoru sily povrchového zaťaženia,  
 $\sigma_{ij}$  symetrický tenzor napätia.

Objemové sily pôsobia na celý objem kontrolného elementu. Použitím tenzorového zápisu dostaneme [9]:

$$dF_{bi} = dm f_i = f_i \rho dx dy dz, \quad (36)$$

kde

$dF_{bi}$  zložka vektoru sily objemového zaťaženia,  
 $f_i$  zložky vektoru objemového zaťaženia vzťahujúceho sa na jednotku hmotnosti.

Sčítaním povrchových a objemových síl pôsobiacich na infinitesimálny kontrolný element získame podmienku rovnováhy v smere súradných os [9]:

$$dF_i = dF_{bi} + dF_{si}. \quad (37)$$

Dosadením rovnice (31), (32), (33) a (34) do rovnice (30) a následným vydelením kontrolným objemom  $dV=dx dy dz$  získame [9]:

$$f_i \rho + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad (38)$$

čo predstavuje rovnicu hybnosti pre pohybujúcu sa kvapalinu.

### C.1.3. Zákon zachovania energie

K modelovaniu neizotermických dejov musíme použiť zákon zachovania energie. Tento zákon hovorí o tom, že energia jednak nemôže vzniknúť z ničoho a nemôže sa ani vytratiť. Ak vezmeme uzavretú a izolovanú sústavu, energia v nej je stále konštantná. V tejto sústave však môžeme pozorovať premenu jedného druhu energie na iný druh, pričom prírastok jednej energie predstavuje úbytok druhej. [9]

Prvá hlavná termodynamická veta [9]:

$$dQ = dE + dA, \quad (39)$$

kde

$Q$  teplo pridané do systému,  
 $E$  vnútorná energia systému,  
 $A$  práca vykonaná vonkajšími silami.

Pre účely modelovania neizotermických javov uvedieme rovnicu zachovania energie v tvare [11]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} + S_\phi, \quad (40)$$

kde

- $\phi$  energia (tepelná, kinematická turbulentná,...),
- $\lambda$  difúzia,
- $S_\phi$  objemový zdroj.

Zákon zachovania mechanickej energie predstavuje Bernoulliho rovnica bližšie popísaná v kapitole B.3.1.

### C.1.4. Stavové rovnice

V jednozložkovej sústave je stavové chovanie vyjadrené závislosťou medzi tromi premennými:

- tlakom  $p$ ,
- teplotou  $T$ ,
- objemom  $V$ .

Pre kvapalinu v rovnováhe môžeme teda zostaviť všeobecnú stavovú rovnicu:

$$f(p, T, V) = 0. \quad (41)$$

Kvapalina sa vyznačuje svojou objemovou stálosťou, a teda aj stálosťou hustoty  $\rho$ . Hustota sa mení v závislosti na zmene tlaku  $p$  a teploty  $T$ , avšak vo väčšine prípadoch môžeme vplyv tlaku a teploty na vlastnosti kvapaliny zanedbať. V takomto prípade prejde stavová rovnica pre kvapaliny do tvaru [9]:

$$\rho = \text{konšt.} \quad (42)$$

### C.2 Navier – Stokesovy rovnice

Navier – Stokesovy rovnice sú najvšeobecnejšie rovnice pohybu newtonovskej kvapaliny. Pre newtonovské kvapaliny platí priama úmernosť medzi šmykovým napätím a gradientom rýchlosti. Navier – Stokesovy rovnice dostaneme dosadením konštitutívnych vzťahov do rovnice hybnosti.

Konštitutívny vzťah vyjadruje závislosť medzi tenzorom napätia  $\sigma_{ij}$  a tenzorom rýchlosti pretvorenia  $\varepsilon_{ij}$ . Pre spomínanú newtonovskú kvapalinu môžeme uviesť konštitutívny vzťah:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda(\rho, T)\dot{\varepsilon}_v\delta_{ij} + 2\mu(\rho, T)\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (43)$$

kde

$\sigma_{ij}$	tenzor napätia,
$p$	tlak,
$\delta_{ij}$	Kroneckerovo delta,
$\lambda(\rho, T)$	súčiniteľ rýchlosti objemového pretvorenia,
$\dot{\epsilon}_v$	rýchlosť objemového pretvorenia,
$\mu(\rho, T)$	súčiniteľ dynamickej viskozity,
$\dot{\epsilon}_{ij}$	tenzor rýchlosti pretvorenia.

Aritmetický priemer zložiek normálového napätia predstavuje:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p + \lambda \dot{\epsilon}_v + \frac{2}{3} \mu \dot{\epsilon}_v. \quad (44)$$

Nakoľko tento aritmetický priemer je rovný tlaku  $p$  v kvapaline ( $\sigma = -p$ ), môžeme uvažovať súčiniteľ rýchlosti objemového pretvorenia  $\lambda$  ako [9]:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu. \quad (45)$$

Ďalej uvažujeme tenzor rýchlosti pretvorenia  $\dot{\epsilon}_{ij}$  ako lineárnu kombináciu prvých partiálnych derivácií zložiek vektoru rýchlosti  $v_i$  [11]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (46)$$

Dosadením rovnice (45) a (46) do konštitutívneho vzťahu (43) a následným dosadením do rovnice hybnosti (38) získame Navier – Stokesovy rovnice, ktoré vyjadrujú vzťah medzi objemovými, tlakovými, odporovými a zotrvačnými silami prúdiacej kvapaliny [9]:

$$f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial \mu \epsilon_v}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (47)$$

kde

$f_i$	zrýchlenie vyvolané objemovými silami,
$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$	zrýchlenie vyvolané tlakovými silami,
$-\frac{2}{3\rho} \frac{\partial \mu \epsilon_v}{\partial x_i}$	zrýchlenie vyvolané objemovými zmenami kvapaliny,
$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]$	zrýchlenie vyvolané tvarovým pretvorením kvapaliny,
$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$	zrýchlenie vyvolané zotrvačnými silami.

V sústave Navier – Stokesových rovníc sú štyri neznáme veličiny ( $v_x, v_y, v_z, p$ ). Známa musí byť kinematická viskozita  $\nu$ , merná hmotnosť kvapaliny  $\rho$  a okrajové podmienky. Všeobecne nie sú Navier – Stokesove diferenciálne rovnice riešiteľné. Analytické riešenie je možné pri jednoduchších prípadoch laminárneho prúdenia, zložitejšie prípady laminárneho prúdenia sú riešiteľné numerickými metódami. Ak chceme Navier – Stokesove rovnice riešiť pre turbulentné prúdenie je potrebné rovnice doplniť prídavným turbulentným napätím, ktoré vzniká fluktuáciou prúdu (Reynoldsove rovnice). [12]

### C.3 Reynoldsove rovnice

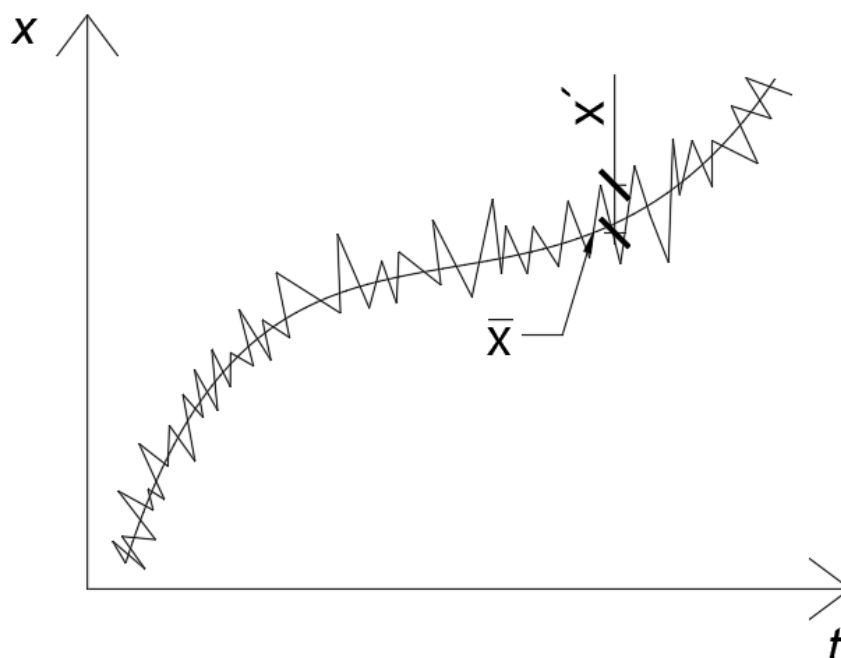
Pre popis turbulentného prúdenia sú dôležité stredné parametre prúdenia. Pri riešení pohybových rovníc, popisujúcich náhodné nestacionárne trojrozmerné turbulentné prúdenie je možné využiť štatistický prístup, ktorý podľa Reynoldsa spočíva v rozdelení okamžitých hodnôt nestacionárnych veličín na strednú a flukтуаčnú časť (Obrázok 10). [13]

Ak  $X$  predstavuje okamžitú hodnotu náhodnej veličiny, potom môžeme  $\bar{X}$  označiť ako strednú hodnotu náhodnej veličiny a za flukтуаčnú zložku označiť  $X'$ , ktorú vyjadríme ako [11]:

$$X' = X - \bar{X}. \quad (48)$$

Ak náhodná veličina  $Y$  má strednú hodnotu  $\bar{Y}$  a flukтуаáciu  $Y'$  [11]:

$$Y = \bar{Y} + Y'. \quad (49)$$



Obrázok 10: Rozdelenie okamžitých hodnôt veličín

Obdobne vyjadríme okamžité hodnoty rýchlosti  $v_i$  a tlaku  $p$ :

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad (50)$$

$$p = \bar{p} + p'. \quad (51)$$

Ak rovnice (50) a (51) dosadíme do Navier – Stokesových rovníc pre nestlačiteľnú kvapalinu a časovo spriemerujeme, obdržíme Reynoldsovu rovnicu [9]:

$$\rho f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}^f}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}, \quad (52)$$

kde

$$\bar{\tau}_{ij}^f = \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) [\text{kg/m/s}^2 = \text{Pa}]. \quad (53)$$

Vyjadrením Reynoldsových tangenciálnych napätí [9]:

$$\tau_{ij}^t = -\rho \overline{v'_i v'_j} [\text{kg/m/s}^2 = \text{Pa}], \quad (54)$$

môžeme Reynoldsove rovnice prepísať do tvaru [9]:

$$\rho f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij}^f + \tau_{ij}^t)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j}. \quad (55)$$

Sústava stredovaných Navier – Stokesových rovníc však nie je uzavretá a musí byť doplnená modelom turbulencie.

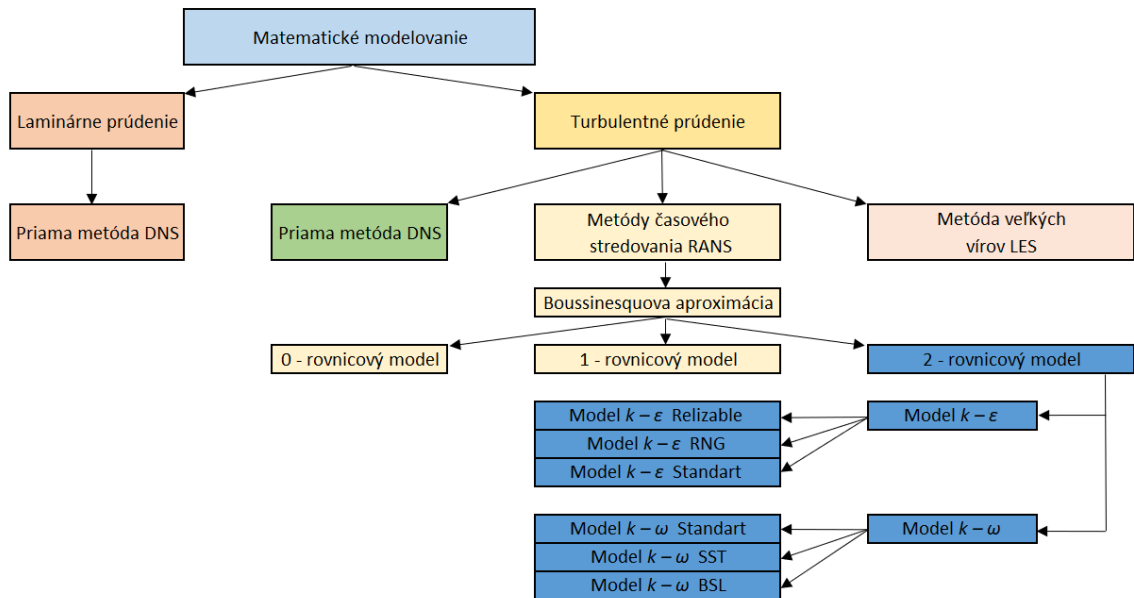
#### C.4 Turbulentné modely

V turbulentných modeloch sa nemodelujú fluktučné zložky rýchlostí a tlaku, ktoré vniesol štatistický prístup do Navier – Stokesových rovníc, ale modelujú sa neznáme korelácie medzi fluktuáčnymi zložkami rýchlosti. Fyzikálnou podstatou týchto korelácií je prenos hybnosti fluktuáčnym pohybom. Pre trojdimenzionálne izotermické prúdenie sú neznáme:

- 4 stredné hodnoty charakteristík prúdenia – 3 stredné hodnoty zložiek vektoru rýchlosti a 1 stredná hodnota tlaku,
- 6 zložiek tenzoru Reynoldsových napätí.

Pre 10 neznámých máme k dispozícii iba 4 nezávislé rovnice (rovnica kontinuity a Reynoldsovy rovnice). Systém je teda riešiteľný iba v prípade, že sa určia neznáme korelácie doplnením nezávislých rovníc, a systém sa tým uzatvorí. Spôsoby uzatvorenia systému:

- spôsob modelovania neznámých korelácií medzi fluktuáčnymi zložkami rýchlosti,
- použitie Boussinesqovej aproximácie (zavedenie turbulentnej viskozity),
- modelovanie korelácií medzi fluktuáčnymi zložkami rýchlosti – uzatvorenie momentom druhého rádu (Reynoldsov model napätia). [9]



Obrázok 11: Rozdelenie modelov

### C.4.1. Modely turbulencie s turbulentnou viskozitou

Pri zavedení turbulentnej viskozity vieme modely rozdeliť podľa počtu rovníc, ktoré turbulentnú viskozitu modelujú:

- 0 – rovníkové modely (algebraické modely),
- 1– rovníkové modely,
- 2 – rovníkové modely,
- modely s vyšším počtom rovníc, avšak tie neprinášajú očakávaný zisk informácií. [9]

#### C.4.1.a Algebraické modely

V algebraickom modeli je turbulentná viskozita vyjadrená pomocou veličín stredného pohybu. Základom je model, ktorý navrhli pre dvojrozmernú nestlačiteľnú medznú vrstvu Cebeci a Smith. Medzná vrstva je rozdelená na dve oblasti. Vo vnútornej oblasti, ktorá leží u obtekanej steny je turbulentná viskozita vyjadrená na základe Prandtlových predstáv o zmiešavacej dĺžke. Prandtlov model o zmiešavacej dĺžke vyjadruje vzdialenosť, ktorú urazí turbulentný vír naprieč medznou vrstvou, predtým než zanikne. Uvedený model vyžaduje znalosť parametrov medznej vrstvy, čo je pre Navier – Stokesove rovnice nevýhodné. [13]

Úpravu pôvodného modelu vytvorili Baldwin a Lomax, ktorých cieľom bolo odstrániť z modelu turbulencie parametre medznej vrstvy. Vo vnútornej oblasti šmykovej vrstvy použili pre turbulentnú viskozitu vzťah, v ktorom zaviedli vírivosť.

Model Rostanda upravuje vzťah pomocou integrácie per partes. Uvažuje, že pri vysokých hodnotách Reynoldsových číslach veľmi rýchlo klesá, spolu so vzdialenosťou od stien, vírivosť. Uvažuje, že pri výpočte integrálu stačí iba hrubý odhad hornej medze. [13]

### C.4.1.b Jednorovnicový model

Jednorovnicové modely využívajú transportnú rovnicu pre turbulentnú energiu, ktorá dáva do rovnosti na jednej strane transport turbulentnej energie stredným prúdom a na strane druhej:

- produkciu – vznik turbulentnej energie interakciou so stredným prúdom,
- turbulentnú difúziu – transport turbulentnej energie vplyvom fluktuácie rýchlostí a tlaku,
- viskóznú difúziu – transport turbulentnej energie vplyvom viskozity,
- rýchlosť disipácie – disipácia turbulentnej energie vplyvom viskozity.

Jednorovnicové modely sú vhodné pre výpočet tenkých šmykových vrstiev, ako je medzná vrstva alebo stenový prúd. V blízkosti obtekaných stien je dĺžková mierka vyjadrená pomocou vzdialenosti od steny a vo vonkajšej oblasti je úmerná hrúbke šmykovej vrstvy. Väčšinou sa ale jednorovnicový model používa v dvojvrstvovom modeli, kde je oblasť pri stenách riešená jednoduchším  $k - L$  modelom a oblasť ďalej od steny dvojrovnicovým modelom. [13]

### C.4.1.c Dvojrovnicový model

#### Model $k - \varepsilon$

Nevýhodou jednorovnicového modelu je algebraický vzťah pre dĺžkovú mierku, ktorá je závislá na vzdialenosti od steny. Táto skutočnosť značne komplikuje jeho použitie aj v zložitých 2D prípadoch. Výhodnejšie je použitie, namiesto dĺžkovej mierky, veličinu, ktorú dostaneme riešením transportnej rovnice, a to práve rýchlosti disipácie. Takto dostaneme  $k - \varepsilon$  model s dvoma transportnými rovnicami pre turbulentnú energiu  $k$  a pre rýchlosť disipácie  $\varepsilon$ . [13]

$k - \varepsilon$  model pre izotermické prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny má tvar:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (56)$$

$$\hat{L} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}. \quad (57)$$

Rovnica, ktorá popisuje transport a difúziu kinetickej energie turbulencie  $k$  [9]:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij}^t \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]. \quad (58)$$

Rovnica, ktorá popisuje transport a difúziu rýchlosti disipácie kinetickej energie turbulencie  $\varepsilon$  [9]:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]. \quad (59)$$

Model obsahuje celkom päť empirických konštánt ( $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ), ktoré môžeme určiť pomocou jednoduchých prípadov prúdenia alebo numerickou optimalizáciou. Podľa Patela, Rodiho a Scheurerera sa v rôznych variantoch modelu  $k - \varepsilon$  väčšinou používajú hodnoty:

- $C_\mu = 0,09$ ,
- $\sigma_k = 1,0$ ,
- $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ,
- $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,
- $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ .

Uvedenú základnú verziu  $k - \varepsilon$  modelu môžeme použiť v dostatočnej vzdialenosti od obtekanej steny, kde je vyvinuté dostatočne vysoké Reynoldsovo číslo, ktoré udáva pomer medzi turbulentnou a dynamickou viskozitou. V tesnej blízkosti steny dochádza k utlmeniu fluktuácií rýchlostí v smere kolmom na stenu. Turbulencia v tomto prípade nemá izotropný charakter ani v najmenších víroch, preto základná verzia modelu nemôže byť použitá. Pre riešenie oblasti v blízkosti steny môžeme použiť:

- stenové funkcie, kedy okrajové podmienky nezadáme priamo na stene, ale v bode ležiacom v logaritmickkej oblasti zákona steny (nie je presný pre výpočet prúdenia s odtrhnutím prúdu od steny),
- dvojvrstvový model  $k - L/k - \varepsilon$ , kedy v blízkosti steny používame jednoduchší jednorovnicový model  $k - L$  a ďalej od steny model  $k - \varepsilon$ ,
- modifikáciu modelu pre nízke turbulentné Reynoldsove čísla, ktorá spočíva v zavedení tlmiacich funkcií a prídavných členov do definície turbulentnej viskozity, transportných rovníc pre turbulentnú energiu a pre rýchlosť disipácie. [13]

### Model RNG $k - \varepsilon$

Tento model je odvodený zo štandardného  $k - \varepsilon$  modelu, pričom boli použité štatistické matematické metódy *Re - Normalisation Group*. Tento model sa od štandardného  $k - \varepsilon$  modelu líši iba hodnotami empirických konštánt a taktiež turbulentná viskozita je definovaná odlišným vzťahom. Hodnoty konštánt v RNG  $k - \varepsilon$  modeli sú odvodené matematicky, kdežto v  $k - \varepsilon$  modeli sú konštanty stanovené experimentálne.



Turbulentná viskozita je v RNG  $k - \varepsilon$  modeli vyjadrená ako [14]:

$$\mu_t = \mu \left( 1 + \sqrt{\frac{C_{\mu}^{\prime} \rho}{\mu} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}}} \right)^2. \quad (60)$$

Kinetická energia turbulencie je definovaná vzťahom [14]:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \rho \varepsilon, \quad (61)$$

kde

$P$  produkcia turbulencie.

Pre rýchlosť disipácie je v RNG  $k - \varepsilon$  modeli používaná rovnica [14]:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1}^{\prime} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2}^{\prime} \rho \frac{\varepsilon}{k} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - R. \quad (62)$$

Konštanty v RNG  $k - \varepsilon$  modeli nadobúdajú hodnoty:

- $C_{\varepsilon 1}^{\prime} = 1,42,$
- $C_{\varepsilon 2}^{\prime} = 1,68,$
- $C_{\mu}^{\prime} = 0,0845,$
- $\alpha = 1,3.$

Model RNG  $k - \varepsilon$  je možné využiť všade tam, kde sa v riešenej oblasti vyskytuje rozsiahla oblasť so zavírením. Model však neodstraňuje základné nedostatky  $k - \varepsilon$  modelu a prináša iba malé zlepšenie výpočtu. [14]

### Model $k - \omega$

Aj keď model  $k - \varepsilon$  patrí medzi najrozšírenejšie a najpoužívanejšie modely turbulencie, použitie rýchlosti disipácie pre vyjadrenie turbulentnej dĺžkovej mierky má niektoré nevýhody, ktoré vyplývajú z priebehu disipácie  $\varepsilon$  v blízkosti steny. Preto bol Wilcoxom navrhnutý model  $k - \omega$ , v ktorom sa na vyjadrenie turbulentnej dĺžkovej mierky používa špecifická rýchlosť disipácie  $\omega$  [13]:

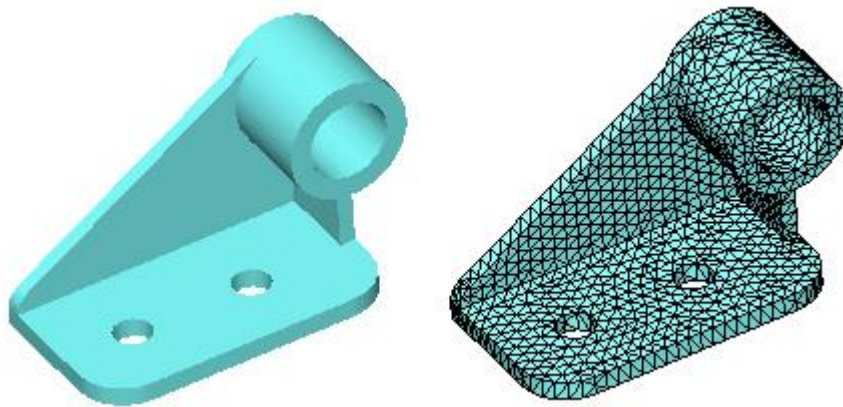
$$\omega = \frac{\varepsilon}{k}. \quad (63)$$

Podľa Mentera je model  $k - \omega$  veľmi citlivý na zadanie okrajových podmienok pre špecifickú rýchlosť disipácie  $\omega$  vo vonkajšom prúde. Tento nedostatok bol odstránený pridaním členu, ktorý vyjadruje vplyv priečnej difúzie. Podľa Menterových testov je takto doplnený model vhodný pre výpočet šmykového prúdenia v blízkosti obtekaných stien. [13]

## C.5 Numerické metódy

### C.5.1. Metóda konečných prvkov

Metóda konečných prvkov (*Finite elements method*) je približná iteračná metóda. Riešenie diferenciálnej rovnice sa na elementárnych oblastiach aproximuje jednoduchými funkciami. Metóda konečných prvkov prevedie parciálne diferenciálne rovnice na riešenie potenciálov v uzloch siete. Konečný prvok (Obrázok 12) predstavuje zvolený element definovaný uzlami v rohoch, príp. na hranách.



**Obrázok 12: Príklad rozdelenia oblasti na konečný počet prvkov [16]**

Postup metódy konečných prvkov:

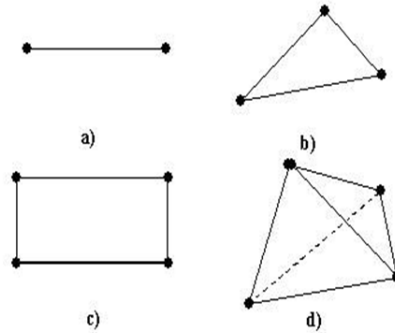
- diskretizácia analyzovanej oblasti,
- aproximácia hľadanej funkcie,
- zostavenie maticovej rovnice,
- vyriešenie maticovej rovnice.

Diskretizácia analyzovanej oblasti predstavuje rozdelenie oblasti na podoblasti (konečné prvky), pravidlá rozdelenia oblasti:

- I. Prvky sa vzájomne neprekrývajú.
- II. Prvky pokrývajú celú riešenú oblasť.
- III. V každom prvku siete musia byť konštantné parametre analyzovanej štruktúry.

Konečné prvky môžu mať tvar (Obrázok 13):

- a) úsečky (1D),
- b) trojuholníka (2D),
- c) obdĺžnika (2D),
- d) štvorstenu (3D).



**Obrázok 13: Tvary konečných prvkov**

Výhody metódy konečných prvkov:

- môžeme riešiť veľké sústavy s mnoho rovnicami s mnohými neznámymi na počítačoch s paralelnou architektúrou,
- umožňuje dokonale aproximovať vyšetované teleso,
- celý výpočtový proces môžeme zautomatizovať. [15]

### C.5.2. Metóda konečných diferencií

Metóda konečných diferencií (*Finite difference method*), nazývaná taktiež metóda sietí, predstavuje náhradu parciálnych derivácií, podľa ich definície, diferenciami v uzlových bodoch napr. takto [16]:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), i = 1, \dots, n - 1. \quad (64)$$

Postup metódy konečných diferencií:

- výber vhodnej množiny uzlov,
- voľba vzdialenosti medzi uzlami,
- aproximácia diferenciálneho operátora diferenčným,
- zostavenie sústavy rovníc (okrajové podmienky),
- riešenie sústavy rovníc (Gaussova eliminácia, iteračné metódy).

Metóda konečných diferencií sa môže použiť iba pre uzatvorené oblasti so známymi okrajovými podmienkami na hraniciach oblasti. Na výpočet má taktiež vplyv hustota siete, jemnejšia sieť síce spresňuje výpočet, ale zaberá viac pamäte v počítači a je náročnejšia na čas. Vhodnou voľbou môže byť aj premenlivá hustota siete, kedy v oblastiach, kde je potrebný presný výpočet, volíme sieť jemnejšiu. [15], [16]

Výhody metódy konečných diferencií:

- jednoduchosť pri programovaní a numerickej realizácii,
- relatívna jednoduchosť v nelineárnych matematických modeloch.

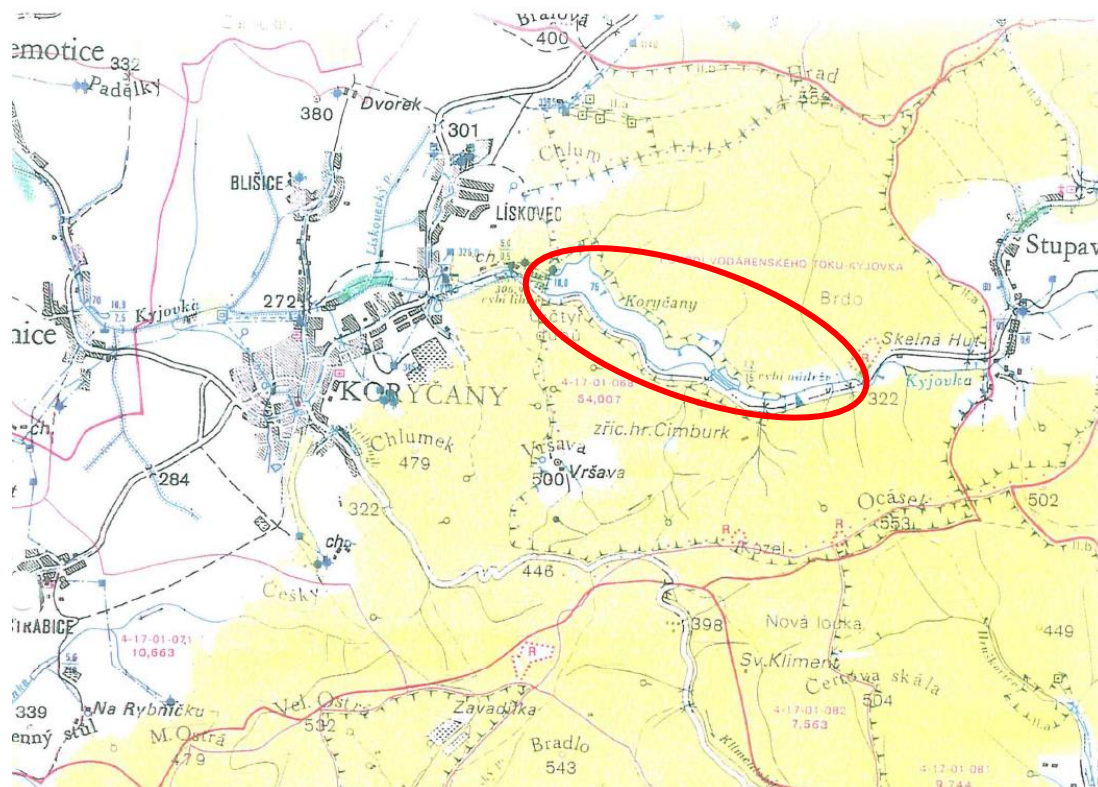
Nevýhody metódy konečných diferencií:

- problém s aproximáciou okrajových podmienok na jednotlivých častiach hraníc, ktoré nie sú vhodne použiteľné na rozdielnej hustote siete,
- zhoršenie presnosti aproximovaného riešenia pre sieť s rozličným odstupom uzlov, potreba relatívne hustého časového kroku.

## D. ZÁUJMOVÁ LOKALITA

### D.1 Vodné dielo Koryčany

Vodné dielo Koryčany (ďalej VD Koryčany) sa nachádza v Zlínskom kraji, patrí pod obec s rozšírenou pôsobnosťou Kroměříž, presnejšie asi 3 km od obce Koryčany (Obrázok 14). Regionálne VD Koryčany leží vo vrchovine Chřiby (Středomoravské Karpaty).



Obrázok 14: Vodohospodárska mapa [17]

Vlastníkom VD Koryčany je Česká Republika a prevádzkovateľom je Povodí Moravy, s.p. Vodné dielo leží na vodnom toku Kyjovka v rkm 74,500. Z hľadiska TBD je vodné dielo zaradené podľa [4] do II. kategórie, kedy sa v prípade havárie predpokladajú vysoké škody ekonomické, škody na životnom prostredí a sociálne dopady v rozsahu regiónu, prípadne štátu.

Účelom VD Koryčany je akumulácia vody hneď pre niekoľko dôvodov. Je zdrojom surovej vody pre úpravňu skupinového vodovodu Kyjov. Tento odber činí priemerne 45 l/s, maximálne 50 l/s, maximálne 130 tis. m<sup>3</sup>/mesiac a maximálne 1,45 mil. m<sup>3</sup>/rok. Ďalej VD Koryčany zabezpečuje trvalý minimálny prietok  $MQ$  v toku pod priehradou v množstve  $MQ = Q_{355d} = 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $MQ_{\text{sníž}} = 0,010 \text{ m}^3/\text{s}$  v závislosti na hladine vody v nádrži. V neposlednom rade zabezpečuje odber surovej vody pre rybie hospodárstvo pod nádržou. Ďalším účelom VD Koryčany je zachytenie veľkých vôd a zníženie kulminačných prietokov. [17]



### D.2.1. Hradiace teleso

Hradiace teleso predstavuje priama, zemná, sypaná hrádza so stredným, ílovitým tesniacim jadrom sypaným a hutneným po vrstvách. Stabilizačné časti nadväzujú na obe líce ílovitého jadra a sú vyhotovené z valcovaného štrkovitého ílu. Päty návodného aj vzdušného svahu sú zhotovené s dusenými pieskoccovými balvanmi. Prechodové vrstvy sú prevedené z piesku ako dvojité obrátený filter. Návodný svah je opevnený dlažbou z lomového kameňa na sucho, a vzdušný svah je ohumusovaný a osiaty (Obrázok 15, Obrázok 16). Súčasťou koruny hrádze je vlnolam, ktorý tvorí železobetónová doska spevnená pilierom. [18]



**Obrázok 15: Vzdušný svah hrádze [20]**

Popri rekonštrukcii by mala prebehnúť aj úprava koruny hrádze podľa variantu *Ab* (pozri [18]). Tento variant obsahuje navýšenie tesniaceho prvku telesa násypu hrádze. Navýšenie prebehne ílovo cementovou zálievkou v hrúbke 0,8 m. Týmto navýšením sa zmení hodnota medznej bezpečnej hladiny MBH na kótu 308,15 m n. m. Dôjde i k miernemu navýšeniu koruny hrádze na kótu 308,25 m a k vyspádovaniu koruny pod sklonom 2 % smerom k vzdušnému lícu. Technické riešenie variantu *Ab* je súčasťou Prílohy č. 5.



**Obrázok 16: Návodný svah hrádze [20]**

Parametre hrádze:

- Dĺžka hrádze v korune 180 m
- Šírka hrádze v korune 8,5 m
- Výška hrádze nad základmi 32 m
- Sklon návodného líca 1 : 2,5 až 1 : 2,75
- Sklon vzdušného líca 1 : 2 až 1 : 2,25

### **D.2.2. Bezpečnostný preliv**

Vo všetkých výpočtových variantoch bol zvolený bočný a nehradený preliv s jednou úrovňou prelivnej hrany. U spadiska je navrhnuté zahĺbenie o 0,4 m a šírka na konci spadiska dosahuje 9,0 m. Oproti pôvodnému stavu je preliv mierne predĺžený, mierne znížená kóta prelivnej hrany a výrazne rozšírené spadisko. Zmenou taktiež prejde premostenie začiatku sklzu, kde sa počíta so zvýšením dolnej hrany mostovky pri súčasnom miernom zahĺbení dna sklzu pod mostom. [18]





**Obrázok 17: Detail napojenia bezpečnostného objektu k hrádzi [20]**

Parametre bezpečnostného prelivu:

- Dĺžka prelivnej hrany 26,3 m
- Kóta prelivnej hrany 306,20 m n. m.
- Kóta dna spadiska v ose 302,80 až 303,22 m n. m.
- Prelivná hrana kruhovo zaoblená s polomerom  $r = 0,45$  m
- Šírka prelivnej hrany 0,9 m
- Pozdĺžny sklon spadiska 2,0 %
- Sklon stien spadiska 5 : 1

Technické riešenie variantu *2B2-Ba* je súčasťou Prílohy č. 6 a Prílohy č. 7.

### **D.2.3. Sklz**

Bezpečné prevedenie  $PV_{10\ 000}$  cez hrádzový profil si vyžiadalo taktiež návrh geometrických úprav pôvodného sklzu. Dochádza najmä k stavebným úpravám pravobrežnej steny sklzu a výšky dna sklzu.

Parametre sklzu:

- Dĺžka sklzu cca 69,0 m
- Šírka sklzu 9,0 m po 6,0 m
- Zúženie sklzu jednostranné, pravostranné

- Pozdĺžny sklon – premenlivý
  - 0. úsek: 2,0 %
  - 1. úsek dl. 12,7 m 13,8 %
  - 2. úsek dl. 23,8 m 17,3 %
  - 3. úsek dl. 24,1 m 19,9 %
  - 4. úsek dl. 8,4 m 69,1 %
- Priečny sklon dostredný 1 %
- Sklon stien 5 : 1

Navrhnuté bolo usmerňovacie rebro, ktoré začína v spadisku a pokračuje v ose sklzu. Jeho rozmery podľa [18] mali byť  $0,45 \times 0,45$  m. Tieto rozmery však boli fyzikálnym modelom upravené na  $1,0 \times 1,0$  m (Obrázok 18).



**Obrázok 18: Pohľad do spadiska po prúde [20]**

Návrh ľavobrežnej steny bol značne ovplyvnený podmienkou, že pri rekonštrukcii nesmie byť stavebnými prácami zasiahnuté stredné ílovité tesniace jadro hrádze. Z tohto dôvodu musí byť stena sklzu, v miestach premostenia, ponechaná bez úprav (Obrázok 19).



**Obrázok 19: Ponechaná pôvodná ľavobrežná stena [20]**



**Obrázok 20: Pohľad na sklz a vývar [20]**

Podklady k vypracovaniu modelu bezpečnostného objektu [23]:

- Podrobná situace koruny hráze – návrhová varianta Ab 1:400
- Půdorys bezpečnostního přelivu – návrhová varianta 2B2 – Ba 1:100
- Půdorys přemostění – návrh 1:100
- Půdorys skluzu – návrhová varianta V. 1:100
- Půdorys vývaru – návrhová varianta V1 1:100

## E. VLASTNÁ ÚLOHA MODELOVANIA

### E.1 Použité programy

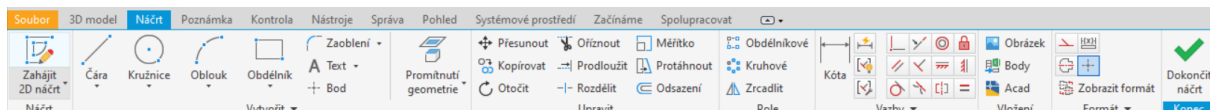
#### E.1.1. Autodesk Inventor Professional

Tento program je postavený na modernej technológii pre strojárenský CAD, ktorá nadväzuje na parametrické a variačné modelovanie, označované ako adaptívne modelovanie. Program nie je nadstavbou AutoCadu, ale prostredie je jemu podobné a taktiež dokáže pracovať so súbormi DWG. Ak je užívateľ v AutoCade zbehlý, prechod na Inventor bude veľmi jednoduchý. Autodesk Inventor je orientovaný na užívateľov, ktorí zatiaľ nemohli prejsť na 3D technológiu, pretože 3D programy svojím výkonom a kapacitou nedovoľovali modelovanie reálnych a rozsiahlych zostáv alebo boli príliš komplikované.

Program Inventor umožňuje v prvom kroku započatia práce nahráť 2D súbor, z ktorého môžeme následne vytvárať 3D teleso. Celý objekt bol rozdelený na časti, nazývané súčiastky. Každá súčiastka sa modeluje zvlášť a následne sa spoja v novom súbore *Sústava*. Bezpečnostný objekt VD Koryčany bol rozdelený na súčiastky takto:

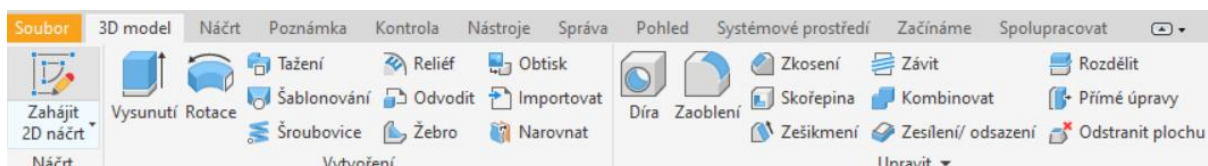
- spadisko,
- premostenie,
- sklz s vývarom.

Ak nemáme k dispozícii 2D model, musíme si ho vytvoriť pomocou *2D náčrtu*, ktorý sa nachádza na karte *3D model* a aj na karte *Náčrt*. Karta *Náčrt* (Obrázok 21) slúži pre vytvorenie 2D priemetu telesa, obsahuje funkcie ako *Čiara*, *Kružnica*, *Oblúk*, *Obdĺžnik*, *Premietnutie geometrie* a mnohé iné funkcie, ktoré slúžia k čo najvernejšiemu vykresleniu 2D priemetu. Presné rozmery sa v Inventore zadávajú prostredníctvom funkcie *Kóta*. Počas vykresľovania má náčrt fialovú farbu. Po presnom určení jeho rozmerov okótovaním, náčrt zmenou farby na čiernu signalizuje správne zadanie. Táto signalizácia znamená, že všetky entity majú presne stanovené rozmery, alebo väzby.



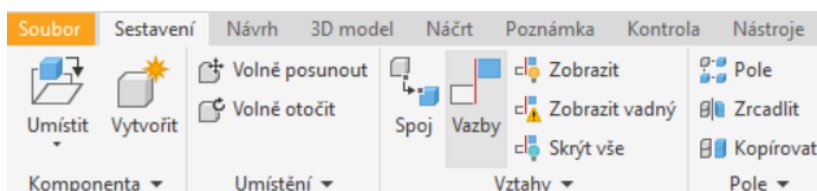
Obrázok 21: Karta *Náčrt* v programe Inventor

Takto nakreslený náčrt môžeme použiť pre vytvorenie 3D objektu. Na karte *3D model* (Obrázok 22) sa nachádzajú funkcie ako *Vysunutie*, *Rotácia*, *Ťaženie* a *Šablónovanie*, ktorými vieme dosiahnuť požadovaný tvar 3D objektu.



**Obrázok 22: Karta 3D model v programe Inventor**

Po vymodelovaní všetkých súčiastok sme pokračovali otvorením súboru *Zostava*. Takýto súbor má rozličné funkcie, ako má súbor *Súčiastka*. Do tohto súboru vieme vložiť všetky súčiastky a navzájom ich pospájať funkciami na karte *Zostavenie* (Obrázok 23).



**Obrázok 23: Karta Zostavenie v programe Inventor**

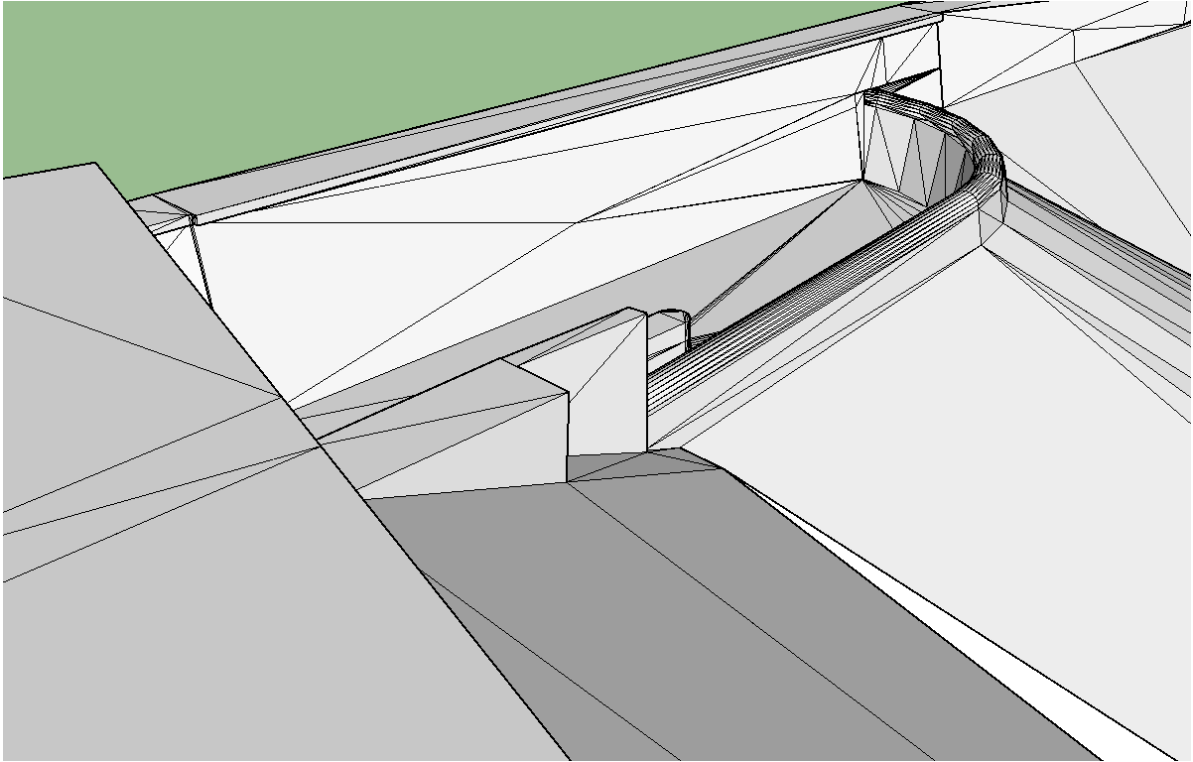
Pri výbere väzby máme možnosť použiť viacero typov a kombinácií väzieb. Tomuto kroku treba venovať zvýšenú pozornosť, každá väzba má svoje pravidlá a podmienky použitia. Ak použijeme nesprávnu väzbu môže to viesť ku komplikáciám. Pri skladaní zostavy bezpečnostného prelivu VD Koryčany boli použité tuhé väzby. Avšak pri ďalšej práci s modelom bolo zistené, že boli nevhodne zvolené úchopové body, čo malo za následok rotáciu celého objektu asi o  $1^\circ$ . Tento problém sa prejavil najmä v naklonení prelivnej hrany v horizontálnom smere, čiže sme nedodrжали konštantnú nadmorskú výšku prelivnej hrany. Tento problém bol odstránený v programe Blender. Výstup z programu Inventor je súčasťou Prílohy č. 1.

Veľkou výhodou programu Autodesk Inventor je jeho priame využitie pri tlači modelu na 3D tlačiarňu. Táto možnosť je priama súčasť programu, čiže nemusíme inštalovať žiadne nadstavby. Ďalšou výhodou je export modelu vo formáte STL. Tento formát predstavuje vstupný súbor do programu Flow 3D.

### **E.1.1.a Formát STL**

Formát STL (*stereolithography*) popisuje neštruktúrovaný, triangulovaný povrch pomocou jednotkových normálových vektorov a vrcholov. Prevedie inak hladké a oblé hrany na sústavu prepojených trojuholníkov (Obrázok 24). Prevod modelu na formát STL sprevádza odchýlka, resp. tolerancia. Jedná sa o rozdiel medzi plochou pôvodného výkresu a plochou nahradenou trojuholníkmi. Zmenou tejto odchýlky medzi susednými trojuholníkmi môžeme lepšie postihnúť riešenú oblasť. Dobrý súbor formátu STL musí spĺňať:

- susedné trojuholníky musia mať spoločné dva vrcholy,
- musí súhlasiť orientácia trojuholníkov, resp. smer normál.



**Obrázok 24: Spadisko VD Koryčany vo formáte STL**



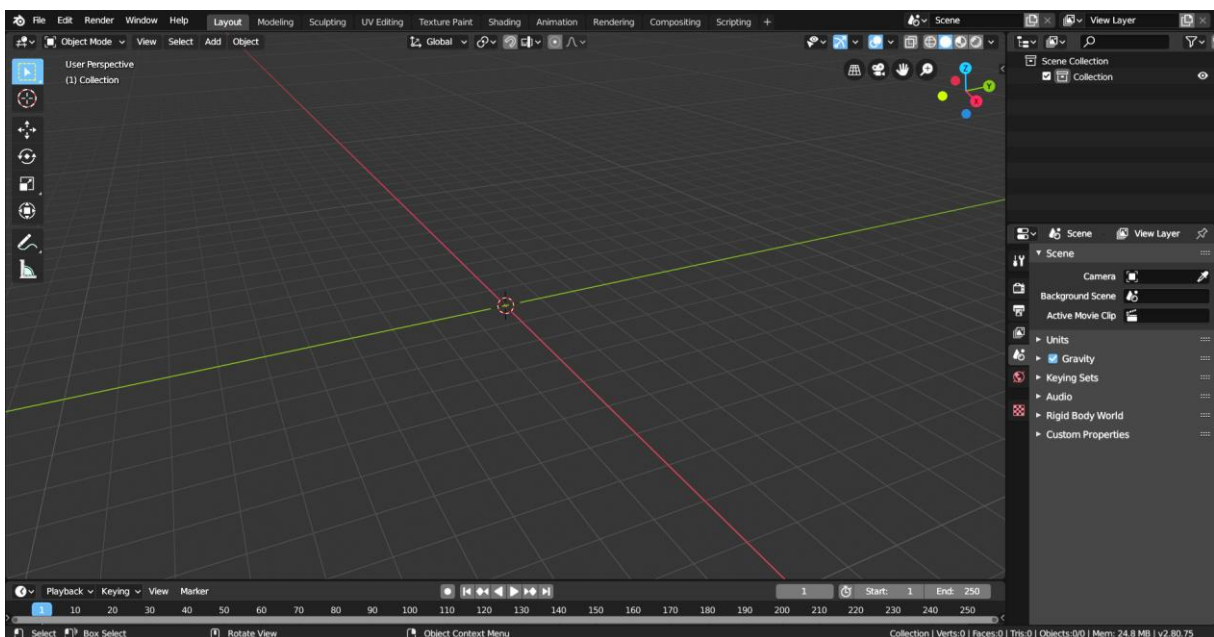
**Obrázok 25: Skutočný stav spadiska**

## E.1.2. Blender

Blender je multiplatformová aplikácia zameraná na vytváranie 3D modelov, animácií, rendering a post produkčnú činnosť. Okrem nástrojov na modelovanie, vytváranie animácií a renderovanie, aplikácia umožňuje vytváranie prezentácií, prehliadkových vizualizácií a to pomocou interného grafického editoru s možnosťou doplnenia kódom v objektovo orientovanom programovacom jazyku Python. Blender je možné doplniť celým radom rozšírení vo forme skriptov, ktoré umožňujú napr. generovanie stromov, trávy alebo zvieracej srsti.

Rozhranie (*Interface*) Blendru je veľmi originálne riešené, a na užívateľa môže zo začiatku pôsobiť zmätočne. Avšak po preniknutí do fungovania aplikácie bude práca s Blendrom efektívna, intuitívna a umožní pracovať veľmi rýchlo. Hlavné atribúty pracovného rozhrania:

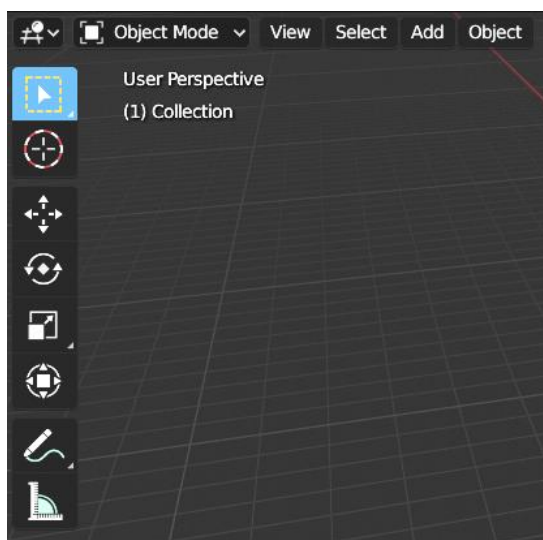
- plne nastaviteľná pracovná plocha (Obrázok 26),
- rozdelenie do okien pre modelovanie, animačné krivky, outliner, nelineárny videostrih, editovanie UV máp, animovanie postáv, súborový manažér atď.,
- databázový systém umožňujúci optimálny management scény, inštanciu a dynamické prepojovanie projektov v rôznych súboroch,
- lokalizácia do niekoľko jazykov,
- zabudovaný textový editor slúžiaci k poznámkam a programovaniu Python skriptov,
- rozhranie je rovnaké na všetkých platformách (Windows, Linux, Mac OS X a iné).



Obrázok 26: Pracovný priestor programu Blender



Modelovanie je riešené prostredníctvom polygónov, plôch, kriviek a vektorových fontov. Každý objekt má určený stred, pomocou ktorého, po zadaní hodnôt každej osi, môžeme určiť absolútnu pozíciu objektov. Všetky objekty môžeme jednoducho premiestňovať, otáčať a inak s nimi pracovať. Pre prácu v programe Blender je dostupných niekoľko módov. Ak chceme pracovať s celými objektmi, zvolíme *Object Mode* (Obrázok 27). Ak chceme objekty upravovať, musíme prepnúť do *Edit Mode*. Ďalšie voliteľné módy sú *Sculpt Mode*, *Vertex Paint*, *Weight Paint* a *Texture Paint*. Každý mód ponúka iné portfólio funkcií a slúži k inému účelu.



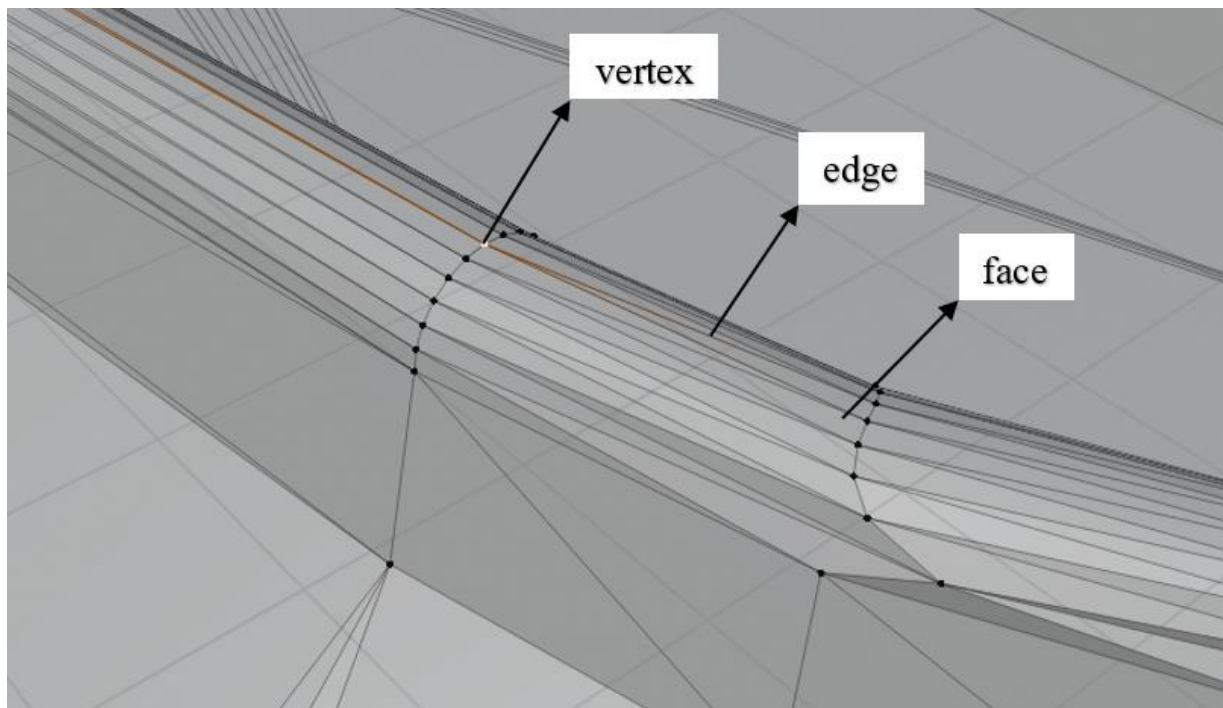
**Obrázok 27: Základná práca v programe Blender**

Pri modelovaní bezpečnostného objektu VD Koryčany nebola aplikácia Blender využívaná na celkové vytvorenie modelu, ale bola využitá iba na korekciu a kontrolu. Do aplikácie Blender bol importovaný súbor STL, ktorý bol výstupným súborom z programu Autodesk Inventor. Základné prvky objektu (Obrázok 28):

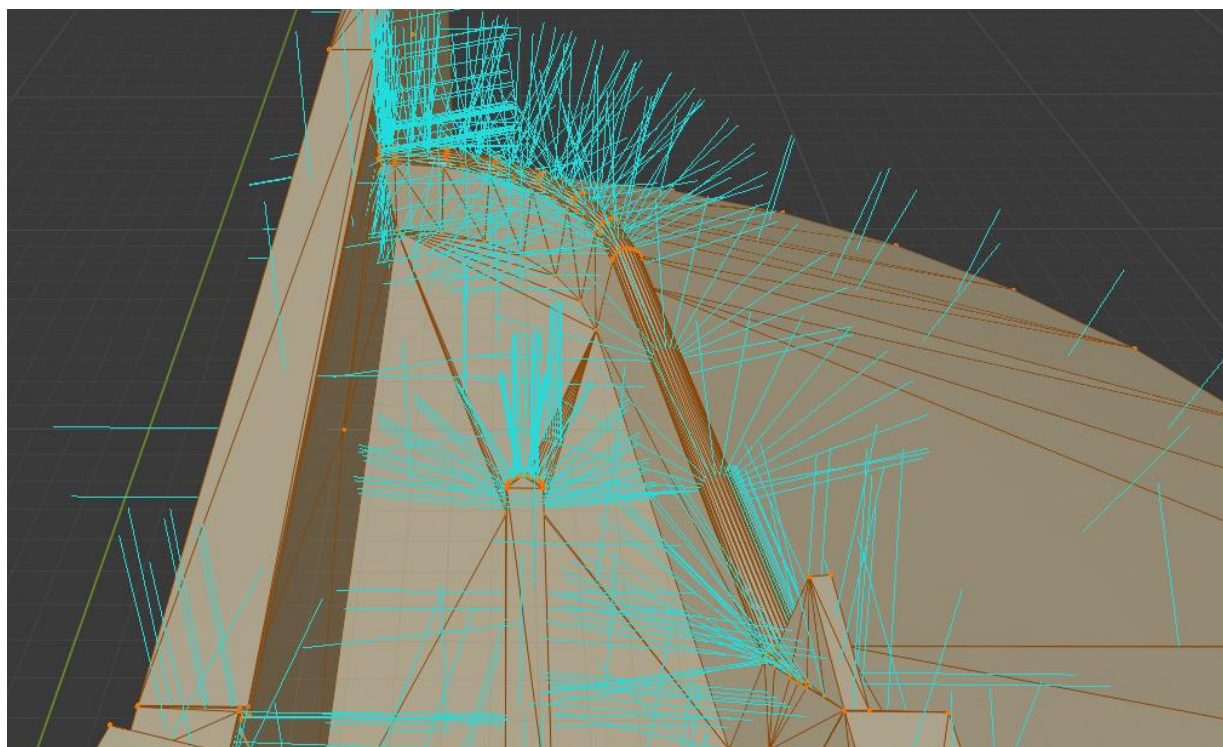
- vertex: bod, ktorý má udanú presnú pozíciu vo všetkých troch osiach,
- edge (hrany): sú úsečky, ktoré spájajú dva vertexy,
- face (polygón): tvorí výplň medzi jednotlivými vertexami.

Na vytvorenom modeli bezpečnostného objektu bolo nutné skontrolovať smer normál všetkých polygónov. Môže sa stať, že normála niektorých plôch smeruje dovnútra modelu. Takto zadany objekt by v ďalšom procese výpočtu vykazoval nesprávne výsledky. Je nutné otočiť normály nesprávne vymodelovaných plôch, pretože voda prúdiaca týmito plochami by sa snažila kopírovať smer normál a vznikali by neznáme odtoky cez objekt. V programe Blender boli skontrolované normály všetkých polygónov (Obrázok 29), a prípadne otočené funkciou *Recalculate Outside*. Tento problém môže tiež nastať, ak prebehne nesprávny export modelu do formátu STL. Môže nastať prípad, kedy nie sú vyplnené všetky oblasti medzi vertexami

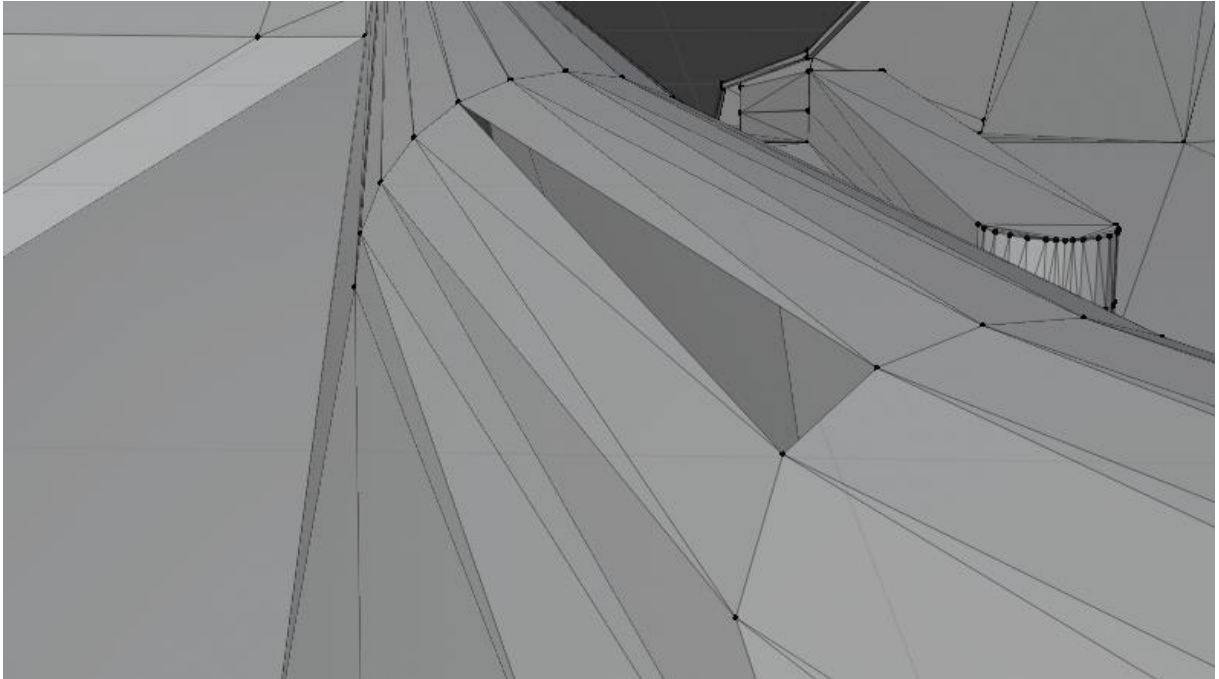
(Obrázok 30). Tak vznikne otvor, ktorým by mohli nastať úniky kvapaliny. Preto bolo potrebné model riadne vizuálne skontrolovať, a prípadne prázdne oblasti zaplniť funkciou *Make Face*.



**Obrázok 28: Základné prvky objektu**



**Obrázok 29: Správne natočenie normál polygónov**



**Obrázok 30: Nesprávne exportovaná plocha**

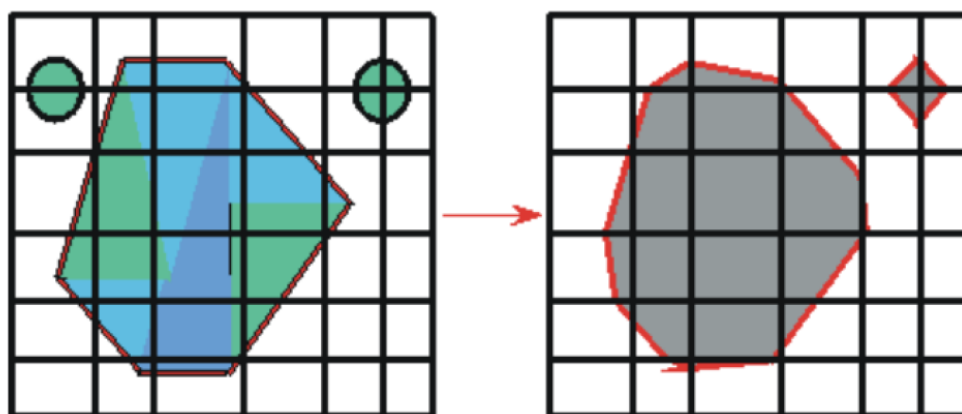
### **E.1.3. Flow 3D**

K samotnému modelovaniu prúdenia tekutiny cez bezpečnostný objekt VD Koryčany bol zvolený program Flow 3D vo verzii 11.0.4. Flow 3D je CFD (*Computational Fluid Dynamics*) nástroj, ktorý využíva matematické modelovanie k simulácii chovania systému, ktorý zahŕňa prúdenie tekutín, šírenie tepla a iné doplnujúce procesy. Simulácia prúdenia tekutín prebieha v trojdimenzionálnom prostredí a zložité fyzikálne problémy rieši metódou konečných objemov pri použití RANS (*Reynolds Averaged Navier – Stokes*) rovníc so špecifikovanými okrajovými a počiatočnými podmienkami. Výpočtová oblasť je tvorená výpočtovou mriežkou (*mesh*), ktorá sa skladá z jednotlivých vzájomne prepojených výpočtových buniek. Výpočtová oblasť je definovaná veľkosťou bunky, ktorá má na výpočet zásadný vplyv.

Program Flow 3D využíva pre modelovanie geometrie objektov metódu FAVOR<sup>TM</sup> (*Fractional Area – Volume Obstacle Representation*). Táto metóda je založená na koncepte plošných a objemových frakcií na pravouhlej mriežke. FAVOR<sup>TM</sup> pracuje na základe algoritmov numerického riešenia, ktoré sú založené na informáciách obsahujúcich fyzikálne veličiny (tlak, rýchlosť, teplota). Tieto veličiny sú určené pre každý kontrolný objem. Technika FAVOR<sup>TM</sup> zachováva geometrické tvary (Obrázok 31) so zahrnutím priemerných veličín v kontrolných objemoch. [21], [22]

*Definovaná geometrie objektu*

*Interpretace objektu metódou FAVOR™*



**Obrázok 31: Metóda FAVOR™ [21]**

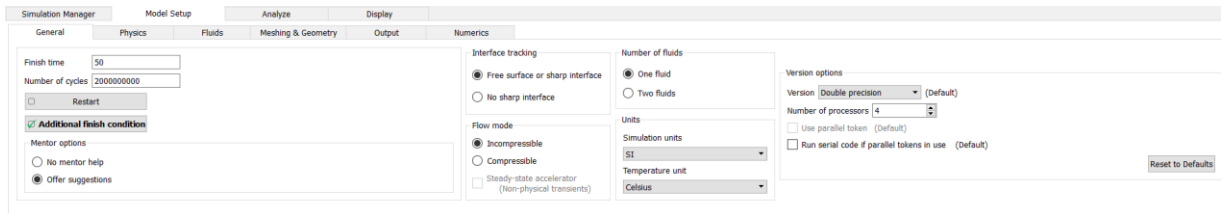
Flow 3D sa od ostatných programov odlišuje v simulácii chovania voľnej hladiny. K určovaniu jej polohy program využíva špeciálne numerické metódy a zahrňuje aj vhodné dynamické okrajové podmienky. Technika určovania voľnej hladiny sa nazýva *Volume of Fluid* (VOF), ktorá bola prvýkrát vyvinutá skupinou vedcov v národnom laboratóriu v Los Alamos. Neskôr nedostatky metódy VOF eliminovala metóda TruVOF. [22]

### **E.1.3.a Základné nastavenia výpočtu**

Práca bola započatá založením nového pracovného priestoru (*Workspace*), a jeho nastavenia odpovedajúceho realite. Program Flow 3D obsahuje štyri ponuky:

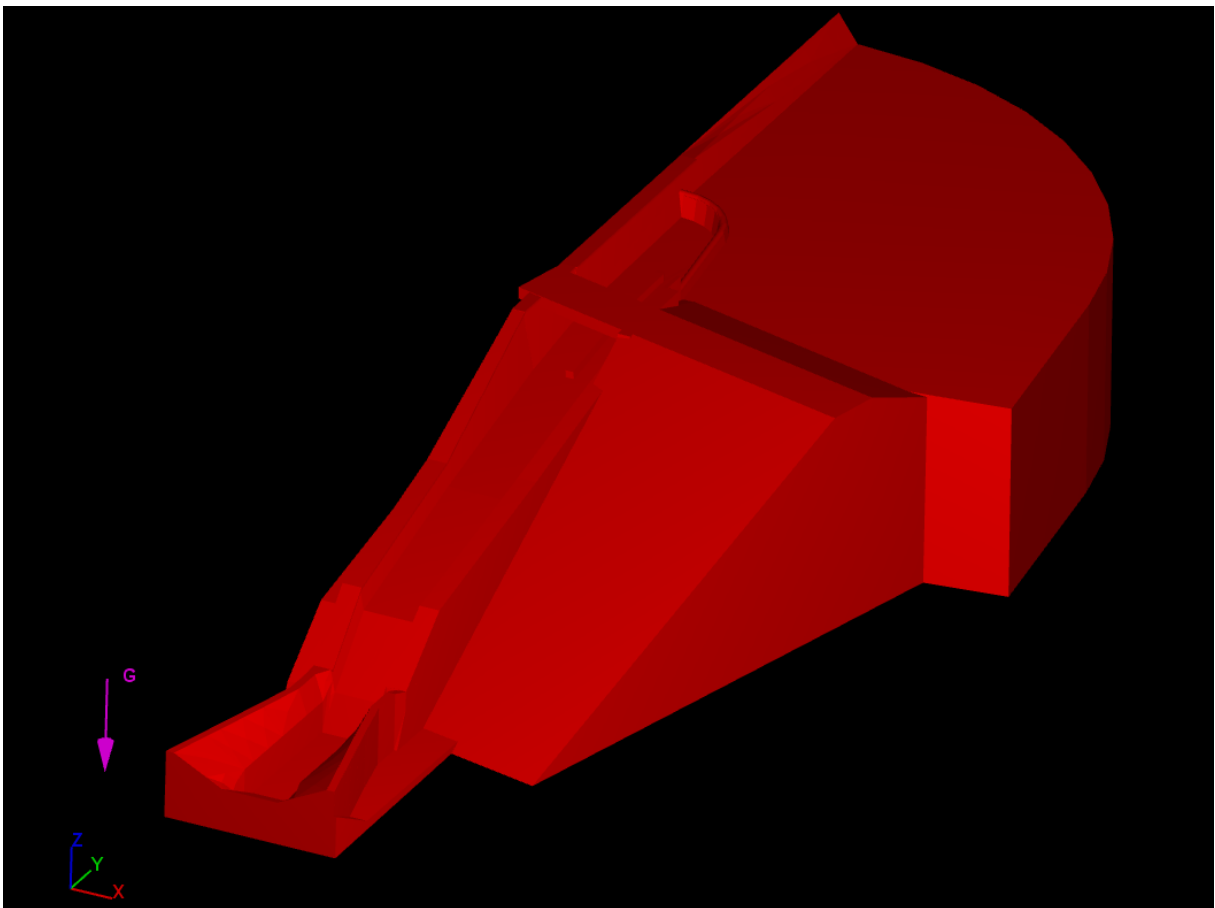
- *Simulation Manager*: ponúka prehľad o rozpracovaných projektoch a priebehu výpočtu,
- *Model Setup*: slúži k všeobecnému nastaveniu vlastností prostredia, média, taktiež slúži k načítaniu STL súboru s geometriou a k vytváraniu siete,
- *Analyze*: prezentuje výsledky, pričom môžeme voliť parametre, ktoré nás zaujímajú,
- *Display*.

Po vytvorení nového projektu sme prešli na kartu *Model Setup*, ktorá obsahuje viacero záložiek. V záložke *General* bola nastavená doma výpočtu na 30 sekúnd a následne bol nastavený počet cyklov. Bola nastavená taktiež podmienka ustálenia, čo znamená, že ak sa výpočet dostane do ustáleného stavu automaticky sa zastaví. Všetky nastavenia na karte *General* zobrazuje Obrázok 32.



**Obrázok 32: Nastavenia na karte *General***

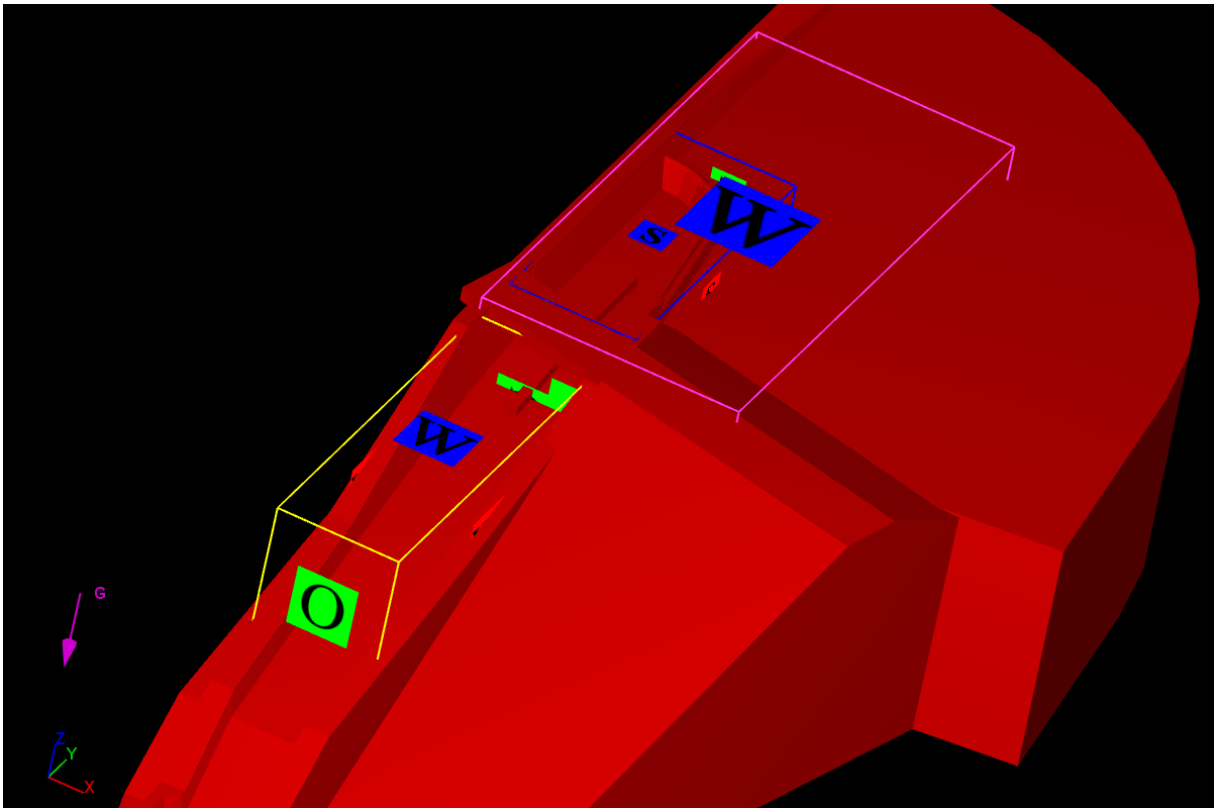
V záložke *Physics* bolo podstatné nastaviť hodnotu gravitačného zrýchlenia v smere osi *Z* so zápornou hodnotou. Taktiež bolo nutné zvoliť viskóznny režim prúdenia a nastaviť model turbulencie. Pre náš výpočet bol zvolený dvojrovnícový  $k - \varepsilon$  model bližšie popísaný v C.4.1.c. V záložke *Fluids* bolo nastavené médium, a to voda s teplotou 20 °C. Ďalšou podstatnou záložkou je *Meshing & Geometry*. V tejto záložke bolo podstatné načítať geometriu modelu vo formáte STL (Obrázok 33).



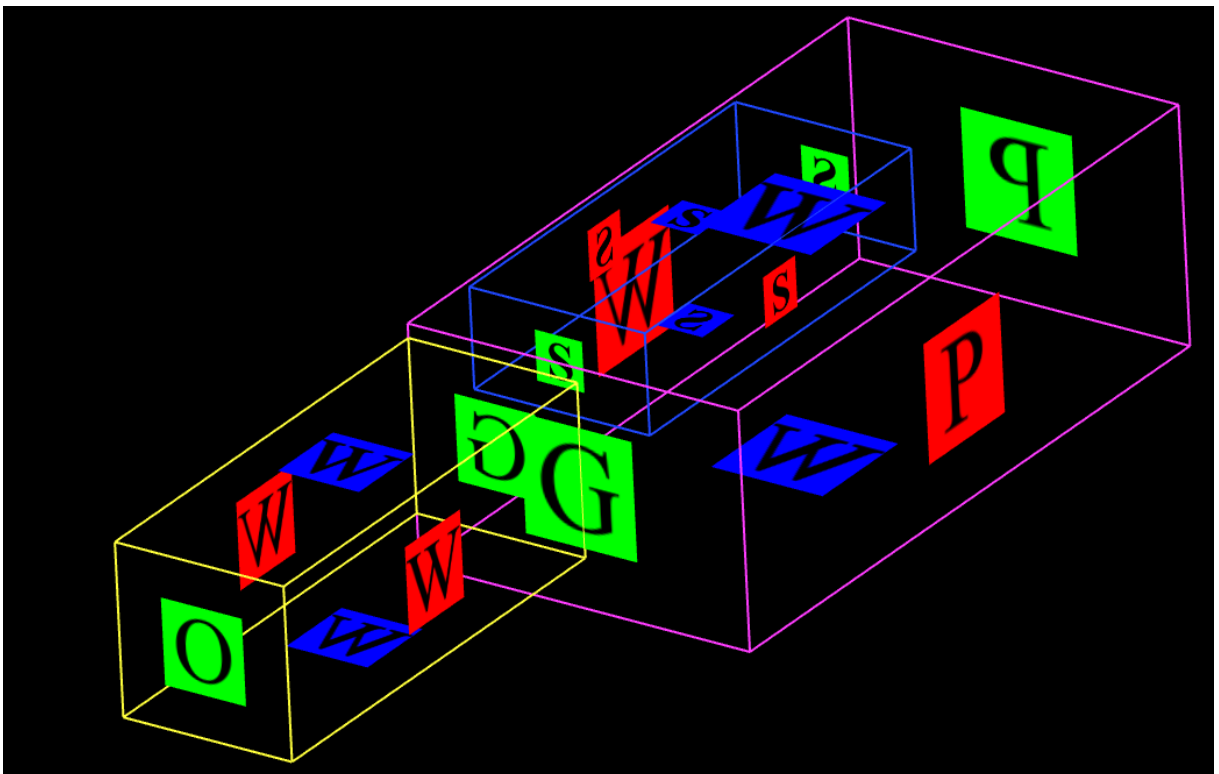
**Obrázok 33: Model vo Flow 3D**

Následne boli na zadanú geometriu aplikované výpočtové siete takto:

- *Mesh block 1* (na Obrázku 34 vo farbe ružovej): postihuje oblasť spadiska a oblasť nátku,
- *Mesh block 2* (na Obrázku 34 v žltej farbe): postihuje časť sklzu,
- *Mesh block 3* (na Obrázku 34 v modrej farbe): je doplnková sieť pre upresnenie výpočtu.



Obrázok 34: Výpočtové siete aplikované na geometrii



Obrázok 35: Výpočtové siete

Každá výpočtová sieť musí byť opatrená okrajovými podmienkami (*Bounderies*). Typy okrajových podmienok:

- *Symmetry* (S): podmienka *symetria* zabezpečuje rovnaké podmienky prúdenia pred aj za stenou siete, na ktorej bola podmienka zadaná,
- *Wall* (W): zadanie podmienky *stena* odrazí prúd vody a zamedzí jeho vtekaniu do objektov,
- *Grid overlay* (G): využíva sa pri dvoch susediacich sieťach, keď je potrebné prikázať prúdu vody pokračovať v ďalšej sieti rovnakým režimom,
- *Specified pressure* (P): *špecifický tlak* sa zadáva na stenách siete, ktorými predpokladáme prítok vody, zadanie môže byť vo forme tlaku alebo výšky vody,
- *Outflow* (O): na hraniciach, kde chceme simulovať *výtok* vody do prostredia.

Zhrnutie všetkých nastavení jednotlivých sietí je uvedené v Tabuľke 7.

**Tabuľka 7: Nastavenie výpočtových sietí**

Sieť	Veľkosť bunky [m]	Okrajové podmienky					
		X Min	X Max	Y Min	Y Max	Z Min	Z Max
Mesh block 1	0,2	W	P	G	P	W	W
Mesh block 2	0,2	W	W	O	G	W	W
Mesh block 3	0,05	S	S	S	S	S	S

Zadaním okrajových podmienok dosiahneme simuláciu prúdenia vody zadanou geometriou s čo najväčšou presnosťou. Veľmi dôležitou vlastnosťou siete je veľkosť bunky siete. Na veľkosti bunky závisí presnosť výpočtu, ale aj počet celkových výpočtových buniek, a teda aj doba výpočtu. Aby boli zvolené správne hodnoty veľkosti buniek bolo potrebné preskúmať vplyv veľkosti bunky na výsledok a teda efektívnosť zjemňovania siete. Analýza citlivosti siete je popísaná v tejto práci v ďalších kapitolách.

Okrem okrajových podmienok je odporúčané zadanie aj počiatočnej podmienky t. j. v nulovom čase. Počiatočná podmienka bola zadaná na sieti *Mesh block 1* a predstavovala počiatočnú hladinu vody v nádrži. Takto zadaná počiatočná podmienka urýchľuje výpočet, pretože od prvej sekundy simulácie dochádza k vyprázdneniu oblasti.

## E.2 Zjednodušujúce predpoklady

Pri výpočte simulácií v programe Flow 3D bolo nutné prijať zjednodušujúce predpoklady, ktoré výpočet simplifikujú, avšak nesmú príliš ovplyvniť výsledok. Pri simulácií prúdenia cez bezpečnostný objekt VD Koryčany boli prijaté nasledujúce zjednodušujúce predpoklady:

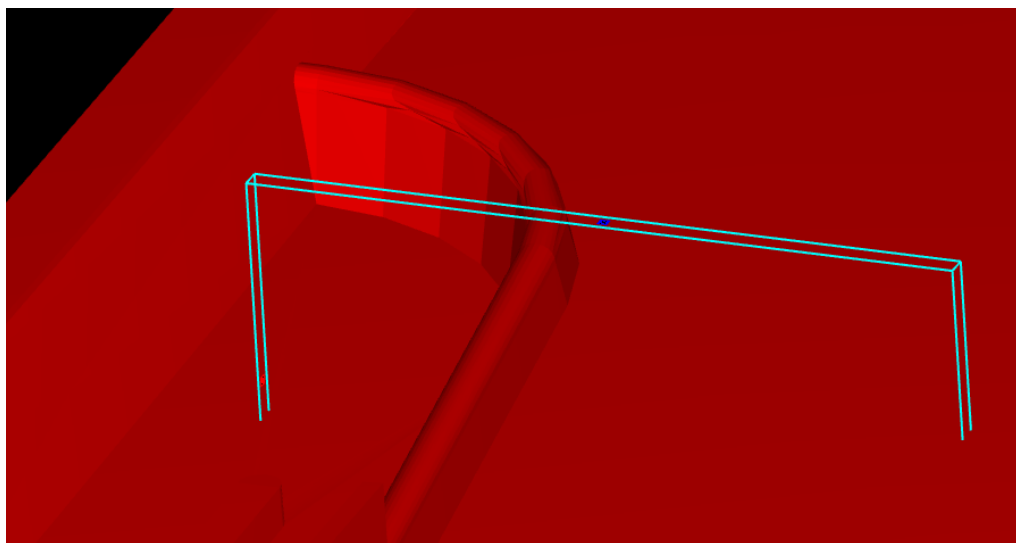
- ako tekutina bola uvažovaná čistá voda bez sedimentov a nerozpustených látok,
- nebolo uvažované s vplyvom prevzdušnenia prúdiacej vody,
- jedná sa o dej izotermický,
- uvažovaná kvapalina je nestlačiteľná,
- prúdenie je ustálené, čiže časovo nemenné.

## E.3 Simulácie a výsledky

### E.3.1. Analýza citlivosti

Analýza citlivosti je prostriedok k stanoveniu rizika, ktorého účelom je meniť podstatné premenné modelu a stanovenie efektov zmien na požadovaný výsledok. Odhady, ktoré sa týkajú premenných, podliehajú rôznemu stupňu a druhu rizika. Analýza citlivosti vypovedá o tom, ako sa bude meniť výsledok výpočtu v závislosti na odhade vstupných premenných. Kvalita výstupov z modelu je priamo závislá na kvalite vstupov.

Bola prevedená analýza citlivosti zameraná na vplyv zmeny veľkosti bunky a následne na vplyv drsnosti na výsledok simulácie. Analýza bola vykonaná na trojdimenzionálnom modeli bezpečnostného objektu VD Koryčany, avšak nastavením siete bola simulácia prevedená na dvojdimenzionálnu (Obrázok 36). Rozmery výpočtovej siete boli  $20,0 \times 0,5 \times 10$  m. Táto úprava bola prijatá s ohľadom na časové hľadisko výpočtu.



Obrázok 36: Nastavenie siete pre analýzu citlivosti

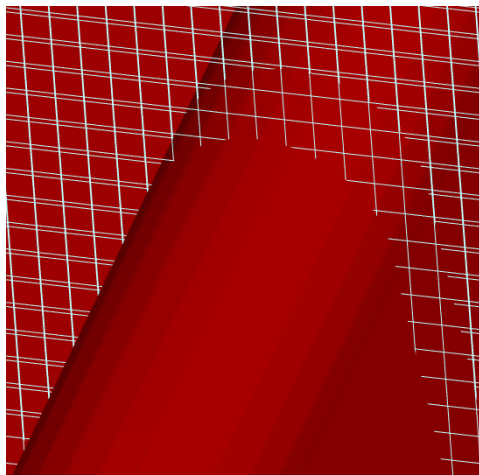


### E.3.1.a Analýza citlivosti zameraná na veľkosť bunky

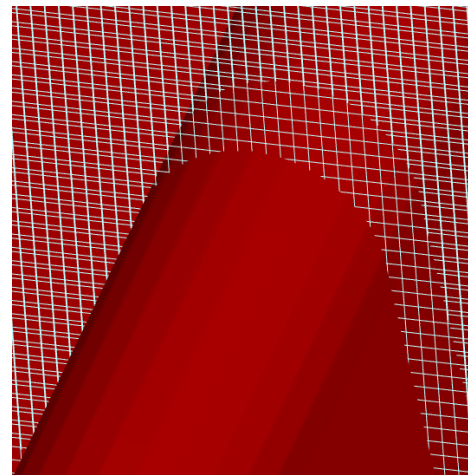
Veľkosť bunky výpočtovej siete je jeden z hlavných parametrov, ktorý značne ovplyvňuje výsledok modelovania. Príliš veľký rozmer výpočtovej bunky môže mať za následok nekvalitný výstup s vysokou hodnotou neistoty. Avšak nadmerné zjemnenie siete môže mať za následok rapidný nárast časovej náročnosti. Vtedy môžeme hovoriť o neefektívnom zjemnení siete, preto bolo nutné stanoviť rozmer bunky, ktorý je pre model prúdenia v bezpečnostnom objekte VD Koryčany optimálny. Verzie, ktoré boli analýzou citlivosti odskúšané sú zhrnuté v Tabuľke 8.

**Tabuľka 8: Analýza citlivosti na zmenu veľkosti výpočtovej bunky**

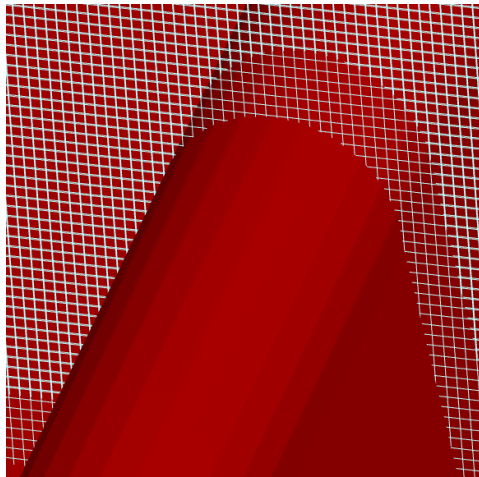
Veľkosť bunky [m]	Počet buniek [ks]	Prietok [m <sup>3</sup> /s]	Doba výpočtu [hod]	Rozdiel prietokov [m <sup>3</sup> /s]	Rozdiel výsledkov [%]
0,2	6000	0,6834	0.1	-	-
0,1	40000	0,6486	0.5	0,0348	5,09
0,05	320000	0,6419	1	0,0067	1,03
0,04	650000	0,6361	3	0,0058	0,91
0,025	2560000	0,6337	16	0,0024	0,38



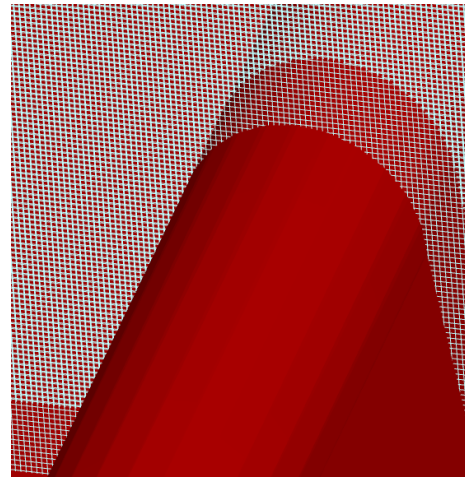
a) veľkosť bunky 0,1



b) veľkosť bunky 0,05



c) veľkosť bunky 0,04



d) veľkosť bunky 0,025

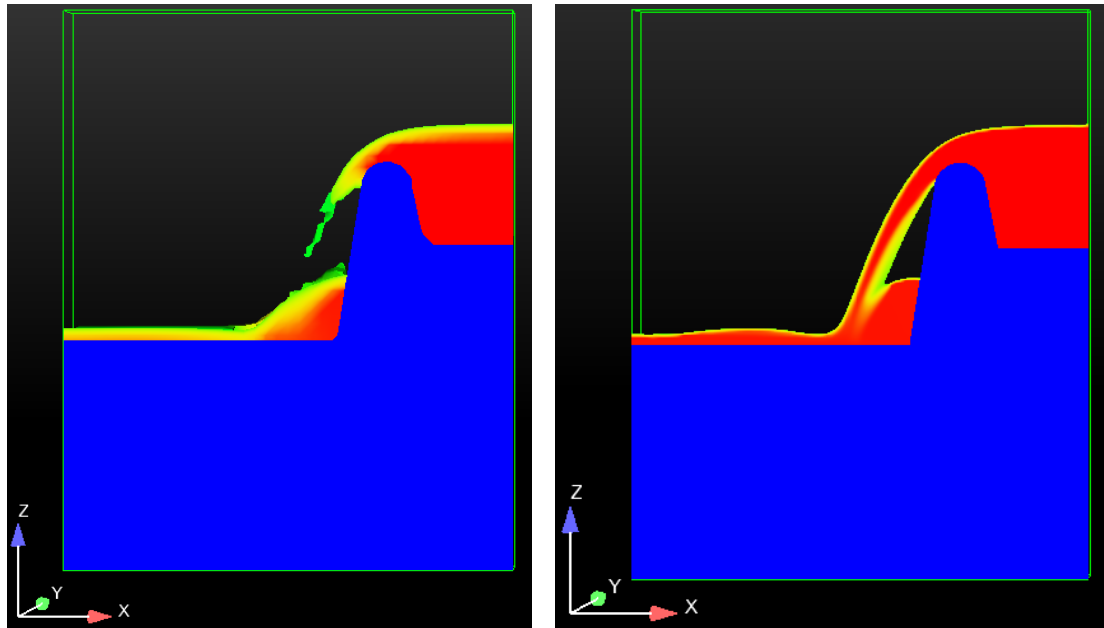
**Obrázok 37: Detail prelivnej hrany pri zmene veľkosti výpočtovej bunky**

Výsledky postupného zjemňovania siete boli porovnané s hydraulickým výpočtom. Skúšaná hladina bola na úrovni 306,80 m n. m. a súčiniteľ prepadu bol počítaný podľa dvoch autorov. Výsledky porovnania zobrazuje Tabuľka 9.

**Tabuľka 9: Porovnanie výsledkov z Flow 3D s hydraulickým výpočtom**

Veľkosť bunky [m]	Flow 3D	Rehbock [7]			doc. Stara a dr. Koutkova [25]		
	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Rozdiel	%	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	%
0,2	0,683	0,625	0,0584	9,3	0,586	0,0970	16,5
0,1	0,649		0,0236	3,8		0,0622	10,6
0,05	0,642		0,0169	2,7		0,0555	9,5
0,04	0,636		0,0111	1,8		0,0497	8,5
0,025	0,634		0,0086	1,4		0,0472	8,1

Z uvedenej analýzy vyplýva, že veľkosť bunky 0,2 m je nedostačujúca (Obrázok 38) a musí byť doplnená jemnejším delením siete v miestach, ktoré vyžadujú zvýšenú presnosť výpočtu. Na modeli bezpečnostného objektu VD Koryčany je to oblasť prelivnej hrany.



a) veľkosť bunky 0,2

b) veľkosť bunky 0,05

**Obrázok 38: Vplyv bunky na výsledok simulácie**

Taktiež môžeme konštatovať, že veľkosť bunky 0,05 (prípadne 0,04), so spresnením výsledkov okolo 1 %, je pre náš výpočet dostatočujúca. Ďalšie zjemňovanie siete (bunka s veľkosťou 0,025) síce vykazuje presnejšie výsledky, avšak vzhľadom na extrémne navýšenie výpočtového času považujeme toto zahustenie siete za neefektívne.

### **E.3.1.b Analýza citlivosti zameraná na vplyv drsnosti**

Drsnosť je vlastnosť modelu, ktorá je závislá na type materiálu, spôsobe vyhotovenia a závislosti na čase môže hodnota drsnosti stúpať. Pri výpočte s využitím bežných hydraulických rovníc má drsnosť vplyv na výsledné prepadové množstvo.

Vo Flow 3D sa nepoužíva bežný súčiniteľ drsnosti podľa Manninga, bolo nutné zadať hodnotu súčiniteľa drsnosti podľa Nikuradseho. Prepočet udáva vzťah [24]:

$$k_s = \left( \frac{n^{\frac{1}{6}}}{0,0389} \right)^6, \quad (65)$$

kde

$k_s$  Nikuradseho súčiniteľ drsnosti,

$n$  Manningov súčiniteľ drsnosti.

Následne bolo nutné preskúmať vplyv drsnosti na výsledok simulácií. Tento vplyv bol skúšaný pri rôznych hladinách s veľkosťou výpočtovej bunky 0,025 m.

**Tabuľka 10: Citlivostná analýza pre vplyv drsnosti**

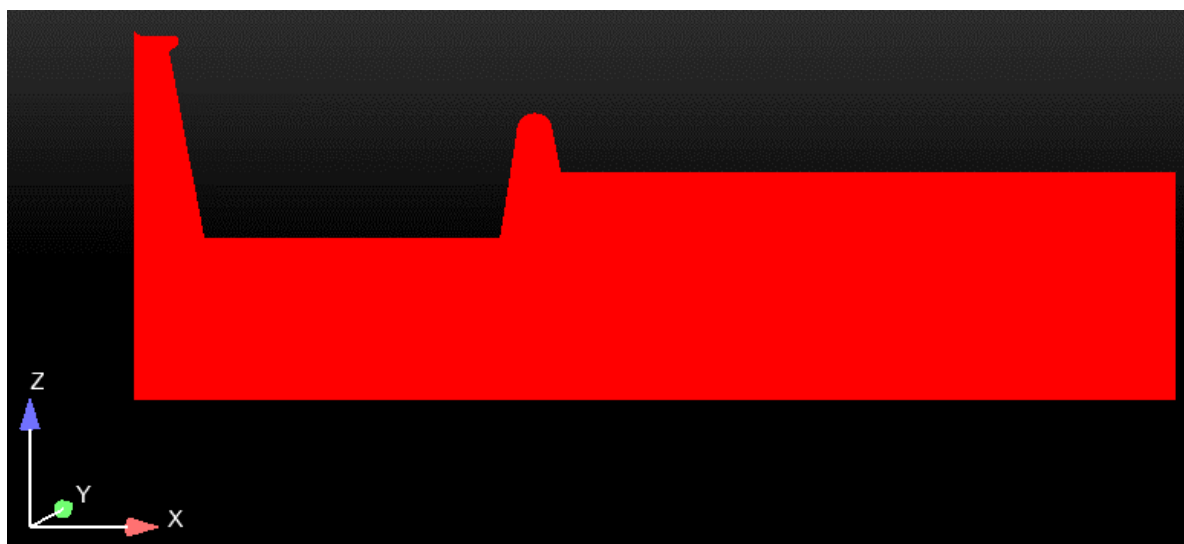
Hladina [m n. m.]	Prepadová výška [m]	$Q_s$ drsnosťou [m <sup>3</sup> /s]	$Q_{\text{bez drsnosti}}$ [m <sup>3</sup> /s]	Rozdiel [m <sup>3</sup> /s]
306,40	0,2	0,1567	0,1580	0,0013
306,80	0,6	0,6350	0,6361	0,0011
307,20	1,0	1,2842	1,2847	0,0005
307,45	1,3	1,7438	1,7440	0,0002
308,15	1,9	3,1533	3,1535	0,0002

Z Tabuľky 10 vyplýva, že zadaním súčiniteľa drsnosti sa výsledné prietóčné množstvo výrazne nezmení. Tento výsledok môže byť spôsobený tým, že drsnosť betónového povrchu je natoľko malá, že ju delenie výpočtovej mriežky nezachytí.

### **E.3.2. 2D model**

Pre úplnú kontrolu trojdimenzionálneho modelu bezpečnostného objektu VD Koryčany boli vykonané simulácie prúdenia vody, v ktorých bola úloha nastavením siete prevedená na dvojdimenzionálnu. Rozmery výpočtovej siete boli  $20,0 \times 1,0 \times 10$  m a veľkosť výpočtovej bunky bola zvolená na 0,025 m. V takomto prípade vieme výsledok simulácie skontrolovať hydraulickými výpočtami, s použitím prepadovej rovnice, podrobnejšie popísanými v kapitole B.2. Prepadový súčiniteľ, ktorý vstupuje do prepadovej rovnice bol počítaný dvomi prístupmi. Prvý vzťah udal Rehbock, avšak tento vzťah je obmedzený medzami platnosti (pozri B.2). Pretože v niektorých bodoch neboli splnené podmienky platnosti, bol využitý výskum o súčiniteli prepadu prelivu s kruhovo zaoblenou korunou z fyzikálnych experimentov od doc. Stary a dr. Koutkovej. Obe použité rovnice sú bližšie popísane v kapitole B.2.

Boli prevedené prvé simulácie na vytvorenej geometrii bezpečnostného prelivu VD Koryčany (Obrázok 39).



**Obrázok 39: Prvá geometria 2D modelu**

**Tabuľka 11: Výsledky simulácie na prvej geometrii**

Hladina [m n. m.]	Flow 3D		Rehbock [7]		doc. Stara a dr. Koutkova [25]	
	Prepadový súčiniteľ [-]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Prepadový súčiniteľ [-]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Prepadový súčiniteľ [-]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]
306,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
306,400	0,795	0,315	0,419	0,166	0,405	0,161
306,800	0,618	1,272	0,503	1,036	0,483	0,993
307,200	0,580	2,569	0,563	2,492	0,518	2,294
307,450	0,563	3,488	-	-	0,527	3,262
308,150	0,523	6,307	-	-	0,528	6,373

Výsledné simulácie vykazovali príliš vysoké hodnoty prepadového súčiniteľa, pozri Tabuľku 11, a to najmä pri nízkych prepadových výškach. Po porovnaní s hydraulickými výpočtami sa javil výpočet ako nesprávny. Predpokladaná chyba mohla nastať pri vytváraní geometrie 3D modelu. Pri skúmaní výsledkov bolo zaznamenané odtrhávajúce prúdy (Obrázok 41 a), čo nám signalizovalo nesprávne vymodelovanie dna nádrže. Dno nádrže v prvej geometrii bolo vodorovné s hĺbkou 1,5 m. Takto vymodelované dno malo za následok zvýšenie prítokovej rýchlosti, kdežto v reálnych podmienkach je nátoková rýchlosť takmer nulová. Preto bolo v druhej geometrii upravené dno nádrže prehĺbením (Obrázok 40).



**Obrázok 40: Druhá geometria 2D modelu**

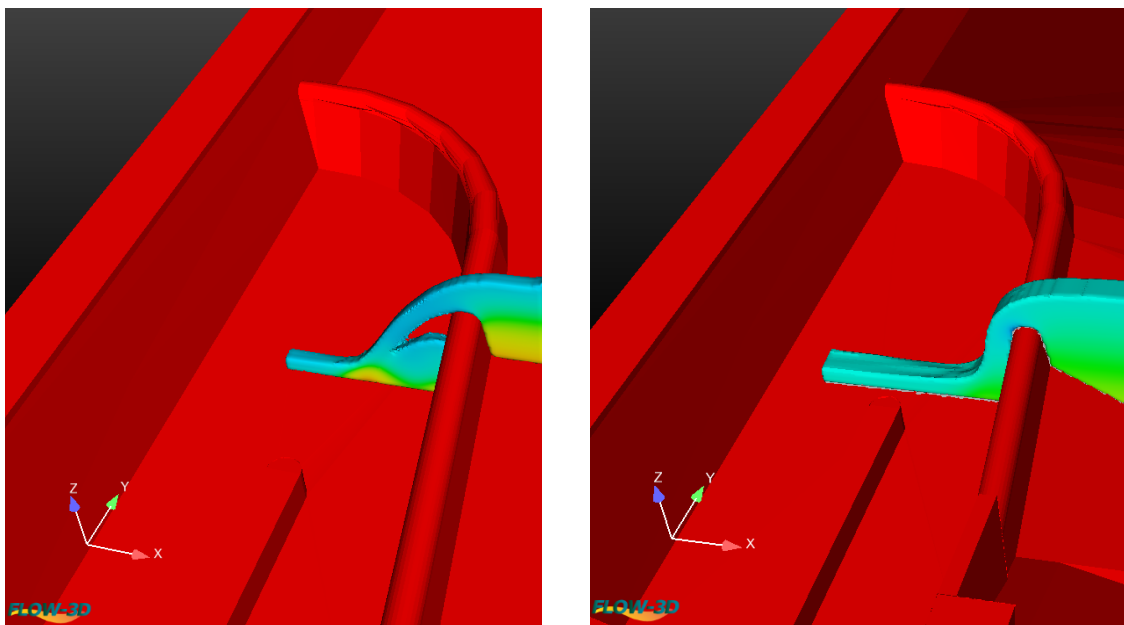
Po upravení dna nádrže sa výsledky zlepšili, hodnoty prepadového súčiniteľa sa vychyľovali od hydraulického výpočtu maximálne o 15% (Tabuľka 12).

Zlepšenie simulovania prúdenia tekutiny cez prelivnú hranu sme mohli pozorovať pri porovnaní výsledkov. Prepadajúca voda cez novú geometriu bezpečnostného objektu kopírovala konštrukciu prelivnej hrany a nevznikalo odtrhávajúce prúdy (Obrázok 41 b).

**Tabuľka 12: Výsledky simulácie na druhej geometrii**

Hladina [m n. m.]	Flow 3D		Rehbock [7]		doc. Stara a dr. Koutkova [25]	
	Prepadový súčiniteľ [-]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Prepadový súčiniteľ [-]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]	Prepadový súčiniteľ [-]	Prietok [m <sup>2</sup> /s]
306,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
306,400	0,461	0,183	0,419	0,166	0,405	0,161
306,800	0,519	1,067	0,503	1,036	0,483	0,993
307,200	0,532	2,355	0,563	2,492	0,518	2,294
307,450	0,528	3,271	-	-	0,527	3,262
308,150	0,554	6,679	-	-	0,528	6,373

Porovnanie prietochného množstva vypočítaného programom Flow 3D a následne podľa rôznych autorov je súčasťou Prílohy č. 2.



a) pôvodná geometria

b) nová geometria

**Obrázok 41: Porovnanie pôvodnej a novej geometrie 2D modelu**

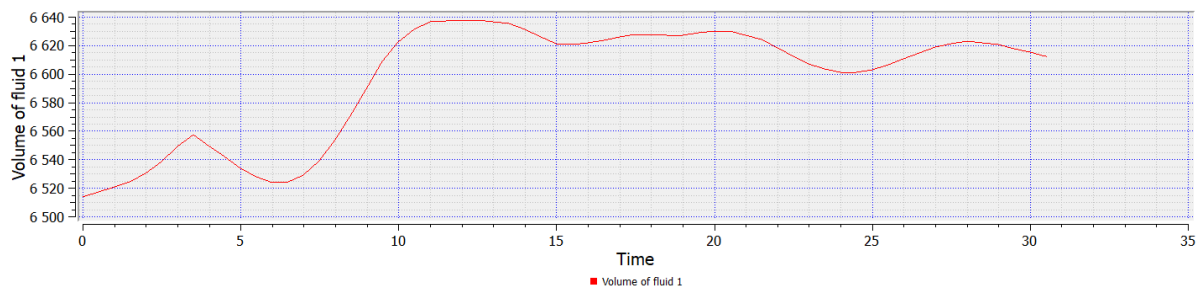
### E.3.3. Výpočet simulácií na 3D modeli

Po dôkladnom preskúmaní geometrie 3D modelu boli prevedené simulácie s rôznou počítačnou hladinou. Nastavenie výpočtu a výpočtových sietí je bližšie popísané v kapitole E.1.3.a. Súhrn simulovaných variantov je zhrnutý v Tabuľke 13.

**Tabuľka 13: Súhrn výpočtových variantov**

Označenie	Hladina v nádrži [m n. m.]	Prepadová výška [m]
Variant I	307,00	0,80
Variant II	307,45	1,25
Variant III	307,80	1,60
Variant IV	308,15	1,95

Všetky varianty boli v prvom kroku skúšané s konečným časom 30 sekúnd. Avšak u Variantu II a Variantu III bol výpočet po ubehnutí času 30 sekúnd neustálený (Obrázok 42).



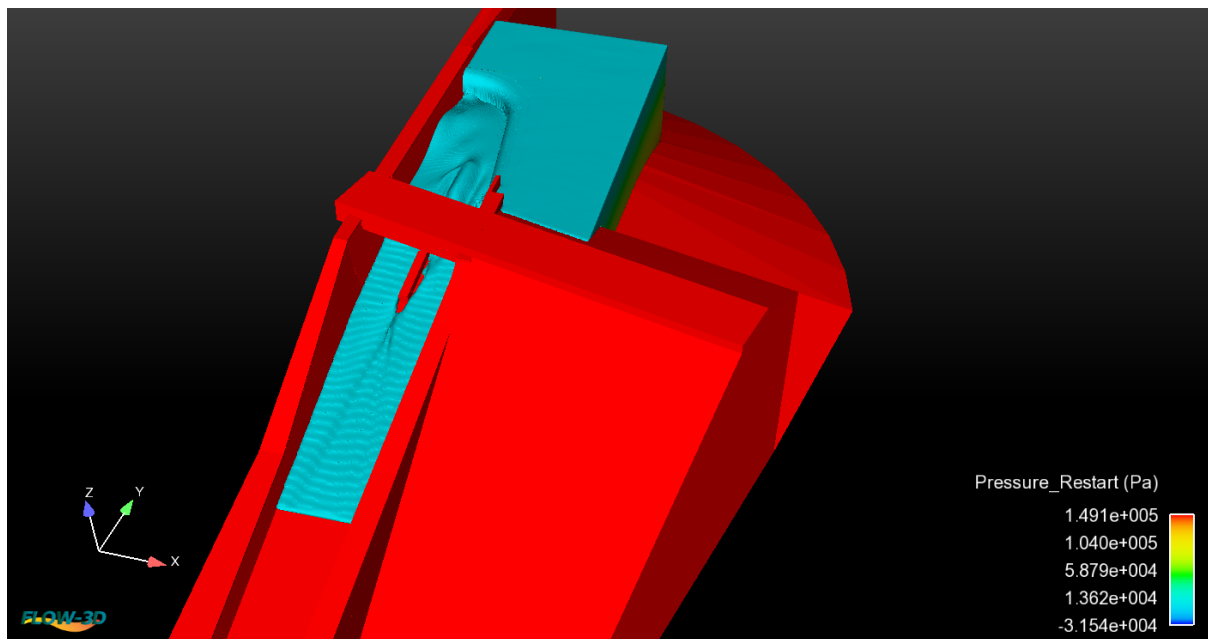
**Obrázok 42: Objem tekutiny pri simulácií**

Bolo nutné predĺžiť čas výpočtu, aby sme dosiahli ustálenie. Simulácia bola predĺžená na 50 sekúnd. Po ubehnutí tohto času bola dosiahnutá ustálenosť výpočtu.

Vypočítané varianty boli porovnané s výsledkami Hydrotechnického výskumu VD Koryčany [26] vyhotoveného na ČVUT v Prahe.

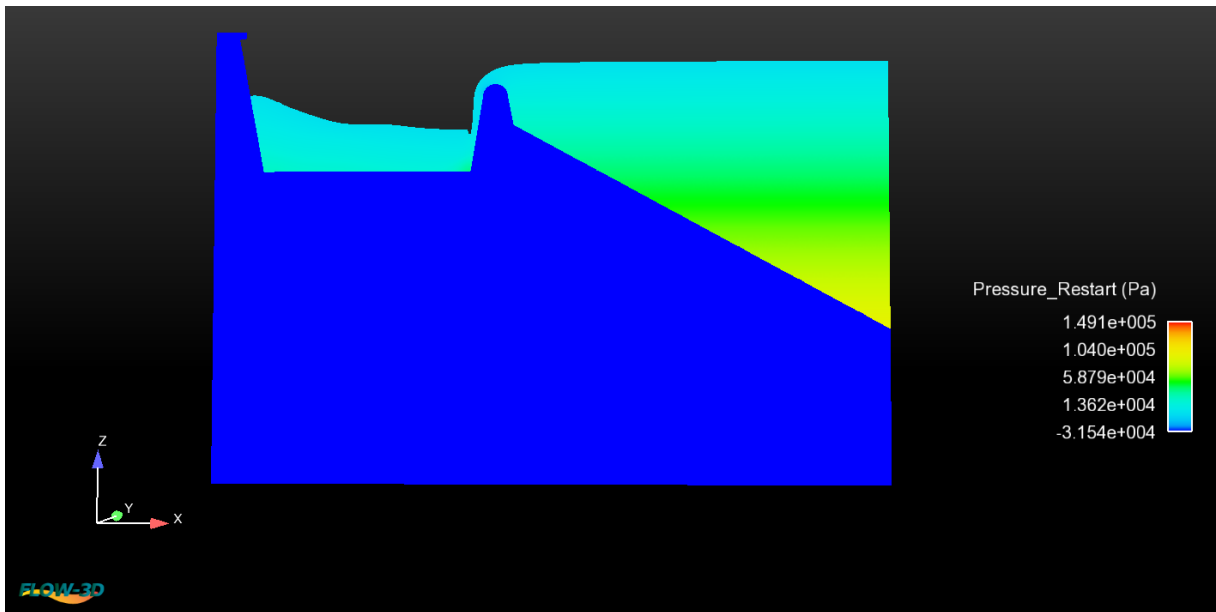
### Variant I

Variantu I odpovedá výška prepádového lúča 0,8 m. V oblasti spadiska a premostenia môžeme vidieť betónové rebro, ktoré usmerňuje prúd. Toto usmerňovacie rebro slúži na zamedzenie vzniku priečných vln. Na Obrázku 43 môžeme vidieť dokonalý prepád.



**Obrázok 43: Simulácia variantu I**

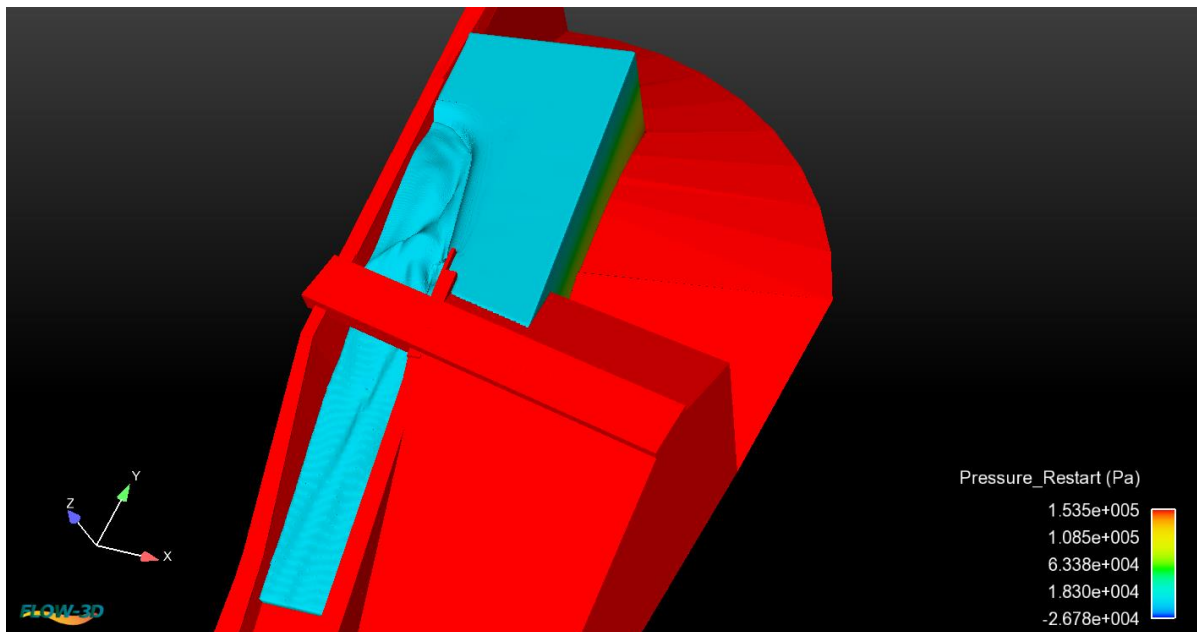




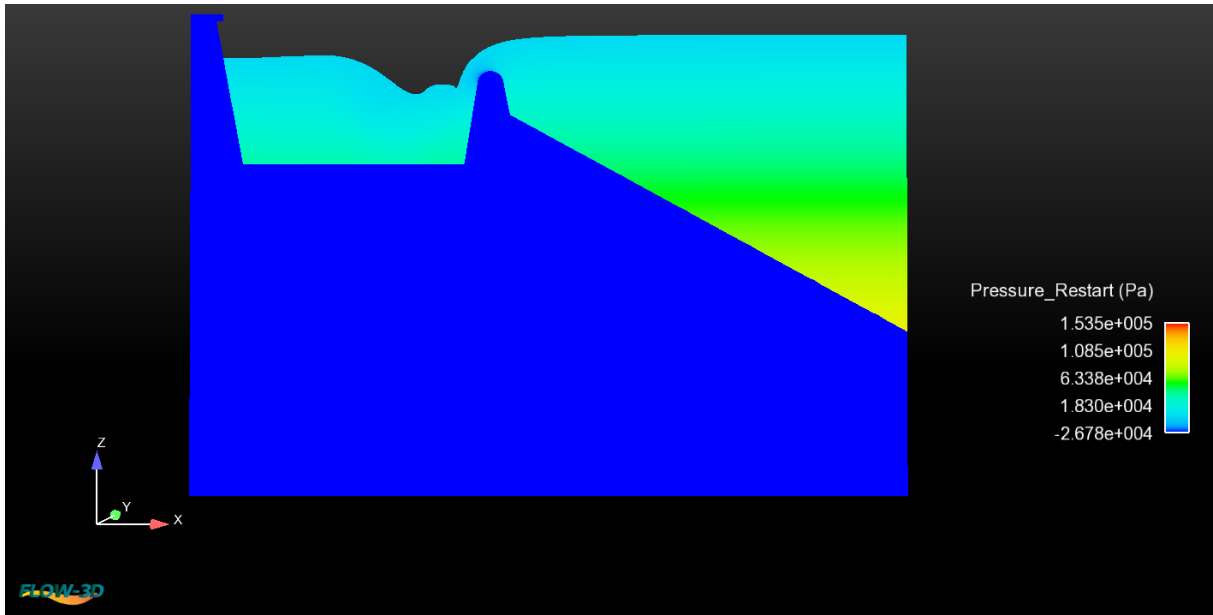
**Obrázok 44: Priečný rez pri variante I**

### Variant II

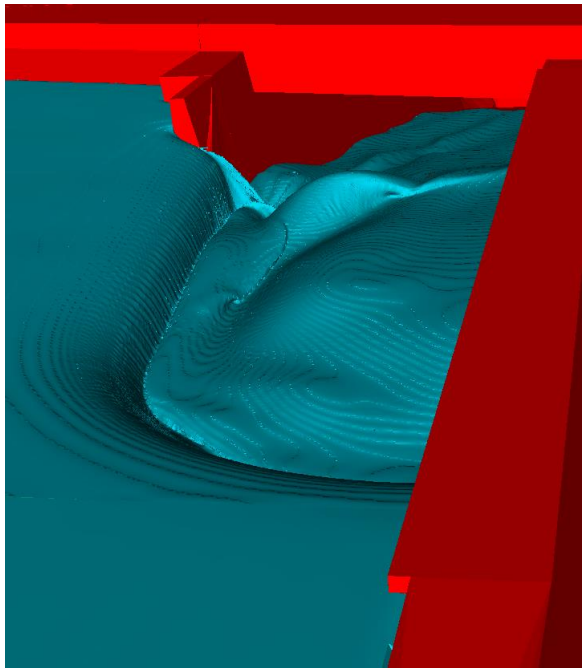
Variantu II odpovedá výška prepadového lúča 1,25 m, čo je 307,45 m n. m. a teda maximálna hladina. Pri tomto variante bolo nutné predĺžiť čas pre dosiahnutie ustálenia výpočtu.



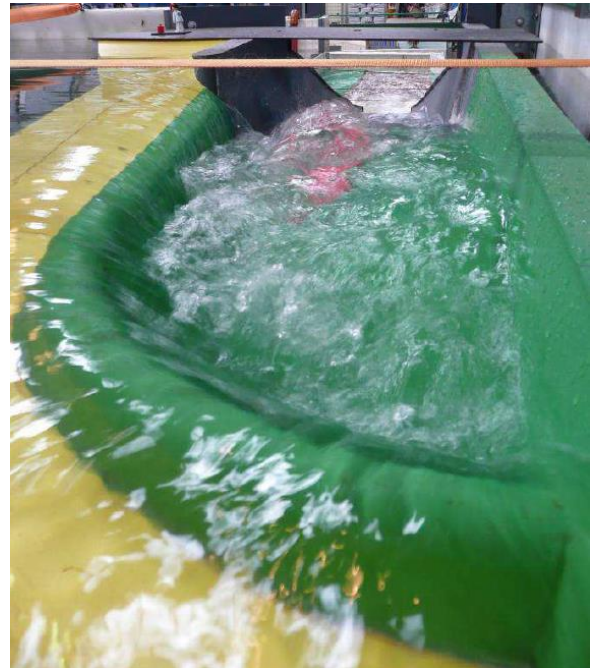
**Obrázok 45: Simulácia variantu II**



Obrázok 46: Priečny rez variantu II



a) simulácia vo Flow 3D

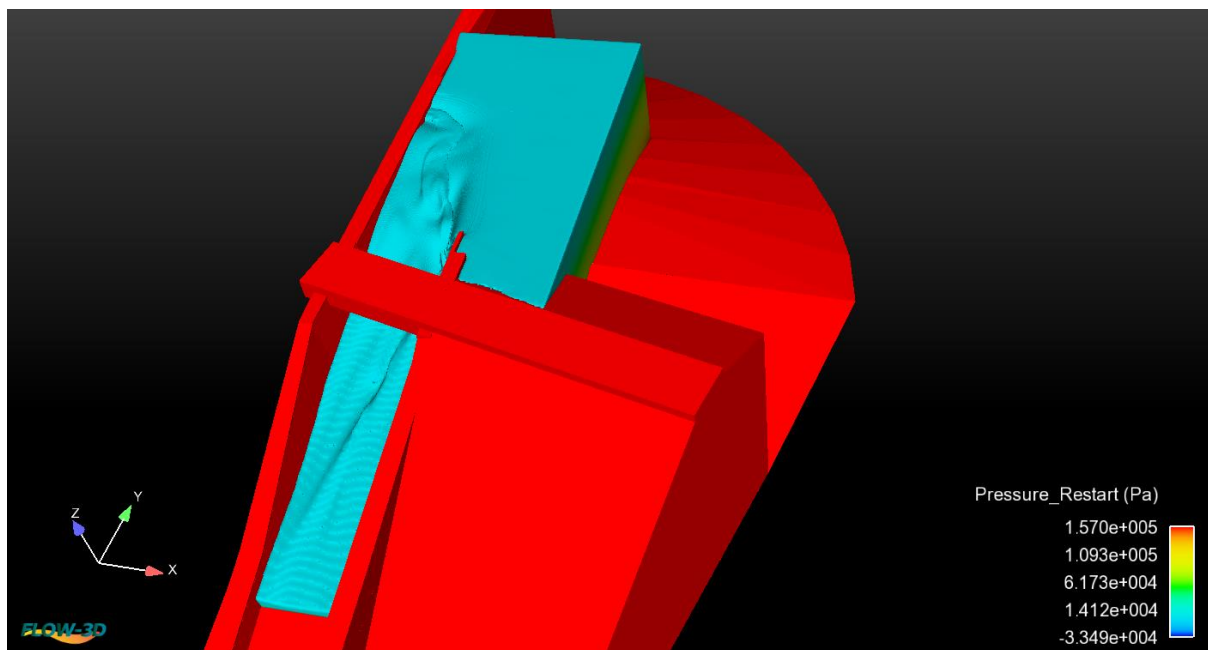


b) fyzikálny model z [26]

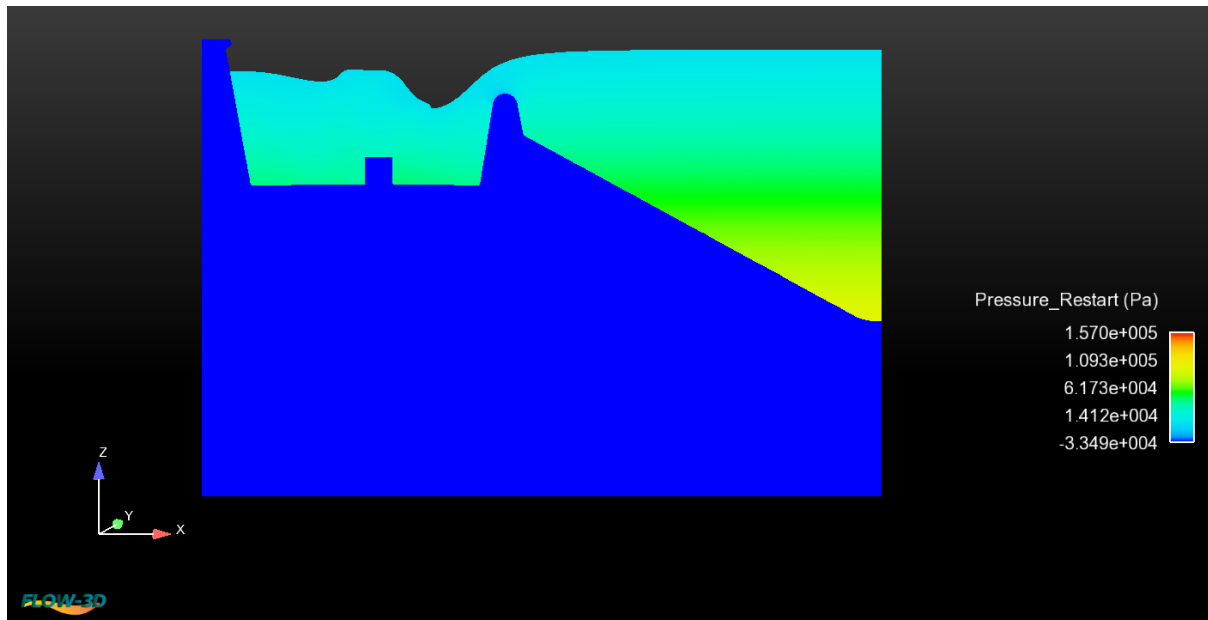
Obrázok 47: Porovnanie simulácie v programe Flow 3D a fyzikálneho modelu

### Variant III

Variantu III odpovedá výška prepadového lúča 1,60 m. Znova bolo nutné predĺžiť dobu simulácie na 50 sekúnd. Oblasť spadiska je značne zatopená (Obrázok 48), avšak prepad je stále dokonalý, a teda neovplyvnený hladinou vody v spadisku.



Obrázok 48: Simulácia variantu III

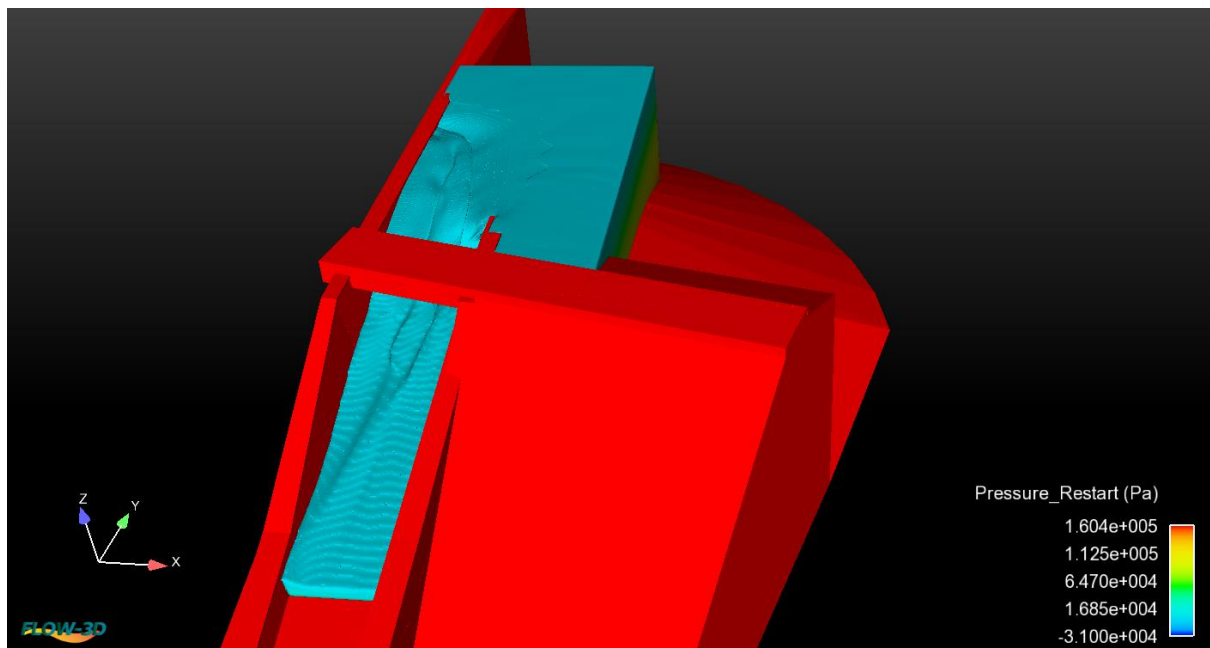


Obrázok 49: Priečný rez variantu III

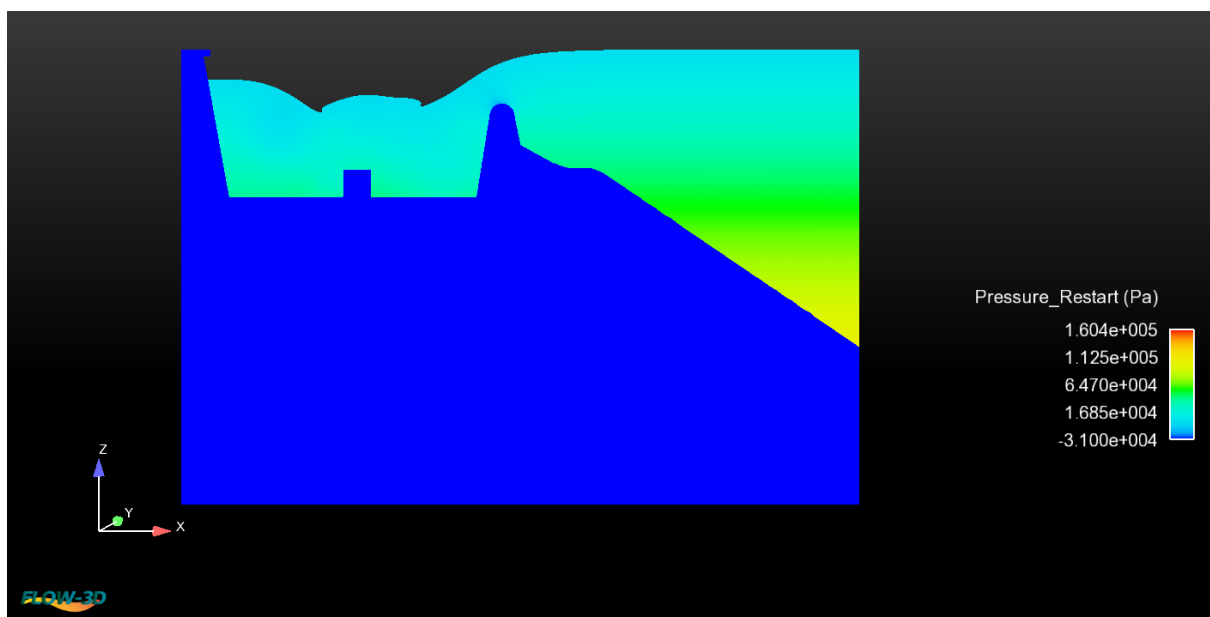
### Variant IV

Vo variante IV bola skúšaná medzná bezpečná hladina, ktorá bola pre VD Koryčany stanovená na hodnotu 308,15 m n. m., čo odpovedá prepadovej výške 1,95 m. Simulácia bola

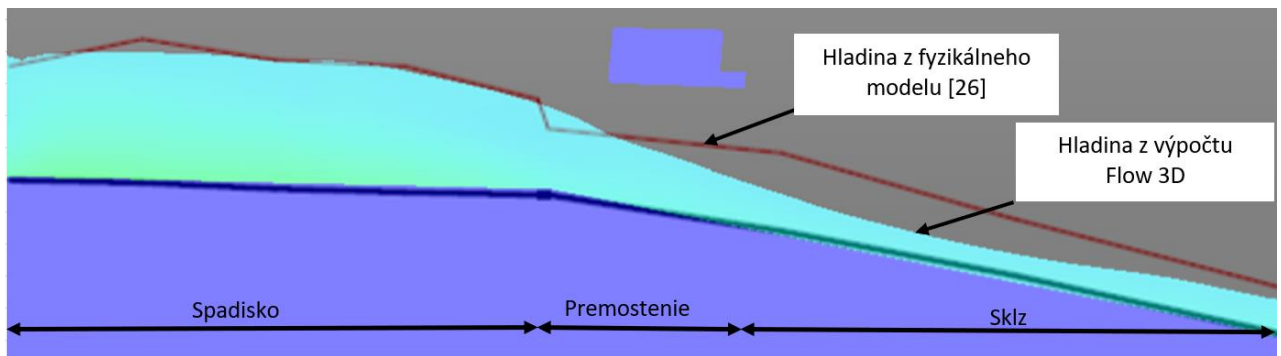
niekoľkokrát zastavená, v dôsledku zaplnenia výpočtových sietí. Riešením bolo zväčšiť výpočtovú sieť, čo má však za následok predĺženie času výpočtu.



Obrázok 50: Simulácia variantu IV



Obrázok 51: Priečný rez variantu IV



**Obrázok 52: Porovnanie hladín**

Na Obrázok 52 môžeme vidieť porovnanie hladín v spadisku, v časti premostenia a v časti sklzu a to u ľavej steny sklzu ako u fyzikálneho, tak aj u matematického modelu.

Z uvedených simulácií bola zhotovená merná krivka bezpečnostného objektu. V oblasti nízkych prepadových výšok bola merná krivka doplnená výpočtami prevedenými na 2D modeli. Merná krivka bola následne porovnaná s fyzikálnym modelom, a výpočtami podľa rôznych autorov, ktoré boli uvedené v [26]. Porovnanie merných kriviek je súčasťou Prílohy č. 3.

## F. FYZIKÁLNE MODELOVANIE

Fyzikálne modelovanie je založené na podobnosti medzi dvoma reálnymi systémami. Jeden zo systémov predstavuje skutočnosť a druhý predstavuje jeho reprodukováný obraz. Fyzikálne modelovanie nám umožňuje skúmanie javov na reálnom zmenšenom modeli. Aby bolo možné vzťahovať meranie na fyzikálnom modeli na reálny objekt, musí byť prúdenie na modeli a v skutočnosti navzájom podobné. Dva javy sú si mechanicky podobné, ak splňujú:

- geometrickú podobnosť,
- kinematickú podobnosť,
- dynamickú podobnosť.

Princípom geometrickej podobnosti pre dva ľubovoľné rozmery je zachovanie stáleho pomeru. Jedná sa o:

- dĺžkovú mierku  $M_L$ ,
- mierku plôch  $M_S$ ,
- mierka objemov  $M_V$ .

Kinematická podobnosť hovorí, že dráhy opisujúce odpovedajúce častice prúdu v úmerne odpovedajúcich si dobách sú navzájom podobné. K mierke dĺžky pristupuje aj mierka času. Odvođené mierky sú:

- mierka rýchlostí  $M_v$ ,
- mierka zrýchlenia  $M_a$ ,
- mierka prietoku  $M_Q$ .

Poslednou podobnosťou je podobnosť dynamická. Táto podobnosť vyžaduje, aby pomer síl na objekte a na modeli bol stály, a určený mierkou síl  $M_F$ . Ďalšími mierkami dynamickej podobnosti sú:

- mierka hmotnosti  $M_m$ ,
- mierka merných hmotností  $M_\rho$ .

Po aplikácií pomerov do silovej rovnice [27]:

$$F = m \cdot a, \tag{66}$$

obdržíme bezrozmerné Newtonovo kritérium, ktoré vyjadruje všeobecný zákon podobnosti [27]:

$$\frac{F}{\rho v^2 L_2} = idem, \tag{67}$$

kde index 2 náleží skutočnému objektu. Ak chceme, aby boli dve prúdenia mechanicky podobné, musí mať pomer (67) pre oba javy rovnakú hodnotu. [27]

Pri prúdení kvapalín sa uvažuje sila tiažová, trecia a sila povrchového napätia. Ak prijmeme zjednodušujúci predpoklad o pôsobení iba jedného druhu sily, resp. ak jedna sila prevažuje nad ostatnými, môžeme odvodiť ďalšie kritéria podobnosti.

Pri prevažovaní gravitačných síl nad účinkami trenia či kapilárnymi silami, môžeme ako podmienku podobnosti využiť Froudovo kritérium podobnosti. Toto kritérium sa využíva vždy pri prúdení kvapaliny s voľnou hladinou. Kinematicky podobné javy, ktoré ovplyvňuje výhradne gravitačná sila sú si dynamicky podobné ak platí pomer [27]:

$$\frac{v_1^2}{gy_1} = \frac{v_2^2}{gy_2}, \quad (68)$$

kde

$v$	rýchlosť prúdenia [m/s],
$g$	gravitačné zrýchlenie [m/s <sup>2</sup> ],
$y$	priemerná hĺbka vody [m],
index 1	model,
index 2	skutočný objekt.

Pri prevažovaní síl trenia môžeme využiť Reynoldsovo kritérium podobnosti. Toto kritérium sa využíva pri modelovaní javov neovplyvnených existenciou voľnej hladiny, a teda tlakové prúdenie a obtekanie ponorených telies. Pre dynamicky podobné javy platí pomer:

$$\frac{v_1 y_1}{\nu} = \frac{v_2 y_2}{\nu}, \quad (69)$$

kde

$v$	rýchlosť prúdenia [m/s],
$y$	priemerná hĺbka vody [m],
$\nu$	kinematická viskozita [m <sup>2</sup> /s],
index 1	model,
index 2	skutočný objekt.

Ďalším kritériom podobnosti je Weberovo kritérium. Aplikuje sa pri prevahe síl povrchového napätia, a podmienkou podobnosti je platnosť pomeru [27]:

$$\frac{\rho v_1^2 y_1}{\sigma} = \frac{\rho v_2^2 y_2}{\sigma}, \quad (70)$$

kde

$v$	rýchlosť prúdenia [m/s],
$y$	priemerná hĺbka vody [m],
$\rho$	merná hustota [kg/m <sup>3</sup> ],
$\sigma$	povrchové napätie [N/m],

index 1	model,
index 2	skutočný objekt.

Porovnávanie výsledkov matematického modelovania bolo prevedené s výsledkami fyzikálneho modelu VD Koryčany vyhotoveného na ČVUT v Prahe. Ako kritérium podobnosti bolo využité Froudovo kritérium podobnosti. Mierka fyzikálneho modelu bola určená na základe medzných podmienok modelovej podobnosti, možností laboratória a konštrukčných možností. Zvolená mierka bola 1 : 20. Celý model mal dĺžku 8,0 m, výšku 1,4 m a šírku 2,0 m. Ďalšie mierky stanovené pre fyzikálny model [26]:

- Mierka rýchlosti  $M_V$  4,47
- Mierka prietoku  $M_Q$  1789
- Mierka pulzácií  $M_P$  20
- Mierka času  $M_t$  4,47

## F.1 Využitie 3D tlače pri fyzikálnom modelovaní

3D tlačiareň je zariadenie, ktoré dokáže podľa digitálneho modelu vytvoriť hmotný trojrozmerný objekt. V súčasnosti sa jedná o cenovo dostupnú technológiu so širokospektrálnym využitím. Objekt vzniká postupným nanášaním vrstiev, takže variabilita objektu je neobmedzená. Obmedzujúca podmienka pri 3D tlači je veľkosť plochy 3D tlačiarene, avšak objekt je možné rozdeliť na niekoľko dielcov a následne spojiť podľa požiadaviek. Ako bolo spomenuté v kapitole E.1.1, je možné vymodelovaný objekt tlačiť priamo z programu Autodesk Inventor. Výhodou 3D tlače je jednoduché zhotovenie aj konštrukčne zložitých objektov, ktoré sa klasickými technológiami vyrobiť nedajú.

Existuje mnoho druhov materiálov, z ktorých dokáže 3D tlačiareň zhotoviť požadovaný objekt:

- plast ABS,
- plast PLA,
- sadrový kompozit,
- fotopolymér,
- polyamid a iné.

Na zhotovenie zmenšeného modelu bezpečnostného objektu VD Koryčany, podľa predlohy vymodelovanej pre matematické modelovanie, bol využitý materiál PLA (*polylactic acid*). Tento materiál je biologický rozložiteľný a plne odbúrateľný. Je vyrobený z kukuričného alebo zemiakového škrobu a tiež môže byť zhotovený z cukrovej trstiny. Hustota PLA sa pohybuje



okolo  $1250 \text{ kg/m}^3$ . Materiál je vhodný na tlač veľkých objektov, je pružný, tvrdý a odolný. Nevýhodou tohto materiálu je sklon k pohlcovaniu vzdušnej vlhkosti, čo má za následok vytvorenie bubliniek na povrchu vytlačeného predmetu. Preto je nutné dbať na správne skladovanie v suchom prostredí. Nakoľko sa PLA vyznačuje nízkym bodom tavenia neodporúča sa vyhotovený model obrusovať strojne. Všetky materiály dostupné pre tlač môžu byť znovu spracované a využité pri ďalšej práci s tlačiarňou. Vytlačený 3D model bezpečnostného objektu slúži ako ukážka práce s 3D tlačou, a jej využitia vo fyzikálnom modelovaní. Fotodokumentácia vytlačeného modelu bezpečnostného objektu je súčasťou Prílohy č. 4.

## G. ZÁVER

V diplomovej práci bol vytvorený 3D model bezpečnostného objektu VD Koryčany, ktorý bol využitý pre simuláciu prúdenia tekutiny v programe Flow 3D. Výsledky boli porovnané s meraním na fyzikálnom modeli vyhotoveného na ČVUT v Prahe a s ďalšími hydraulickými výpočtami. Môžeme konštatovať, že matematické modelovanie môže slúžiť pre definovanie problémových oblastí navrhnutého objektu, pretože režim prúdenia a celkový priebeh prepadu vody cez prelivnú hranu bolo podobné ako u fyzikálneho modelu. Avšak pri porovnaní celkového prepadového množstva a pri porovnaní merných kriviek objektu (Príloha č. 3) bola vykázaná odchýlka od fyzikálneho modelovania. Odchýlka sa so zvyšujúcou prepadovou výškou znižovala, celkovo sa pohybovala v rozmedzí 18 – 24 %. Príčinou odchýlenia od meraných hodnôt na fyzikálnom modeli bola veľmi pravdepodobne veľkosť buniek výpočtovej siete. Obšiahnutie rozmerov vymodelovaného objektu výpočtovými sieťami bolo z časového hľadiska a z hľadiska dostupnej výpočtovej technológie veľmi náročné. Tieto obmedzujúce podmienky neumožnili zvýšiť jemnosť delenia výpočtovej siete, a teda spresnenie výsledkov simulácie. Môžeme konštatovať, že 2D model vykázal zhodu, avšak veľkosť bunky bola 0,025 m, zatiaľ čo pri simulovaní prúdenia na 3D modeli bola najjemnejšia veľkosť delenia bunky 0,05 m, aj to iba v niektorých oblastiach bezpečnostného objektu.

Z uvedeného vyhodnotenia vyplýva, že matematické modelovanie nemôžeme využiť ako univerzálny a jediný prostriedok pre preštudovanie hydraulických javov. Vždy musí prebehnúť dôkladná analýza citlivosti, kalibrácia a verifikácia, pričom je nevyhnutné využitie výsledkov fyzikálneho modelovania.

Matematické modelovanie je čím ďalej, tým viac súčasťou bežnej praxe. Spolu s rozvojom výpočtovej techniky napredujú aj programy využívajúce numerické modelovanie. Nutnosť znalosti problematiky trojdimenzionálneho modelovania podporuje aj nariadenie vlády č. 682 z 25. septembra 2017, o zavádzaní koncepcie BIM (*Building Information Modeling*), ktorého základnou podmienkou je digitalizácia stavebníctva.

## H. POUŽITÉ PODKLADY

- [1] JANDORA, Jan. *Vodohospodářské stavby: Základy hydrauliky*. Modul 01. 2004.
- [2] HORECKÝ, Ján, ed. *Terminológia vodného hospodárstva: Hydrotechnické stavby*. III. Bratislava: Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1955.
- [3] KOMORA, Július. *Bočné priepady pri vodných nádržiach*. Veda a výskum praxi. 1962.
- [4] Vyhláška Ministerstva zemědělství č. 255/2010 Sb., ktorou sa mení vyhláška č. 471/2001 Sb., o technickobezpečnostním dohledu nad vodními díly.
- [5] ŠULC, Jan, Podklady k prednáškam z predmetu CR053 - Bezpečnostní objekty hydrotechnických staveb, 2019.
- [6] KOLÁŘ, Václav, Cyril PATOČKA a Jiří BÉM. *Hydraulika*. Praha: SNTL/ALFA, 1983.
- [7] BOOR, Boris, Jiří KUNŠTÁTSKY a Cyril PATOČKA. *Hydraulika pro vodohospodářské stavby*. Praha: SNTL/ALFA, 1968.
- [8] UHMANNOVÁ, Hana. Podklady k prednáškam z predmetu BR052- Hydraulika otevřených koryt: *Problematika stanovení drsnosti koryta*, 2017.
- [9] JANDORA, Jan. *Matematické modelování ve vodním hospodářství*. Modul 01. 2008.
- [10] KABELKOVA, Ivana. Podklady k predmetu: *Základy matematického modelování a simulování*. ČVUT, Fakulta stavební.
- [11] ŘÍHA, Jaromír. *Matematické modelování hydrodynamických a disperzních jevů*. Brno, 1997.
- [12] HABAJ, Elemír. *Studium proudění tekutin pomocí programu COMSOL Multiphysics*. České Budějovice. Bakalárska práca. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra fyziky. Vedoucí práce RNDr. Petr Bartoš, Ph.D.
- [13] PŘÍHODA, Jaromír a Petr LOUDA. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03623-5.
- [14] STUDNIČKA, Tomáš. *Matematické modelování odlehčovacích komor na stokových sítích*. Brno, 2013. Dizertačná práca. VUT v Brne, Fakulta stavební. Vedúci práce Ing. Petr Prax, Ph.D.
- [15] VRBKA, Martin a Michal VAVERKA. *Metoda konečných prvků* [online]. 24 [cit. 2019-12-13]. Dostupné z: [http://www.shigley.cz/images/texts/file/prednaska1\\_mkp.pdf](http://www.shigley.cz/images/texts/file/prednaska1_mkp.pdf)
- [16] RŮŽIČKOVÁ, Irena a Rudolf Hlavička. *Numerické metody*. Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně.

- [17] *Prozatímní manipulační řád pro vodní dílo Koryčany na Kyjovce v km 74,500 na dobu rekonstrukce vodního díla.* 2018.
- [18] *Studie návrhu opatření k bezpečnému převedení KPV<sub>10 000</sub>.* VODNÍ DÍLA – TBD a.s., pracoviště BRNO, prosinec 2008.
- [19] *Manipulační řád pro přehradu Koryčany na řece Kyjovce v km 74,500.* Povodí Moravy, s.p. 02/2009.
- [20] Archív autorky (miestne šetrenie prebehlo dňa 23. 10. 2019)
- [21] STUDNIČKA, Tomáš a Tomáš ROTH. 3D model rybího přechodu a vodácké propusti na jezu Obřany. AQA UTIS a.s., Brno, 2015.
- [22] Vodohospodářství Roušar: Flow 3D [online]. 2015 [cit. 2019-12-21]. Dostupné z: <http://www.vhroušar.cz/flow-3d>.
- [23] Vodní díla – TBD a.s. VD KORYČANY: Studie návrhu opatření k bezpečnému převedení KPV<sub>10 000</sub>. Brno, 2008.
- [24] YEN BEN CHIE. *Channel flow resistance.* Water Resources Publications. 1991.
- [25] STARA , Vlastimil a KOUTKOVA, Helena, *Součinitel přepadu přelivu s kruhově zablokovanou korunou z fyzikálních experimentů*, 3. Vodohospodářská konference 2003 s mezinárodní účastí, ISBN 80-86433-26-9, Brno, pp. 379-387.
- [26] SATRAPA, Ladislav, Martin KRÁLIK, Jitka KUČEROVÁ, Milan ZUKAL a Karel ZELENKA. *Hydrotechnický výzkum VD Koryčany: Modelový výzkum pro ověření kapacity bezpečnostního přelivu, spadiště, skluzu, vývaru, odpadního koryta a štoly od spodních výpustí.* Praha, 2010.
- [27] JANDORA, J. a J. ŠULC. *Hydraulika.* Studijní opora. Brno: VUT FAST v Brně, 2006.

## I. ZOZNAM TABULIEK

Tabuľka 1: Súčiniteľ pôdorysnej šikmosti [7].....	5
Tabuľka 2: Medzné hodnoty pre nedokonalý prepád cez ostrú hranu [1].....	5
Tabuľka 3: Súčiniteľ zatopenia pre prepád cez hať [5].....	6
Tabuľka 4: Drsnostný súčiniteľ $n$ [1].....	14
Tabuľka 5: Rozdelenie priestorov nádrže [19].....	36
Tabuľka 6: $N$ – ročné prietoky a objemy povodňových vĺn [17].....	36
Tabuľka 7: Nastavenie výpočtových sietí.....	53
Tabuľka 8: Analýza citlivosti na zmenu veľkosti výpočtovej bunky.....	55
Tabuľka 9: Porovnanie výsledkov z Flow 3D s hydraulickým výpočtom.....	56
Tabuľka 10: Citlivostná analýza pre vplyv drsnosti.....	58
Tabuľka 11: Výsledky simulácie na prvej geometrii.....	59
Tabuľka 12: Výsledky simulácie na druhej geometrii.....	60
Tabuľka 13: Súhrn výpočtových variantov.....	61

## J. ZOZNAM OBRÁZKOV

Obrázok 1: Časti bočného prelivu [5].....	3
Obrázok 2: Schéma haťového prelivu [1].....	3
Obrázok 3: Typy prelivov podľa pôdorysného usporiadania [5].....	5
Obrázok 4: Bočné kontrakcie a súčiniteľ bočného zúženia pri pilieri [1].....	6
Obrázok 5: Schéma k zostaveniu Bernuolliho rovnice [7].....	10
Obrázok 6: Schéma pre výpočet hladín v prepádovom žľabe [3].....	16
Obrázok 7: Stavba matematického modelu [10].....	18
Obrázok 8: Zákon zachovania hmotnosti.....	20
Obrázok 9: Spojitosť prúdu v elemente [9].....	21
Obrázok 10: Rozdelenie okamžitých hodnôt veličín.....	26
Obrázok 11: Rozdelenie modelov.....	28
Obrázok 12: Príklad rozdelenia oblasti na konečný počet prvkov [16].....	32
Obrázok 13: Tvary konečných prvkov.....	33
Obrázok 14: Vodohospodárska mapa [17].....	35
Obrázok 15: Vzdušný svah hrádze [20].....	37
Obrázok 16: Návodný svah hrádze [20].....	38
Obrázok 17: Detail napojenia bezpečnostného objektu k hrádzi [20].....	39

Obrázok 18: Pohľad do spadiska po prúde [20] .....	40
Obrázok 19: Ponechaná pôvodná ľavobrežná stena [20] .....	41
Obrázok 20: Pohľad na sklz a vývar [20] .....	41
Obrázok 21: Karta <i>Náčrt</i> v programe Inventor.....	43
Obrázok 22: Karta <i>3D model</i> v programe Inventor .....	44
Obrázok 23: Karta <i>Zostavenie</i> v programe Inventor .....	44
Obrázok 24: Spadisko VD Koryčany vo formáte STL.....	45
Obrázok 25: Skutočný stav spadiska .....	45
Obrázok 26: Pracovný priestor programu Blender .....	46
Obrázok 27: Základná práca v programe Blender .....	47
Obrázok 28: Základné prvky objektu .....	48
Obrázok 29: Správne natočenie normál polygónov.....	48
Obrázok 30: Nesprávne exportovaná plocha .....	49
Obrázok 31: Metóda FAVOR™ [21] .....	50
Obrázok 32: Nastavenia na karte <i>General</i> .....	51
Obrázok 33: Model vo Flow 3D .....	51
Obrázok 34: Výpočtové siete aplikované na geometrii .....	52
Obrázok 35: Výpočtové siete.....	52
Obrázok 36: Nastavenie siete pre analýzu citlivosti.....	54
Obrázok 37: Detail prelivnej hrany pri zmene veľkosti výpočtovej bunky.....	56
Obrázok 38: Vplyv bunky na výsledok simulácie .....	57
Obrázok 39: Prvá geometria 2D modelu .....	59
Obrázok 40: Druhá geometria 2D modelu.....	60
Obrázok 41: Porovnanie pôvodnej a novej geometrie 2D modelu.....	61
Obrázok 42: Objem tekutiny pri simulácií .....	62
Obrázok 43: Simulácia variantu I .....	62
Obrázok 44: Priečny rez pri variante I.....	63
Obrázok 45: Simulácia variantu II.....	63
Obrázok 46: Priečny rez variantu II.....	64
Obrázok 47: Porovnanie simulácie v programe Flow 3D a fyzikálneho modelu.....	64
Obrázok 48: Simulácia variantu III .....	65
Obrázok 49: Priečny rez variantu III .....	65
Obrázok 50: Simulácia variantu IV .....	66
Obrázok 51: Priečny rez variantu IV .....	66

**K. ZOZNAM SKRATIEK A SYMBOLOV****K.1 Zoznam symbolov**

$s_1$	výška prelivnej hrany nad horným dnom	[m]
$h$	prepadová výška	[m]
$s$	výška prelivnej hrany nad dolným dnom	[m]
$h_z$	výška zatopenia	[m]
$H$	rozdiel úrovne hornej a dolnej vody	[m]
$h_d$	hlĺbka dolnej vody	[m]
$v_0$	prítoková rýchlosť	[m/s]
$Q$	prietok	[m <sup>3</sup> /s]
$\sigma_s$	súčiniteľ pôdorysnej šikmosti	[-]
$\sigma_z$	súčiniteľ zatopenia	[-]
$b$	celková šírka prelivnej hrany	[m]
$b_0$	účinná šírka prelivnej hrany	[m]
$g$	gravitačné zrýchlenie	[m/s <sup>2</sup> ]
$h_0$	energetická prepadová výška	[m]
$m$	súčiniteľ prepadu	[-]
$a$	Coriolisovo číslo	[-]
$\xi$	súčiniteľ straty podľa tvaru bočných pilierov	[-]
$n_k$	počet kontrakcií	[-]
$r$	polomer prepadovej hrany	[m]
$z_1, z_2$	geodetická výška profilu	[m n. m.]
$h_{r1}, h_{r2}$	rýchlostná výška	[m]
$h_{z1,2}$	stratová výška	[m]
$\Delta y$	rozdiel hladín medzi profilmi	[m]
$\Delta x$	vzdialenosť medzi profilmi	[m]
$i_e$	skon čiary mechanickej energie	[-]
$R$	hydraulický polomer	[m]
$S$	prietočný prierez	[m <sup>2</sup> ]
$O$	omocnený obvod	[m]
$C$	Chézyho rýchlostný súčiniteľ	[m <sup>0,5</sup> /s]

$n$	Manningov súčiniteľ drsnosti	[-]
$h_k$	kritická hĺbka	[m]
$q$	špecifický prietok vody	[m <sup>2</sup> /s]
$v(x, y, z, t)$	normálové zložky prierezových rýchlostí	[m/s]
$F_i$	zložka vektoru sily	[N]
$MQ$	trvalý minimálny prietok v toku	[m <sup>3</sup> /s]
$W$	objem povodňovej vlny	[m <sup>3</sup> ]
$k_s$	Nikuradseho súčiniteľ drsnosti	[-]
$M_L$	dĺžková mierka	[-]
$M_S$	mierka plôch	[-]
$M_V$	mierka obemov	[-]
$M_v$	mierka rýchlosti	[-]
$M_a$	mierka zrýchlenia	[-]
$M_Q$	mierka prietoku	[-]
$M_m$	mierka hmotnosti	[-]
$M_p$	mierka merných hmotností	[-]
$\sigma$	povrchové napätie	[N/m]

## K.2 Zoznam skratiek

BPV	Balt po vyrovnání
ČSN	Česká štátna norma
KPV	kontrolná povodňová vlna
MBH	medzná bezpečná hladina
Max.H	maximálna hladina
PV	povodňová vlna
VD	vodné dielo
STL	stereolithography
CFD	Computational Fluid Dynamics
RANS	Reynolds Averaged Navier – Stokes
VOF	Volume of Fluid
VD	vodné dielo
3D	trojdimenzionálny
2D	dvojdimeznionálny
ABS	Akrylonitrilbutandienstyren



PLA	polylactic acid
ČHMÚ	Český hydrometeorologický ústav
TBD	Technicko – bezpečnostný dohľad

## **L. ZOZNAM PRÍLOH**

1. Výstup z programu Autodesk Inventor
2. 2D model – porovnanie výsledkov simulácií s hydraulickými výpočtami
3. Porovnanie merných kriviek
4. Fotodokumentácia vytlačeného modelu bezpečnostného objektu VD Koryčany
5. Priečny profil korunou hrádze (M 1 : 50) [18]
6. Pôdorys bezpečnostného prelivu (M 1 : 100) [18]
7. Priečny profil bezpečnostným prelivom (M 1 : 50) [18]