



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

GEODETICKÉ KŘIVKY A JEJICH APLIKACE

GEODESIC CURVES AND THEIR APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

SVETOSLAV ORGONÍK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. PETR VAŠÍK, Ph.D.

BRNO 2008

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2008/09

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Orgoník Svetoslav

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Geodetické křivky a jejich aplikace

v anglickém jazyce:

Geodesic curves and their applications

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Geodetické křivky jsou z matematického hlediska nejkratší spojnice bodů vzhledem k dané metrice, mají však i hluboký fyzikální význam jako "trajektorie minimálních energií," tedy křivky, po nichž by se objekty pohybovaly bez působení vnějších sil. Teorie geodetických křivek spadá do diferenciální geometrie, k jejich nalezení je však nutno použít i výsledky jiných oblastí matematiky, například numerických metod.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je popsat základy teorie geodetických křivek, popsat algoritmicky proces jejich nalezení pro prostor dimenze 2 (nalezení geodetiky na ploše) a ukázat aplikaci například ve formě programu nebo animace.

Seznam odborné literatury:

Doupovec, M.: Diferenciální geometrie a tenzorový počet, skriptum VUT v Brně, 1999.


Gray, A.: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, London, 1993.

Vondra, A.: Diferenciální geometrie křivek a ploch, skriptum VA, Brno, 1994.

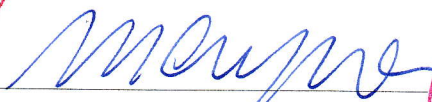
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/09.

V Brně, dne 3.9.2008



prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu



doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty



Abstrakt

Cieľom tejto práce je podať základný prehľad pojmov a výsledkov klasickej diferenciálnej geometrie kriviek. Zameriame sa na geodetické krivky a popíšeme ich základné vlastnosti. Ukážeme si geodetiky na niektorých špeciálnych plochách. Ukážeme si aplikáciu s animáciami. K príkladom sú nakreslené ilustrujúce obrázky, k ich vytvoreniu sme použili vhodný software.

Summary

The aim of the thesis is to give a survey of basic results from the classical theory of curves. A special attention will be paid to geodesics and their properties. In particular, we treat geodesics on some special surfaces. We treat one application with animations. All examples will be illustrated by pictures, which were drawn by means of mathematical software.

Kľúčové slová

diferenciálna geometria, geodetické krivky

Keywords

differential geometry, geodesic curves

ORGONÍK, S. *Geodetické křivky a jejich aplikace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 41 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu zpracoval samostatne podľa pokynov vedúceho bakalárskej práce a s použitím uvedenej literatúry.

V Brne, dňa 17. 10. 2008

.....
Svetoslav Orgoník

Podakovanie

Chcel by som poďakovať Mgr. P. Vašíkovi, Ph.D. za odborné vedenie a cenné rady, ktoré mi poskytol pri zpracovaní bakalárskej práce.

Obsah

Úvod	8
1 Základné pojmy	9
1.1 Diferenciálna geometria kriviek	9
1.1.1 Vektorové funkcie	9
1.1.2 Vyjadrenie krivky, dĺžka oblúku krivky	10
1.1.3 Dotyčnica a oskulačná rovina krivky	13
1.1.4 Krivosť	16
1.2 Diferenciálna geometria plôch	17
1.2.1 Vyjadrenie plochy	17
1.2.2 Dotyčnicové vlastnosti plôch	20
1.2.3 Vektory na ploche	21
2 Geodetické krivky	25
2.1 Gaussove rovnice	25
2.2 Geodetická krivosť kriviek na ploche	26
2.3 Geodetické krivky na ploche	27
2.4 Clairautove plochy	29
2.5 Numerické riešenie geodetík	32
3 Aplikácia geodetických kriviek	36
3.1 Pohyb bodu viazaného na plochu	36
Záver	40
Literatura	41

Úvod

Diferenciálna geometria je dnes jednou zo samostatných častí matematiky. Jej vznik je spojený najmä s menom L. Eulera (1707-1783) a G. Mongea (1746-1818). Historicky sa diferenciálna geometria najskôr rozvíjala ako časť matematickej analýzy. Napríklad pojem derivácia funkcie je motivovaný geometrickým problémom nájdenia dotyčnice ku grafu tejto funkcie (tzv. základná úloha diferenciálneho počtu). Na podklade prác G. F. Gaussa (1777-1855) sa diferenciálna geometria definitívne stala samostatnou časťou matematiky. V minulom storočí sa z klasickej diferenciálnej geometrie kriviek a plôch vyvinula súčasná moderná diferenciálna geometria, ktorá skúma obecnjšie geometrické objekty - diferencovatelné variety. Táto práca však bude venovaná klasickej diferenciálnej geometrii.

Moderná diferenciálna geometria sa stala vyjadrovacím prostriedkom teoretickej fyziky a tým uľahčila rozvoj takých disciplín ako je kvantová mechanika a obecná teória relativity. Naproti tomu klasická diferenciálna geometria stále nachádza uplatnenie v praktických oboroch ako je geodézia, kartografia a vo veľa praktických úlohách, ktoré nie sú dostatočne popísané v českej a slovenskej literatúre.

Predložená práca má nasledovnú štruktúru:

V 1. kapitole popíšeme základné pojmy z diferenciálnej geometrie kriviek a plôch. Začneme vektorovou funkciou, následne vyjadrenie krivky. Ukážeme si vyjadrenie plochy, dotyčnicové vlastnosti plochy a 1. kapitolu zakončíme vektormi na ploche.

V 2. kapitole popíšeme geodetické krivky. Táto kapitola je hlavnou časťou tejto práce. Začneme Gaussovými rovnicami. Ukážeme si geodetickú krivosť na ploche, Clairautove plochy. Na koniec 2. kapitoly si ukážeme numerické riešenie geodetík. Jeden vykresľovací programom je priložený na cd.

V 3. kapitole popíšeme aplikáciu geodetických kriviek. Ako aplikáciu si vyberieme pohyb bodu viazaného na plochu.

Teoretické partie používané v práci sme prevzali z literatúry, najmä z [1]. Vlastné výsledky práce predstavujú príklady v kapitolách 2 až 3 vrátane software pre naše výpočty. Hlavnou časťou práce je druhá kapitola, kde vykreslíme niekoľko geodetík na špeciálnych plochách (Clairautových) v ich reálnom tvare. Potom si vypočítame numericky geodetiky, geodetické kružnice a geodetickú polárnu súradnicovú sieť na iných plochách. K určeniu geodetík na Clairautových plochách sme použili software Maple. Numerický výpočet geodetík, geodetických kružníc a geodetických polárnych súradnicových sietí je naprogramovaný v Matlabu. Posledná kapitola obsahuje simuláciu pohybu bodu po paraboloidu. Do tohto výpočtu pridáme gravitačné zrýchlenie, aby sme sa priblížili k reálnemu modelu. Tento pohyb je spracovaný ako matlabovská animácia a je vložený v práci pod obrázkom. Okrem tohto sú v kapitolách za teóriou vysvetľujúce príklady. Teória aj príklady sú doplnené názornými obrázkami.

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Diferenciálna geometria kriviek

1.1.1 Vektorové funkcie

Pri použití vektorového počtu v diferenciálnej geometrii sa stretneme s vektorovou funkciou jednej premennej.

Vyslovíme si definíciu tejto funkcie:

Definícia 1.1 Buď J jednorozmerný interval $J \subset E_1$. Predpis, ktorý každému číslu $t \in J$ priradzuje práve jeden vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, voláme *vektorovú funkciu jednej (reálnej) premennej*. Pre túto funkciu používame zápisu

$$\vec{x} = \vec{x}(t), \quad t \in J \quad (1.1)$$

Vektorovú funkciu (1.1) budeme podrobnejšie zapisovať takto:

$$\vec{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)], \quad t \in J \quad (1.2)$$

kde $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ sú funkcie (o spoločnom definičnom intervale J), ktoré pre každé $t \in J$ určujú súradnice vektoru $\vec{x}(t)$.

Pre vektorovú funkciu (1.2) môžeme zaviesť pojmy spojitosti, limity a derivácie, a to napr. pomocou týchto definícií:

Definícia 1.2 O vektorovej funkcii (1.2) povieme, že je *spojitá* v bode $t_0 \in J$, ak sú v tomto bode funkcie $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ spojité.

Definícia 1.3 Predpokladajme, že existujú limity

$$a_1 = \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \quad a_2 = \lim_{t \rightarrow t_0} x_2(t), \quad a_3 = \lim_{t \rightarrow t_0} x_3(t).$$

Potom *limitou vektorovej funkcie* (1.2) pre $t \rightarrow t_0$ rozumieme vektor \vec{a} určený vzťahom $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a píšeme

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{x}(t) = \vec{a}.$$

Definícia 1.4 Nech existujú v danom bode $t_0 \in J$ derivácie $x'_1(t_0), x'_2(t_0), x'_3(t_0)$. Potom deriváciou vektorovej funkcie (1.2) v danom bode $t_0 \in J$ rozumieme vektor $[x'_1(t_0), x'_2(t_0), x'_3(t_0)]$. Túto deriváciu označujeme $\vec{x}'(t_0)$ a platí

$$\vec{x}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t_0 + h) - \vec{x}(t_0)}{h} = [x'_1(t_0), x'_2(t_0), x'_3(t_0)].$$

Definícia 1.5 Ak existuje v každom bode $t \in J$ derivácia vektorovej funkcie (1.2), je $\vec{x}'(t), t \in J$ opäť vektorovou funkciou. Deriváciu tejto funkcie pokiaľ existuje, označíme $\vec{x}''(t)$ a nazveme *druhou deriváciou* vektorovej funkcie $\vec{x} = \vec{x}(t)$ atď.

Z predchádzajúcich výkladov vyplýva, že pojmy spojitosti, limita, derivácia sú pre vektorové funkcie definované celkom obdobne ako pre reálne funkcie reálnych premenných. Platia tu preto, ako sa dá podrobne dokázať, obdobné pravidlá pre počítanie limit a derivácií ako pre počítanie limit a derivácií reálnych funkcií jednej reálnej premennej. Uvedme stručne len najnutnejšie pravidlá, ktoré sa týkajú derivácií vektorových funkcií \vec{a}, \vec{b} definovaných na spoločnom intervale J . Platí že

$$(\vec{a} \pm \vec{b})' = \vec{a}' \pm \vec{b}',$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}',$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}' \quad \text{atď.},$$

kde \cdot je skalárny súčin a \times je vektorový súčin.

1.1.2 Vyjadrenie krivky, dĺžka oblúku krivky

Parametrické rovnice a vektorová rovnica krivky

Budeme sa zaoberať teóriou kriviek. Budeme pracovať v trojrozmernom euklidovskom priestore E_3 , v ktorom je daná kartézská sústava súradníc.

Vyslovíme si najprv definíciu regulárnej krivky:

Veta 1.1 Majme dané tri funkcie

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad (1.3)$$

ktoré splňujú predpoklady:

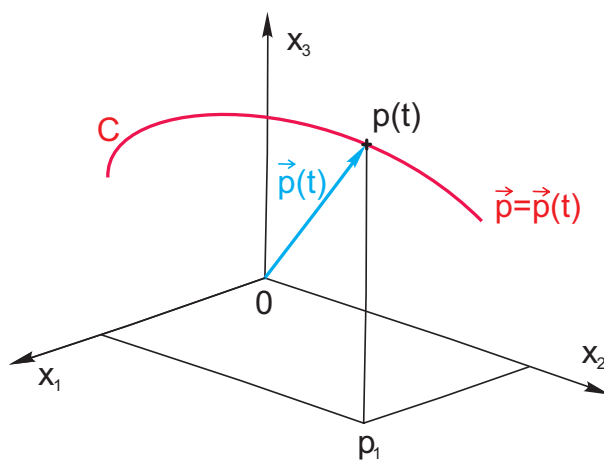
- Funkcie (1.3) sú reálne funkcie reálnej premennej t definované na spoločnom otvorenom intervale J .
- Vo všetkých bodoch intervalu J sú všetky funkcie (1.3) spojité i so svojimi aspoň prvými deriváciami.
- Vo všetkých bodoch intervalu J platí

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 \neq 0. \quad (1.4)$$

- d) Dvomi rôznymi bodmi t_1, t_2 z intervalu J priradiť funkcie (1.3) v priestore E_3 dva rôzne body $[x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)], [x_1(t_2), x_2(t_2), x_3(t_2)]$.

Ak sú splnené hore uvedené predpoklady, potom množinu všetkých bodov $p(t) \in E_3$, ktorej súradnice $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ sú dané rovnicami (1.3) voláme *regulárnou krivkou* (stručne *krivkou*). Rovnice (1.3) voláme *parametrickými rovnicami* tejto krivky.

Regulárna krivka je zrejme jednoznačne určená svojimi parametrickými rovnicami (1.3). Hľadáme jej stručnejšie vyjadrenie. Každému číslu t z intervalu J odpovedá na krivke bod $p(t)$. Priradiť tomuto bodu tzv. sprievodca $\vec{p}(t)$. Máme tým na mysli vektor, ktorý je umiestnený svojím počiatočným bodom do počiatku 0 kartézskej sústavy súradníc a má svoj koncový bod v bode $p(t)$ (viď obr.1.1).



Obrázok 1.1:

Sprievodca $\vec{p}(t)$ má rovnaké súradnice ako koncový bod $p(t)$. Bod $p(t)$ sa mení v závislosti na hodnotách parametru t , prebiehajúceho intervalu J . Z tohoto dôvodu i sprievodca \vec{p} je vektorovou funkciou parametru t . Túto vektorovú funkciu môžeme zapísať vo tvare

$$\vec{p} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad (1.5)$$

alebo celkom stručne

$$\vec{p} = \vec{p}(t). \quad (1.6)$$

Rovnicu (1.6) [a teda i rovnicu (1.5)] voláme *vektorovou rovnicou* danej krivky. Rozpísaním vektorovej rovnice (1.6) dostávame tri parametrické rovnice (1.3). Vektorové vyjadrenie krivky je zrejme stručnejšie a elegantnejšie ako vyjadrenie parametrické. Budeme preto vektorové vyjadrenie používať čo najčastejšie.

Parametrizácia oblúkom

Predpokladajme, že pomocou vektorovej rovnice $\vec{p} = \vec{p}(t), t \in J$ je daná regulárna krivka C . Buď t_0 ľubovoľné, pevne zvolené číslo z intervalu J . Na intervale J si definujeme predpisom

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} dt, \quad t \in J \quad (1.7)$$

funkciu $s(t)$. Funkcia $s(t)$ je definovaná v celom intervale J a volá sa *oblúkom krivky C* . Označme $p(t_0)$ a $p(t)$ body, odpovedajúce na krivke C hodnotám parametru t_0 a t .

V diferenciálnom a integrálnom počte sa definuje dĺžka krivky a dokazuje sa, že táto dĺžka medzi bodmi $p(t_0)$ a $p(t)$ je rovná číslu $|s(t)|$. Ak je $t \leq t_0$, je $s(t) \leq 0$ a číslo $s(t)$ vyjadruje priamo dĺžku krivky C medzi jej bodmi $p(t_0)$ a $p(t)$. V prípade, že $t < t_0$, je $s(t) < 0$ a dĺžka medzi uvedenými bodmi je daná číslom $-s(t)$, resp $|s(t)|$. Funkciu $s(t)$ môžeme vyjadriť stručnejšie. Použijeme k úprave (1.7) nasledovné označenie

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}, \quad \text{resp.} \quad \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.8)$$

môžeme písať

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} dt, \quad (1.9)$$

respektíve

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}}} dt. \quad (1.10)$$

Označme $\dot{s}(t)$ deriváciu funkcie $s(t)$. Z rovníc (1.9) a (1.10) vyplýva, že

$$\dot{s}(t) = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} = \sqrt{\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}}}. \quad (1.11)$$

Odtiaľto a z (1.4) plynie, že pre všetky $t \in J$ je $\dot{s} \neq 0$. K funkcii $s = s(t), t \in J$ môžeme teda zostrojiť inverznú funkciu

$$t = t(s), \quad s \in I.$$

Z (1.11) spočítame, že pre deriváciu tejto inverznej funkcie platí

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}}}}. \quad (1.12)$$

Keďže v celom intervale J je $\dot{s}(t) \neq 0$, má i inverzná funkcia $t = t(s)$ všade v odpovedajúcom intervale I deriváciu rôznu od nuly. Funkcia $t = t(s)$ je teda prípustnou funkciou a môžeme preto pomocou nej previesť na skúmanej krivke o vektorovej rovnici $\vec{p} = \vec{p}(t)$ regulárnu transformáciu parametru. Dostaneme tak novú vektorovú rovnicu

$$\vec{p} = \vec{p}[t(s)], \quad s \in I, \quad (1.13)$$

resp. stručne

$$\vec{p} = \vec{p}(s), \quad s \in I, \quad (1.14)$$

O rovnici (1.13), resp.(1.14) hovoríme, že *parametrom* v tejto rovnici je *oblúk*. Ako plynie z predchádzajúcich úvah, je dĺžka krivky medzi svojimi dvoma bodmi $p(s_1), p(s_2)$, kde $s_1 < s_2$, rovna číslu $s_2 - s_1$. Preto sa tiež často hovorí, že oblúk krivky je taký parameter na krivke, ktorý „meria“ jej dĺžku.

1.1.3 Dotyčnica a oskulačná rovina krivky

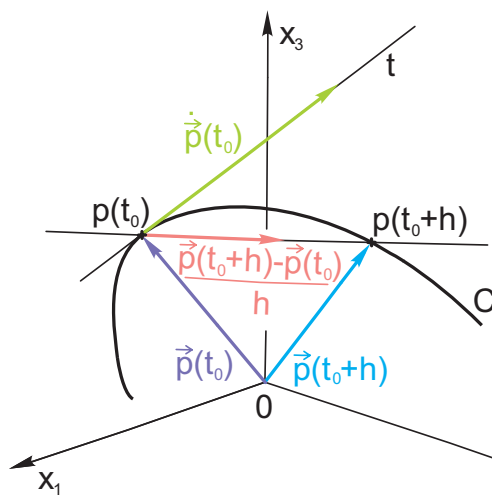
Dotyčnica krivky

Medzi všetkými priamkami, ktoré prechádzajú daným bodom regulárnej krivky, existuje jedna významná priamka, ktorá sa volá dotyčnica.

Bud C krivka popísaná vektorovou rovnicou

$$\vec{p} = \vec{p}(t), \quad t \in J. \quad (1.15)$$

Na krivke C si zvolíme dva rôzne body $p(t_0)$ a $p(t_0 + h)$ (viď obr.1.2). Sprievodné vektory



Obrázok 1.2:

oboch bodov označíme $\vec{p}(t_0)$ a $\vec{p}(t_0 + h)$. Priamka preložená oboma bodmi $p(t_0)$ a $p(t_0 + h)$ je tzv. *sečnica* krivky C . Túto sečnicu môžeme zadať i iným spôsobom. Je totiž určená bodom $p(t_0)$, ktorým prechádza, a vektorom s ním rovnobežným, teda vektorom

$$\vec{p}(t_0 + h) - \vec{p}(t_0), \quad (1.16)$$

resp. vektorom s ním kolineárnym

$$\frac{\vec{p}(t_0 + h) - \vec{p}(t_0)}{h} \quad (1.17)$$

Myslime si, že bod $p(t_0)$ je na krivke C zvolený pevne. S bodom $p(t_0 + h)$ sa „približujeme“ k pevnému bodu $p(t_0)$. Toto „približovanie“ realizujeme tak, že stále zmeňujeme číslo $|h|$. Pri tomto „približovaní“ skúmaná sečnica mení (obecne) svoju polohu. Dohodneme sa, že limitnú polohu tejto sečnice pre $h \rightarrow 0$ budeme rozumieť priamku, ktorá prechádza bodom $p(t_0)$ a je rovnobežná s vektorom, ktorý je limitou vektorovej funkcie (1.17) pre $h \rightarrow 0$. Predchádzajúce úvahy nám umožňujú vysloviť nasledovnú definíciu:

Definícia 1.6 Buď $p(t_0)$ bod regulárnej krivky C popísanej vektorovou rovnicou (1.15). *Dotyčnicou* krivky C v jej bode $p(t_0)$ rozumieme priamku, ktorá je pre $h \rightarrow 0$ limitnou polohou sečnice, prechádzajúcou bodom $p(t_0)$ a ďalším bodom $p(t_0 + h)$ krivky C . Bod $p(t_0)$ voláme *dotykovým bodom* danej dotyčnice.

Z definície, ktorú sme vyslovili, není jasné, či v každom bode regulárnej krivky existuje dotyčnica. Všimnime si tejto otázke bližšie. Z bodu b) definície regulárnej krivky vyplýva, že pre $h \rightarrow 0$ limita vektorovej funkcie (1.17) vždy existuje a platí

$$\dot{\vec{p}}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t_0 + h) - \vec{p}(t_0)}{h} \quad (1.18)$$

Z bodu c) uvedenej definície potom plynie, že $\dot{\vec{p}}(t_0)$ je vždy nenulovým vektorom. Keďže dotyčnica v bode $p(t_0)$ je rovnobežná s vektorom $\dot{\vec{p}}(t_0)$, ktorý vždy existuje a je nenulový, je táto dotyčnica jednoznačne určená. Vzniká ešte otázka, či sa táto dotyčnica nezmení, ak prejdeme na krivke C pomocou regulárnej transformácie parametru k novej rovnici

$$\vec{p} = \vec{p}[t(\bar{t})], \quad \bar{t} \in \bar{J}. \quad (1.19)$$

Ukážeme, že žiadna zmena v tomto zmysle nenastáva. Platí totiž

$$\frac{d\vec{p}}{d\bar{t}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}}. \quad (1.20)$$

Dotyčnica v príslušnom bode krivky popísanej v rovnicou (1.19) je rovnobežná s nenulovým vektorom $d\vec{p}/d\bar{t}$, ktorý je kolineárny, ako plynie z (1.20), s vektorom $d\vec{p}/dt$. Predchádzajúce úvahy môžeme zhrnúť do vety:

Veta 1.2 V každom bode regulárnej krivky existuje práve jedna dotyčnica. Ak je krivka popísaná vektorovou rovnicou (1.15), potom dotyčnica tejto krivky zostrojená v jej bode $p(t_0)$ je rovnobežná s vektorom $\dot{\vec{p}}(t_0)$ a má vektorovú rovnicu

$$\vec{y} = \vec{p}(t_0) + \lambda \dot{\vec{p}}(t_0),$$

kde $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ a \vec{y} je označenie pre sprievodný vektor bežného bodu uvažovanej dotyčnice.

Oskulačná rovina krivky

Každá rovina, ktorá prechádza dotyčnicou regulárnej krivky, sa volá *dotyčnicovou rovinou* krivky. *Dotykovým bodom* dotyčnicovej roviny rozumieme dotykový bod dotyčnice, ktorého sme dotyčnicovou rovinou preložili. Daným bodom krivky prechádza teda celý zväzok dotyčnicových rovín. V tomto sväzku existuje však významná dotyčnicová rovina, nazývajúca sa oskulačná rovina. Jej definíciou a základnými vlastnosťami sa budeme v tomto paragrafe zaoberať.

Majme pomocou vektorovej rovnice

$$\vec{p} = \vec{p}(t), \quad t \in J \quad (1.21)$$

danú regulárnu krivku C . V bode $p(t_0)$ krivky C zostrojme dotyčnicu t . Dotyčnicou t a ďalším bodom $p(t_0 + h)$, $h \neq 0$ krivky C preložme dotyčnicovú rovinu a označme ju

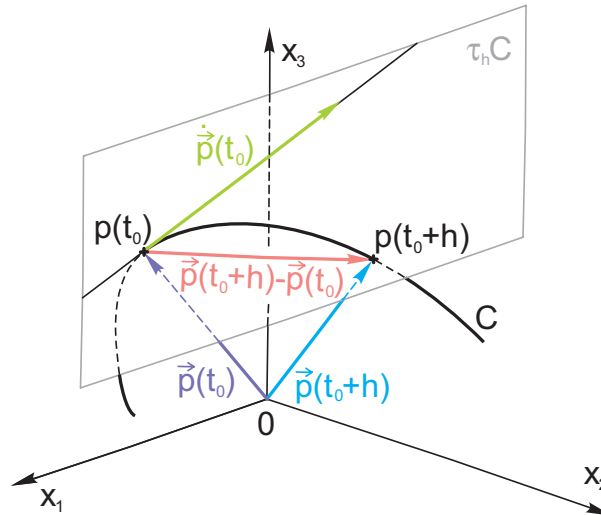
$\tau_h C$. Rovina $\tau_h C$ je určená bodom $p(t_0)$, ktorým prechádza, a dvoma vektormi s ňou rovnobežnou

$$\dot{\vec{p}}(t_0), \quad \vec{p}(t_0+h) - \vec{p}(t_0) \quad (1.22)$$

(viď. obr. 1.3). Rovina $\tau_h C$ je však tiež rovnobežná s vektormi

$$\dot{\vec{p}}(t_0), \quad 2 \frac{\vec{p}(t_0+h) - \vec{p}(t_0) - h \dot{\vec{p}}(t_0)}{h^2} \quad (1.23)$$

ktoré sú lineárnou kombináciou vektorov (1.22). Myslime si, že bod $p(t_0)$ je na krivke C



Obrázok 1.3:

zvolený pevne. S bodom $p(t_0+h)$ sa „približujeme“ k bodu $p(t_0)$ tak, že stále znižujeme číslo $|h|$. Pri tomto „približovaní“ mení (obecne) skúmaná dotyčnicová rovina $\tau_h C$ svoju polohu. Dohodneme sa, že limitnú polohu tejto dotyčnicovej roviny pre $h \rightarrow 0$ budeme rozumieť rovinu, ktorá prechádza bodom $p(t_0)$ a je rovnobežná s dvoma vektormi, ktoré sú pre $h \rightarrow 0$ limitou vektorových funkcií (1.23). Označenie, ktoré sme zaviedli, nám umožňuje vysloviť nasledovnú definíciu:

Definícia 1.7 Buď $p(t_0)$ bod regulárnej krivky C popísanej vektorovou rovnicou (1.21). *Oskulačnou rovinou krivky k v jej bode $p(t_0)$* rozumieme rovinu, ktorá je pre $h \rightarrow 0$ limitnou polohou roviny, ktorá je dotyčnicovou rovinou krivky C v bode $p(t_0)$ a prechádza ďalším bodom $p(t_0+h)$ krivky C .

Skúmame, za akých podmienok existuje jednoznačne v danom bode krivky oskulačná rovina. Zrejme

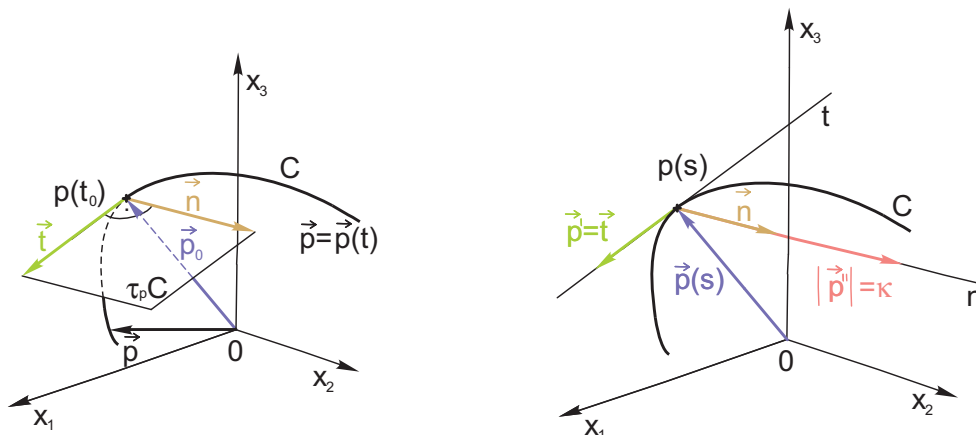
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \dot{\vec{p}}(t_0) &= \dot{\vec{p}}(t_0), \quad \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\vec{p}(t_0+h) - \vec{p}(t_0) - h \dot{\vec{p}}(t_0)}{h^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{\vec{p}}(t_0+h) - \dot{\vec{p}}(t_0)}{h} = \ddot{\vec{p}}(t_0). \end{aligned}$$

Odtiaľto vyplýva nasledovná veta.

Veta 1.3 V každom bode $p(t_0)$ krivky C existuje oskulačná rovina a je rovnobežná s vektormi

$$\vec{\dot{p}}(t_0), \quad \vec{\ddot{p}}(t_0). \quad (1.24)$$

Ak oba vektory (1.24) sú lineárne nezávislé, existuje v bode $p(t_0)$ práve jedna oskulačná rovina. V prípade, že oba vektory sú lineárne závislé, je každá dotyčnicová rovina zostrojená v bode $p(t_0)$ súčasne oskulačnou rovinou.



Obrázok 1.4:

Všimneme si prvého prípadu, kedy v danom bode $p(t_0)$ krivky C existuje práve jedna oskulačná rovina $\tau_p C$. Bodom $p(t_0)$ preložíme v oskulačnej rovine $\tau_p C$ priamku kolmú na dotyčnicu t krivky C (obr.1.4 vľavo). Túto priamku voláme *hlavná normála*. Budeme ju označovať n .

1.1.4 Krivosť

Predpokladajme, že regulárna krivka C je daná vektorovou rovnicou

$$\vec{p} = \vec{p}(s), \quad s \in I, \quad (1.25)$$

v ktorej parameter s je oblúkom. Vektor $\vec{p}'(s)$ je pre každé $s \in I$ jednotkovým dotyčnicovým vektorom krivky C . Vektory $\vec{p}'(s)$ a $\vec{p}''(s)$ sú potom rovnobežné s oskulačnou rovinou, zostrojenou ku krivke C v jej bode $p(s)$.

Definícia 1.8 Vektor $\vec{p}''(s)$ voláme *vektor krivosti* krivky C v bode $p(s)$. Veľkosť tohoto vektoru označíme $\kappa(s)$ (stručne κ) a voláme *krivosť* krivky C v bode $p(s)$.

Vyjdeme z rovnice

$$\vec{p}' \cdot \vec{p}' = 1,$$

ktorá je zrejme splnená pre všetky $s \in I$. Derivujeme obe strany rovnice podľa parametru s , dostávame

$$\vec{p}'' \cdot \vec{p}' + \vec{p}' \cdot \vec{p}'' = 0,$$

teda po úprave

$$2 \vec{p}' \cdot \vec{p}'' = 0. \quad (1.26)$$

To však znamená, že v každom bode $p(s)$ krivky C je vektor $\vec{p}''(s)$ buď nenulovým vektorom, kolmým na dotyčnicový vektor $\vec{p}'(s)$, alebo nulovým vektorom.

Predkladajme, že vo skúmanom bode nastáva prvá možnosť, tj. $\vec{p}'' \neq 0, \vec{p}'' \perp \vec{p}'$. Táto možnosť nastáva iba vtedy, ak vektor \vec{p}'' je rovnobežný s hlavnou normálou \vec{n} krivky C (viď obr. 1.4). Zostrojme pomocou rovnice

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}''}{|\vec{p}''|} \quad (1.27)$$

jednotkový vektor \vec{n} , kolineárny s vektorom \vec{p}'' . Vektor \vec{n} voláme *jednotkovým vektorom hlavnej normály*. Keďže $|\vec{p}''| = \kappa$, môžeme písať

$$\vec{p}'' = \kappa \vec{n}. \quad (1.28)$$

Zavedieme si pre jednotkový dotyčnicový vektor \vec{p}' označenie

$$\vec{t} = \vec{p}'.$$

Geometricky vyjadruje krivosť κ odchýlku krivky od priamky.

1.2 Diferenciálna geometria plôch

1.2.1 Vyjadrenie plochy

V tejto kapitole sa venujeme štúdiu plôch. Budeme pracovať v trojrozmernom euklidovskom priestore E_3 . Každému bodu X , ktorý leží v priestore E_3 , priradíme kartézské súradnice x_1, x_2, x_3 a budeme písať

$$X = [x_1, x_2, x_3]. \quad (1.29)$$

Sprievodca bodu X označíme \vec{x} a podobne ako v (1.29) budeme písať

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.30)$$

Vyslovíme si definíciu regulárnej plochy:

Definícia 1.9 Majme dané tri funkcie

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u^1, u^2), \\ x_2 &= x_2(u^1, u^2), \\ x_3 &= x_3(u^1, u^2), \end{aligned} \quad (1.31)$$

premenných u^1, u^2 , ktoré splňujú tieto predpoklady:

- a) Funkcie (1.31) sú reálne funkcie reálnych premenných definované na spoločnej oblasti Ω .
- b) Vo všetkých bodoch oblasti Ω sú funkcie (1.31) spojité a majú spojité všetky parciálne derivácie až do tretieho rádu.
- c) Vo všetkých bodoch oblasti Ω má matica

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial u^1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u^1}, & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial u^2}, & \frac{\partial x_2}{\partial u^2}, & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{array} \right\| \quad (1.32)$$

hodnosť rovnú dvom.

- d) Dvomi rôznymi bodmi oblasti Ω priradzujú funkcie (1.31) dva rôzne body v priestore E_3 .

Ak sú splnené hore uvedené predpoklady, potom množinu všetkých bodov $X \in E_3$, ktorých súradnice x_1, x_2, x_3 sú dané rovnicami (1.31), voláme *regulárnou plochou* (niekedy stručne *plochou*). Rovnice (1.31) voláme *parametrickými rovnicami* tejto plochy.

Poznámka 1.1 Premenné u^1, u^2 v rovnicach (1.31) rozlišujeme hornými indexmi, namiesto u_1, u_2 .

Poznámka 1.2 Oblasť Ω z predchádzajúcej definície je množina bodov, ktorá leží v ľubovoľne zvolenej (pomocnej) rovine ω a ktorá je súvislá a v rovine ω otvorená. Pripomeňme si, že množina bodov je *súvislá*, ak sa dajú každé dva jej body spojiť lomenou čiarou, ktorá leží v danej množine. Množina bodov je v rovine ω otvorená, ak sa dá okolo každého jeho bodu opísať v rovine ω okolie, ktoré celé patrí do tejto množiny.

Poznámka 1.3 V rovine ω , v ktorej leží oblasť Ω , si myslíme, že je zvolená kartézská sústava súradníc. Bod, ktorý leží v rovine a má súradnice u^1, u^2 označme symbolom $[u^1, u^2]$. Pridržíme sa tohoto označenia, a môžeme povedať, že parametrické rovnice (1.31) priradzujú každému bodu $[u^1, u^2]$ z oblasti Ω bod X (niekedy budeme písať obsérne $X(u^1, u^2)$) ležiaci v priestore E_3 . Dohodneme sa, že čísla u^1, u^2 budeme volať *krivočiarymi súradnicami* bodu X .

Každá regulárna plocha je určená svojimi parametrickými rovnicami (1.31). Hľadáme stručnejšie vyjadrenie plochy. Bodu $[u^1, u^2]$ z oblasti Ω odpovedá na ploche príslušný bod X so svojím sprievodcom \vec{x} (viď obr. 1.5). Sprievodca je teda vektor \vec{x} vektorovou funkciou premenných u^1, u^2 .

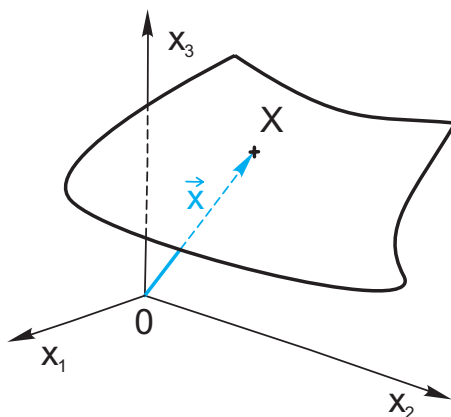
Túto vektorovú funkciu môžeme zapisovať vo tvare

$$\vec{x} = (x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2)) \quad (1.33)$$

alebo celkom stručne

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) \quad (1.34)$$

Rovnicu (1.34) (a teda i rovnicu (1.33)) voláme *vektorovou rovnicou* danej plochy. Vektorové vyjadrenie plochy je zrejme oproti parametrickému vyjadreniu plôch stručnejšie a prehľadnejšie, budeme ho preto vo väčšine prípadov používať.



Obrázok 1.5:

Transformácia parametrov na ploche

Tú istú plochu je možné zapísať pomocou rôznych vektorových rovníc. Budeme skúmať, ako spolu také rovnice súvisia. Zavedieme si najskôr pojem prípustného zobrazenia oblasti Ω na oblasť $\bar{\Omega}$. Urobíme tak v nasledovnej definícii:

Definícia 1.10 Priradíme každému bodu $[u^1, u^2]$ oblasti Ω roviny ω pomocou rovníc

$$\begin{aligned}\bar{u}^1 &= \bar{u}^1(u^1, u^2), \\ \bar{u}^2 &= \bar{u}^2(u^1, u^2)\end{aligned}\tag{1.35}$$

bod $[\bar{u}^1, \bar{u}^2]$ roviny $\bar{\omega}$. Nech sú splnené tieto predpoklady:

- Funkcie (1.35) sú vo všetkých bodoch oblasti Ω spojité i so všetkými svojimi parciálnymi deriváciami až do tretieho rádu.
- Vo všetkých bodoch oblasti Ω platia pre tzv. *Jakobián zobrazenie*

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{array} \right\| \neq 0.$$

- Rovnice (1.35) priradzujú dvom rôznym bodom oblasti Ω dva rôzne body roviny $\bar{\omega}$. Všetky body $[\bar{u}^1, \bar{u}^2]$ zostrojené pomocou rovníc (1.35) vyplnia v rovine $\bar{\omega}$ oblasť $\bar{\Omega}$.

Ak sú splnené hore uvedené predpoklady, potom hovoríme, že rovnicami (1.35) je určené prípustné zobrazenie oblasti Ω na oblasť $\bar{\Omega}$.

Ako plynie z definície, odpovedajú si body oboch oblastí $\Omega, \bar{\Omega}$ vzájomne jednoznačne. Môžeme teda z rovníc (1.35) vypočítať neznáme u^1, u^2 ako funkcie premenných \bar{u}^1, \bar{u}^2 a písať

$$\begin{aligned}u^1 &= u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \\ u^2 &= u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \quad [\bar{u}^1, \bar{u}^2] \in \bar{\Omega}.\end{aligned}\tag{1.36}$$

Dá sa ukázať, že vo všetkých bodoch oblasti $\bar{\Omega}$ sú funkcie (1.36) spojité i so všetkými svojimi parciálnymi deriváciami až do tretieho rádu a že príslušný Jakobián zobrazení je rôzny od nuly. Splňujú teda funkcie (1.36) predpoklady formulované v predchádzajúcej definícii a my môžeme vysloviť vetu:

Veta 1.4 Nech funkcie (1.35) určujú prípustné zobrazenie oblasti Ω na oblasť $\bar{\Omega}$. Potom funkcie (1.36) určujú prípustné zobrazenie oblasti $\bar{\Omega}$ na oblasť Ω .

O zobrazeniach určených rovnicami (1.35) a (1.36) hovoríme, že sú *navzájom inverzné*. V priestore E_3 nech je daná regulárna plocha vektorovou rovnicou

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2), \quad [u^1, u^2] \in \Omega. \quad (1.37)$$

Skúmame teraz vektorovú rovnicu

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)), \quad [\bar{u}^1, \bar{u}^2] \in \bar{\Omega}, \quad (1.38)$$

ktorej pravá strana vznikla zložením funkcií (1.37) a (1.36). Bodom $[u^1, u^2] \in \Omega$ a $[\bar{u}^1, \bar{u}^2] \in \bar{\Omega}$, ktoré sú spolu viazané vzťahmi (1.35), resp. (1.36), priradzujú v priestore E_3 vektorové rovnice (1.37) a (1.38) tomu istému bodu. Dostávame tak výsledok:

Veta 1.5 Rovnice (1.37) a (1.38) sú vektorovými rovnicami tej istej plochy.

Ak prejdeme pri štúdiu plochy od jednej vektorovej rovnice k druhej (pomocou prípustného zobrazenia), hovoríme, že sme na danej ploche urobili *regulárnu transformáciu parametrov*.

1.2.2 Dotyčnicové vlastnosti plôch

Krivka na ploche

Dôležitým pojmom v teórii plôch je pojem krivky na ploche. Zavedieme si ho nasledovnou definíciou:

Definícia 1.11 buď $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2), [u^1, u^2] \in \Omega$, vektorová rovnica regulárnej plochy S . Buď

$$u^i = u^i(t) \quad (1.39)$$

dve funkcie, ktoré majú tieto vlastnosti:

- a) Funkcie (1.39) sú reálne funkcie reálnej premennej t , definované na spoločnom intervale (a, b) .
- b) Vo všetkých bodoch intervalu (a, b) sú funkcie (1.39) spojité i so svojimi deriváciami aspoň prvého rádu.
- c) V žiadnom bode intervalu (a, b) nie sú funkcie $u^i(t)$ súčasne rovné nule.
- d) Dvomi rôznymi bodmi z intervalu (a, b) priradzuje funkcia (1.39) dva rôzne body oblasti Ω .

Ak sú splnené hore uvedené predpoklady, potom množinu všetkých bodov y , ktoré sú určené vektorovou rovnicou

$$\vec{y} = \vec{x}(u^1(t), u^2(t)), \quad t \in (a, b) \quad (1.40)$$

voláme *krivkou na ploche S* . Rovnice (1.39) voláme *vnútornými parametrickými rovnicami* (stručne *rovnícami*) krivky na ploche. Rovnica (1.40) je tzv. *vektorová rovnica* krivky na ploche.

Dotyčnicová rovina a normála plochy

Buď X ľubovoľný bod (regulárny) plochy S . Buď (1.40) vektorová rovnica ľubovolnej krivky, ktorá leží na ploche S a prechádza bodom X . Definujme si dotyčnicový vektor.

Definícia 1.12 Dotyčnicový vektor $\dot{\vec{y}}$ krivky na ploche S je definovaný vzťahom

$$\dot{\vec{y}} = \frac{d\vec{y}}{dt},$$

Dotyčnicový vektor je nenulovým vektorom. Derivujme zloženú funkciu (1.40) podľa parametru t . Dostaneme tak vzťah

$$\dot{\vec{y}} = \vec{x}_1 \frac{du^1}{dt} + \vec{x}_2 \frac{du^2}{dt},$$

kde

$$\vec{x}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \quad a \quad \vec{x}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}.$$

Tento vzťah môžeme stručne zapísať vo tvare

$$\dot{\vec{y}} = \vec{x}_i \dot{u}^i. \quad (1.41)$$

Z rovnice (1.41) plynie, že dotyčnicový vektor zostrojený k tejto krivke v bode X je lineárnou kombináciou vektorov \vec{x}_1, \vec{x}_2 . Odtiaľto plynie správnosť vety:

Veta 1.6 Všetky priamky, ktoré sa dotýkajú regulárnej plochy v danom jej bode X , ležia v jednej rovine.

Označme $\tau_X S$ rovinu z prechádzajúcej vety a budeme túto rovinu volať *dotyčnicová rovina* plochy, bod X potom *dotyčkovým bodom* dotyčnicovej roviny. Priamka, ktorá prechádza bodom X kolmo k dotyčnicovej rovine $\tau_X S$, je tzv. *normála* plochy. Nenulový vektor, ktorý je rovnobežný s touto normálou, voláme *normálovým vektorom* plochy S .

1.2.3 Vektory na ploche

Kontravariantné súradnice vektorov

V tomto paragrafe sa naučíme rátacej metóde, ktorá nám umožní rýchlo a prehľadne pracovať s vektormi ležiacimi v jednej dotyčnicovej rovine plochy.

Buď $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektorová rovnica plochy S . Buď $\tau_X S$ dotyčnicová rovina zostrojená v ľubovoľne, ale pevne zvolenom bode X plochy S . Označme \vec{x}_1, \vec{x}_2 súradnicové vektory roviny $\tau_X S$ a \vec{n} jednotkový normálny vektor. Ľubovoľný vektor \vec{a} , ktorý leží v dotyčnicovej rovine $\tau_X S$, je možné vyjadriť ako lineárnou kombináciou súradnicových vektorov \vec{x}_1, \vec{x}_2 . Môžeme teda písať

$$\vec{a} = \vec{x}_i a^i \quad (1.42)$$

a vysloviť nasledovnú definíciu:

Definícia 1.13 Čísla a^1, a^2 v rozklade (1.42) voláme *kontravariantnými súradnicami vektoru* \vec{a} .

V záujme stručného vyjadrovania sa dohodneme, že dvojčísliá a^1, a^2 budeme stručne značiť a^i a že budeme ho budeme volať vektorom (niekedy tiež kontravariantným vektorom).

Skalárny súčin vektorov

Zvoľme si v dotyčnicovej rovine dva vektory

$$\vec{a} = \vec{x}_i a^i, \quad \vec{b} = \vec{x}_j b^j$$

a vypočítame ich skalárny súčin. Zrejme platí že

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j a^i b^j.$$

Zavedieme si označenie

$$g_{ij} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j, \quad (1.43)$$

a môžeme skalárny súčin oboch vektorov zapísať v prehľadnej forme

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^i b^j, \quad (1.44)$$

Definícia 1.14 Čísla g_{ij} dané vzťahom (1.43) sa volajú *keoficienty prvej základnej formy*.

Pri počítaní príkladov používame často označenie

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12} = g_{21}, \quad G = g_{22},$$

Použijeme vlastného skalárneho súčinu, aby sme odvodili dôležité tvrdenie o týchto číslach. Platí veta:

Veta 1.7 Číslo g , definované rovnicou

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (1.45)$$

je väčšie ako nula.

Dôkaz. Označme φ uhol vektorov \vec{x}_1, \vec{x}_2 a píšeme

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \left| \vec{x}_1 \right| \left| \vec{x}_2 \right| \cos \varphi.$$

Odtiaľto a z rovníc (1.45) a (1.43) plynie, že

$$g = \begin{vmatrix} \left| \vec{x}_1 \right|^2 & \left| \vec{x}_1 \right| \left| \vec{x}_2 \right| \cos \varphi \\ \left| \vec{x}_2 \right| \left| \vec{x}_1 \right| \cos \varphi & \left| \vec{x}_2 \right|^2 \end{vmatrix} = \left| \vec{x}_1 \right|^2 \left| \vec{x}_2 \right|^2 \sin^2 \varphi > 0. \square$$

Kovariantné súradnice vektoru

Buď \vec{a} vektor ležiaci v dotýčnicovej rovine $\tau_X S$. Vypočítajme skalárny súčin tohoto vektoru so súradnicovými vektormi \vec{x}_i a označme ich a_i . Môžeme teda písať

$$a_i = \vec{x}_i \cdot \vec{a} \quad (1.46)$$

a vysloviť definíciu:

Definícia 1.15 Čísla a_1, a_2 z rovnice (1.46) voláme *kovariantné súradnice* vektoru \vec{a} .

Odvodíme vzťahy, ktorými sú navzájom viazané kovariantné a kontravariantné súradnice vektorov. Z rovníc (1.46), (1.42) a (1.43) plynie, že

$$a_i = \vec{x}_i \cdot \vec{a} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j a^j,$$

teda

$$a_i = g_{ij} a^j. \quad (1.47)$$

Posledná rovnica nám umožňuje vypočítať kovariantné súradnice a_i pomocou kontravariantných súradníc a^j .

Predpokladajme že su naopak dané kovariantné súradnice a_i . Vypočítame kontravariantné súradnice.

Rozopíšeme podrobne rovnice (1.47). Dostávame tak systém dvoch lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_1 &= g_{11} a^1 + g_{12} a^2, \\ a_2 &= g_{21} a^1 + g_{22} a^2 \end{aligned}$$

pre neznáme kontravariantné súradnice a^1, a^2 . V predchádzajúcom odstavci sme si dokázali, že determinant g tejto sústavy je rôzny od nuly. Máme teda zaručenú jednoznačnú existenciu riešenia. Jednoduchý výpočet, ktorého prevedenie necháme čitateľovi, nám dáva výsledok

$$a^1 = \frac{g_{22} a_1 - g_{12} a_2}{g}, \quad a^2 = \frac{-g_{21} a_1 + g_{11} a_2}{g}.$$

Označíme

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{g_{22}}{g}, & g^{22} &= \frac{g_{11}}{g}, \\ g^{12} &= g^{21} = -\frac{g_{12}}{g} = -\frac{g_{21}}{g}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

môžeme hľadané riešenie sústavy rovníc zapísať v elegantnom tvare

$$a^j = g^{ij} a_i. \quad (1.49)$$

Výsledok, ku ktorému sme dospeli, zhrnieme do vety:

Veta 1.8 Buď a^j kontravariantné a a_i kovariantné súradnice vektoru \vec{a} , ktoré ležia v dotýčnicovej rovine $\tau_X S$ plochy S . Potom sú súradnice a^j a a_i spolu viazané rovnicami (1.47) a (1.49).

Zobrazenie a rozvinutie plochy na plochu

Ďalej budeme študovať pojem rozvinutie plochy na plochu. Zavedieme si však obecnější pojem, ktorým je tzv. regulárne zobrazenie plochy na plochu. Urobíme tak v nasledovných dvoch definíciách:

Definícia 1.16 Povieme, že je dané *vzájomne jednoznačné zobrazenie jednej plochy na druhú plochu*, ak je určené pravidlo, ktoré každému bodu jednej plochy priradzuje práve jeden bod druhej plochy a obrátene každému bodu druhej plochy priradzuje práve pôvodný bod prvej plochy.

Definícia 1.17 Povieme, že vzájomne jednoznačné zobrazenie plochy na plochu je *regulárnym zobrazením*, ak na jednej z oboch plôch je možné urobiť regulárnu transformáciu parametrov, po ktorej každé dva navzájom si odpovedajúce body oboch plôch majú na oboch plochách zhodné krivočiare súradnice.

Zvláštnym prípadom regulárneho zobrazenia plochy na plochu je tzv. rozvinutie plochy na plochu. Tento pojem si zavedieme v nasledovnej definícii.

Definícia 1.18 Regulárne zobrazenie plochy na plochu nazveme *rozvinutie plochy na plochu*, ak toto regulárne zobrazenie priradzuje každej krivke ležiacej na jednej ploche krivku rovnakej dĺžky ležiacej na druhej ploche.

Koeficienty druhej základnej formy

Buď $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$, $[u^1, u^2] \in \Omega$, vektorová rovnica (regulárnej) plochy S . Vektorové funkcie

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_1(u^1, u^2), \quad \vec{x}_2 = \vec{x}_2(u^1, u^2), \quad \vec{n} = \vec{n}(u^1, u^2), \quad (1.50)$$

určujú v každom bode $[u^1, u^2]$ plochy S dva súradnicové vektory \vec{x}_1, \vec{x}_2 a jednotkový normálový vektor \vec{n} . Derivovaním vektorových funkcií (1.50) dostaneme ďalšie vektorové funkcie. Zavedme si pre ne označenie

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial u^j} = \vec{x}_{ij}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} = \vec{n}_i.$$

V pevne zvolenom bode $[u^1, u^2]$ plochy S definujeme rovnicami

$$h_{ij} = -\vec{n}_i \cdot \vec{x}_j \quad (1.51)$$

štyri čísla h_{ij} .

Definícia 1.19 Čísla h_{ij} dané vzťahom (1.51) sa volajú *koeficienty druhej základnej formy*

Poznámka 1.4 Z dôvodu stručnosti zapisujeme často vektorové funkcie vo tvare $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}, \vec{x}_{ij}$ atď, namiesto toho aby sme písali $\vec{x}_1(u^1, u^2), \vec{x}_2(u^1, u^2), \vec{n}(u^1, u^2), \vec{x}_{ij}(u^1, u^2)$ atď. Tým sa zbavujeme možnosti presne rozlíšiť funkciu od jej funkčnej hodnoty vypočítanej v konkrétnom bode plochy. Oba pojmy musíme teda rozlíšiť iba v zmysle textu, v ktorom sú uvedené.

Kapitola 2

Geodetické krivky

2.1 Gaussove rovnice

V každom bode plochy S zostrojme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}$ a nazveme ich *Frenetovým trojhranom plochy*. Hľadáme vzťahy, ktorými sú vektory $\vec{x}_{11}, \vec{x}_{12}, \vec{x}_{21}, \vec{x}_{22}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ (používame označenie $\vec{x}_{11} = \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial u^1} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^1 \partial u^1}$, $\vec{n}_1 = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1}$) vyjadrené ako lineárne kombinácie vektorov $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}$ Frenetovho trojhranu. Dostaneme celkom šesť rovníc. Dve z nich sú tzv. *Weingartenove rovnice*

$$\vec{n}_i = -h_j^i \vec{x}_j.$$

Ďalšie štyri tzv. *Gaussove rovnice* si odvodíme teraz. Platí veta:

Veta 2.1 V každom bode plochy sú splnené rovnice (tzv. Gaussove rovnice)

$$\vec{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + h_{ij} \vec{n} \quad (2.1)$$

kde čísla Γ_{ij}^k (tzv. Christoffelove symboly) sú určené reláciami

$$\Gamma_{ij}^k = \vec{x}_{ij} \cdot \vec{x}_l g^{lk}, \quad (2.2)$$

kde g^{lk} značí inverznú maticu k g_{lk} .

Dôkaz. Vyjadríme si vektory \vec{x}_{ij} ako lineárne kombinácie vektorov $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}$. Preto píšeme

$$\vec{x}_{ij} = \Lambda_{ij}^k \vec{x}_k + a_{ij} \vec{n}. \quad (2.3)$$

Vynásobíme skalárne obe strany rovnice (2.3) vektorom \vec{n} a prihliadneme k tomu, že

$$\vec{n} \cdot \vec{x}_{ij} = h_{ij}, \quad \vec{n} \cdot \vec{x}_k = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1,$$

dostávame vzťah

$$a_{ij} = h_{ij}. \quad (2.4)$$

Vynásobíme skalárne obidve strany rovnice (2.3) vektorom \vec{x}_l a prihliadneme k označeniu (2.2), dostávame postupne rovnice

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ij} \cdot \vec{x}_l &= \Lambda_{ij}^k g_{kl} \\ \vec{x}_{ij} \cdot \vec{x}_l &= \Lambda_{ijk} \\ \Lambda_{ij}^k &= \vec{x}_{ij} \cdot \vec{x}_l g^{lk} = \Lambda_{ij}^k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Použijeme výsledkov (2.5) a (2.4) k úprave rovnice (2.3), okamžite dostávame rovnicu (2.1). \square

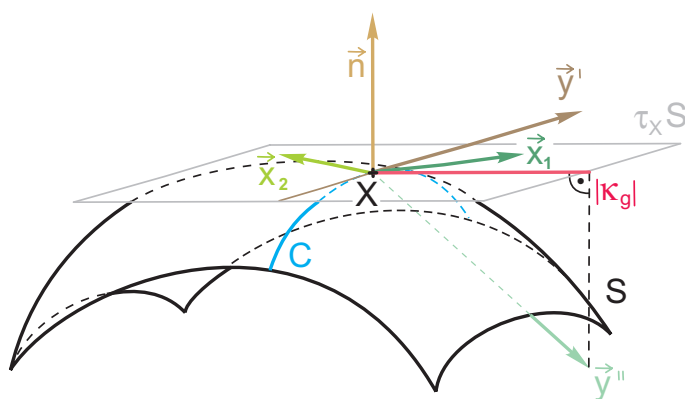
Príklad 2.1 Pre koeficienty prvej základnej formy E, F, G máme Christoffelove symboly vyjadrené vzťahmi:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2g}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2g}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2g}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2g}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-FG_v + GF_v - GG_u}{2g}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2g}, \quad g = EG - F^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

2.2 Geodetická krivosť kriviek na ploche

Položme na ploche S dvoma bodmi M, N všetky možné krivky. Hľadáme medzi týmito krivkami krivku, ktorá je na ploche S najkratšou spojnicou oboch bodov. Celý problém ľahko vyriešime, ak je plocha S rovinou. V takom prípade položíme bodmi M, N priamku a krivka (tj. úsečka), ktorá je časťou tejto priamky medzi bodmi M, N , je hľadanou najkratšou spojnicou. Priamka v rovine je charakterizovaná tým, že má v každom svojom bode krivosť rovnú nule. Zavedieme pojem geodetickej krivosti krivky ležiacej na ploche, ktorým zobecníme pojem krivosti krivky ležiacej v rovine. V nasledovnom odstavci 2.3 vyhladáme na ploche všetky krivky, ktorých geodetická krivosť je rovná nule a nazveme ich geodetickými krivkami. Dá sa ukázať, že pokiaľ existuje na ploche najkratšia spojnica dvoch bodov, potom je táto spojnica geodetickou krivkou.

Pristúpime k zavedeniu geodetickej krivosti krivky na ploche. Položme na ploche S ľubovoľne, ale pevne zvoleným bodom X krivku C . Buď $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektorová rovnica plochy S a $\vec{y} = \vec{x}[u^1(s), u^2(s)]$ vektorová rovnica krivky C , v ktorej parameter s je oblúkom. Zostrojme v bode X vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}$ Frenetovho trojhranu plochy S , dotyčnicovou rovinou $\tau_X S$ a normálu n plochy S , jednotkový dotyčnicový vektor \vec{y}' krivky C a konečne vektor krivosti \vec{y}'' krivky C (viď obr.2.1).



Obrázok 2.1: Geodetická krivosť

Vyjadríme si najprv vhodným spôsobom vektory \vec{y}' a \vec{y}'' . Derivujeme vektorovú rovnicu krivky C ako zloženú funkciu, dostaneme vzťah

$$\vec{y}' = \vec{x}_i \frac{du^i}{ds}.$$

Odtiaľto a z rovnice (2.1) plynie, že

$$\vec{y}'' = \left(\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \vec{x}_i + h_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \vec{n}. \quad (2.7)$$

Definícia 2.1 Číslo κ_g určené na ploche S vzťahom

$$\kappa_g = \left(\vec{n} \times \vec{y}' \right) \cdot \vec{y}'' \quad (2.8)$$

voláme *geodetickou krivosťou* krivky C v bode X .

Geometricky sa jedná o veľkosť kolmého priemetu vektoru krivosti \vec{y}'' do dotyčnicovej roviny $\tau_X S$. Geodetická krivosť, pokiaľ nie je nulová, môže mať rôzne znamienko. Z rovnice (2.8) vyplýva, že znamienko geodetickej krivosti nemá žiadny hlbší geometrický význam, lebo závisí na orientácii normály \vec{n} a na orientácii krivky C .

2.3 Geodetické krivky na ploche

Na ploche existujú krivky, ktoré majú radu analogických vlastností s priamkami v rovine. Sú to tzv. *geodetické krivky*. Ich definíciu si teraz vyslovíme. Urobíme tak týmto spôsobom.

Definícia 2.2 Krivku na ploche voláme *geodetickou krivkou* (stručne *geodetikou*), ak v každom bode tejto krivky je geodetická krivosť rovná nule.

Odvodíme si najprv niektoré jednoduché vlastnosti geodetických kriviek. Platia nasledovné vety:

Veta 2.2 Krivka C na ploche S je geodetickou krivkou plochy S práve vtedy, ak v každom bode krivky C , v ktorom jej krivosť nie je rovná nule, normála plochy S splýva s hlavnou normálou krivky C (teda oskulačná rovina krivky C prechádza normálou plochy).

Dôkaz. Buď C geodetikou. Potom musí v každom jej bode podľa (2.7) platiť rovnice

$$\vec{y}'' = h_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \vec{n}.$$

Pokiaľ je krivosť krivky C nulová, sú vektory \vec{y}'' , \vec{n} nenulové a obidve skúmané priamky splývajú. Naopak, ak obidve skúmané priamky splývajú, potom musí platiť, ako plynie z rovnice (2.7), $\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$ a krivka C je geodetikou. \square

Veta 2.3 Krivka je geodetickou krivkou v danej rovine práve vtedy, ak je v tejto rovine priamkou (alebo časťou priamky).

Jednoduchý dôkaz vety prenecháme čitateľovi.

Veta 2.4 Pri rozvinutí jednej plochy na druhú rozvinú sa všetky geodetiky prvej plochy do geodetiek druhej plochy.

Dôkaz. Zavedieme si na oboch plochách zhodné sústavy krivočiarych súradníc, platí pre prvé základné tenzory oboch plôch rovnosť

$$g_{ij}^1 = g_{ij}^2.$$

Odtiaľto plynie

$$\Gamma_{ij}^k{}^1 = \Gamma_{ij}^k{}^2.$$

To však znamená, že každá krivka, ktorá je geodetikou na jednej ploche, musí byť i geodetikou na druhej ploche a obrátene. \square

V predchádzajúcich vetách sme uviedli jednoduché základné vlastnosti geodetických kriviek. Hľadáme teraz diferenciálnu rovnicu geodetických kriviek. Zo vzorca (2.7) plynie, že krivka na ploche je geodetickou krivkou práve vtedy, ak v každom svojom bode vyhovuje rovnici

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0. \quad (2.9)$$

Dostali sme tak sústavu dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu pre dve neznáme funkcie $u^i = u^i(s)$. Z predokladu, že vektorová funkcia $\vec{x}(u^1, u^2)$ má spojité parciálne derivácie podľa premenných u^1, u^2 až do tretieho rádu, plynie, že funkcie Γ_{jk}^i z rovnice (2.9) majú spojité parciálne derivácie podľa premenných u^1, u^2 aspoň prvého rádu. Na základe viet z teórie o diferenciálnych rovniciach môžeme tvrdiť:

Veta 2.5 Buď t priamka, ktorá sa danej plochy dotýka v bode X . Potom existuje na danej ploche (lokálne) práve jedna geodetická krivka, ktorá prechádza bodom X a dotýka sa v ňom dotyčnice t .

Pri štúdiu geodetických kriviek sa neustále objavuje analógia medzi geodetickými krivkami na ploche a priamkami v rovine. Pristúpme k poslednému problému. V rovine je priamka najkratšou spojnicou dvoch bodov. Vzniká otázka, či majú analogickú vlastnosť i geodetické krivky na ploche. Odpoveď na túto otázku je kladná, ale s tým, že príslušnú vetu budeme formulovať „opatrnejšie“, napr. týmto spôsobom:

Veta 2.6 Ak medzi všetkými krivkami, ktoré na regulárnej ploche spájajú dva body, leží krivka najmenej dĺžky, potom je táto krivka geodetickou krivkou.

Túto vetu nebudeme dokazovať. Pri dôkaze vety je možné postupovať metodami variačného počtu.

Príklad 2.2 Keďže v rovine sú g_{ij} konštantné funkcie, tak ich parciálne derivácie sú nulové. Christoffelove symboly roviny sú $\Gamma_{ij}^k = 0$, takže geodetiky roviny sú jednoznačne určené systémom rovníc $\frac{d^2 u}{ds^2} = 0$, $\frac{d^2 v}{ds^2} = 0$, (a príslušnými počiatočnými podmienkami, tj. bodom a smerovým vektorom). Riešenie je potom v tvare $u = c_1 s + c_2$, $v = c_3 s + c_4$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú integračné konštanty, takže sme odvodili známu skutočnosť, že v rovine sú geodetickými krivkami priamky.

Príklad 2.3 Uvedieme si inú plochu a pokúsime sa znova nájsť geodetické krivky. Máme katenoid s vektorovou rovnicou $\vec{x} = (2 \cosh(\frac{v}{2}) \sin(u), v, 2 \cosh(\frac{v}{2}) \cos(u))$. Potom koeficienty prvej základnej formy sú

$$E = 4 \cosh\left(\frac{v}{2}\right)^2, \quad F = 0, \quad G = \cosh\left(\frac{v}{2}\right)^2$$

Dosadením do rovníc (2.6) dostávame Christoffelove symboly

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -2 \tanh\left(\frac{v}{2}\right), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{v}{2}\right), & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{v}{2}\right).\end{aligned}$$

Zostavíme diferenciálne rovnice geodetík (2.9).

$$\begin{aligned}u'' &= 0 \\ v'' - 2 \tanh\left(\frac{v}{2}\right) u'^2 + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{v}{2}\right) v'^2 &= 0\end{aligned}$$

Riešenie druhej rovnice vo tvare $v(s)$ je náročné, často až nemožné. V nasledovnej podkapitole si ukážeme, ako sa dajú vyrátať geodetiky dané explicitne $u(v)$, resp. $v(u)$.

2.4 Clairautove plochy

Vyriešiť analyticky sústavu diferenciálnych rovníc geodetík (2.9) je všeobecne veľmi náročné. Ale existuje jedna dôležitá skupina plôch, pre ktorú sa tento výpočet redukuje na riešenie integrálov.

Definícia 2.3 Plocha, pre ktorú platí

$$E'_u = F = G'_u = 0 \tag{2.10}$$

voláme *Clairautova plocha*.

Takže koeficienty $E(u, v)$ a $G(u, v)$ sú funkcie iba premennej v .

Sústava diferenciálnych rovníc geodetík (2.9) sa nám po zjednodušení na tvar

$$\begin{aligned}u'' + \frac{E'_v}{E} u' v' &= 0, \\ v'' - \frac{E'_v}{2G} u'^2 + \frac{G'_v}{2G} v'^2 &= 0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Z viet o Clairautových plochách (viď.[4]) dostávame užitočný vzťah pre výpočet geodetík

$$v(u) = \pm \int \frac{\sqrt{E} \sqrt{E - C^2}}{C \sqrt{G}} du + D, \tag{2.12}$$

kde C a D sú integračné konštanty. Náš pôvodný problém riešenia diferenciálnych rovníc prešiel na výpočet integrála, ale iba u týchto špeciálnych plôch splňujúce podmienku (2.10). Teraz si uvedieme geodetiky na niektorých špeciálnych plochách splňujúce podmienku (2.10).

Astroidový valec

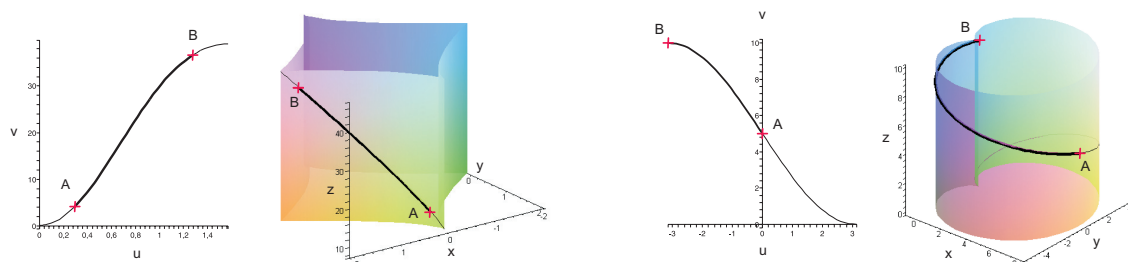
Astroidový valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (a \cos^3(u), a \sin^3(u), v)$. Dosadíme do vzťahu (2.12) a integráciou dostávame obecné riešenie geodetík. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.2 (vľavo), pričom parameter plochy je $a = 2$.

$$v = C \left(\frac{|\sin(u) \cos(u)| (9 \cos^2(u) + 4)^{\frac{3}{2}}}{\sin(u) \cos(u)} \right) + D.$$

Cardioidový valec

Cardioidový valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (2a \cos(u)(1 + \cos(u)), (2a \sin(u)(1 + \cos(u)), v)$. Dosadíme do vzťahu (2.12) a integráciou dostávame obecné riešenie geodetík. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.2 (vpravo), pričom parameter plochy je $a = 2$. Tak ako v tomto príklade, i v nasledovných budeme uvádzať obecné riešenie geodetík, a za ním obrázok s danou plochou, na ktorej je zakreslená geodetika.

$$v = C \frac{\sin(u) \cos(u)}{|\sin(u)|} + D.$$



Obrázok 2.2: Geodetická krivka na astroidovom valci (vľavo) a cardioidovom valci (vpravo)

Valec Cayleysextic

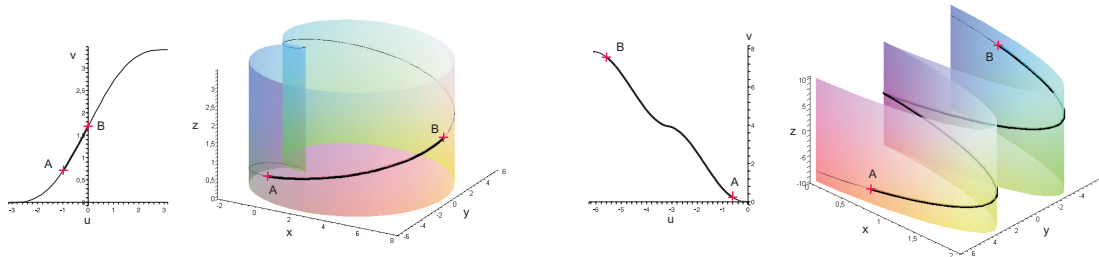
Valec Cayleysextic má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (u, a \cosh(u/a), v)$. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.3 (vľavo), kde parameter $a = 2$.

$$v = C (\sin(u) \cos(u) + u) + D.$$

Cykloidový valec

Cykloidový valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (au - b \sin(u), a - b \cos(u), v)$. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.3 (vpravo), kde parameter $a = 1, b = 1$.

$$v = C \frac{\sin(u) \cos(u)}{|\sin(u)|} + D.$$



Obrázok 2.3: Geodetická krivka na valci Cayleysextic (vľavo) a cykloidovom valci (vpravo)

Deltoidový valec

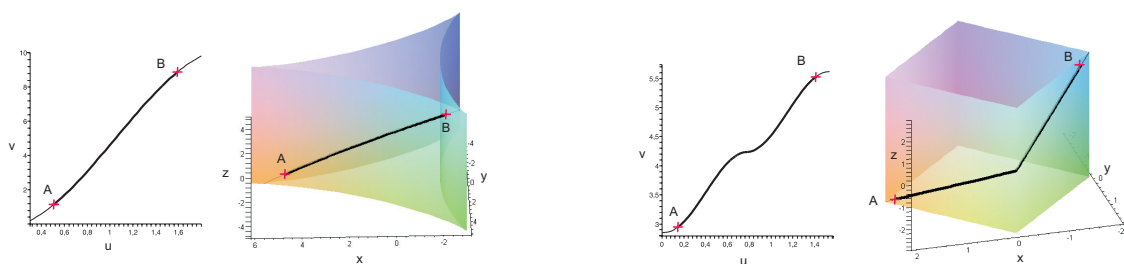
Deltoidový valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (2a \cos(u)(1 + \cos(u)) - a, 2a \sin(u)(1 - \cos(u)), v)$. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.4 (vľavo), kde parameter $a = 2$.

$$v = C \left(\operatorname{sgn}(1 + 2 \cos(u)) \frac{\sin(u)(2 \cos(u) - 1)}{\sqrt{1 - \cos(u)}} \right) + D.$$

Kosoštvorcový valec

Kosoštvorcový valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (a|\cos(u)| \cos(u), a|\sin(u)| \sin(u), v)$. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.4 (vpravo), kde parameter $a = 2$.

$$v = C (|\sin(u)| \sin(u) \operatorname{sgn}(\cos(u))) + D.$$



Obrázok 2.4: Geodetická krivka na deltoidovom valci (vľavo) a kosoštvorcovom valci (vpravo)

Semikubický valec

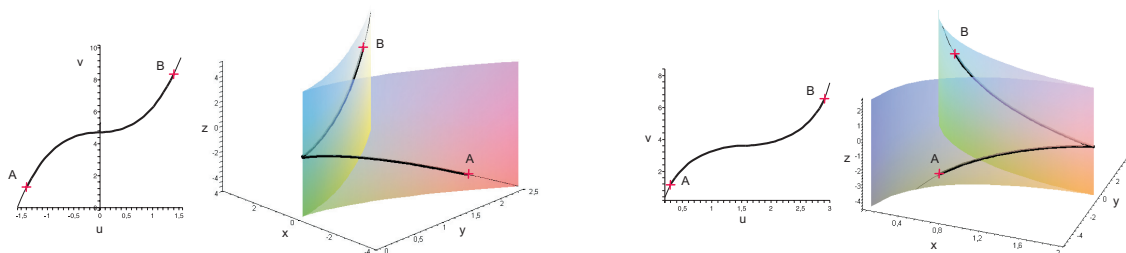
Semikubický valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (u^2, u^3, v)$. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.5 (vľavo).

$$v = C(4 + 9u^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(u) + D.$$

Tractrix valec

Tractrix valec má vektorovú rovnicu $\vec{x} = (a \sin(u), a (\cos(u) + \log(\tan(\frac{u}{2}))), v)$. Dosaďme do vzťahu (2.12) a integráciou dostávame obecné riešenie geodetík. Geodetika je zakreslená na obrázku 2.5 (vpravo), kde parameter plochy $a = 2$.

$$v = C \left(\left(\log \left(\frac{\sin(u)}{2} \right) \right) \operatorname{sgn}(\cos(u)) \operatorname{sgn}(\sin(u)) \right) + D.$$



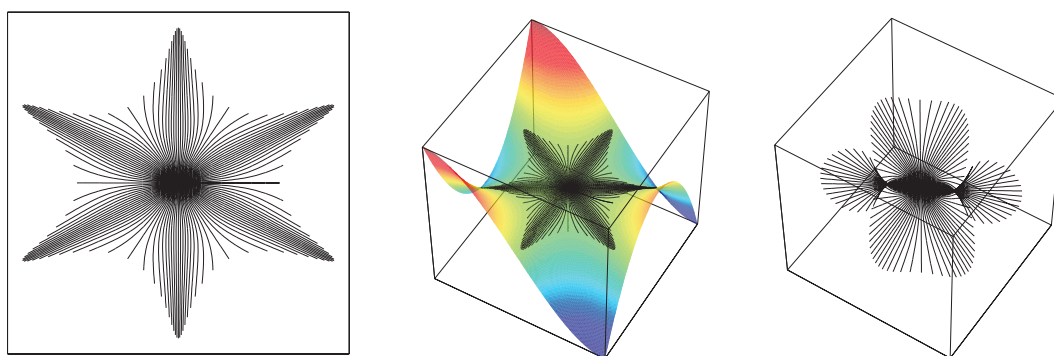
Obrázok 2.5: Geodetická krivka na semikubickom valci (vľavo) a tractrix valci (vpravo)

2.5 Numerické riešenie geodetík

Vyriešiť analyticky sústavu diferenciálnych rovníc geodetík (2.9) je všeobecne veľmi náročné. Ale vďaka softveru ako je napríklad Matlab a Maple môžeme túto sústavu riešiť numericky.

Opičie sedlo

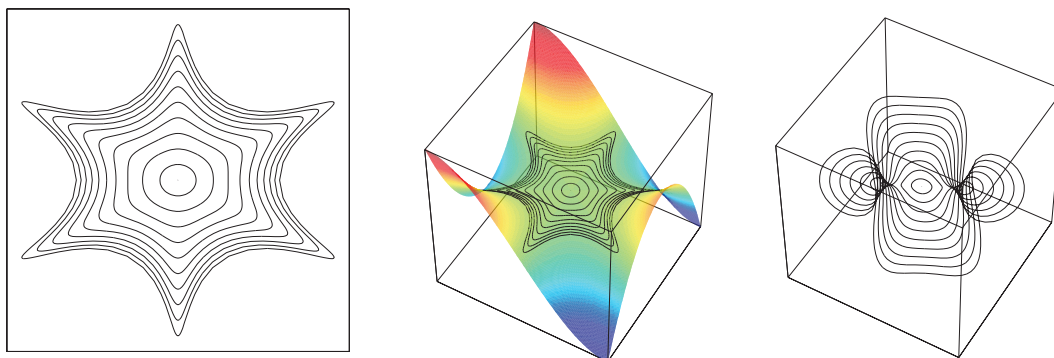
Opičie sedlo je dané vektorovou rovnicou $\vec{x} = (u, v, u^3 - 3uv^2)$. Na obrázku 2.6 je nakreslených 120 geodetík zo stredy opičieho sedla, teda bodu $[0, 0]$. Geodetiky majú rovnakú dĺžku, pričom $s \in \langle 0, 2 \rangle$.



Obrázok 2.6: Geodetiky na Opičom sedle

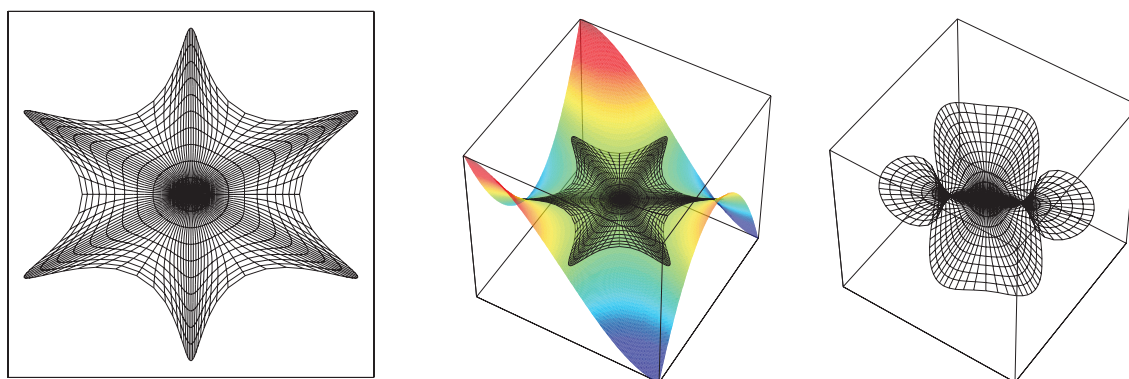
Geodetická kružnica na dvojdimenzionálnej ploche s danou metrikou je množina bodov s konštantnou vzdialenosťou od pevne daného bodu. Na nasledovnom obrázku 2.7 máme

10 geodetických kružníc zo stredu Opičieho sedla s rozostupom 0.2 . V ďalších príkladoch budeme tiež voliť konštantný rozostup geodetických kružníc.



Obrázok 2.7: Geodetické kružnice na Opičom sedle

Pomocou geodetík a geodetických kružníc si zostrojíme *Geodetickú polárnu súradnicovú sieť*, kde stred kružníc budeme značiť počiatkom geodetických polárnych súradníc. Na obrázku 2.8 sa nachádza geodetická polárna súradnicová sieť so stredu Opičieho sedla.



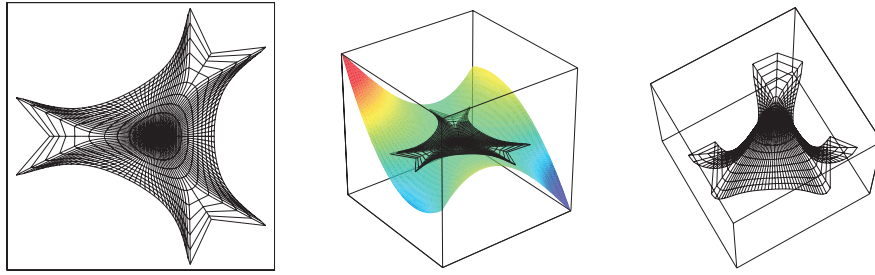
Obrázok 2.8: Geodetická polárna súradnicová sieť na Opičom sedle

Perturbedms

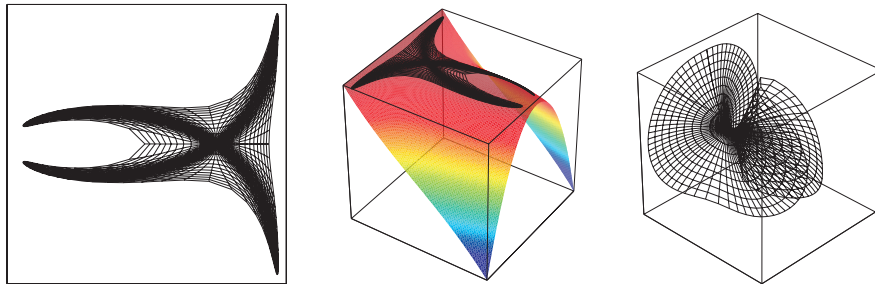
Perturbedms je daný vektorovou rovnicou $\vec{x} = \left(u, v, \frac{u^3}{3} - uv^2 + a(u^2v + v^2) \right)$, kde parameter plochy $a = 1$. Na obrázku 2.9 sa nachádza geodetická polárna súradnicová sieť danej plochy. Tvorí ju 120 geodetík a 10 geodetických kružníc z bodu $[0, 0]$, pričom $s \in \langle 0, 5 \rangle$.

Handkerchief

Handkerchief je daný vektorovou rovnicou $\vec{x} = \left(u, v, \frac{u^3}{3} + uv^2 + a(u^2 - v^2) \right)$, kde parameter plochy $a = 2$. Na obrázku 2.10 sa nachádza geodetická polárna súradnicová sieť danej plochy. Tvorí ju 120 geodetík a 10 geodetických kružníc z bodu $[0, 0]$, pričom $s \in \langle 0, 6 \rangle$.



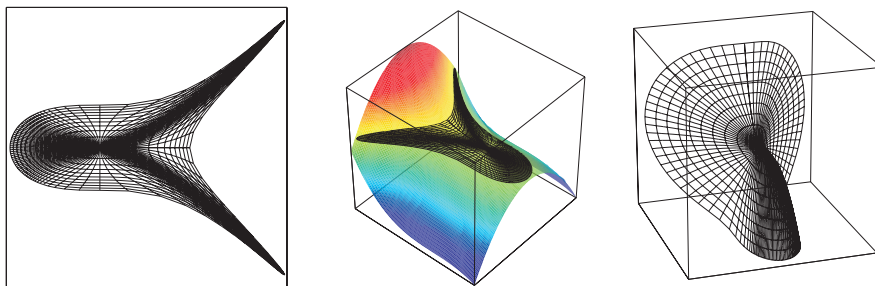
Obrázok 2.9: Geodetická polárna súradnicová sieť na ploche Perturbedms



Obrázok 2.10: Geodetická polárna súradnicová sieť na ploche Handkerchief

Shoe

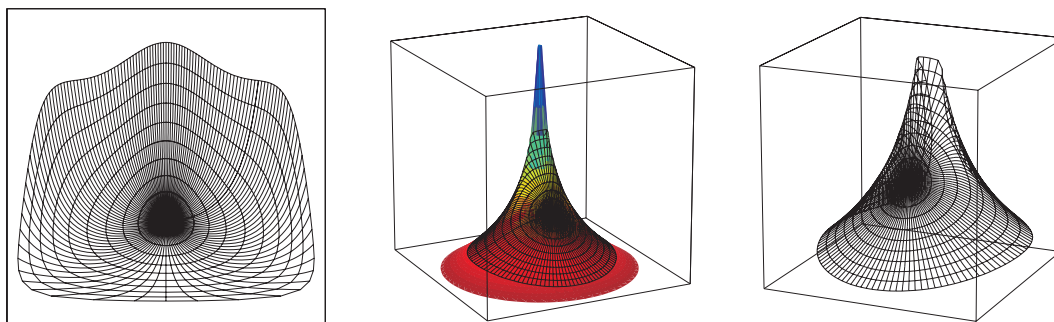
Shoe je daný vektorovou rovnicou $\vec{x} = \left(u, v, \frac{u^3}{3} - \frac{v^2}{2} \right)$. Na obrázku 2.11 sa nachádza geodetická polárna súradnicová sieť danej plochy. Tvorí ju 120 geodetík a 10 geodetických kružníc z bodu $[0, 0]$, pričom $s \in \langle 0, 20 \rangle$.



Obrázok 2.11: Geodetická polárna súradnicová sieť na ploche Shoe

Funnel

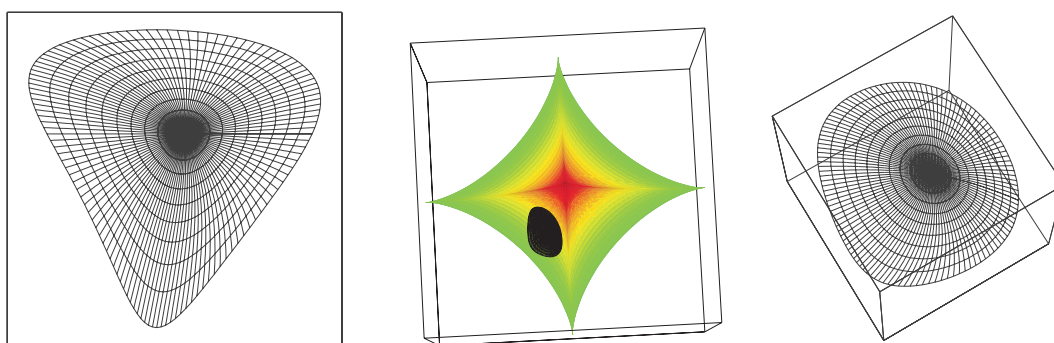
Funnel je daný vektorovou rovnicou $\vec{x} = (av \cos(u), bv \sin(u), c \log(v))$, kde parametry plochy sú $a = 1, b = 2, c = 3$. Na obrázku 2.12 sa nachádza geodetická polárna súradnicová sieť danej plochy. Tvorí ju 120 geodetík a 10 geodetických kružníc z bodu $[0, 2]$, pričom $s \in \langle 0, 2.5 \rangle$.



Obrázok 2.12: Geodetická polárna súradnicová sieť na ploche Funnel

Astell

Astell je daný vektorovou rovnicou $\vec{x} = ((a \cos(u) \cos(v))^3, (b \sin(u) \cos(v))^3, (c \sin(v))^3)$, kde parametry plochy sú $a = 1, b = 2, c = 3$. Na obrázku 2.13 sa nachádza geodetická polárna súradnicová sieť danej plochy. Tvorí ju 120 geodetík a 10 geodetických kružníc z bodu $[0.9, 0.6]$, pričom $s \in \langle 0, 0.2 \rangle$.



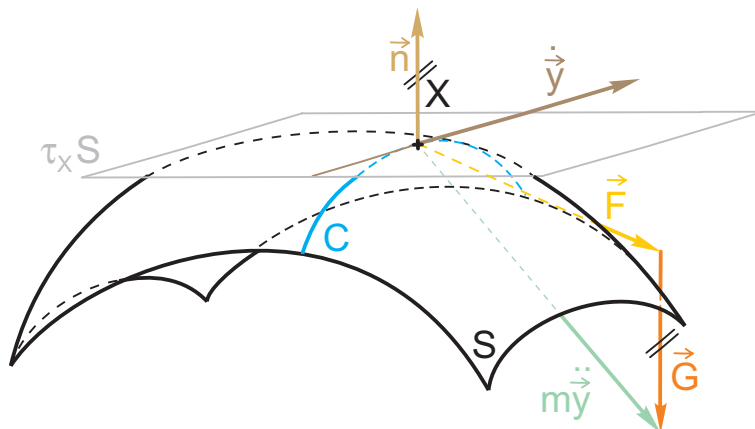
Obrázok 2.13: Geodetická polárna súradnicová sieť na ploche Astell

Kapitola 3

Aplikácia geodetických kriviek

3.1 Pohyb bodu viazaného na plochu

Predpokladajme, že v priestore E_3 je dané vektorovou rovnicou $\vec{F} = \vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ silové pole. Zostrojme v priestore E_3 ľubovoľnú plochu S a zapíšeme jej vektorovú rovnicu vo tvare $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$. Skúmame pohyb hmotného bodu X za ďalšieho predpokladu, že pri svojom pohybe nesmie bod X opustiť plochu S . Predpokladajme, že táto geometrická podmienka je uskutočnená pomocou tzv. *väzbovej sily*, ktorá v každej polohe pohybujúceho sa bodu X pôsobí kolmo na príslušnú dotyčnicovú rovinu $\tau_X S$ plochy S . Realizácia väzbovej sily je v praxi urobená pomocou mechanického zariadenia, ktoré môže byť napríklad naklonená rovina alebo guľová miska, v ktorej sa (bez trenia) pohybuje „malá olovená guľička“ vplyvom gravitačných síl.



Obrázok 3.1: Pohyb bodu viazaného plochou

Vychádzajme z nasledovných predpokladov:

- a) Bod X má hmotu m a pohybuje sa po ploche S . Jeho pohybovú rovnicu budeme zapisovať vo tvare

$$\vec{y} = \vec{x}(u^1(t), u^2(t)). \quad (3.1)$$

- b) Pohyb bodu X na ploche S nastáva tak, že v každom čase t , v ktorom uvažujeme pohyb, je splnená rovnica

$$m \ddot{\vec{y}} = \vec{F} + \vec{G}, \quad (3.2)$$

kde \vec{G} je vhodná väzbová sila, kolmá na príslušnú dotyčnicovú rovinu $\tau_X S$ (viď obr.3.1)

Vyslovené predpoklady použijeme v tejto definícii:

Definícia 3.1 Ak pohybujúci sa bod X splňuje predchádzajúce dva predpoklady, hovoríme o ňom, že je *bodom viazaným na plochu S* .

Vzniká otázka, ako nájsť funkcie $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$, ktorými je určený pohyb bodu viazaného na plochu S . Než pristúpime k riešeniu tohoto problému, vyjadríme si najprv vhodným spôsobom vektor $\ddot{\vec{y}}$, ktorý je v danom čase vektorom zrýchlenia pohybujúceho sa bodu X . Derivujme obe strany rovnice (3.1) podľa parametru t . Dostaneme tak novú rovnicu

$$\dot{\vec{y}} = \frac{du^i}{dt} \vec{x}_i.$$

Ďalším derivovaním oboch strán tejto rovnice zistíme, že

$$\ddot{\vec{y}} = \left(\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \vec{x}_i + h_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \vec{n}. \quad (3.3)$$

Vydeme z rovnice (3.2). K jej vhodnej úprave je potreba ešte vyjadriť v každom bode plochy S vektory F , G pomocou vektorov $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}$, ktoré tvoria v tomto bode Frenetov trojhran plochy. Hľadané vyjadrenie píšeme vo tvare

$$\vec{F} = f^i \vec{x}_i + f \vec{n}, \quad \vec{G} = \gamma \vec{n}. \quad (3.4)$$

Použijeme rovnice (3.3) a (3.4) k úprave rovnice (3.2), dostaneme hľadaný vzťah

$$\left(m \frac{d^2u^i}{dt^2} + m \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} - f^i \right) \vec{x}_i + \left(h_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} - f - \gamma \right) \vec{n} = \vec{0}.$$

Vhodnou voľbou čísla γ vždy môžeme doceliť toho, aby koeficient u vektoru \vec{n} bol rovný nule. Preto je posledná vektorová rovnica ekvivalentná so sústavou dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu

$$m \frac{d^2u^i}{dt^2} + m \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} - f^i = 0. \quad (3.5)$$

O funkciách Γ_{jk}^i, f^i predpokladáme, že majú vo všetkých bodoch spojitú parciálne derivácie prvého rádu. Na základe viet z teórie diferenciálnych rovníc môžeme tvrdiť, že existuje (lokálne) práve jedna sústava riešení $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$, ktorá vyhovuje počiatočným podmienkam

$$u^i = u_0^i, \quad \frac{du^i}{dt} = v_0^i \quad \text{pre} \quad t = t_0.$$

Tým sme dokázali vetu:

Veta 3.1 Pohyb bodu viazaného na plochu S je jednoznačne stanovený, ak poznáme v niektorom čase jeho polohu na ploche S a vektor jeho rýchlosti (ktorý je ale dotyčnicovým vektorom plochy S).

Príklad 3.1 Ukážeme si pohyb bodu po paraboloidu. Vektorová rovnica paraboloidu je $\vec{x} = (v \cos(u), v \sin(u), v^2)$. Hľadáme funkcie $u = u(t), v = v(t)$, ktoré popisujú dráhu hľadaného bodu. Obidve funkcie sú riešením sústavy diferenciálnych rovníc (3.5) v ktorých sme kôli stručnosti použili označenie $u^1 = u, u^2 = v$. Christoffelove symboly Γ_{jk}^i sú

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{v} \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{v}{4v^2 + 1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{4v}{4v^2 + 1};$$

ostatné

$$\Gamma_{ij}^k = 0$$

Vypočítame súradnice f^i . V gravitačnom poli je vektor sily \vec{F} určený vzťahom $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Vyjdeme z rovnice

$$\vec{F} = f^i \vec{x}_i + f \vec{n},$$

ktorú skalárne vynásobíme vektorom \vec{x}_j . Dostaneme tak vzorec

$$\vec{F} \cdot \vec{x}_j = f^i \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = f_j,$$

ktorý nám umožňuje vypočítať funkcie f_j . Dostávame výsledok

$$f_j = (0, -2mvg).$$

Funkcie f^i vypočítame zo vzorca

$$f^i = g^{ij} f_j,$$

kde

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{1}{v^2}, \quad g^{12} = \frac{-g_{21}}{g} = 0, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1}{4v^2 + 1}.$$

Teda zistíme, že

$$f^i = \left(0, -\frac{2mvg}{4v^2 + 1} \right).$$

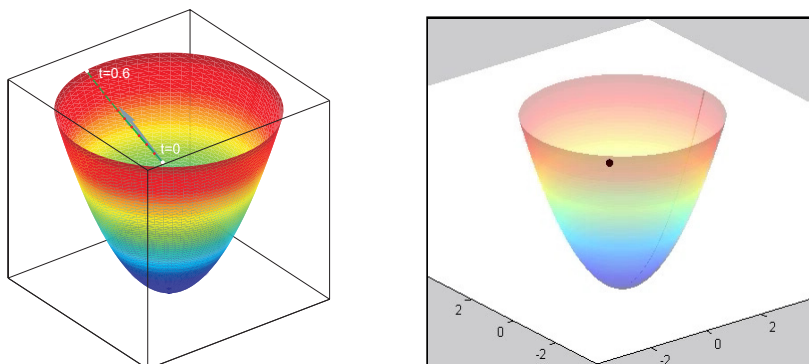
Pomocou predchádzajúcich výpočtov zapíšeme sústavu diferenciálnych rovníc (3.5) v konečnom tvare.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{v} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v}{4v^2 + 1} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{4v}{4v^2 + 1} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{2vg}{4v^2 + 1} &= 0. \end{aligned}$$

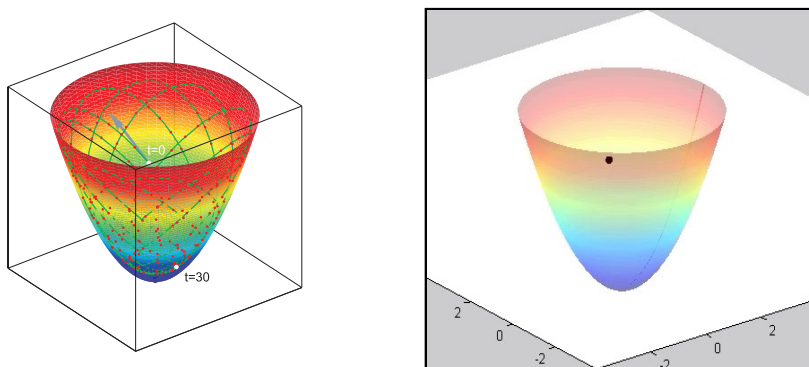
Uvedieme si dve možnosti. V prvej bude $g = 0$, a v druhej $g = 10$. Trajektóriu pohybu guľičky sme rozdelili na rovnaké časové intervaly, kde $t = 0.1$ alebo $t = 0.05$. Pokiaľ sa dielky pozdĺž trajektórie predlžujú, tak guľička zrýchľuje a naopak. Oblasť parametrov paraboloidu je $(u, v) = (0, 2\pi) \times (0, 3)$. Počiatočné podmienky sme v oboch prípadoch zvolili rovnaké. Bod o parametrických súradniciach $u(0) = 1, v(0) = 2$ a počiatočný vektor rýchlosti $u'(0) = 2, v'(0) = 2$. Hmotnosť guľičky nemá žiadny vplyv na trajektóriu.

V prvom prípade máme $g = 0$, časový interval $t = 0.05$. V čase $t = 0.6$ guľička opustí plochu.

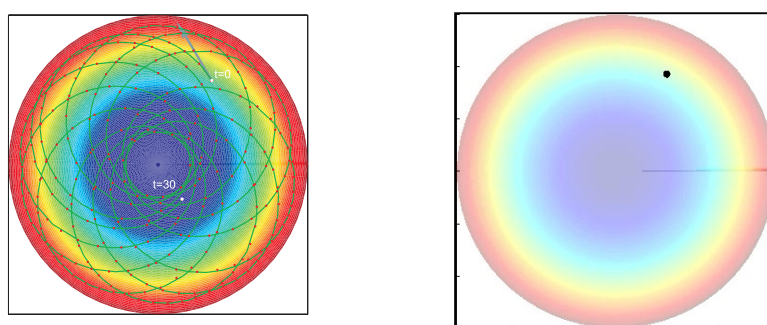
V druhom prípade máme $g = 10$. Časový interval $t = 0.1$ máme pre obrázky, pre animáciu ho máme $t = 0.05$. Gulička vo vnútri paraboloidu „obieha“ po opakujúcich sa dráhach. Tento prípad máme znázornený v dvoch pohľadoch.



Obrázok 3.2: Pohyb bodu po paraboloide, $g = 0$



Obrázok 3.3: Pohyb bodu po paraboloide, $g = 10$



Obrázok 3.4: Pohyb bodu po paraboloide, $g = 10$, pohľad zvrchu

Záver

Cieľom práce bolo zoznámiť sa so základmi diferenciálnej geometrie kriviek a plôch a s teóriou geodetických kriviek a ukázať niektoré aplikácie, najmä fyzikálne. Na niektorých plochách sme sa snažili vykresliť geodetické krivky v reálnom tvare pomocou matematického software Maple. Keďže sa nám vždy nepodarilo krivku vyjadriť explicitne, použili sme software Matlab k určeniu dostatočného počtu bodov, ktoré na krivke ležia. Presnejšie, pre každý bod sme numericky riešili jednu nelineárnu rovnicu alebo sústavu nelineárnych rovníc. Pri určovaní geodetických kriviek by sme sa bez numerického riešenia neobišli. Na záver sme simulovali pohyb guľičky po paraboloidu. Uviedli sme si dve možnosti. Prvú bez gravitačného poľa a druhú s gravitačným poľom. Počiatočné podmienky sme v oboch prípadoch zvolili rovnaké. Hmotnosť guľičky nemá žiadny vplyv na trajektóriu. Trajektóriu pohybu guľičky sme rozdelili na rovnaké časové intervaly. Pokiaľ sa dielky pozdĺž trajektórie predlžujú, tak guľička zrýchľuje a naopak. V prvom prípade za malý časový interval guľička opustí plochu. V druhom prípade guľička vo vnútri paraboloidu „obieha“ po opakujúcich sa dráhach. Tento prípad máme znázornený v dvoch pohľadoch. Oba prípady sú spracované ako animácie. Celá práca navyše obsahuje veľa príkladov vrátane obrázkov a animácií, ktoré tak jednoduchšie umožnia porozumieť uvedenej teórii.

Literatúra

- [1] Budínský, B., Kepr, B.: Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi, SNTL, Praha, 1970
- [2] Dvořák, J., Švec, A.: Technické křivky, SNTL, Praha, 1962
- [3] Doupovec, M.: Diferenciální geometrie a tenzorový počet, skriptum VUT Brno, 1999
- [4] Gray, A.: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, London, 1993
- [5] Hlavatý, V.: Diferenciální geometrie křivek a ploch, Praha, 1937
- [6] Kaděra, T.: Diferenciální geometrie křivek, Diplomová práce VUT Brno, 2003
- [7] Ondrašík, P.: Křivky na plochách, Diplomová práce VUT Brno, 2003
- [8] Vondra, A.: Diferenciální geometrie křivek a ploch, skriptum VA, Brno, 1994
- [9] URL: <<http://eom.springer.de/g/g044050.htm>> [cit. 2008-09-09]