



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ALGORITMY INTERPOLACE POLYNOMY VÍCE NEURČITÝCH

ALGORITHMS OF THE INTERPOLATION BY MULTIVARIATE POLYNOMIALS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ALICE HAVLÍČKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. MIROSLAV KUREŠ, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Alice Havlíčková

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Algoritmy interpolace polynomy více neurčitých

v anglickém jazyce:

Algorithms of the interpolation by multivariate polynomials

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem s výhledem na použití interpolačních polynomů nad binárními poli v kryptografii. Hlavními úkoly jsou objasnění otázky existence a jednoznačnosti interpolačního polynomu a vytvoření programového balíku v prostředí Mathematica.

Cíle bakalářské práce:

- popis interpolačních algoritmů (pro případ více neurčitých)
- diskuse stupně interpolačních polynomů nad konečnými poli
- vytvoření funkčního originálního programového balíku v prostředí Mathematica, který bude obecně řešit vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem

Seznam odborné literatury:

- [1] Schuster, D.: Multivariate Interpolationsangriffe auf symmetrische Chiffren, Diploma Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007
- [2] Grigoriev, D. Y., Karpinski, M., Singer, M. F.: Fast parallel algorithms for sparse multivariate polynomial interpolation over finite fields, SIAM J. Comp. 19, 1059-1063, 1990

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 25.10.2010

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá algoritmy vícerozměrné interpolace. V první části je studován problém interpolace nad rovinou. Dále je uvedeno zobecnění Lagrangeovy interpolace pro případ více neurčitých. Diskutujeme zde také stupeň polynomu pro libovolné pole. Součástí této práce je i funkční programový balík v prostředí Mathematica, který řeší vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem.

Summary

This bachelor's work concerns to algorithms of the multivariate interpolation. The problem of the interpolation over the plane is studied in the first part of this work. In the next section, the multivariate Lagrange interpolation is described and the polynomial degree is discussed. A Mathematica program package was developed, by this, the multivariate interpolation over an arbitrary field can be solved.

Klíčová slova

Vícerozměrná interpolace, interpolační polynom, konečné pole

Keywords

Multivariable interpolation, interpolation polynomial, finite field

HAVLÍČKOVÁ, A. *Algoritmy interpolace polynomy více neurčitých*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 44 s. Vedoucí doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Algoritmy interpolace polynomy více neurčitých“ vypracovala samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, jenž je součástí této práce.

Alice Havlíčková

Děkuji panu doc. RNDr. Miroslavu Kurešovi, Ph.D. za rady, věnovaný čas a odborné vedení při tvorbě této bakalářské práce.

Alice Havlíčková

Obsah

1	Úvod	2
2	Afinní transformace	3
3	Interpolace nad 4, 5 a 6 body v rovině	5
3.1	Čtyři body nad rovinou	5
3.2	Pět bodů nad rovinou	10
3.3	Šest bodů nad rovinou	21
4	Algoritmy vícerozměrné interpolace	37
4.1	Jednorozměrná Lagrangeova interpolace	37
4.2	Lagrangeova vícerozměrná interpolace použitím souhrnného vzorce	37
4.3	Lagrangeova vícerozměrná interpolace pomocí determinantů	38
4.4	Vícerozměrná interpolace nad konečnými poli	40
5	Manuál k notebooku v prostředí Mathematica	41
5.1	Notebook Test I456Points.nb	41
5.2	Notebook Test I456PointsFiniteField.nb	42
6	Závěr	43

1. Úvod

Interpolace se využívá obvykle v numerické matematice. Jejím cílem bývá nalézt přibližné hodnoty funkce v nějakém intervalu, je-li hodnota této funkce známa pouze v některých jiných bodech tohoto intervalu. Motivace pro vícerozměrnou interpolaci ale může být i jiná. Například existují tzv. vícerozměrné kryptografické systémy, které transformují zprávu za pomoci několika polynomů více neurčitých. Nalezení těchto polynomů při známé zprávě pak představuje kryptoanalytickou úlohu. Existuje také velké množství prací, které popisují interpolaci nad konečnými poli [1].

V naší práci se zabýváme popisem algoritmů pro případ polynomů více neurčitých. Diskutujeme také stupeň interpolačního polynomu pro konečná pole. Posledním naším cílem je vytvoření funkčního programového balíku v prostředí Mathematica, který řeší vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem.

Úvodní kapitola práce pojednává o afinní transformaci, kde odvozujeme matici této transformace. V následující kapitole řešíme interpolaci v rovině, kde využíváme matici afinní transformace pro zjednodušení případů. Interpolaci v rovině jsme vyřešili z hlediska náročnosti pro 4, 5 a 6 bodů a to přímo, řešením soustavy rovnic. Zjišťujeme zvláštní polohu podkladových bodů a následně řešíme počet řešení proložení kvadriky zadanými body. V kapitole o vícerozměrné interpolaci řešíme algoritmy nevyžadující řešení soustavy rovnic. Uvádíme zde dva způsoby, jak lze vícerozměrnou interpolaci řešit Lagrangeovou metodou. V poslední kapitole pak popisujeme notebook řešící vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem.

Cílem naší práce je tedy popsat algoritmy vícerozměrné interpolace nad libovolným polem a vytvořit funkční notebook, který bude tuto interpolaci řešit.

2. Afinity transformace

Budeme se zabývat afinity transformacemi zobrazujícími bod $P = [x, y]$ na bod $Q = [x_1, y_1]$. Tyto transformace zahrnují posunutí, otočení, změně měřítka, zkosení, nebo operaci vzniklé jejich skládáním. Afinity transformace zachovává kolinearitu mezi body a poměry vzdáleností na přímkách. Obecně, afinity transformace je složena z lineární transformace a posunutí.

Nyní popíšeme afinity transformaci nad reálnými čísly, která zajistí, aby se libovolné dva různé body o souřadnicích $[p_1, p_2]$, $[q_1, q_2]$ zobrazili do bodů $[0, 0]$ a $[1, 0]$.

1. Posunutí o vektor (a, b) :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = a + x$$

$$Y = b + y$$

Bod $[1, x, y]$ se posune do bodu $[1, X, Y]$.

2. Otočení o úhel φ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$X' = X \cdot \cos \varphi - Y \cdot \sin \varphi$$

$$Y' = X \cdot \sin \varphi + Y \cdot \cos \varphi$$

3. Homotetie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

$$X'' = k \cdot X'$$

$$Y'' = k \cdot Y'$$

Z toho vyplývá

$$X'' = k \cdot a \cdot \cos \varphi + k \cdot x \cdot \cos \varphi - k \cdot b \cdot \sin \varphi - k \cdot y \cdot \sin \varphi$$

$$Y'' = k \cdot a \cdot \sin \varphi + k \cdot x \cdot \sin \varphi + k \cdot b \cdot \cos \varphi + k \cdot y \cdot \cos \varphi$$

A tedy matice celkové transformace je:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k \cdot a \cdot \cos \varphi - k \cdot b \cdot \sin \varphi & k \cdot \cos \varphi & -k \cdot \sin \varphi \\ k \cdot a \cdot \sin \varphi + k \cdot b \cdot \cos \varphi & k \cdot \sin \varphi & k \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

pro zjednodušení označíme výslednou matici maticí A .

Nyní zbývá pouze určit koeficienty a, b, k, φ .

$$a = -p_1$$

$$b = -p_2$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{p_2 - q_2}{q_1 - p_1} \right)$$

$$k = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{p_2 - q_2}{q_1 - p_1} \right)^2} \cdot (q_1 - p_1)}{(q_1 - p_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

Poté můžeme výslednou matici transformace zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-p_1 \cdot q_1 + p_1^2 - p_2 \cdot q_2 + p_2^2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} & \frac{q_1 - p_1}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} & \frac{q_2 - p_2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \\ \frac{-p_2 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} & \frac{p_2 - q_2}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} & \frac{q_1 - p_1}{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \end{pmatrix}$$

A její inverzní matici ve tvaru:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1 - p_1 & p_2 - q_2 \\ q_2 & q_2 - p_2 & q_1 - p_1 \end{pmatrix}$$

Nyní si ukážeme použití matice transformace na příkladu. Mějme body $P = [10, 2\sqrt{2}]$, $Q = [\sqrt[3]{7}, 1]$, $R = [-2, \frac{2}{3}]$, $S = [\sqrt{5}, -4]$. Dosazením bodů P, Q do matice transformace dostáváme:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-10 \cdot \sqrt[3]{7} + 10^2 - 2\sqrt{2} \cdot 1 + (2\sqrt{2})^2}{(\sqrt[3]{7} - 10)^2 + (1 - 2\sqrt{2})^2} & \frac{\sqrt[3]{7} - 10}{(\sqrt[3]{7} - 10)^2 + (1 - 2\sqrt{2})^2} & \frac{1 - 2\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{7} - 10)^2 + (1 - 2\sqrt{2})^2} \\ \frac{-2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{7} + 10 \cdot 1}{(\sqrt[3]{7} - 10)^2 + (1 - 2\sqrt{2})^2} & \frac{2\sqrt{2} - 1}{(\sqrt[3]{7} - 10)^2 + (1 - 2\sqrt{2})^2} & \frac{\sqrt[3]{7} - 10}{(\sqrt[3]{7} - 10)^2 + (1 - 2\sqrt{2})^2} \end{pmatrix}$$

Vynásobením této matice příslušnými body dostaneme ztransformované body o souřadnicích

$$P_1 = [0, 0], Q_1 = [1, 0], R_1 = \left[\frac{362 - 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 4\sqrt{2} - 36 \cdot \sqrt[3]{7}}{3 \cdot (101 - 2^{1+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2} - 20 \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2)}, \frac{16 - 3 \cdot 2^{1+\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{7} - 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{7}}{3 \cdot (101 - 2^{1+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2} - 20 \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2)} \right],$$

$$S_1 = \left[\frac{96 + 3 \cdot 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 10\sqrt{5} - 10 \cdot \sqrt[3]{7} + \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{7}}{101 - 2^{1+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2} - 20 \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2}, -\frac{-50 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt[3]{7} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{7}}{101 - 2^{1+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2} - 20 \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2} \right].$$

Afinní transformaci lze uvažovat i nad konečnými poli, ovšem s příslušnými modifikacemi: například nemá geometrický smysl uvažovat otočení o úhel φ .

3. Interpolace nad 4, 5 a 6 body v rovině

3.1. Čtyři body nad rovinou

Vězměme 4 různé body $P = [p_1, p_2, p_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$, $R = [r_1, r_2, r_3]$, $S = [s_1, s_2, s_3]$. Označíme $\hat{P} = [p_1, p_2]$, $\hat{Q} = [q_1, q_2]$, $\hat{R} = [r_1, r_2]$, $\hat{S} = [s_1, s_2]$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$. Toto jsme již ukázali v kapitole o afinní transformaci.

Hledáme kvadriku

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = z$$

tzn. řešíme :

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_1^2 & p_1 p_2 & p_2^2 \\ 1 & q_1 & q_2 & q_1^2 & q_1 q_2 & q_2^2 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Stručně $(M \cdot \vec{h}) = \vec{v}$

Jde o soustavu lineárních rovnic. Pro rozhodnutí o její řešitelnosti musíme zkoumat hodnotu matice M (značíme $\text{rank } M$).

Vězměme naši volbu \hat{P} , \hat{Q} . Pak

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

Dále vězměme podmatici N jako první čtyři sloupce z matice M .

Platí: $\text{rank } N \leq \text{rank } M \leq 4$.

Budeme nyní zkoumat hodnotu N :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 \end{pmatrix}$$

je zřejmé, že $4 \geq \text{rank } N \geq 2$. Poznamenejme dále, že případy $r_1 = r_2 = 0$ a $s_1 = s_2 = 0$ nemohou nastat.

Vězměme další podmatici U (2.-4. řádek N a 2.-4. sloupec N):

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_1^2 \\ s_1 & s_2 & s_1^2 \end{pmatrix}$$

Stačí vyšetřit $\text{rank } U$, protože $\text{rank } N = 1 + \text{rank } U$.

3.1. ČTYŘI BODY NAD ROVINOU

Nejprve vyšetříme, kdy jsou lineárně závislé 1. a 3. sloupec. evidentně tehdy, když $r_1 = r_1^2$ a současně $s_1 = s_1^2$.

Jsou tedy čtyři možnosti:

$$\alpha) r_1 = s_1 = 0$$

$$\beta) r_1 = 0 \quad s_1 = 1$$

$$\gamma) r_1 = 1 \quad s_1 = 0$$

$$\delta) r_1 = s_1 = 1$$

Tyto možnosti dále analyzujeme.

$\alpha)$

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $U_\alpha = 2$ (nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$, protože $\hat{P} \neq \hat{R}$, $\hat{P} \neq \hat{S}$)

$\beta)$

$$U_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 1 & s_2 & 1 \end{pmatrix}$$

rank $U_\beta = 2$ (nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$, protože $\hat{P} \neq \hat{R}$, $\hat{Q} \neq \hat{S}$)

$\gamma)$

$$U_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & r_2 & 1 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $U_\gamma = 2$ (analogické jako β)

$\delta)$

$$U_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & r_2 & 1 \\ 1 & s_2 & 1 \end{pmatrix}$$

rank $U_\delta = 2$ (podobné zdůvodnění)

Shrnutí: Jsou-li 1. a 3. sloupec v U lineárně závislé, pak je hodnost matice U vždy 2, protože pak už nemůže nastat $r_2 = s_2$, neboť zadané čtyři body jsou různé.

Nyní předpokládejme, že 1. a 3. sloupec v U jsou lineárně nezávislé. Hodnost U může být rovna 2 pouze tehdy, je-li 2. sloupec lineární kombinací 1. a 3. sloupce, tedy v tomto případě, je-li k -násobkem jejich rozdílu.

Tzn. $r_2 = k \cdot (r_1^2 - r_1)$ a $s_2 = k \cdot (s_1^2 - s_1)$

Případ $k = 0$ označíme ϵ : ϵ)

$$U_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_1 & 0 & r_1^2 \\ s_1 & 0 & s_1^2 \end{pmatrix}$$

rank $U_\epsilon = 2$ ($r_1 \neq 1$, $s_1 \neq 1$, $r_1 \neq s_1$)

Případ $k \neq 0$ označme φ : φ)

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_1 & k(r_1^2 - r_1) & r_1^2 \\ s_1 & k(s_1^2 - s_1) & s_1^2 \end{pmatrix}$$

3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

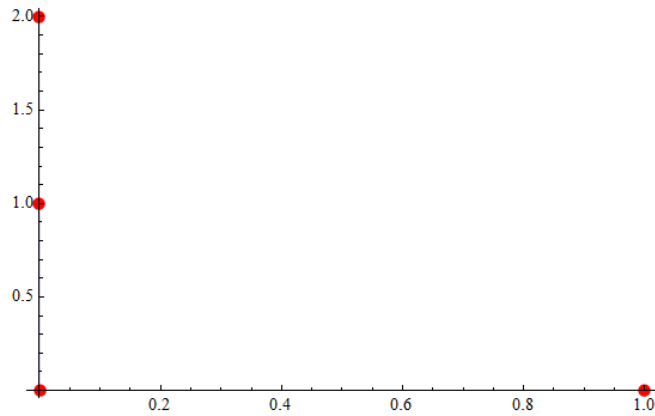
$\text{rank } U_\varphi = 2$ ($r_1 \neq 1, r_1 \neq 0$)

Ve všech ostatních případech je $\text{rank } U = 3$, tzn. že $\text{rank } N = 4$, tzn. $\text{rank } M = 4$ a také $\text{rank } (M|\vec{v}) = 4$ (hodnost rozšířené matice), tedy počáteční soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech.

Rozeberme nyní znovu případy α) až φ).

α) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [0, s_2]$, tj. \hat{P} , \hat{R} , \hat{S} leží na přímce $x = 0$.

Obr 3.1 3 body na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

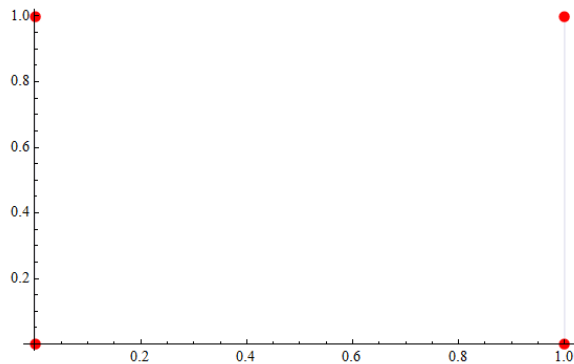
$\text{rank } M = 4$ (protože $r_2 \neq s_2$)

Věta: V případě α existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech.

β) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [1, s_2]$. Body leží na dvou rovnoběžných přímkách o rovnicích $x = 0$, $x = 1$.

3.1. ČTYŘI BODY NAD ROVINOU

Obr 3.2 body na dvou rovnoběžkách



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

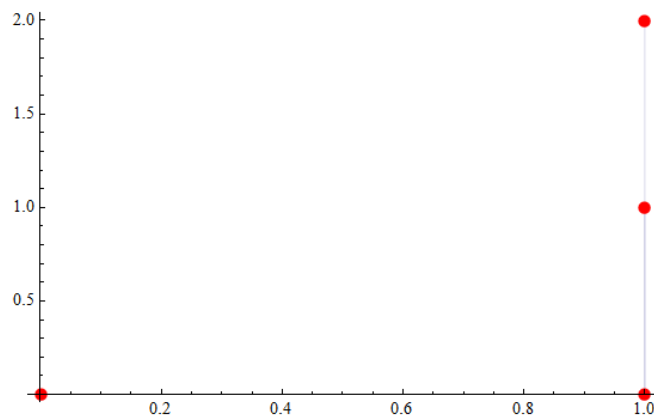
rank $M = 4$ (protože $s_2 \neq 0$)

γ) bude obdobné jako β)

Věta: V případech β, γ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech.

δ) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [1, r_2]$, $\hat{S} = [1, s_2]$, tj. $\hat{Q}, \hat{R}, \hat{S}$ leží na přímce $x = 1$.

Obr 3.3 3 body na přímce



3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

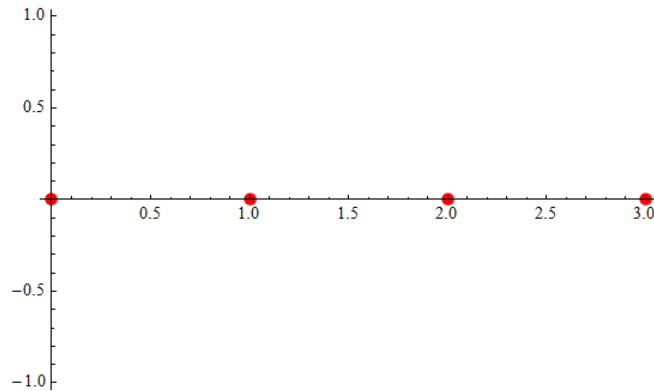
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & r_2 & 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

rank $M = 4$ (protože $r_2 \neq s_2$, $r_2 \neq 0$, $s_2 \neq 0$)

Věta: V případě δ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech.

ϵ) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, 0]$, $\hat{S} = [s_1, 0]$, tj. všechny 4 body leží na přímce $y = 0$.

Obr 3.4 4 body na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $M = 3$ (protože $r_1 \neq 1$, $s_1 \neq 1$)

$$\text{rank}(M|\vec{v}) = \text{rank} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & q_3 \\ 1 & r_1 & r_1^2 & 0 & r_3 \\ 1 & s_1 & s_1^2 & 0 & s_3 \end{array} \right)$$

Tato hodnota může být jak 3 (nekonečně mnoho řešení závislých na 3 libovolných parametrech), tak 4 (řešení neexistuje).

Zbývá určit, kdy nastane která možnost (podmínky pro p_3 , q_3 , r_3 , s_3). Hodnota rozšířené matice je 3 pro případy:

$$p_3 = q_3 = r_3 = s_3 = a$$

$$p_3 = 0 \quad q_3 = b \quad r_3 = b \cdot r_1 \quad s_3 = b \cdot s_1$$

$$p_3 = 0 \quad q_3 = c \quad r_3 = c \cdot r_1^2 \quad s_3 = c \cdot s_1^2$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

a jejich lineární kombinace. V ostatních případech kvadrika neexistuje. Na závěr můžeme vyslovit shrnutí:

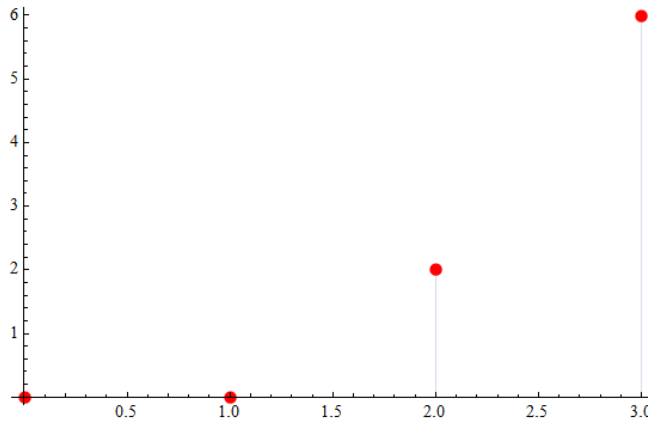
Věta: Leží-li body \hat{P} , \hat{Q} , \hat{R} , \hat{S} na přímce o rovnici $y = 0$ a souřadnice p_3 , q_3 , r_3 , s_3 neleží na žádné křivce o rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde

3.2. PĚT BODŮ NAD ROVINOU

$z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1\}$, pak řešení neexistuje a pro případ \hat{P} , \hat{Q} , \hat{R} , \hat{S} ležících na přímce o rovnici $y = 0$ a splňující rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1\}$ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 3 libovolných parametrech.

$\varphi \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, k \cdot (r_1^2 - r_1)]$, $\hat{S} = [s_1, k \cdot (s_1^2 - s_1)]$, tj. \hat{P} , \hat{Q} , \hat{R} , \hat{S} leží na parabole o rovnici $y = k \cdot (x^2 - x)$.

Obr 3.5 4 body na parabole



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & k \cdot (r_1^2 - r_1) & r_1^2 & r_1 \cdot k \cdot (r_1^2 - r_1) & k^2 \cdot (r_1^2 - r_1)^2 \\ 1 & s_1 & k \cdot (s_1^2 - s_1) & s_1^2 & s_1 \cdot k \cdot (s_1^2 - s_1) & k^2 \cdot (s_1^2 - s_1)^2 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } M = 4$ (protože $r_2 \neq s_2$, $r_2 \neq 0$, $s_2 \neq 0$)

Věta: V případě φ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech.

Věta: V ostatních případech existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech.

3.2. Pět bodů nad rovinou

Vezměme pět různých bodů $P = [p_1, p_2, p_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$, $R = [r_1, r_2, r_3]$, $S = [s_1, s_2, s_3]$, $T = [t_1, t_2, t_3]$. Označíme $\hat{P} = [p_1, p_2]$, $\hat{Q} = [q_1, q_2]$, $\hat{R} = [r_1, r_2]$, $\hat{S} = [s_1, s_2]$, $\hat{T} = [t_1, t_2]$. Lze předpokládat, že $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$. Toto jsme již ukázali v kapitole o afinní transformaci.

Hledáme kvadriku

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = z$$

Řešíme soustavu:

3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_1^2 & p_1 p_2 & p_2^2 \\ 1 & q_1 & q_2 & q_1^2 & q_1 q_2 & q_2^2 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 & t_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \\ s_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Jde o soustavu lineárních rovnic, pro rozhodnutí o její řešitelnosti musíme zkoumat hodnotu matice M (značíme $\text{rank } M$).

Vezměme naši volbu \hat{P}, \hat{Q} . Pak

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

Dále vezměme podmatici N jako prvních 5 sloupců z matice M .

Platí: $\text{rank } N \leq \text{rank } M \leq 5$.

Budeme nyní zkoumat hodnotu N :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 \\ 1 & t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 \end{pmatrix}$$

je zřejmé, že $5 \geq \text{rank } N \geq 3$ (případy $r_1 = r_2 = 0$, $s_1 = s_2 = 0$ a $t_1 = t_2 = 0$ nemohou nastat).

Vezměme další podmatici U (2.-5. řádek a 2.-5. sloupec):

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 \\ s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 \\ t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 \end{pmatrix}$$

Stačí vyšetřit $\text{rank } U$, protože $\text{rank } N = 1 + \text{rank } U$.

Nejprve vyšetříme, kdy je 1. a 3. či 2. a 4. sloupec lineárně závislý. Vyjde nám 21 možností :

- $\alpha) r_1 = s_1 = t_1 = 0$
- $\beta) r_1 = 0 \ s_1 = 0 \ t_1 = 1$
- $\gamma) r_1 = 0 \ s_1 = 1 \ t_1 = 0$
- $\delta) r_1 = 1 \ s_1 = 0 \ t_1 = 0$
- $\epsilon) r_1 = 0 \ s_1 = 1 \ t_1 = 1$
- $\zeta) r_1 = 1 \ s_1 = 0 \ t_1 = 1$
- $\eta) r_1 = 1 \ s_1 = 1 \ t_1 = 0$
- $\theta) r_1 = 1 \ s_1 = 1 \ t_1 = 1$
- $\iota) r_2 = 0 \ s_2 = 0 \ t_2 = 0$

3.2. PĚT BODŮ NAD ROVINOU

$$\kappa) r_2 = 0 \quad s_2 = 0 \quad t_2 = 1$$

$$\lambda) r_2 = 0 \quad s_2 = 1 \quad t_2 = 0$$

$$\mu) r_2 = 1 \quad s_2 = 0 \quad t_2 = 0$$

$$\nu) r_2 = 0 \quad s_1 = k \quad t_2 = 0$$

$$\xi) r_1 = k \quad s_2 = 0 \quad t_2 = 0$$

$$o) r_2 = 0 \quad s_2 = 0 \quad t_2 = k$$

$$\pi) r_1 = k \quad s_2 = 0 \quad t_1 = k$$

$$\rho) r_2 = 0 \quad s_1 = k \quad t_1 = k$$

$$\sigma) r_1 = k \quad s_1 = k \quad t_2 = 0$$

$$\tau) r_1 = k \quad s_1 = k \quad t_1 = k$$

$$v) r_2 = k \cdot (1 - r_1) \quad s_2 = k \cdot (1 - s_1) \quad t_2 = k \cdot (1 - t_1)$$

$$\varphi) r_2 = k \cdot (r_1 - r_1^2) \quad s_2 = k \cdot (s_1 - s_1^2) \quad t_2 = k \cdot (t_1 - t_1^2)$$

Tyto možnosti dále analyzujeme.

$\alpha)$

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\alpha = 2$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$)

$\beta)$

$$U_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 & 1 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\beta = 3$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$).

Obdobně γ a δ

$\epsilon)$

$$U_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 1 & s_2 & 1 & s_2 \\ 1 & t_2 & 1 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\epsilon = 3$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$).

Obdobně ζ a η

$\vartheta)$

$$U_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & r_2 & 1 & r_2 \\ 1 & s_2 & 1 & s_2 \\ 1 & t_2 & 1 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\vartheta = 2$$

3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$)

ι)

$$U_\iota = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & r_1^2 & 0 \\ s_1 & 0 & s_1^2 & 0 \\ t_1 & 0 & t_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\iota = 2$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)

μ)

$$U_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & 1 & r_1^2 & r_1 \\ s_1 & 0 & s_1^2 & 0 \\ t_1 & 0 & t_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\mu = 3$$

(nemůže nastat $s_1 = 1$ ani $s_1 = 0$ ani $t_1 = 1$ ani $t_1 = 0$).

Obdobně κ a λ

ν)

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & r_1^2 & 0 \\ s_1 & 0 & s_1^2 & 0 \\ k & t_2 & k^2 & k \cdot t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\nu = 3$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$ ani $s_1 = 0$ ani $s_1 = 1$).

Obdobně ξ a σ

ρ)

$$U_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & r_1^2 & 0 \\ k & s_2 & k^2 & k \cdot s_2 \\ k & t_2 & k^2 & k \cdot t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\rho = 3$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$).

Obdobně π a σ

τ)

$$U_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & r_2 & k^2 & k \cdot r_2 \\ k & s_2 & k^2 & k \cdot s_2 \\ k & t_2 & k^2 & k \cdot t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\tau = 3$$

(případy $k = 0$ ani $k = 1$ jsme již zkoumali).

3.2. PĚT BODŮ NAD ROVINOU

v)

$$U_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & k \cdot (1 - r_1) & r_1^2 & k \cdot r_1 \cdot (1 - r_1) \\ s_1 & k \cdot (1 - s_1) & s_1^2 & k \cdot s_1 \cdot (1 - s_1) \\ t_1 & k \cdot (1 - t_1) & t_1^2 & k \cdot t_1 \cdot (1 - t_1) \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_v = 3$$

(nemůže nastat $r_1 = 1$)

φ)

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & k \cdot (r_1 - r_1^2) & r_1^2 & k \cdot r_1 \cdot (r_1 - r_1^2) \\ s_1 & k \cdot (s_1 - s_1^2) & s_1^2 & k \cdot s_1 \cdot (s_1 - s_1^2) \\ t_1 & k \cdot (t_1 - t_1^2) & t_1^2 & k \cdot t_1 \cdot (t_1 - t_1^2) \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\varphi = 3$$

(nemůže nastat $r_1 = 1$ ani $r_1 = 0$)

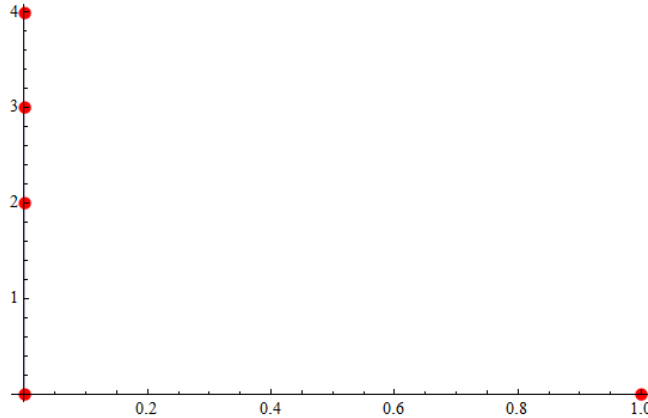
Shrnutí: V ostatních případech, je-li jeden sloupec lineární kombinací zbývajících 3, pak je $\text{rank } U = 3$.

Jinak je $\text{rank } U = 4$, tzn. $\text{rank } N = 5 \Rightarrow \text{rank } M = 5$, tedy nastává nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

Rozeberme nyní znovu případy α) až τ).

α) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [0, s_2]$, $\hat{T} = [0, t_2]$, tj. \hat{P} , \hat{R} , \hat{S} , \hat{T} leží na přímce o rovnici $x = 0$.

Obr 3.6 4 body na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

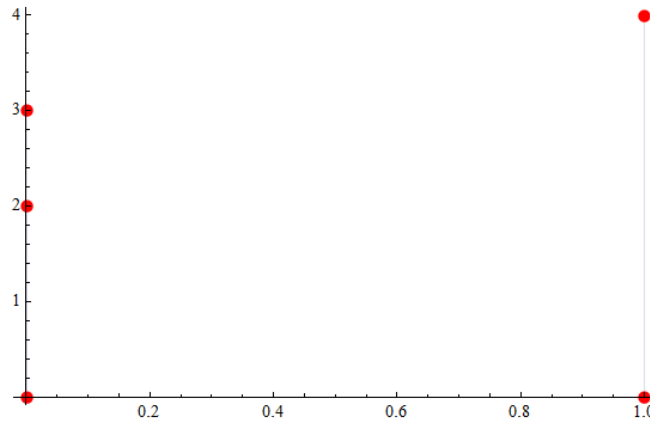
3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T tuto rovnici nespĺňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

β) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [0, s_2]$, $\hat{T} = [1, t_2]$, tj. 3 body leží na přímce o rovnici $x = 0$ a 2 body leží na přímce o rovnici $x = 1$.

Obr 3.7 body na dvou rovnoběžkách



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 1 & 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

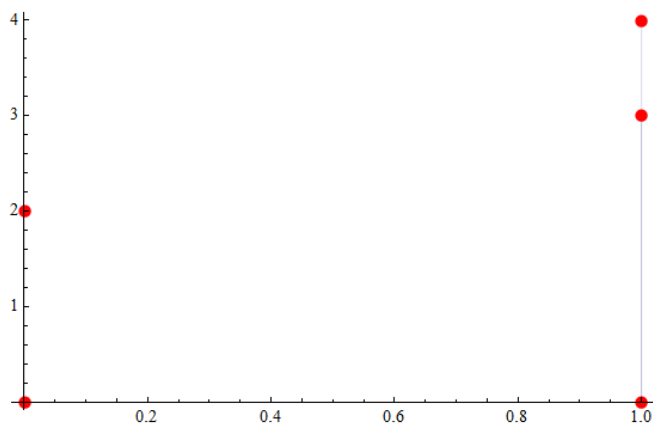
Obdobně γ, δ .

V případech β, γ, δ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

ϵ) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [1, s_2]$, $\hat{T} = [1, t_2]$, tj. 3 body leží na přímce o rovnici $x = 1$ a 2 body leží na přímce o rovnici $x = 0$.

3.2. PĚT BODŮ NAD ROVINOU

Obr 3.8 body na dvou rovnoběžkách



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

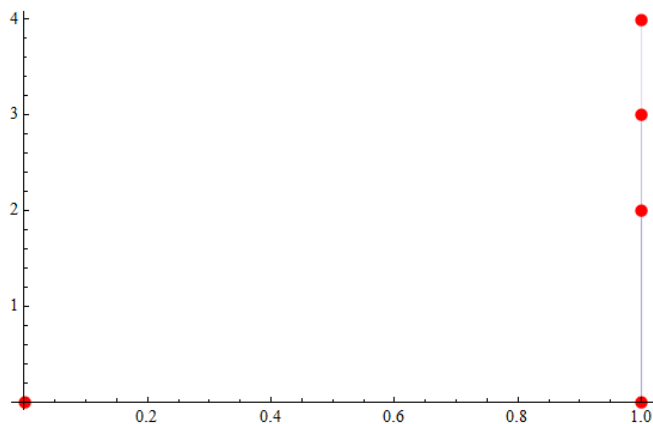
$$\text{rank } M = 5$$

Obdobně ζ, η .

V případech ϵ, ζ, η existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

$\vartheta)\hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [1, r_2], \hat{S} = [1, s_2], \hat{T} = [1, t_2]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $x = 1$.

Obr 3.9 4 body na přímce



3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

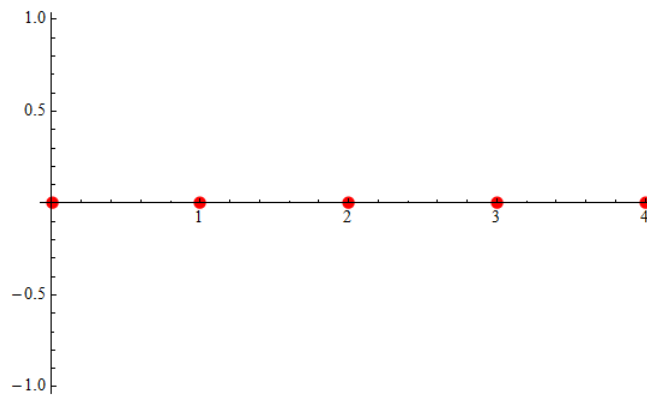
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & r_2 & 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

$\iota) \hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [r_1, 0], \hat{S} = [s_1, 0], \hat{T} = [t_1, 0]$, tj. 5 bodů na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.10 5 bodů na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & 0 & t_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

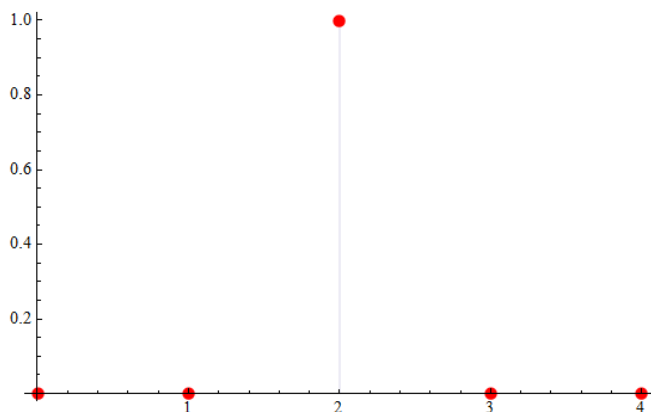
$$\text{rank } M = 3$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 3 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 3 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 4 a řešení neexistuje.

$\mu) \hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [r_1, 1], \hat{S} = [s_1, 0], \hat{T} = [t_1, 0]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $y = 0$.

3.2. PĚT BODŮ NAD ROVINOU

Obr 3.11 4 body na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 1 & r_1^2 & r_1 & 1 \\ 1 & s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & 0 & t_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

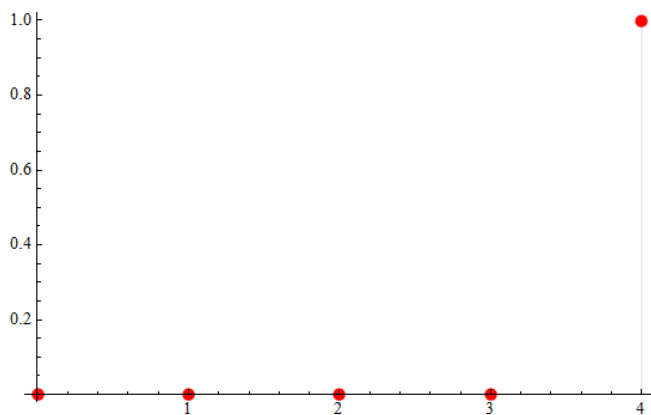
$$\text{rank } M = 4$$

Obdobně κ, λ .

Splňují-li body P, Q, R, S, T rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

$\nu)\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, 0]$, $\hat{S} = [s_1, 0]$, $\hat{T} = [k, t_2]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.12 4 body na přímce



3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & k & t_2 & k^2 & k \cdot t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

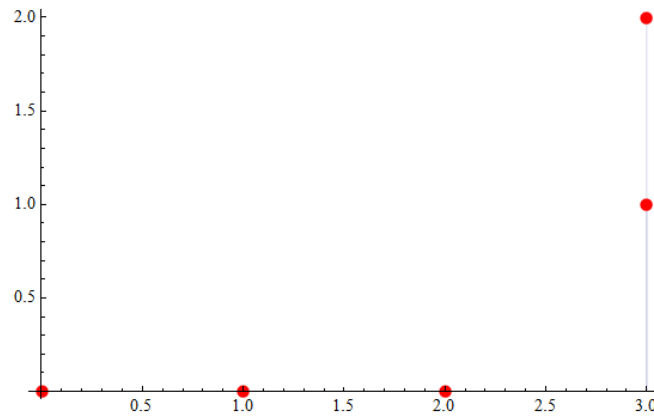
$$\text{rank } M = 4$$

Pozn. ($t_2 = 1, t_2 = 0$ jsme zkoumali již dříve)

V případě ν existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

$\rho) \hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [r_1, 0], \hat{S} = [k, s_2], \hat{T} = [k, t_2]$, tj. 3 body leží na přímce o rovnici $y = 0$ a 2 body leží na přímce o rovnici $x = k$.

Obr 3.13 body na kolmicích



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & k & s_2 & k^2 & k \cdot s_2 & s_2^2 \\ 1 & k & t_2 & k^2 & k \cdot t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

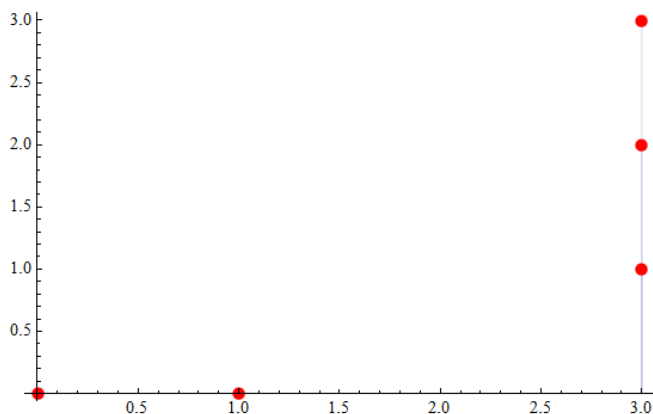
$$\text{rank } M = 5$$

V případě ρ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

$\tau) \hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [k, r_2], \hat{S} = [k, s_2], \hat{T} = [k, t_2]$, tj. 2 body leží na přímce o rovnici $y = 0$ a 3 body leží na přímce o rovnici $x = k$.

3.2. PĚT BODŮ NAD ROVINOU

Obr 3.14 body na kolmicích



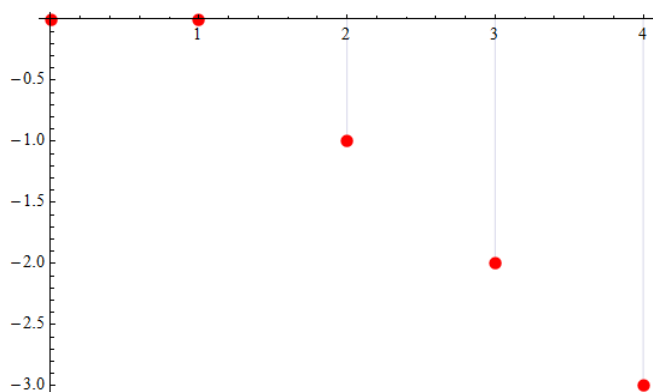
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & r_2 & k^2 & k \cdot r_2 & r_2^2 \\ 1 & k & s_2 & k^2 & k \cdot s_2 & s_2^2 \\ 1 & k & t_2 & k^2 & k \cdot t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

V případě τ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

$v) \hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [r_1, k \cdot (1 - r_1)], \hat{S} = [s_1, k \cdot (1 - s_1)], \hat{T} = [t_1, k \cdot (1 - t_1)],$
tj. 4 body leží na přímce o rovnici $y = k \cdot (1 - x)$.

Obr 3.15 4 body na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & k \cdot (1 - r_1) & r_1^2 & k \cdot r_1 \cdot (1 - r_1) & k^2 \cdot (1 - r_1)^2 \\ 1 & s_1 & k \cdot (1 - s_1) & s_1^2 & k \cdot s_1 \cdot (1 - s_1) & k^2 \cdot (1 - s_1)^2 \\ 1 & t_1 & k \cdot (1 - t_1) & t_1^2 & k \cdot t_1 \cdot (1 - t_1) & k^2 \cdot (1 - t_1)^2 \end{pmatrix}$$

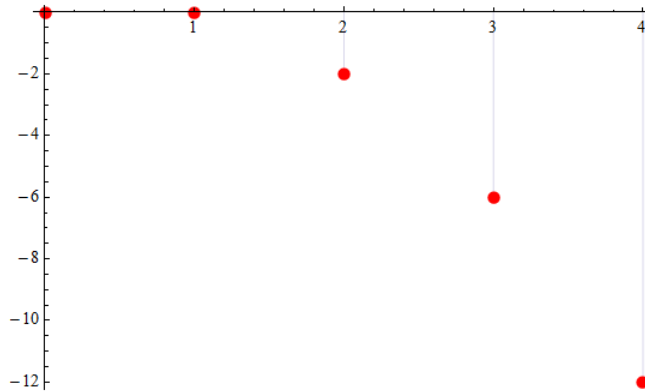
3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T tuto rovnici nespĺňují, je hodnost rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

$\varphi \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, k \cdot (r_1 - r_1^2)]$, $\hat{S} = [s_1, k \cdot (s_1 - s_1^2)]$, $\hat{T} = [t_1, k \cdot (t_1 - t_1^2)]$, tj. 5 bodů leží na parabole o rovnici $y = k \cdot (x - x^2)$.

Obr 3.16 5 bodů na parabole



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & k \cdot (r_1 - r_1^2) & r_1^2 & k \cdot r_1 \cdot (r_1 - r_1^2) & k^2 \cdot (r_1 - r_1^2)^2 \\ 1 & s_1 & k \cdot (s_1 - s_1^2) & s_1^2 & k \cdot s_1 \cdot (s_1 - s_1^2) & k^2 \cdot (s_1 - s_1^2)^2 \\ 1 & t_1 & k \cdot (t_1 - t_1^2) & t_1^2 & k \cdot t_1 \cdot (t_1 - t_1^2) & k^2 \cdot (t_1 - t_1^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

V případě φ existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

V ostatních případech existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru.

3.3. Šest bodů nad rovinou

Vezměme 6 různých bodů $P = [p_1, p_2, p_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$, $R = [r_1, r_2, r_3]$, $S = [s_1, s_2, s_3]$, $T = [t_1, t_2, t_3]$, $U = [u_1, u_2, u_3]$. Označíme $\hat{P} = [p_1, p_2]$, $\hat{Q} = [q_1, q_2]$, $\hat{R} = [r_1, r_2]$, $\hat{S} = [s_1, s_2]$, $\hat{T} = [t_1, t_2]$, $\hat{U} = [u_1, u_2]$. Lze předpokládat, že $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$. Toto jsme již ukázali v kapitole o afinní transformaci.

Hledáme kvadriku

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = z$$

3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

Řešíme soustavu:

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_1^2 & p_1 p_2 & p_2^2 \\ 1 & q_1 & q_2 & q_1^2 & q_1 q_2 & q_2^2 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 & t_2^2 \\ 1 & u_1 & u_2 & u_1^2 & u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \\ s_3 \\ t_3 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Jde o soustavu lineárních rovnic, musíme zkoumat hodnotu matice M (značíme $\text{rank } M$).

Vezměme naši volbu \hat{P}, \hat{Q} . Pak

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 & t_2^2 \\ 1 & u_1 & u_2 & u_1^2 & u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

Vezměme podmatici U (2.-6. řádek a 2.-6. sloupec):

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_1^2 & r_1 r_2 & r_2^2 \\ s_1 & s_2 & s_1^2 & s_1 s_2 & s_2^2 \\ t_1 & t_2 & t_1^2 & t_1 t_2 & t_2^2 \\ u_1 & u_2 & u_1^2 & u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

Stačí vyšetřit $\text{rank } U$, protože $\text{rank } M = 1 + \text{rank } U$. Pro lepší názornost budeme zkoumat zvlášť matici V , která vznikne z 2., 4. a 5. sloupce matice U . Je zřejmé, že $\text{rank } U = \text{rank } V + 2$.

Nejprve vyšetříme, kdy je 1. a 3. či 2., 4. a 5. sloupec lineárně závislý. Vyjde nám 26 možností :

- $\alpha) r_1 = s_1 = t_1 = u_1 = 0$
- $\beta) r_1 = 0 \ s_1 = 0 \ t_1 = 0 \ u_1 = 1$
- $\gamma) r_1 = 0 \ s_1 = 0 \ t_1 = 1 \ u_1 = 0$
- $\delta) r_1 = 0 \ s_1 = 1 \ t_1 = 0 \ u_1 = 0$
- $\epsilon) r_1 = 1 \ s_1 = 0 \ t_1 = 0 \ u_1 = 0$
- $\zeta) r_1 = 0 \ s_1 = 0 \ t_1 = 1 \ u_1 = 1$
- $\eta) r_1 = 0 \ s_1 = 1 \ t_1 = 1 \ u_1 = 0$
- $\vartheta) r_1 = 1 \ s_1 = 1 \ t_1 = 0 \ u_1 = 0$
- $\iota) r_1 = 1 \ s_1 = 0 \ t_1 = 1 \ u_1 = 0$
- $\kappa) r_1 = 1 \ s_1 = 0 \ t_1 = 0 \ u_1 = 1$
- $\lambda) r_1 = 0 \ s_1 = 1 \ t_1 = 0 \ u_1 = 1$
- $\mu) r_1 = 1 \ s_1 = 1 \ t_1 = 1 \ u_1 = 0$
- $\nu) r_1 = 1 \ s_1 = 1 \ t_1 = 0 \ u_1 = 1$
- $\xi) r_1 = 1 \ s_1 = 0 \ t_1 = 1 \ u_1 = 1$
- $o) r_1 = 0 \ s_1 = 1 \ t_1 = 1 \ u_1 = 1$
- $\pi) r_1 = 1 \ s_1 = 1 \ t_1 = 1 \ u_1 = 1$
- $\rho) r_2 = 0 \ s_2 = 0 \ t_2 = 0 \ u_2 = 0$

3. INTERPOLACE NAD 4,5 A 6 BODY V ROVINĚ

$$\sigma) r_1 = k \cdot (1 + r_2), s_1 = k \cdot (1 + s_2), t_1 = k \cdot (1 + t_2), u_1 = k \cdot (1 + u_2)$$

$$\tau) r_2 = 1 s_2 = 1 t_2 = 1 u_2 = 1$$

$$\upsilon) r_2 = r_1 s_2 = s_1 t_2 = t_1 u_2 = u_1$$

$$\varphi) r_2 = 0 s_2 = 0 t_2 = 0 u_2 \text{ lib.}$$

$$\chi) r_1 = l s_1 = l t_1 = l u_1 = l$$

$$\psi) r_1 = k \cdot r_2 s_1 = k \cdot s_2 t_1 = k \cdot t_2 u_1 = k \cdot u_2$$

$$\omega) r_2 = l s_2 = l t_2 = l u_2 = l$$

$$\alpha\alpha) r_2 = k \cdot (r_1^2 - r_1) s_2 = k \cdot (s_1^2 - s_1) t_2 = k \cdot (t_1^2 - t_1) u_2 = k \cdot (u_1^2 - u_1)$$

$$\alpha\beta) r_2^2 = k \cdot (r_1^2 - r_1) s_2^2 = k \cdot (s_1^2 - s_1) t_2^2 = k \cdot (t_1^2 - t_1) u_2^2 = k \cdot (u_1^2 - u_1)$$

Tyto možnosti dále analyzujeme.

$\alpha)$

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & t_2^2 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\alpha = 3$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$ ani $u_2 = 0$)

$\beta)$

$$U_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & t_2^2 \\ 1 & u_2 & 1 & u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\beta = 4$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$ ani $u_2 = 0$)

Obdobně γ a δ a ϵ

$\zeta)$

$$U_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & u_2 & 1 & u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\zeta = 4$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $s_2 = 0$ ani $t_2 = 0$ ani $u_2 = 0$)

Obdobně η a ϑ a ι a κ a λ

$\mu)$

$$U_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\mu = 4$$

3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $r_2 = 1$) Obdobně ν a ξ a o
 π)

$$U_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & u_2 & 1 & u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\pi = 3$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $r_2 = 1$)
 ρ)

$$U_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & t_1^2 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & u_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\rho = 2$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)
 σ)

$$U_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k \cdot (1 + r_2) & r_2 & (k \cdot (1 + r_2))^2 & r_2 \cdot (k \cdot (1 + r_2)) & r_2^2 \\ k \cdot (1 + s_2) & s_2 & (k \cdot (1 + s_2))^2 & s_2 \cdot (k \cdot (1 + s_2)) & s_2^2 \\ k \cdot (1 + t_2) & t_2 & (k \cdot (1 + t_2))^2 & t_2 \cdot (k \cdot (1 + t_2)) & t_2^2 \\ k \cdot (1 + u_2) & u_2 & (k \cdot (1 + u_2))^2 & u_2 \cdot (k \cdot (1 + u_2)) & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\sigma = 4$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $r_2 = 1$)
 τ)

$$U_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & r_1^2 & r_1 & 1 \\ s_1 & 1 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ t_1 & 1 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ u_1 & 1 & u_1^2 & u_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_\tau = 4$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)
 v)

$$U_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & r_1 & r_1^2 & r_1^2 & r_1^2 \\ s_1 & s_1 & s_1^2 & s_1^2 & s_1^2 \\ t_1 & t_1 & t_1^2 & t_1^2 & t_1^2 \\ u_1 & u_1 & u_1^2 & u_1^2 & u_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_v = 4$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)

3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

φ)

$$V_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 \cdot u_1 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } V_\varphi = 1 \Rightarrow \text{rank } U_\varphi = 3$$

(nemůže nastat $u_2 = 0$)

χ)

$$V_\chi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_2 & l \cdot r_2 & r_2^2 \\ s_2 & l \cdot s_2 & s_2^2 \\ t_2 & l \cdot t_2 & t_2^2 \\ u_2 & l \cdot u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } V_\chi = 2 \Rightarrow \text{rank } U_\chi = 4$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $r_2 = 1$)

ψ)

$$V_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_2 & k \cdot r_2^2 & r_2^2 \\ s_2 & k \cdot s_2^2 & s_2^2 \\ t_2 & k \cdot t_2^2 & t_2^2 \\ u_2 & k \cdot u_2^2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } V_\psi = 2 \Rightarrow \text{rank } U_\psi = 4$$

(nemůže nastat $r_2 = 0$ ani $r_2 = 1$)

ω)

$$V_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l & l \cdot r_1 & l^2 \\ l & l \cdot s_1 & l^2 \\ l & l \cdot t_1 & l^2 \\ l & l \cdot u_1 & l^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } V_\omega = 2 \Rightarrow \text{rank } U_\omega = 4$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)

$\alpha\alpha$)

$$U_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & k \cdot (r_1^2 - r_1) & r_1^2 & k \cdot r_1 \cdot (r_1^2 - r_1) & k^2 \cdot (r_1^2 - r_1)^2 \\ s_1 & k \cdot (s_1^2 - s_1) & s_1^2 & k \cdot s_1 \cdot (s_1^2 - s_1) & k^2 \cdot (s_1^2 - s_1)^2 \\ t_1 & k \cdot (t_1^2 - t_1) & t_1^2 & k \cdot t_1 \cdot (t_1^2 - t_1) & k^2 \cdot (t_1^2 - t_1)^2 \\ u_1 & k \cdot (u_1^2 - u_1) & u_1^2 & k \cdot u_1 \cdot (u_1^2 - u_1) & k^2 \cdot (u_1^2 - u_1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_{\alpha\alpha} = 4$$

(nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)

3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

$\alpha\beta$)

$$U_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & \sqrt{k \cdot (r_1^2 - r_1)} & r_1^2 & r_1 \cdot \sqrt{k \cdot r_1 \cdot (r_1^2 - r_1)} & k \cdot (r_1^2 - r_1) \\ s_1 & \sqrt{k \cdot (s_1^2 - s_1)} & s_1^2 & s_1 \cdot \sqrt{k \cdot s_1 \cdot (s_1^2 - s_1)} & k \cdot (s_1^2 - s_1) \\ t_1 & \sqrt{k \cdot (t_1^2 - t_1)} & t_1^2 & t_1 \cdot \sqrt{k \cdot t_1 \cdot (t_1^2 - t_1)} & k \cdot (t_1^2 - t_1) \\ u_1 & \sqrt{k \cdot (u_1^2 - u_1)} & u_1^2 & u_1 \cdot \sqrt{k \cdot u_1 \cdot (u_1^2 - u_1)} & k \cdot (u_1^2 - u_1) \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } U_{\alpha\beta} = 4$$

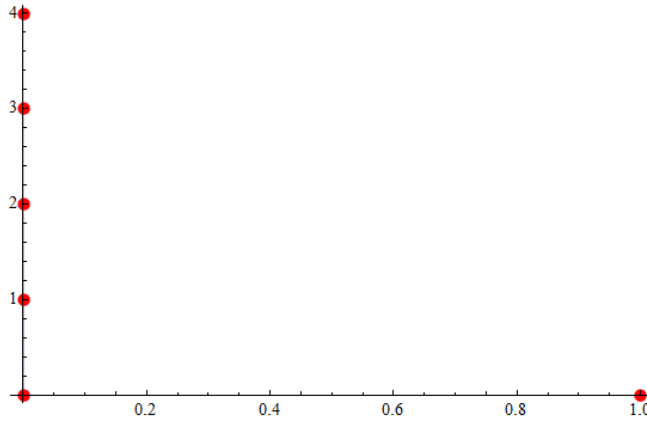
(Pro názornost bereme pouze kladnou odmocninu). (nemůže nastat $r_1 = 0$ ani $r_1 = 1$)

Jindy je $\text{rank } U = 5$, tzn. $\text{rank } M = 6$.

Rozeberme nyní znovu případy α) až ν).

α) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [0, s_2]$, $\hat{T} = [0, t_2]$, $\hat{U} = [0, u_2]$, tj. \hat{P} , \hat{R} , \hat{S} , \hat{T} , \hat{U} leží na přímce o rovnici $x = 0$.

Obr 3.17 5 bodů na přímce



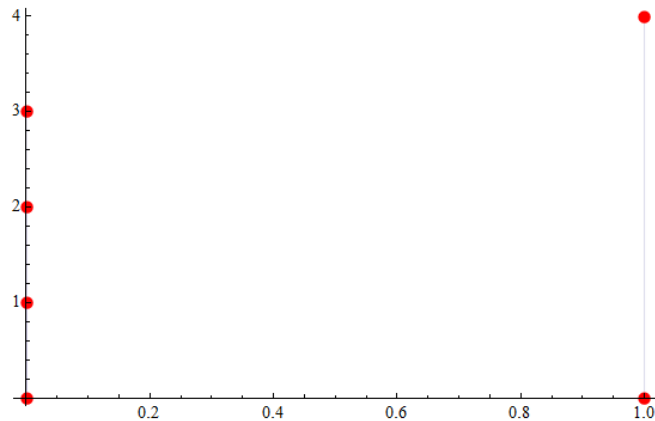
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & t_2^2 \\ 1 & 0 & u_2 & 0 & 0 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

β) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [0, r_2]$, $\hat{S} = [0, s_2]$, $\hat{T} = [0, t_2]$, $\hat{U} = [1, u_2]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $x = 0$ a 2 body na přímce o rovnici $x = 1$.

Obr 3.18 body na dvou rovnoběžkách



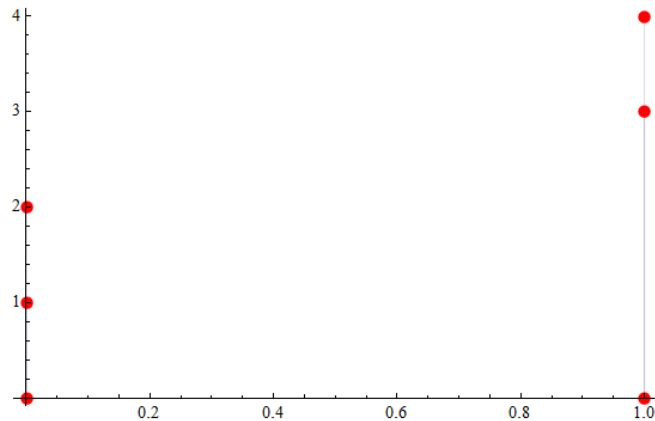
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & t_2^2 \\ 1 & 1 & u_2 & 1 & u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Obdobně γ a δ a ϵ . **Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.**

$\zeta) \hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [0, r_2], \hat{S} = [0, s_2], \hat{T} = [1, t_2], \hat{U} = [1, u_2]$, tj. 3 body na přímce o rovnici $x = 0$ a 3 body na přímce o rovnici $x = 1$.

Obr 3.19 body na dvou rovnoběžkách



3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

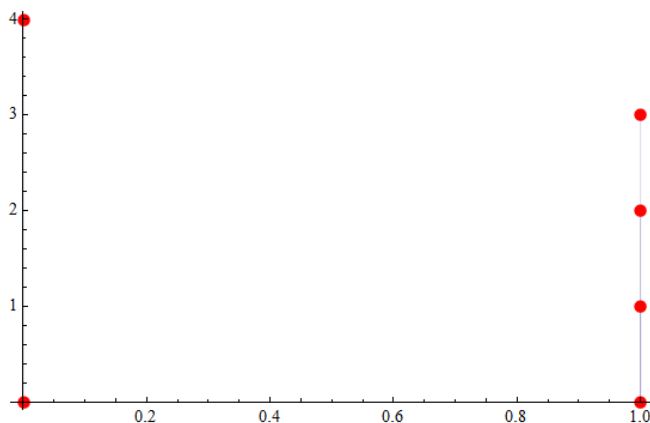
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_2 & 0 & 0 & r_2^2 \\ 1 & 0 & s_2 & 0 & 0 & s_2^2 \\ 1 & 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & 1 & u_2 & 1 & u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Obdobně $\eta, \vartheta, \iota, \kappa, \lambda$. **Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.**

$\mu) \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [1, r_2]$, $\hat{S} = [1, s_2]$, $\hat{T} = [1, t_2]$, $\hat{U} = [0, u_2]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $x = 1$ a 2 body na přímce o rovnici $x = 0$.

Obr 3.20 body na dvou rovnoběžkách



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & r_2 & 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & 0 & u_2 & 0 & 0 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

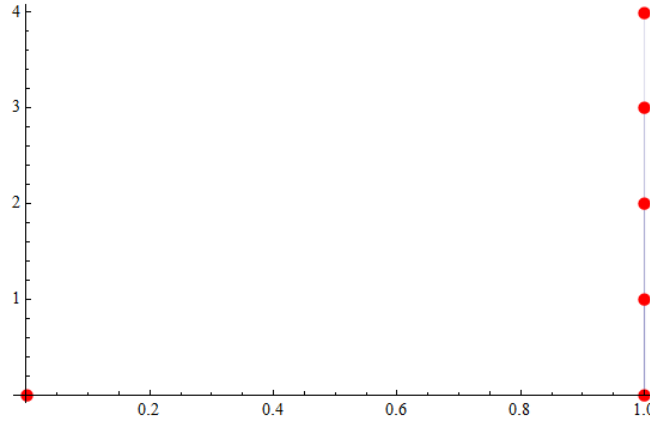
$$\text{rank } M = 5$$

Obdobně ν, ξ, o . **Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.**

3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

$\pi)\hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [1, r_2], \hat{S} = [1, s_2], \hat{T} = [1, t_2], \hat{U} = [1, u_2]$, tj. 5 bodů na přímce o rovnici $x = 1$.

Obr 3.21 5 bodů na přímce



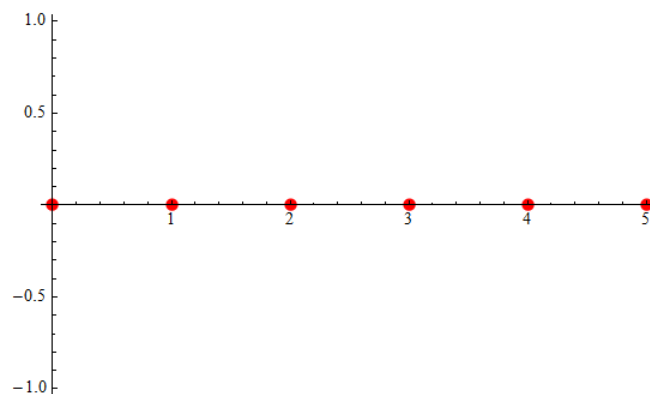
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & r_2 & 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & 1 & s_2 & 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & 1 & t_2 & 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & 1 & u_2 & 1 & u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

$\rho)\hat{P} = [0, 0], \hat{Q} = [1, 0], \hat{R} = [r_1, 0], \hat{S} = [s_1, 0], \hat{T} = [t_1, 0], \hat{U} = [u_1, 0]$, tj. 6 bodů na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.22 6 bodů na přímce



3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

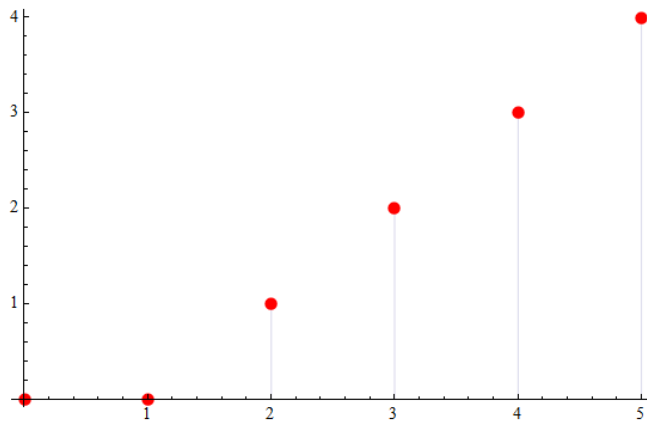
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & 0 & t_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & u_1 & 0 & u_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 3$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 3 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 3 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nespĺňují, je hodnota rozšířené matice rovna 4 a řešení neexistuje.

$\sigma)\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [k \cdot (1 + r_2), r_2]$, $\hat{S} = [k \cdot (1 + s_2), s_2]$, $\hat{T} = [k \cdot (1 + t_2), t_2]$, $\hat{U} = [k \cdot (1 + u_2), u_2]$, tj. 2 body na přímce o rovnici $y = 0$ a 4 body na přímce o rovnici $x = k \cdot (1 + y)$.

Obr 3.23 4 body na přímce



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k \cdot (1 + r_2) & r_2 & (k \cdot (1 + r_2))^2 & r_2 \cdot k \cdot (1 + r_2) & r_2^2 \\ 1 & k \cdot (1 + s_2) & s_2 & (k \cdot (1 + s_2))^2 & s_2 \cdot k \cdot (1 + s_2) & s_2^2 \\ 1 & k \cdot (1 + t_2) & t_2 & (k \cdot (1 + t_2))^2 & t_2 \cdot k \cdot (1 + t_2) & t_2^2 \\ 1 & k \cdot (1 + u_2) & u_2 & (k \cdot (1 + u_2))^2 & u_2 \cdot k \cdot (1 + u_2) & u_2^2 \end{pmatrix}$$

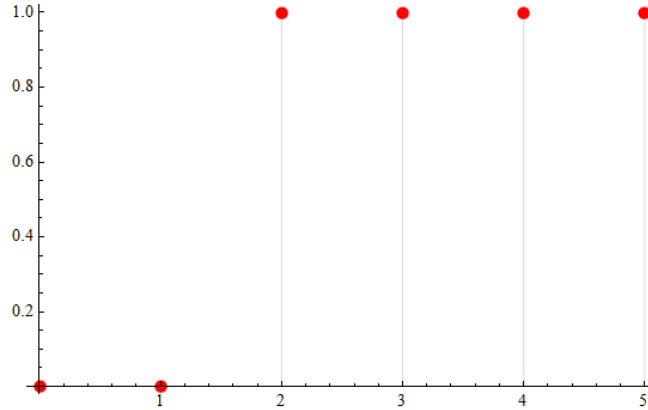
$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nespĺňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

3. INTERPOLACE NAD 4, 5 A 6 BODY V ROVINĚ

τ) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, 1]$, $\hat{S} = [s_1, 1]$, $\hat{T} = [t_1, 1]$, $\hat{U} = [u_1, 1]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $y = 1$ a 2 body na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.24 body na dvou rovnoběžkách



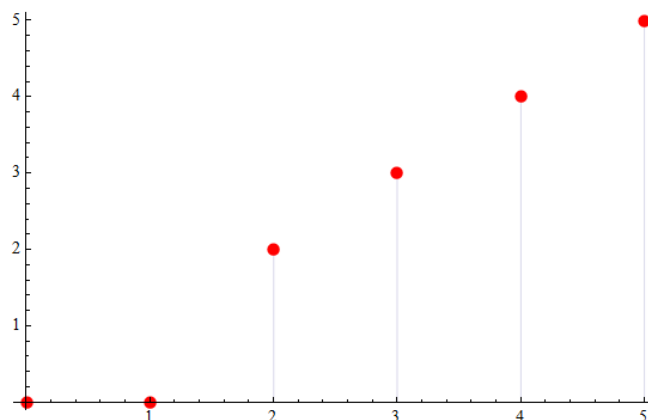
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 1 & r_1^2 & r_1 & 1 \\ 1 & s_1 & 1 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ 1 & t_1 & 1 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ 1 & u_1 & 1 & u_1^2 & u_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.

v) $\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, r_1]$, $\hat{S} = [s_1, s_1]$, $\hat{T} = [t_1, t_1]$, $\hat{U} = [u_1, u_1]$, tj. 5 bodů na přímce o rovnici $x = y$.

Obr 3.25 5 bodů na přímce



3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

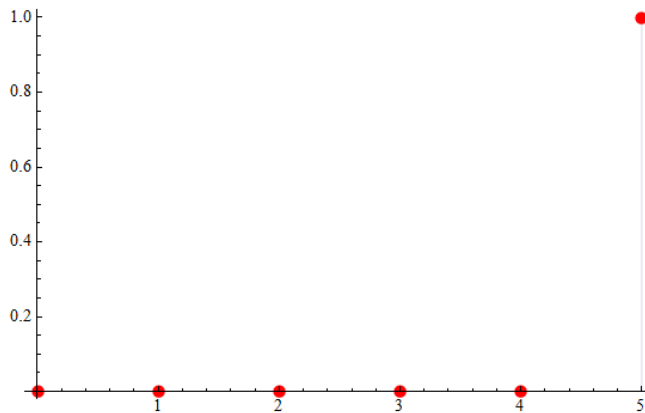
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & r_1 & r_1^2 & r_1^2 & r_1^2 \\ 1 & s_1 & s_1 & s_1^2 & s_1^2 & s_1^2 \\ 1 & t_1 & t_1 & t_1^2 & t_1^2 & t_1^2 \\ 1 & u_1 & u_1 & u_1^2 & u_1^2 & u_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

$\varphi) \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, 0]$, $\hat{S} = [s_1, 0]$, $\hat{T} = [t_1, 0]$, $\hat{U} = [u_1, u_2]$, tj. 5 bodů na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.26 5 bodů na přímce



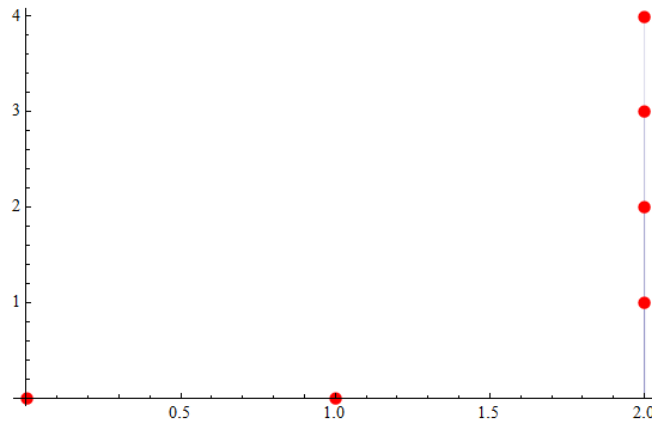
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & 0 & r_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & s_1 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & 0 & t_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & u_1 & u_2 & u_1^2 & u_1 \cdot u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 4$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 4 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 5 a řešení neexistuje.

$\chi) \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [l, r_2]$, $\hat{S} = [l, s_2]$, $\hat{T} = [l, t_2]$, $\hat{U} = [l, u_2]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $x = l$ a 2 body na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.27 body na kolmicích



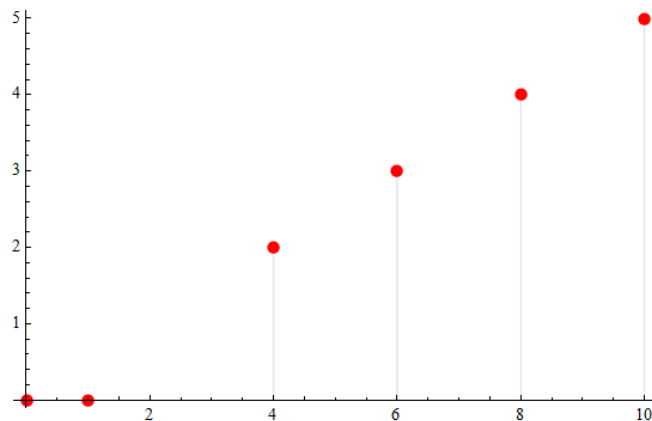
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_1^2 & l \cdot r_2 & r_2^2 \\ 1 & s_1 & s_2 & s_1^2 & l \cdot s_2 & s_2^2 \\ 1 & t_1 & t_2 & t_1^2 & l \cdot t_2 & t_2^2 \\ 1 & u_1 & u_2 & u_1^2 & l \cdot u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot y^2 + d \cdot y + e$, (rovnice eliptického paraboloidu) kde $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnota rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnota rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.

$\psi) \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [k \cdot r_2, r_2]$, $\hat{S} = [k \cdot s_2, s_2]$, $\hat{T} = [k \cdot t_2, t_2]$, $\hat{U} = [k \cdot u_2, u_2]$, tj. 5 bodů na přímce o rovnici $x = k \cdot y$.

Obr 3.28 5 bodů na přímce



3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

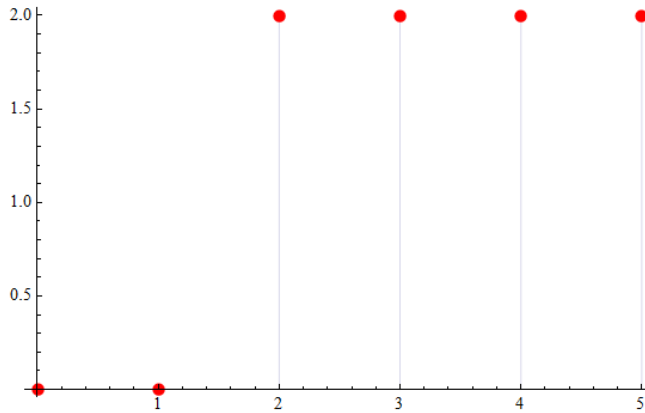
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k \cdot r_2 & r_2 & k^2 \cdot r_2^2 & k \cdot r_2^2 & r_2^2 \\ 1 & k \cdot s_2 & s_2 & k^2 \cdot s_2^2 & k \cdot s_2^2 & s_2^2 \\ 1 & k \cdot t_2 & t_2 & k^2 \cdot t_2^2 & k \cdot t_2^2 & t_2^2 \\ 1 & k \cdot u_2 & u_2 & k^2 \cdot u_2^2 & k \cdot u_2^2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $y \in \{p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.

$\omega) \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, l]$, $\hat{S} = [s_1, l]$, $\hat{T} = [t_1, l]$, $\hat{U} = [u_1, l]$, tj. 4 body na přímce o rovnici $y = l$ a 2 body na přímce o rovnici $y = 0$.

Obr 3.29 body na dvou rovnoběžkách



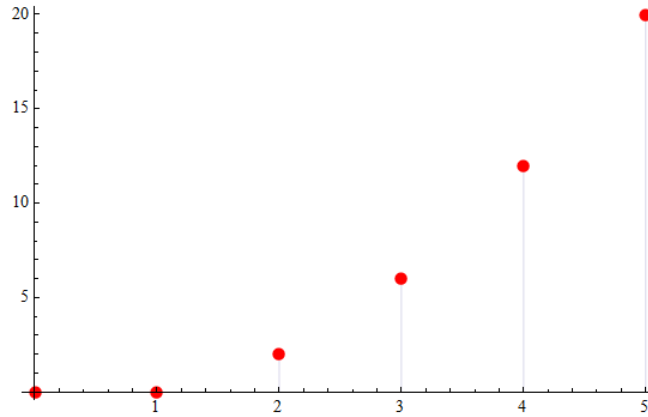
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & l & r_1^2 & l \cdot r_1 & l^2 \\ 1 & s_1 & l & s_1^2 & l \cdot s_1 & l^2 \\ 1 & t_1 & l & t_1^2 & l \cdot t_1 & l^2 \\ 1 & u_1 & l & u_1^2 & l \cdot u_1 & l^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.

$\alpha) \hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, k \cdot (r_1^2 - r_1)]$, $\hat{S} = [s_1, k \cdot (s_1^2 - s_1)]$, $\hat{T} = [t_1, k \cdot (t_1^2 - t_1)]$, $\hat{U} = [u_1, k \cdot (u_1^2 - u_1)]$, tj. 6 bodů na parabole o rovnici $y = k \cdot (x^2 - x)$.

Obr 3.30 6 bodů na parabole



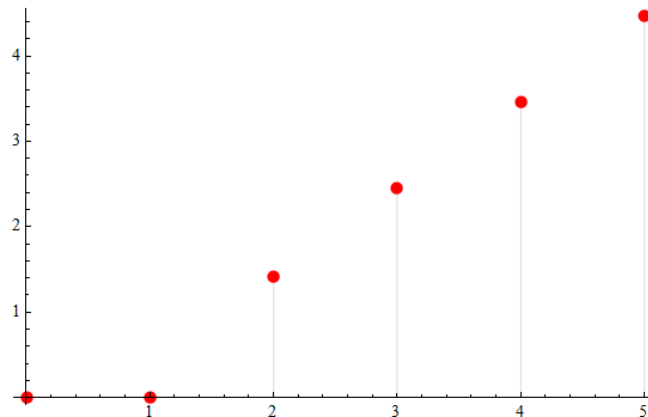
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & k \cdot (r_1^2 - r_1) & r_1^2 & k \cdot r_1 \cdot (r_1^2 - r_1) & k^2 \cdot (r_1^2 - r_1)^2 \\ 1 & s_1 & k \cdot (s_1^2 - s_1) & s_1^2 & k \cdot s_1 \cdot (s_1^2 - s_1) & k^2 \cdot (s_1^2 - s_1)^2 \\ 1 & t_1 & k \cdot (t_1^2 - t_1) & t_1^2 & k \cdot t_1 \cdot (t_1^2 - t_1) & k^2 \cdot (t_1^2 - t_1)^2 \\ 1 & u_1 & k \cdot (u_1^2 - u_1) & u_1^2 & k \cdot u_1 \cdot (u_1^2 - u_1) & k^2 \cdot (u_1^2 - u_1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$, kde $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nespĺňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.

$\alpha\beta\hat{P} = [0, 0]$, $\hat{Q} = [1, 0]$, $\hat{R} = [r_1, \sqrt{k \cdot (r_1^2 - r_1)}]$, $\hat{S} = [s_1, \sqrt{k \cdot (s_1^2 - s_1)}]$, $\hat{T} = [t_1, \sqrt{k \cdot (t_1^2 - t_1)}]$, $\hat{U} = [u_1, \sqrt{k \cdot (u_1^2 - u_1)}]$, tj. 6 bodů na hyperbole o rovnici $y^2 = k \cdot (x^2 - x)$.

Obr 3.31 6 bodů na hyperbole



3.3. ŠEST BODŮ NAD ROVINOU

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & \sqrt{k \cdot (r_1^2 - r_1)} & r_1^2 & r_1 \cdot \sqrt{k \cdot (r_1^2 - r_1)} & k \cdot (r_1^2 - r_1) \\ 1 & s_1 & \sqrt{k \cdot (s_1^2 - s_1)} & s_1^2 & s_1 \cdot \sqrt{k \cdot (s_1^2 - s_1)} & k \cdot (s_1^2 - s_1) \\ 1 & t_1 & \sqrt{k \cdot (t_1^2 - t_1)} & t_1^2 & t_1 \cdot \sqrt{k \cdot (t_1^2 - t_1)} & k \cdot (t_1^2 - t_1) \\ 1 & u_1 & \sqrt{k \cdot (u_1^2 - u_1)} & u_1^2 & u_1 \cdot \sqrt{k \cdot (u_1^2 - u_1)} & k \cdot (u_1^2 - u_1) \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } M = 5$$

Splňují-li body P, Q, R, S, T, U rovnici $z^2 = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$, (rovnice hyperbolického paraboloidu) kde $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{F}$, kde $z \in \{p_3, q_3, r_3, s_3, t_3, u_3\}$, $x \in \{p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1\}$, pak je hodnost rozšířené matice rovna 5 a existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 libovolném parametru. Pokud body P, Q, R, S, T, U tuto rovnici nesplňují, je hodnost rozšířené matice rovna 6 a řešení neexistuje.

V Ostatních případech je $\text{rank} M = 6$, tedy soustava má právě jedno řešení.

4. Algoritmy vícerozměrné interpolace

4.1. Jednorozměrná Lagrangeova interpolace

Lagrangeův interpolační polynom pro zadané body $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ definujeme jako

$$L := \sum_{j=1}^n y_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{X - x_i}{x_j - x_i},$$

Označíme-li stupeň interpolačního polynomu s , pak můžeme psát:

$$s \leq n - 1.$$

Rovnost nastává pouze v případě, kdy:

$$\sum_{i=1}^n y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_j - x_i} \neq 0.$$

Lagrangeovu jednorozměrnou interpolaci zobecníme pro případ více neurčitých. Ukážeme zde dva způsoby.

4.2. Lagrangeova vícerozměrná interpolace použitím souhrnného vzorce

Pro výpočet vícerozměrné Lagrangeovy interpolace můžeme použít souhrnný vzorec [3]

$$L := \sum_{j=0}^n y_j \prod_{k=1}^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X_k - x_{ki}}{x_{kj} - x_{ki}},$$

kde m označuje dimenzi a n značí počet bodů. Označíme-li stupeň interpolačního polynomu s , pak můžeme psát:

$$s \leq m \cdot (n - 1).$$

Rovnost nastává pouze v případě, kdy:

$$\sum_{\sigma \in A_3} y_{\sigma_1} \prod_{i=1}^{m-1} (x_{i\sigma_2} - x_{i\sigma_3}) \neq 0,$$

kde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ a A_3 je alternující podgrupa, což je podgrupa sudých permutací na konečné množině. Postup výpočtu si zde ukážeme na příkladu:

Mějme body: $[3, 5, 8]$, $[2, 1, 3]$, $[-2, 4, 7]$. Pak

$$L := 8 \cdot \left(\frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x+2}{3+2} \cdot \frac{y-1}{5-1} \cdot \frac{y-4}{5-4} \right) + 3 \cdot \left(\frac{x-3}{2-3} \cdot \frac{x+2}{2+2} \cdot \frac{y-5}{1-5} \cdot \frac{y-4}{1-4} \right) +$$

4.3. LAGRANGEOVA VÍCEROZMĚRNÁ INTERPOLACE POMOCÍ DETERMINANTŮ

$$+7 \cdot \left(\frac{x-3}{-2-3} \cdot \frac{x-2}{-2-2} \cdot \frac{y-5}{4-5} \cdot \frac{y-1}{4-1} \right).$$

Vyřešením poté získáme hledaný interpolační polynom

$$L := \frac{53}{240}x^2y^2 - \frac{59}{80}x^2y - \frac{7}{30}x^2 + \frac{31}{48}xy^2 - 4\frac{1}{16}xy + 4\frac{1}{6}x - 1\frac{37}{40}y^2 + 8\frac{33}{40}y - 2\frac{2}{5}$$

Tento vzorec však lze použít jen v případě, že bod nemá žádnou souřadnici shodnou s jiným bodem. V opačném případě bychom dostali dělení nulou a tento vzorec bychom použít nemohli. Pro tyto případy použijeme druhého způsobu.

4.3. Lagrangeova vícerozměrná interpolace pomocí determinantů

Tato kapitola je založena na článku [2].

Nechť $f = f(X_1, \dots, X_m)$ je polynom stupně s o m proměnných. Protože f má $\binom{s+m}{s} = n$ členů, nutnou podmínkou je, že máme n různých bodů

$(x_{1i}, \dots, x_{mi}, y_i) \in \mathbb{R}^{s+1}$, $1 \leq i \leq n$, $y_i = f(x_{1i}, \dots, x_{mi})$ proto, aby byla f jednoznačně definována. Jinými slovy $f(X_1, \dots, X_m) = \sum_{\mathbf{e}_i, \mathbf{1} \leq s} \alpha_{\mathbf{e}_i} \mathbf{X}^{\mathbf{e}_i}$, kde $\alpha_{\mathbf{e}_i}$ jsou koeficienty f , $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ je m -tice nezávisle proměnných f , $\mathbf{e}_i = (e_{1i}, \dots, e_{mi})$ je multiindex, jehož položky jsou celá nezáporná čísla tvořící uspořádaný rozklad čísla mezi 0 a s včetně a $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{1} := \sum_{j=1}^m e_{ji}$ je obvyklý vnitřní součin a $\mathbf{X}^{\mathbf{e}_i} := \prod_{j=1}^m X_j^{e_{ji}}$. Podle známého Lagrangeova postupu budeme f psát ve formě $\sum_{i=1}^n f_i l_i(\mathbf{X})$, kde $l_i(\mathbf{X})$ je polynom nezávislých proměnných X_1, \dots, X_m s vlastností, že když \mathbf{X} je rovno i -té hodnotě, nebo $\mathbf{X} = \mathbf{x}_i((x_1, \dots, x_m) = (x_{1i}, \dots, x_{mi}))$, pak $l_i(\mathbf{x}_i) = 1$ a $l_j(\mathbf{x}_i) = 0 (j \neq i)$. Abychom toho dosáhli, uvažujme soustavu lineárních rovnic $f_i = \sum_{\mathbf{e}_j, \mathbf{1} \leq s} \alpha_{\mathbf{e}_j} \mathbf{x}_i^{\mathbf{e}_j}$, kde $1 \leq i \leq n$. Z této soustavy zkonstruujeme matici $M = [\mathbf{x}_i^{\mathbf{e}_j}]$:

$$M = \begin{pmatrix} x_1^{e_1^1} & \cdots & x_1^{e_\rho^1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_i^{e_1^i} & \cdots & x_i^{e_\rho^i} \\ \vdots & & \vdots \\ x_\rho^{e_1^\rho} & \cdots & x_\rho^{e_\rho^\rho} \end{pmatrix}$$

Předpokládáme, že $\det(M) \neq 0$. Ačkoliv bychom mohli řešit koeficienty α_i v f invertováním M (která, jak víme, je čtvercová, protože počet rovnic výše uvedeného lineárního systému je stejný jako počet koeficientů), toto není náš cíl. Užitečnost Lagrangeovy interpolace je o tom, že můžeme určit f bez explicitního řešení pro koeficienty.

Pozn.: Je-li M singularní, pak koeficienty f nejsou jednoznačně určeny a f je nejednoznačný polynom. Proto f je jednoznačná tehdy a pouze tehdy, když M je regulární. V opačném případě je popis geometrické konfigurace ρ bodů, pro něž je $\det(M) = 0$, složitý problém (řešili jsme ve třetí kapitole pro 4, 5 a 6 bodů nad rovinou).

4. ALGORITMY VÍCEROZMĚRNÉ INTERPOLACE

Nechť $\Delta = \det(M)$. Nyní uděláme substituci $x_j = X$ v M , dostáváme následující matici $M_j(X)$:

$$M_j(X) = \begin{pmatrix} x_1^{e_1} & \cdots & x_1^{e_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ X^{e_1} & \cdots & X^{e_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ x_\rho^{e_1} & \cdots & x_\rho^{e_\rho} \end{pmatrix}$$

Nechť $\Delta_j(X) = \det(M_j(X))$. Dále uděláme substituci $X = x_i$ v $M_j(X)$ ($i \neq j$), to dává následující matici $(M_j)_i$:

$$(M_j)_i = \begin{pmatrix} x_1^{e_1} & \cdots & x_1^{e_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ x_i^{e_1} & \cdots & x_i^{e_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ x_i^{e_1} & \cdots & x_i^{e_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ x_\rho^{e_1} & \cdots & x_\rho^{e_\rho} \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že i -tý řádek se v $(M_j)_i$ objevuje dvakrát. To znamená, že $\det(M_j)_i = 0$. Jinými slovy, když $X = x_i$, pak $\Delta_j(x_i) = 0$ ($i \neq j$). Navíc konstrukcí $X = x_i \Rightarrow \Delta_i(X) = \Delta$. Z toho důvodu

$$l_i(X) = \frac{\Delta_i(X)}{\Delta}$$

a dále

$$f = \sum_{i=1}^{\rho} f_i \frac{\Delta_i(X)}{\Delta}.$$

Mějme interpolaci nad \mathbb{R}^m , pro n bodů. Vezměme kombinační čísla $\binom{m}{0}$, $\binom{m+1}{1}$, $\binom{m+2}{2}$, \dots , obecně $\binom{m+s}{s}$. Z těchto čísel vybereme to, pro které platí $\binom{m+s}{s} \geq n$. Pak s je stupeň interpolačního polynomu.

Postup si ukážeme na příkladu. Mějme body: $[3, 5, 8]$, $[2, 1, 3]$, $[-2, 4, 7]$. Řešení hledáme ve tvaru: $z = \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3$. Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 8 &= 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 7 &= -2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

Dostáváme následující matice:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. VÍCEROZMĚRNÁ INTERPOLACE NAD KONEČNÝMI POLI

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = -19, \det M_1 = -3x - 4y + 10, \det M_2 = -x + 5y - 22, \det M_3 = 4x - y - 7.$$

Dosazením dostáváme:

$$z = 8 \frac{(-3x - 4y + 10)}{-19} + 3 \frac{(-x + 5y - 22)}{-19} + 7 \frac{(4x - y - 7)}{-19} = \frac{-x + 24y + 35}{19}.$$

Ihned vidíme, že stupeň polynomu je v tomto případě nižší, než při použití souhrnného vzorce.

4.4. Vícerozměrná interpolace nad konečnými poli

Mějme pole \mathbb{F}_{p^k} . Platí

$$x^{p^k} = x.$$

Věta: Uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbb{F}_{p^k} \rightarrow \mathbb{F}_{p^k}$ definované $\varphi(x) = x^p$. Pak φ je bijekce a platí

$$\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_k : \varphi^k(x) = x^{p^k} = x$$

Důsledek: Malá Fermatova věta

Pro každé prvočíslo p a každé celé číslo a takové, že p nedělí a (a není násobkem p), platí

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Důsledek: Polynom x^{p^k} indukuje totéž zobrazení jako x .

Nyní pro redukci stupně monomu použijeme $x^l \mapsto x^{l \bmod p^k - 1}$, jelikož platí

$$\begin{aligned} x^{p^k} &= x \\ x^{p^k - 1} &= 1 \\ x^l \cdot x^{p^k - 1} &= x^l \\ x^{l + p^k - 1} &= x^l \end{aligned}$$

Označme s stupeň polynomu. Pak platí

$$s \leq p^k - 2.$$

Nyní tento vztah porovnejme se vztahem pro stupeň polynomu vícerozměrné interpolace použitím souhrnného vzorce. Řešme, jaká volba m, n nevyvolá nutnost redukce polynomu.

Vezměme si například pole \mathbb{F}_4 . Podle vzorce pro stupeň polynomu platí $s \leq 2$, tzn. že maximální stupeň polynomu bude 2. Nyní vezměme vzorec pro stupeň polynomu Lagrangeovy vícerozměrné interpolace a zkoumejme, kdy už je nutná redukce stupně polynomu. Zjistíme, že pokud je $m = 3, n = 2$ či $m = 2$ a $n = 3$, je redukce polynomu již nutná. Pro pole \mathbb{F}_8 nebo \mathbb{F}_9 dochází k redukci polynomu při $m = 2, n = 5$ či $m = 3$ a $n = 4$.

5. Manuál k notebooku v prostředí Mathematica

Interpolaci nad rovinou pro 4, 5 a 6 bodů jsem řešila v programu Mathematica. Vytvořila jsem dva notebooky. První z nich řeší interpolaci nad reálnými čísly a druhý notebook interpolaci nad konečnými poli. Pro správné fungování obou notebooků je nutné vytvořit složku $C : \backslash ProgramFiles \backslash WolframResearch \backslash Mathematica \backslash 8.0 \backslash AddOns \backslash Packages \backslash MultivariateInterpolation$ a zkopírovat do ní soubor `I456.m`. Teď již přejdeme k jednotlivým notebookům.

5.1. Notebook Test I456Points.nb

Nejprve musíme načíst soubor `I456.m` pomocí příkazu

$$\lll \text{MultivariateInterpolation} \text{'I456Points'}$$

Nyní již můžeme zadávat body. Tento notebook řeší interpolaci pro 4, 5 nebo 6 bodů nad rovinou. Každý bod tudíž musí mít 3 souřadnice, které jsou oddělené čárkou. Takže například 4 body zadáme následovně:

$$\text{Body} = \{\{5, 0, 2\}, \{1, 0, 1\}, \{2, 2, 0\}, \{3, 6, 1\}\}.$$

Nyní si popíšeme všechny procedury:

`I456Info[Body]` kontroluje, zda jsou body zadány správně. Je zde ošetřeno, aby každý bod měl 3 souřadnice a podkladové body v rovině byly různé. Výstupem nám v našem případě bude:

Vícerozměrná interpolace nad rovinnými body $\{\{5, 0\}, \{1, 0\}, \{2, 2\}, \{3, 6\}\}$

`I456ResSoust[Body, a, b, c, d, e, f]` řeší soustavu rovnic, pro neznámé a, b, c, d, e, f . Tím máme určenou kvadriku a ihned vidíme, kolik existuje řešení, existuje-li vůbec nějaké. Náš výstup bude ve tvaru

$$\left\{ \left\{ b \rightarrow \frac{23}{20} - \frac{6a}{5}, \quad d \rightarrow \frac{1}{20} \cdot (-3 + 4a), \quad e \rightarrow \frac{1}{90} \cdot (-71 + 23a - 60c), \quad f \rightarrow \frac{1}{360} \cdot (131 - 38a + 60c) \right\} \right\}$$

`I456LinTransf[Body]` provede lineární transformaci zadaných bodů. První bod převede do bodu $\{0, 0\}$ a druhý do bodu $\{1, 0\}$. Pro naše body je výstupem:

$$\left\{ \{0, 0\}, \{1, 0\}, \left\{ \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\} \right\}$$

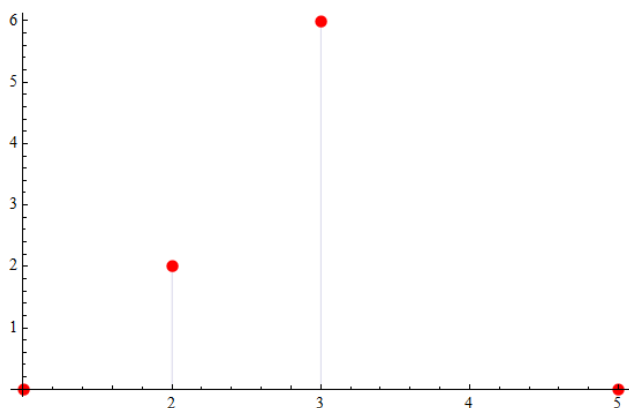
Nejdůležitější procedurou celého notebooku je `I456PolohaPodBodu[Body]`, jejímž výstupem je počet řešení a případná zvláštní poloha podkladových bodů. Pro vzorové zadání je výstupem

nekonečně mnoho řešení závislých na 2 libovolných parametrech

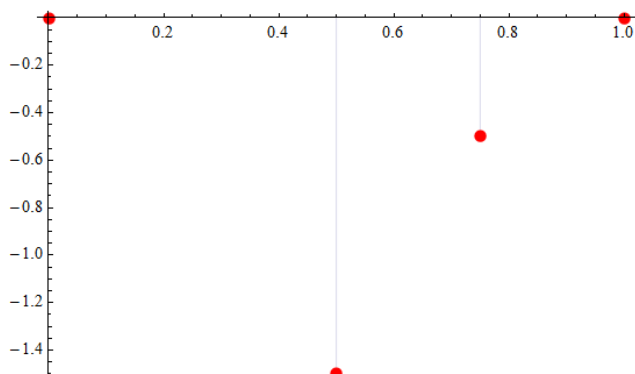
5.2. NOTEBOOK TEST I456POINTSFINITEFIELD.NB

Poslední dvě procedury `I456KPobraz[Body]`, resp. `I456KPobrazt[Body]` nám vykreslí zadané, resp. ztransformované podkladové body do kartézské soustavy souřadnic.

Obr 5.1 zadané body



Obr 5.2 ztransformované body



5.2. Notebook Test I456PointsFiniteField.nb

Tento notebook funguje obdobně jako notebook `Test I456Points.nb`. Můžeme ho použít pro zjištění interpolace nad konečnými poli pro 4 body. Čtyři body zadáme následovně:

$$Body = \{\{k[0], k[0], k[3]\}, \{k[1], k[0], k[0]\}, \{k[1], k[5], k[0]\}, \{k[0], k[3], k[0]\}\}.$$

V tomto notebooku je jediná nová procedura s názvem `I456KPoLe[Body]`. Výstupem je počet řešení a zvláštní poloha podkladových bodů. V našem případě je výstup tvaru:

body leží na dvou rovnoběžkách-nekonečně mnoho řešení závislých na 2
libovolných parametrech.

6. Závěr

V bakalářské práci jsme řešili vícerozměrnou interpolaci a diskutovali jsme stupeň interpolačního polynomu. Také jsme se zabývali vytvořením notebooku, který tuto interpolaci bude řešit.

V úvodní kapitole jsme zkonstruovali matici afinní transformace, kterou využijeme ve třetí kapitole. V té jsme řešili interpolaci 4, 5 a 6 bodů nad rovinou. Při řešení interpolace jsme postupovali přímo, a to řešením soustavy rovnic. Ve čtvrté kapitole jsme se poté zaměřili na vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem. Tu jsme vyřešili nepřímo, algoritmy nevyžadujícími řešení soustavy rovnic. Pro vytvoření interpolačního polynomu jsme použili Lagrangeovu metodu. V poslední kapitole jsme popsali notebook v prostředí Mathematica, který řeší vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem.

V kapitole o interpolaci nad rovinou jsme prodiskutovali všechny možnosti, jak lze proložit zadanými body kvadriku. Vypsali jsme všechny zvláštní polohy podkladových bodů a k nim příslušná řešení. V následující kapitole jsme se zabývali vícerozměrnou interpolací. Tu jsme řešili dvěma způsoby, nejdříve souhrnným vzorcem a poté pomocí determinantů. V obou případech je zde uveden vzorec pro stupeň interpolačního polynomu a názorný příklad. Dále jsme se zabývali stupněm interpolačního polynomu nad konečnými poli. V poslední kapitole jsme pak popsali jednotlivé procedury funkčního notebooku v prostředí Mathematica, který řeší vícerozměrnou interpolaci nad libovolným polem.

Literatura

- [1] GRIGORIJEV, D. Y., KARPINSKI, M., SINGER, M. F. *Fast parallel algorithms for sparse multivariate polynomial interpolation over finite fields*. SIAM J. Comp. 19, 1059-1063, 1990.
- [2] SANIEE K. *A simple expression for multivariate Lagrange interpolation*. New Providence High School, New Providence, NJ 07974, 2007.
- [3] SCHUSTER, D. *Multivariate Interpolationsangriffe auf symmetrische Chiffren*. Diploma Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007.