VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE ÚLOH INŽENÝRSKÉHO NÁVRHU

OPTIMIZATION IN ENGINEERING DESIGN PROBLEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — Zdeněk Sýkora

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Ing. Mgr. Eva Mrázková, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Zdeněk Sýkora**
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	**Ing. Mgr. Eva Mrázková, Ph.D.**
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizace úloh inženýrského návrhu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Optimalizace má při řešení úloh inženýrského návrhu nezastupitelnou roli.
Pro vhodně zvolené inženýrské úlohy budou na základě znalostí lineárního a nelineárního programování zformulovány matematické modely. Tyto modely budou poté implementovány ve vybraném optimalizačním programu.

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce je ukázat možnosti využití optimalizace na zvolených inženýrských úlohách, zformulovat odpovídající matematické modely, implementovat je ve vybraném optimalizačním programu a získané výsledky adekvátně okomentovat.

Seznam doporučené literatury:

BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., SHETTY, C. M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. New York: Wiley and Sons, 1993.

KLAPKA J., DVOŘÁK J., POPELA P. Metody operačního výzkumu. Brno: VUTIUM, 2001.

RARDIN, R. L. Optimization in Operations Research. New Jersey: Prentice Hall, 1998.

TAHA A. H. Operations research: An introduction. New Jersey: Prentice Hall, 1997.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce pojednává o užití optimalizace v úlohách prutu namáhaného na ohyb a vzpěrné stability prutu. Úlohy byly vyřešeny v softwaru GAMS. Řešení prvních dvou úloh je srovnáno v programu Ansys. Obsahuje také kapitoly o základní teorii optimalizace, teorii ODR a kapitolu s vybranými pojmy z pružnosti a pevnosti.

Summary

This bachelor thesis deals with the use of optimization in the problems of beam loading and buckling stability. The problems were solved in the GAMS software. The solutions of the first two problems is compared with results obtained using software Ansys. It also contains chapters on basic optimization theory, the theory of ordinary differential equations and a chapter on selected concepts in mechanics of materials.

Klíčová slova

Optimalizace, nelineární optimalizace, software GAMS

Keywords

Optimization, nonlinear optimization, software GAMS

SÝKORA, Zdeněk. Optimalizace úloh inženýrského návrhu [online]. Brno, 2022 [cit. 2022-05-16]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/139689. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Eva Mrázková.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Optimalizace úloh inženýrského návrhu* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Mgr. Evy Mrázkové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Zdeněk Sýkora

Děkuji své vedoucí práce Ing. Mgr. Evě Mrázkové, Ph.D. za vedení bakalářské práce, poskytnuté rady a ochotu projevenou během odborných konzultací.

Zdeněk Sýkora

Obsah

1 Úvod **2**

2 Teoretický úvod **3**

3 Optimalizace **5**
3.1 Lineární programování 5
3.2 Nelineární programování 7
3.3 Multikriteriální úlohy 8
3.3.1 Agregace kritérií 8

4 Obyčejné diferenciální rovnice **9**
4.1 Numerické řešení okrajových úloh 9
4.1.1 Metoda konečných diferencí 10

5 Vybrané pojmy z pružnosti, pevnosti **11**
5.1 Namáhání na ohyb 11
5.2 Mezní stav vzpěrné stability prutu 12

6 GAMS **14**

7 Řešené úlohy **15**
7.1 Úloha 1: Prut zatížen osamělou silou 15
7.2 Úloha 2: Obdélníkové zatížení po celé délce prutu 21
7.3 Úloha 3: Prut zatížený na vzpěr 24

8 Závěr **26**

1 Úvod

Inženýrské úlohy většinou hledají co možná nejlepší řešení daného problému za účelem snížení nákladů nebo zlepšení jejich efektivity. Získat takové řešení nám umožní teorie optimalizace.
Cílem bakalářské práce je ukázat možnosti využití optimalizace na zvolených inženýrských úlohách, zformulovat odpovídající matematické modely, implementovat je ve vybraném optimalizačním programu a získané výsledky adekvátně okomentovat.
Modely byly implementovány v programu GAMS, kde byly pomocí vestavěného řešiče vyřešeny. Jmenovitě to jsou dvě úlohy optimalizace rozměrů obdélníkového průřezu prutu, za cílem minimalizace hmotnosti a maximalizace ohybové tuhosti současně, pro prut zatížený silou uprostřed a obdélníkovým zatížením. Dále optimalizaci rozměrů obdélníkového průřezu pro prut zatížený osovou silou. Tyto úlohy tedy vedly na nelineární a vícekriteriální optimalizaci.
V následujícím textu jsou nejprve definovány vybrané pojmy, které jsou v teorii optimalizace stěžejní. Následně pojednáváme o optimalizaci lineární, nelineární a vícekriteriální. V další části textu je stručně uvedena teorie ODR a jejich diskretizace, kterou užíváme v modelu. Následuje pak kapitola pro uvedení pojmů z pružnosti a pevnosti, které jsou používané v řešených úlohách a velmi stručná kapitola o programu GAMS, který využíváme pro řešení našich úloh. Poslední kapitola obsahuje již zmíněné tři úlohy, ve kterých si teorii optimalizace ukážeme a aplikujeme ji. Výsledky námi sestaveného modelu následně v prvních dvou úlohách srovnáme s výsledky z programu Ansys.

2 Teoretický úvod

Nejprve si musíme definovat některé základní pojmy, které budeme dále využívat. Následující dvě definice jsou naprosto stěžejní pro námi využívanou optimalizaci [1], [2].

Definice 2.1. (Lokálních a globálních extrémů)
1. Řekneme, že f má v bodě $x_0 \in D(f)$ *lokální maximum* (resp. *minimum*), jestliže existuje $O(x_0) \subseteq D(f)$ takové, že pro každé $x \in O(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
2. Lokální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže existuje $O^*(x_0) \subseteq D(f)$ takové, že pro každé $x \in O^*(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$ (resp.$f(x) > f(x_0)$).
3. Lokální maxima a minima se souhrnně nazývají *lokální extrémy* případně *ostré lokální extrémy.*
4. Řekneme, že funkce f má na množině $M \subseteq D(f)$ v bodě $x_0 \in M$ *globální maximum* resp. (*minimum*), jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
5. Globální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže příslušné nerovnosti jsou ostré.
6. Globální maxima a minima souhrnně nazýváme *globální extrémy.*

Definice 2.2. (Vázaného lokálního extrému)
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce a M je zadána soustavou

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \qquad \textit{kde } 1 \leq m < n. \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $X_0 \in M$ *vázané lokální minimum* (resp.*maximum*), jestliže existuje okolí $O(X_0)$ takové, že pro $X \in M \cap O(X_0)$ platí $f(X_0) \leq f(X)$ (resp. $f(X_0) \geq f(X)$). Jsou li nerovnosti pro $X \neq X_0$ ostré, mluvíme o *ostrých vázaných extrémech.*

Definice 2.3. (Konvexní a ryze konvexní funkce)
1. Řekneme, že funkce f je *konvexní* na intervalu I, jestliže pro $\forall \xi \in \langle 0, 1\rangle$ a $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) \leq \xi f(x_1) + (1-\xi)f(x_2)$.
2. Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní* na intervalu I, jestliže pro $\forall \xi \in (0, 1)$ a $\forall x_1 \neq x_2 \in I$ platí $f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) < \xi f(x_1) + (1-\xi)f(x_2)$.

Konvexnost funkcí bude v dalších kapitolách o nelineární optimalizaci velmi podstatná, zjednoduší nám podle věty (2.9) hledání globálních extrémů.

Definice 2.4. (Spojitosti funkce v bodě)
Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$).

Definice 2.5. (Spojitosti funce na intervalu)
Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže platí:
1. f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I.
2. Patří-li levý (resp. pravý) krajní bod intervalu I do tohoto intervalu, pak je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Věta 2.6. (1. Weierstrassova)
Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

Věta 2.7. (2. Weierstrassova)
Funkce spojitá na uzavřeném intervalu zde nabývá minima a maxima.

Weierstrassovy věty jsou hojně využívány v různých algoritmech hledání extrémů funkcí.

Definice 2.8. (Konvexní množina)
Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *konvexní* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S : \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S \; \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$. Tedy jestliže každá úsečka spojující dva body S je celá obsažena v množině S.

Věta 2.9. (O minimu konvexní funkce)
Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina a $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce na S. Je-li x_{min} bodem lokálního minima funkce f, pak je také bodem globálního minima f. Je-li f ryze konvexní, je toto minimum izolované a jediné.

3 Optimalizace

Optimalizace, někdy také matematické programování, se zabývá nalezením takového řešení, které je extrémem dané funkce, kterou budeme dále nazývat účelovou funkcí. Většinou však tato řešení musí splňovat další definované požadavky, které vyplynou z praktických požadavků modelu. Optimalizace nachází využití v mnohých odvětvích, například v řešení ekonomických problémů, v logistice, ve strojním inženýrství, a tak dále. Optimalizaci rozlišujeme podle účelové funkce a podle omezujících podmínek na lineární, nelineární, dynamickou, celočíselnou, vícekriteriální a další [3], [4].

3.1 Lineární programování

Lineární programování se zabývá problémy, ve kterých účelová funkce i všechna omezení jsou lineární funkce.

Definice 3.1. (Obecná formulace úlohy lineárního programování)
Nechť a_{ij}, b_i, c_j $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou daná reálná čísla a nechť $I_1 \subset I = \{1, 2, \ldots, m\}, J_1 \subset J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Úlohu maximalizace funkce:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

na množině řešení soustavy lineárních rovnic a nerovnic

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i \in I_1) \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i \in I - I_1) \tag{3.3}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j \in J_1) \tag{3.4}$$

nazveme *maximalizační úlohou lineárního programování ve smíšeném tvaru*, jestliž $I_1 \neq 0$, $I_1 \neq I$ nebo $J_1 \neq J$.

Rovnici (3.1) nazveme účelovou, nebo kriteriální funkcí, nerovnici(3.2) a rovnici (3.3) nazveme omezujícími podmínkami.
Podobně bychom definovali *maximalizační úlohu lineárního programování v rovnicovém tvaru* a *maximalizační úlohu lineárního programování ve tvaru nerovností*, jediný rozdíl v těchto variantách by byl ve tvaru omezujících funkcí. Je nutno podotknout, že jednotlivé tvary se dají úpravami převést na tvar jiný. Rovněž úloha maximalizace se dá převést na úlohu minimalizace vynásobením účelové funkce číslem -1 a naopak.
Koeficienty a_{ij} se obvykle označují jako *strukturální koeficienty*, koeficienty b_i *kapacitní limity* a koeficienty c_j se označují jako *cenové limity*.

Jakoukoliv úlohu lineárního programování lze převést do *standardního tvaru*, kterou můžeme zapsat následovně

maximalizovat

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

za podmínek

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

stručně zapsáno:

$$\max \{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \tag{3.5}$$

Dále uvádíme velmi důležité definice hledaných řešení. *Množina přípustných řešení* je množina bodů, které vyhovují omezujícím podmínkám a *optimální řešení* je hledané řešení úlohy lineární optimalizace.

Definice 3.2. (Množina přípustných řešení)
Množinu $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{x} \in R^n | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ nazveme *množinou přípustných řešení*, její prvky pak *přípustnými řešeními* úlohy.

Definice 3.3. (Optimální řešení)
Přípustné řešení $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{M}$ nazveme *optimálním řešením* úlohy (3.5), jestliže

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \forall \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}.$$

Definice 3.4. (Základní řešení)
Přípustné řešení $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ nazveme *základním řešením* úlohy lineárního programování v rovnicovém tvaru, jestliže jsou sloupce matice $\boldsymbol{A}$ s indexy odpovídajícími nenulovým složkám $\boldsymbol{x}$ lineárně nezávislé. Kde matice $\boldsymbol{A}$ je v netriviálních případech typu (m,n), kde $n > m$.

Věta 3.5. (Základní věta lineárního programování)
Pro úlohu lineárního programování maximalizovat $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ na množině $M = \{x \in R^n | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ platí jedna ze tří možností:

$$\begin{aligned}
&a)\ \boldsymbol{M} = \emptyset,\\
&b)\ \boldsymbol{M} \neq \emptyset\ \wedge\ sup\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = +\infty,\\
&c)\ \boldsymbol{M}^* \neq \emptyset,
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{M}^*$ je množina optimálních řešení.
Dále platí:
1. Je - li $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, pak existuje základní přípustné řešení.
2. Je - li $\boldsymbol{M}^* \neq \emptyset$, pak existuje základní optimální řešení.

Nejrozšířenější metodou pro řešení úloh lineární optimalizace je *simplexová metoda*, která byla odvozena na základě Jordanovy modifikace Gaussovy eliminační metody. Tato metoda je velmi detailně vysvětlena, včetně použití na vícero příkladech v [4]. My se ale budeme zabývat nelineární optimalizací, proto popis této metody zcela vynecháme.

3.2 Nelineární programování

Úlohy nelineárního programování jsou významným odvětvím optimalizace. Řeší problémy, ve kterých jsou účelová funke nebo omezení nelineárními funkcemi. Mnoho termínů a základních myšlenek, například úpravy pro převedení na jiné tvary úlohy, se přebírá z lineární optimalizace.

Obecná *úloha nelineárního programování* se zapíše ve tvaru

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \circ \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in X\},$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ jsou proměnné, které nabývají hodnot ze základní množiny $X \in \mathbb{R}^n$. Symbol $\circ$ značí sloupcový vektor symbolů $\leq, =$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ značí účelovou funkci a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ značí vektorovou funkci omezení.
Množina přípustných řešení se pak dá zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= \bigcap_{i=1}^{m} C_i = \bigcap_{i=1}^{m} \{\boldsymbol{x} \in X \mid g_i(\boldsymbol{x}) \circ 0) = \\ &= \{\boldsymbol{x} \in X \mid g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, 1 \leq i \leq l; g_i(\boldsymbol{x}) = 0, l+1 \leq i \leq m\}.\end{aligned}$$

Nelineární optimalizace se zabývá nalezením globálních nebo lokálních extrémů účelové funkce. Obecně je velmi těžké nalézt globální extrém funkce, ale věta (2.9) říká, že pro konvexní účelovou funkci nám stačí nalézt lokální maximum (resp. minimum) které je pak současně extrémem globálním. Ověření konvexnosti složitých funkcí však není jednoduché, proto je obecně nalezení globálního extrému obtížné.

Problémy nelineární optimalizace se také dají rozdělit na hledání *volných extrémů* a hledání *vázaných extrémů* (viz defin. (2.1) a (2.2)). Úlohy hledání volného extrému tedy představují příklady, ve kterých je množina přípustných řešení neomezená. Řešení využívají Weierstrassovy věty, numerické metody hledání volných extrémů rozdělujeme na *metody jednorozměrné optimalizace* a *metody vícerozměrné optimalizace*, které můžeme dále rozdělit na metody využívající derivace a metody nevyužívající derivace. Metody jednorozměrné optimalizace jsou cyklicky používány v metodách vícerozměrné optimalizace, mezi nejznámější patří například *metoda bisekce* nebo *Newtonova metoda*.

Úlohy zabývající se vázanými extrémy jsou složitější, protože hledanou proměnnou $\boldsymbol{x}$ můžeme vybírat pouze z omezené množiny. V mnoha případech můžeme tyto úlohy převést na volný extrém dosazením za proměnnou, kterou si vyjádříme z rovnice. Tento přístup tak sníží dimenzi řešené úlohy. Tento postup ale občas zkomplikuje aplikaci numerického algoritmu, a navíc tento postup nelze použít ve všech případech, záleží na tvaru omezujících funkcí $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.
Podmínky optimality hledané proměnné nám definuje následující věta.

Definice 3.6. (Karush-Kuhn-Tucker)
Nechť funkce f a $\boldsymbol{g}$ jsou diferencovatelé v bodě $\boldsymbol{x}_0$, který je bodem lokálního minima úlohy $\min\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}\}$. Nechť dále platí, že sloupce matice $\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)^T$, odpovídající gradientům aktivních omezení jsou lineárně nezávislé. Potom existují koeficienty $\boldsymbol{u}$ tak, že platí:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = 0, \qquad \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}.$$

3.3 Multikriteriální úlohy

Dosud jsme uvažovali optimalizaci pouze jediného kritéria, ovšem v praktické aplikaci velmi často sledujeme více kritérií, které bychom chtěli optimalizovat. Tato kritéria navíc bývají velmi často konfliktní, protichůdná. Jinak řečeno, když například zmenšíme jedno, zvětší se tím kritérium druhé. Například v řešených úlohách uvidíme kritéria tuhosti prutu v ohybu a jeho váhy.
Vyskytovat se zde mohou jak *kvantitativní (kardinální)*, tak *kvalitativní (ordinální)* kritéria. *Kvantitativní* kritéria lze vyjádřit číslem a tedy daná kvantitativní kritéria lze porovnat. Tato kritéria však bývají v praxi nesouměřitelná, protože bývají vyjádřena v odlišných jednotkách. Tohoto problému se však dá velmi efektivně zbavit *normalizací. Kvalitativní* kritéria pouze stanovují, zda je některá varianta lepší, horší či rovnocenná jako varianta jiná. V našich úlohách se objevují pouze kritéria kvantitativní, proto budeme v následné podkapitole pojednávat o metodě pro jejich vyhodnocení.
V případě, že jsou všechna kritéria maximalizační, lze úlohu vícekriteriálního programování zapsat takto:

$$\max \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in R^n\} \tag{3.1}$$

Řešení tedy hledáme ve formě vektoru $\boldsymbol{x}$, splňující všechny omezující podmínky $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}$ a ve kterém účelové funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ nabývají co největších hodnot.
Většinou samozřejmě nelze najít variantu nejlepší ve všech kritériích. Hledáme tedy určitý kompromis mezi kritérii. Variantu, pro kterou platí, že nelze vylepšit žádné kritérium, bez toho, aniž by došlo ke zhoršení jiného kritéria, nazveme *efektivní, nedominovanou* nebo také *paretovsky optimální.*

3.3.1 Agregace kritérií

Tato metoda nalezení kompromisní varianty je založena na konstrukci agregující funkce z kritérií, která vytvoří skalární kritérium. Nejčastěji je agregující funkce vážený součet kritérií.
Aby šla kritéria porovnat, musíme provést již zmíněnou normalizaci kritérií. Tu provedeme vynásobením jednotlivých kritérií členem $w_k = 1/z_k^*,\ z_k^* = max\{f_k(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M\}$ (pouze když $z_k^* \neq 0$), tedy vynásobíme převrácenou hodnotou optimálního řešení daného kritéria vypočteného pro jednokriteriální optimalizaci.
Agregovanou účelovou funkci úlohy (3.1) lze tedy zapsat ve tvaru:

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{p} v_k f_k(\boldsymbol{x}) w_k,$$

kde $v_k \geq 0, \sum_{k=1}^{p} v_k = 1$ jsou námi zvolené váhy jednotlivých kritérií.

4 Obyčejné diferenciální rovnice

Mnoho úloh reálné aplikace v sobě obsahuje rovnice, ve kterých je neznámá funkce a tyto rovnice v sobě obsahují derivace nebo derivace neznámé funkce. Takovéto rovnice nazveme diferenciální rovnice [5].
Obecný tvar diferenciální rovnice n-tého řádu je

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{4.1}$$

kde f je reálná funkce definována na $(n+1)$-rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice 4.1. (Obyčejné diferenciální rovnice)
Obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje (či vyskytují) derivace hledané funkce jedné proměnné.
Označení ODR1 značí obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu. Zkratka ODRn značí ODR n-tého řádu.

Definice 4.2. (Řád diferenciální rovnice)
Řádem diferenciální rovnice nazýváme největší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici.

Definice 4.3. (Řešení ODR)

- *Řešením rovnice* (4.1) nazýváme každou n-krát spojitě derivovatelnou funkci na nějakém intervalu I, která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejich derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost.
- ODR budeme považovat za vyřešenou, budeme-li znát všechna její řešení.
- Křivku, která znázorňuje některé řešení dané ODR, nazýváme *integrální křivkou* diferenciální rovnice. Samotné řešení nazýváme také *integrálem* diferenciální rovnice.

Definice 4.4. (Okrajové podmínky a okrajová úloha)
Okrajový problém si definujeme na případu ODR2, kdy nezávisle proměnná x má význam délky.
Jde o úlohu určit řešení rovnice

$$y'' = f(x, y, y'),$$

splňující tzv. *okrajové podmínky*, které mohou být např. tvaru

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

které označujeme jako Dirichletovy podmínky nebo

$$y'(a) = \gamma \qquad y'(b) = \delta,$$

které označujeme jako Neumannovy podmínky, nebo ve tvaru jejich kombinace, Robinovy (Newtonovy) podmínky, kde α, β, γ, δ jsou dané hodnoty a a, b jsou koncové body intervalu I, ve kterém hledáme řešení ODR2.

4.1 Numerické řešení okrajových úloh

V inženýrské praxi je běžné diferenciální rovnice řešit numericky. V řešených úlohách této práce je pro diskretizaci diferenciálních rovnic použita metoda konečných diferencí, proto v následující sekci tuto metodu osvětlíme [6], [7].

4.1.1 Metoda konečných diferencí

Diferenční metoda je klasická diskretizační metoda. Aproximuje původní diferenciální úlohu, proto diskretizovaná soustava představuje pouze přibližné hodnoty v dané síti bodů. Tuto metodu si ukážeme na řešení lineární ODR2.
Mějme rovnici

$$-u'' + q(x)u = f(x), \qquad x \in (0, l), \tag{4.2}$$

dále předpokládejme, že funkce q a f jsou spojité, $q(x) \geq 0$. Budeme uvažovat Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(0) = g_0, \quad u(l) = g_l.$$

Dále vytvoříme ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, l\rangle$ pomocí zavedení uzlových bodů $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = l$, pak délka kroku je $h = l/N$.
Pak množinu

$$S = \{x_0, \ldots, x_N\}$$

nazveme sítí.
Přibližné řešení okrajové úlohy (4.2) určujeme vektorem $\mathbf{U} = (U_0, \ldots, U_N)^T$, kde vektor $\boldsymbol{U}$ aproximuje hodnoty $u(x_i)$.
Druhou derivaci aproximujeme druhou poměrnou diferencí

$$u''(x_i) \approx \frac{1}{h}[\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}] = \frac{1}{h^2}[u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)].$$

Rovnici (4.2) tedy můžeme nahradit soustavou přibližných rovností

$$-\frac{1}{h^2}[u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)] + q(x_i)u(x_i) \approx f(x_i).$$

Přibližně pak můžeme zapsat ve tvaru

$$-\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{4.3}$$
$$U_0 = g_0, \quad U_N = g_l.$$

Rovnice (4.3) tvoří soustavu $N-1$ lineárních algebraických rovnic pro $N-1$ neznámých $U_1, \ldots, U_{N-1}$, hodnoty U_0 a U_N jsou určeny z okrajových hodnot přesně. Této soustavě říkáme *soustava diferenčních rovnic.*
Pokud členy rovnice (4.3) označíme

$$\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_{N-1})^T,$$
$$\boldsymbol{F} = (f_1 + h^{-2}g_0, f_2, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1} + h^{-2}g_l)^T,$$
$$\boldsymbol{K} = h^{-2}\begin{pmatrix} 2 + h^2q_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 + h^2q_2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & 2 + h^2q_{N-2} & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 + h^2q_{N-1} \end{pmatrix}$$

pak můžeme rovnici (4.3) zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}.$$

Matice $\boldsymbol{K}$ je třídiagonální symetrická a pozitivně definitní a diagonálně dominantní. Proto je i regulární a soustava má pak jediné řešení.

5 Vybrané pojmy z pružnosti, pevnosti

Tato kapitola bude sloužit jako výčet pojmů z pružnosti, pevnosti, které budeme používat v řešených úlohách kapitoly 7 [8].

Definice 5.1. (Osové kvadratické momenty průřezů)
Osové kvadratické momenty průřezů J_y a J_z plochy S k osám y, z jsou definovány následovně

$$J_y = \int_\psi z^2 dS, \qquad J_z = \int_\psi y^2 dS,$$

kde $S = \int_\psi dy\ dx$.

Speciálně pro obdélníkový průřez můžeme obecný vzorec přepsat do tvaru

$$J_y = \int_\psi z^2 dS = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2\ bdz = \frac{ba^3}{12},$$
$$J_z = \int_\psi y^2 dS = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2\ adz = \frac{ab^3}{12}.$$

Definice 5.2. (Modul pružnosti v tahu)
Modul pružnosti v tahu E nebo také Youngův modul pružnosti je materiálová konstanta. Definuje se z Hookeova zákona

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

jako poměr napětí a jím vyvolané deformace

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}.$$

Definice 5.3. (Ohybová tuhost)
Ohybová tuhost průřezu je charakteristika prutu, ve které vystupuje jak průřezová charakteristika J, tak materiálová charakteristika E. Ohybovou tuhostí nazveme vztah

$$E \cdot J.$$

5.1 Namáhání na ohyb

Diferenciální rovnice průhybové čáry pro ohybové namáhání je

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ},$$

tuto diferenciální rovnici druhého řádu můžeme pomocí Schwedlerovy věty $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$ přepsat na tvar diferenciální rovnice 4. řádu, kterou budeme v následných výpočtech používat

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EJ}.$$

Maximální ohybové napětí pro obdélníkový průřez o rozměrech $a,\ b$ je

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M_o(x)}{W_o} = \frac{M_o(x)}{J_o}\frac{b}{2} = \frac{d^2u(x)}{dx^2}E\frac{b}{2},$$

kde v tvárném stavu můžeme σ_{max} označit jako mez kluzu v tahu σ_k.

Pro porovnání výsledků řešených úloh si odvodíme vztah pro teoretický výpočet maximálního průhybu u obdélníkově zatíženého prutu s rotační a obecnou vazbou [9].
U obdélníkového zatížení můžeme ohybový moment přepsat do tvaru

$$M(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2),$$

který dosadíme do diferenciální rovnice průhybové čáry

$$u''(x) = -\frac{M(x)}{EJ} = -\frac{q(Lx - x^2)}{2EJ}. \tag{5.1}$$

Rovnici (5.1) dvakrát zintegrujeme, dostaneme

$$u(x) = \frac{q}{24EJ}x^4 - \frac{qL}{12EJ}x^3 + C_1x + C_2. \tag{5.2}$$

Integrační konstanty $C_1,\ C_2$ následně z rovnice (5.2) lze určit z okrajových podmínek uložení, v našem případě $u(0) = 0$ a $u(L) = 0$. Konstantu C_2 dostaneme z první podmínky jako $C_2 = 0$ a druhou konstantu C_1 získáme využitím druhé podmínky

$$C_1 = -\frac{1}{L}(\frac{qL^4}{24EJ} - \frac{qL^4}{12EJ} + C_2) = \frac{qL^3}{24EJ}.$$

Po dosazení konstant a využitím symetrie průhybu získáme výsledný vztah maximálního průhybu ve tvaru

$$u_{max} = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EJ},$$

kde u_{max} je dosaženo v polovině délky uvažovaného prutu.
Podobně bychom dostali u stejně uloženého prutu zatíženého silou uprostřed vztah

$$u_{max} = \frac{FL^3}{48EJ}.$$

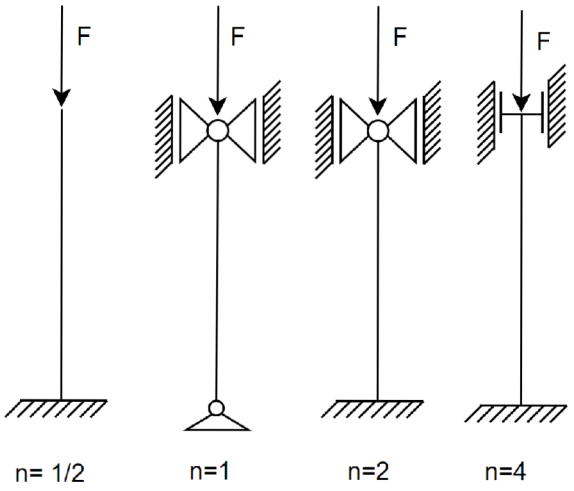
5.2 Mezní stav vzpěrné stability prutu

Prutu zatížené axiální silou musíme kontrolovat na vzpěrnou stabilitu, tedy jestli síla, která působí na prut je menší než kritická síla, to znamená

$$F \leq F_{kr} = n\frac{\pi^2 EJ_{min}}{L^2},$$

kde koeficient n záleží na uložení prutu, dle obrázku 5.1

Základní případy uložení prutu můžeme vidět na následujícím obrázku.



Obrázek 5.1: Základní případy uložení prutu

Diferenciální rovnice ohybové čáry pro prut zatížený axiální silou je:

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} + \frac{F}{EJ}\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

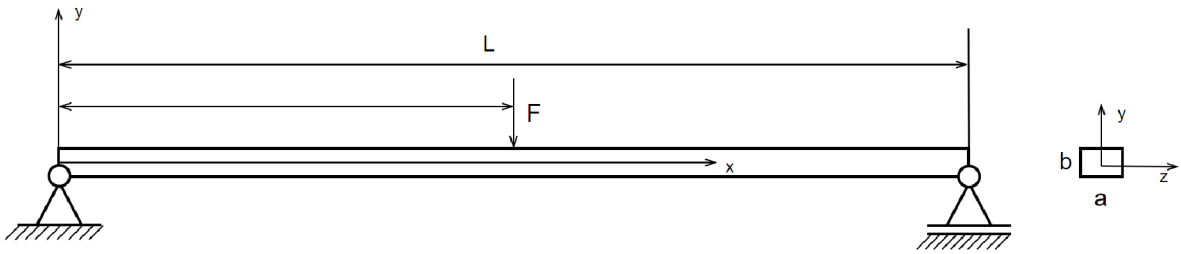
6 GAMS

Modelovací systém GAMS (General Algebraic Modeling System) je program hojně užívaný pro řešní úloh optimalizace. Současně je to také vlastní programovací jazyk s velmi intuitivním syntaxem. Umožňuje v programu nadefinovat model úlohy a následně tuto úlohu vyřešit (optimalizovat) pomocí vestavěných řešičů pro řešení lineárních i nelineárních problémů.
V našich úlohách jsme použili řešič CONOPT, což je řešič pro nelineární optimalizaci, založen na metodě sdružených gradientů. Výhodou GAMSu může být také možnost výpisu výsledků do textového souboru. Nevýhodou je však studentská licence, která omezuje maximální počet proměnných na 1000, což například znamenalo omezení maximálního počtu cyklů v parametrické analýze. Podrobnější detaily je možno získat v uživatelském manuálu [10].
Praktické ukázky využití tohoto programu se nachází v příloze.

7 Řešené úlohy

7.1 Úloha 1: Prut zatížen osamělou silou

Teorii optimalizace si nyní ukážeme a využijeme ji k vyřešení konkrétních zadání inženýrských úloh (z pružnosti a pevnosti). Postupy této úlohy následně použijeme na zbylé příklady. Optimalizaci užijeme k nalezení optimálních rozměrů průřezu a, b prutu délky L. Prut je uložen podle obrázku 7.2. Prut je zatížen osamělou silou F v polovině délky. Cílem příkladu je maximalizovat ohybovou tuhost průřezu a současně minimalizovat hmotnost prutu, dále určit ohybovou čáru a následně porovnat výsledky z programu Ansys.



Obrázek 7.2: Schéma úlohy 1

Abychom mohli sestavit model tohoto příkladu, potřebujeme znát rovnici ohybové čáry

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ} \qquad x \in \langle 0, L \rangle,$$

kde $u(x)$ je průhyb prutu, a $M(x)$ je ohybový moment. Tuto rovnici upravíme podle předchozí kapitoly do podoby rovnice pro zatížení $q(x)$

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EJ} \qquad x \in \langle 0, L \rangle.$$

V předchozí kapitole jsme si také uvedli maximální ohybové napětí:

$$E\frac{b}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} \leq \sigma_k$$

a kvadratický moment průřezu pro obdélník:

$$J = \frac{ab^3}{12}.$$

Pro vazby prutu podle obrázku 7.2 platí následující okrajové podmínky

$$u(0) = 0, \ \frac{d^2u(0)}{dx^2} = 0, \ u(L) = 0, \ \frac{d^2u(L)}{du^2} = 0.$$

To tedy znamená, že na obou koncích je prutu znemožněno vychýlení a na obou koncích je nulový moment.
Pro numerické řešení příkladu potřebujeme rovnici čtvrtého i druhého řádu diskretizovat. To provedeme pomocí metody konečných diferencí, viz. kapitola 4. Prut rozdělíme na rovnoměrnou síť N+1 uzlů $\langle x_0, x_1, \ldots, x_N \rangle$, kde $x_i = ih, \ i = 0, 1, \ldots, N$ a $h = \frac{L}{N}$.

Derivace aproximujeme následovně:

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} = \frac{U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2}}{h^4} \qquad i = 2, 3, \ldots, N-2$$
$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

Zbývá nám určit aproximaci průhybu pro $i = 0, 1$ a $N-1, N$. Určíme je pomocí výše uvedených podmínek vazeb. Pro koncové body platí:

$$u(0) = 0,\ u(L) = 0,$$

proto můžeme určit aproximace pro U_0, U_N přímo z podmínek, tj.

$$U_0 = 0,\ U_N = 0.$$

Pro body U_1, U_{N-1} využijeme zbylé 2 okrajové podmínky následovně. Zavedeme fiktivní uzly x_{-1} a x_{N+1}, následně opět aproximujeme pomocí centrální diference druhého řádu

$$\frac{d^2u(0)}{dx^2} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_{-1}}{h^2} = 0,$$
$$U_0 = 0 \Rightarrow \frac{U_1 + U_{-1}}{h^2} = 0 \Rightarrow U_1 = -U_{-1},$$

analogicky pro U_{N-1}:

$$\frac{d^2u(l)}{dx^2} = \frac{U_{N+1} - 2U_N + U_{N-1}}{h^2} = 0,$$
$$U_0 = 0 \Rightarrow \frac{U_{N+1} + U_{N-1}}{h^2} = 0 \Rightarrow U_{N+1} = -U_{N-1}.$$

Rovnici průhybové čáry tedy můžeme zapsat maticově ve tvaru:

$$\frac{Eab^3}{12}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-3} \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = h^4 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{\frac{N}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zatížení se nachází pouze uprostřed prutu, což modeluje osamělou sílu. Zapsáno maticově

$$\frac{Eab^3}{12}\boldsymbol{KU} = h^4\boldsymbol{q}.$$

Stejným postupem diskretizujeme i rovnici pro maximální ohybové napětí. Dostaneme:

$$E\frac{b}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} \leq h^2 \begin{pmatrix} \sigma_k \\ \sigma_k \\ \vdots \\ \sigma_k \\ \sigma_k \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Zapsáno maticově

$$E\frac{b}{2}\boldsymbol{MU} \leq h^2\boldsymbol{\sigma}_k$$

V řešení budeme uvažovat $N = 50$ (počet uzlů je tedy $N + 1 = 51$).
Jak již bylo řečeno, našim cílem je optimalizovat rozměry průřezu prutu tak, abychom maximalizovali ohybovou pevnost a současně minimalizovali hmotnost

$$\begin{aligned} \min \quad & \varrho abL \\ \max \quad & EJ. \end{aligned}$$

To tedy znamená, že naše účelová funkce je vícekriteriální. Aplikujeme metodu vážených součtů a účelovou funkci přepíšeme do tvaru:

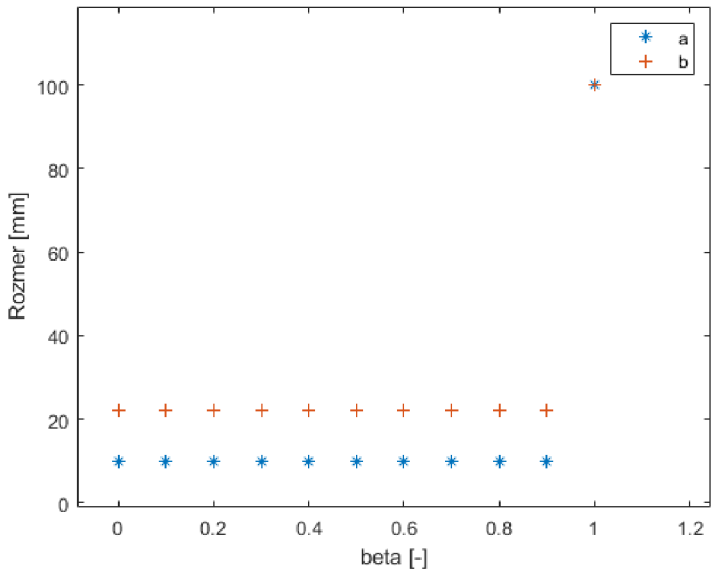
$$\min \quad (\alpha\frac{\varrho abL}{z_m} - \beta\frac{EJ}{z_p}),$$

kde $z_m = 1{,}745 \cdot 10^{-3}$ t je hodnota účelové funkce pro optimalizaci modelu pouze pro minimalizaci hmotnosti. Obdobně $z_p = 1{,}75 \cdot 10^{12}$ Nmm^2 je hodnota účelové funkce pro optimalizaci modelu pouze pro maximalizaci ohybové tuhosti. Konstanty α a β jsou váhové koeficienty, pro které platí $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$.
Nyní jsme schopni sestavit matematický model našeho příkladu.

$$\begin{aligned} \min \quad & (\alpha\frac{\varrho abl}{z_m} - \beta\frac{E\frac{ab^3}{12}}{z_p}) \\ \text{pro podmínky} \quad & \frac{Eab^3}{12}\boldsymbol{KU} = h^4\boldsymbol{q} \\ & E\frac{b}{2}\boldsymbol{MU} \leq h^2\boldsymbol{\sigma}_k \\ & U_0 = 0, U_N = 0 \\ & a_{min} \leq a \leq a_{max} \\ & b_{min} \leq b \leq b_{max}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

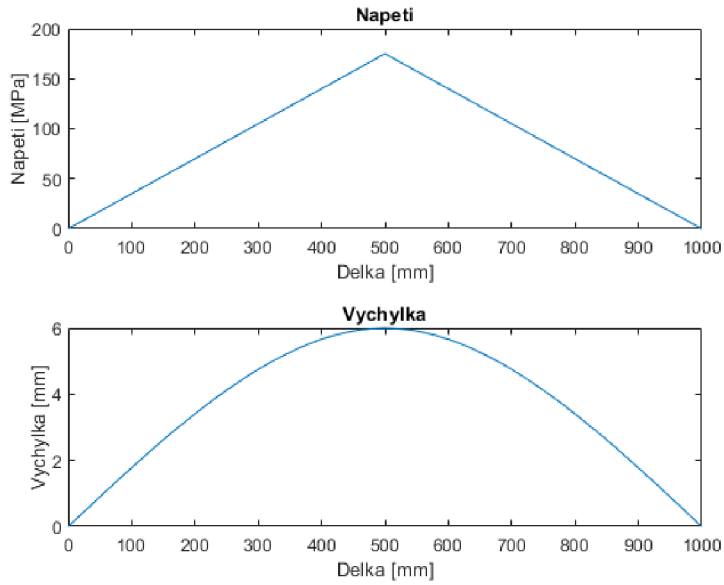
Nyní můžeme přejít k řešení konkrétního příkladu. Budeme uvažovat délku $L = 1000$ mm, minimální rozměry průřezu $a_{min} = 10$ mm, $b_{min} = 10$ mm, maximální rozměry průřezu $a_{max} = 100$, mm $b_{max} = 100$ mm, sílu $F = 588$ N, Youngův modul $E = 210 \cdot 10^3$ MPa, hustota materiálu $\rho = 7{,}8 \cdot 10^{-9}$ tmm^{-3}, mez kluzu v tahu $\sigma_k = 175$ MPa. Konstanty α a β z rovnice (4.2) lze zvolit podle potřeby libovolně. Abychom viděli řešení pro různé hodnoty α, β, provedeme parametrickou analýzu vzhledem k váhovým koficientům. Koeficient β se mění od 0 do 1 s krokem 0,1 , $\alpha = 1 - \beta$.

Dostali jsme následující výsledky parametrické analýzy:



Obrázek 7.3: Rozměry průřezu a,b v závislosti na váh. koef. β

Můžeme tedy vidět, že pro různé hodnoty α a β dostaneme jenom 2 řešení. První řešení jsme dostali pro $\alpha \in \langle 0; 0{,}998)$. Pro toto řešení jsou rozměry průřezu $a = 10$ mm, $b = 22{,}23$ mm, což odpovídá minimální hmotnosti $m = 1{,}745 \cdot 10^{-3}$ t a tedy i minimální ohybové tuhosti $EJ = 1{,}922 \cdot 10^{9}$ Nmm^2. Pro druhé řešení $\alpha \in \langle 0{,}998; 1\rangle$ jsou rozměry průřezu $a = 100$ mm, $b = 100$ mm, toto řešení naopak odpovídá maximální hmotnosti $m = 78{,}5 \cdot 10^{-3}$ t a maximální ohybové tuhosti $EJ = 1{,}75 \cdot 10^{12}$ Nmm^2
Dále uvedeme výsledky pouze prvního řešení, obě řešení se kvalitativně shodují.
Průhybovou čáru a hodnoty napětí můžeme vidět na následujících grafech:

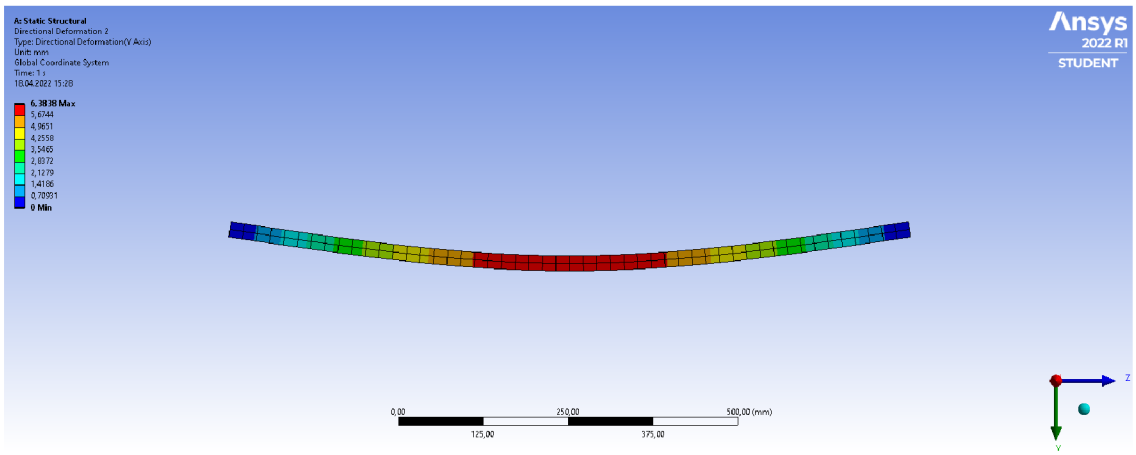


Obrázek 7.4: Průběh napětí a výchylky úlohy 1

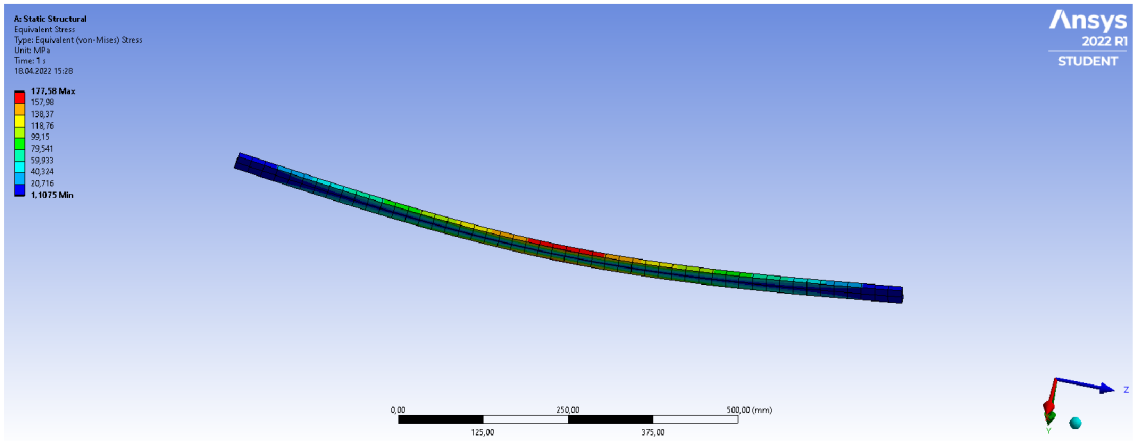
Maximální napětí se nachází uprostřed prutu a má hodnotu $\sigma_{max} = 175$ MPa $= \sigma_k$, tedy má největší povolenou hodnotu. Maximální průhyb $u_{max} = 6{,}009$ mm. Hodnotu maximální výchylky teoreticky ověříme pomocí rovnice odvozené v kapitole 5

$$u_{max,t} = \frac{FL^3}{48EJ} \qquad \Rightarrow \qquad u_{max,t} = 6,372 \text{ mm}.$$

Můžeme tedy konstatovat, že výchylka i napětí mají v modelu průběh odpovídající teorii. Výsledky nyní srovnáme s výsledky v programu Ansys, který používá metodu konečných prvků. Hodnota maximální výchylky $u_{max} = 6{,}3838$ mm. Maximální napětí se opět nachází uprostřed prutu a má hodnotu $\sigma_{max} = 176{,}67$ MPa. Hodnoty se řádově shodují s výsledky našeho modelu v programu GAMS a mají i kvalitativně stejný průběh.



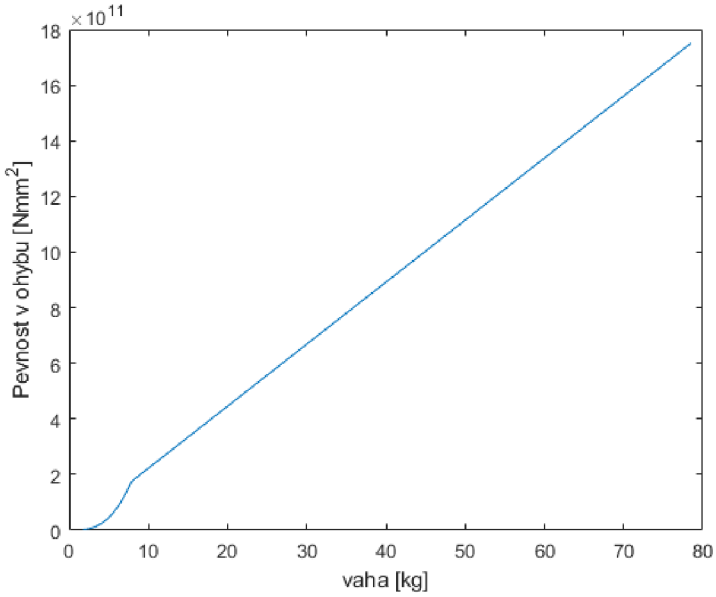
Obrázek 7.5: Výsledky průhybu v programu Ansys



Obrázek 7.6: Výsledky napětí v programu Ansys

Výsledky obou způsobů řešení se od sebe liší ve velmi malé míře. Můžeme tedy konstatovat, že námi sestavený model v programu GAMS je správný. Odlišnosti mohou být způsobeny odlišnou metodou řešení programu Ansys nebo nahrazením síly v modelu velmi malým plošným zatížením, které bude modelovat osamělou sílu lépe, když zvětšíme počet uzlů.

S pomocí námi sestaveného modelu jsme schopni určit eficientní hranici ohybové tuhosti vzhledem k hmotnosti prutu. Je to užitečný nástroj pro inženýrskou praxi. Umožňuje pro zvolenou ohybovou tuhost nalézt nejlepší (nejmenší) hmotnost.
Eficientní hranici získáme maximalizací ohybové pevnosti při postupném zvyšování hmotnosti od nejmenší přijatelné hmotnosti, to je nejmenší hmotnost při splnění podmínek modelu $m = 1{,}745 \cdot 10^{-3}$ t, do maximální možné hmotnosti $m = 78{,}5 \cdot 10^{-3}$ t. Námi zvolený počet kroků byl v tomto případě 100.

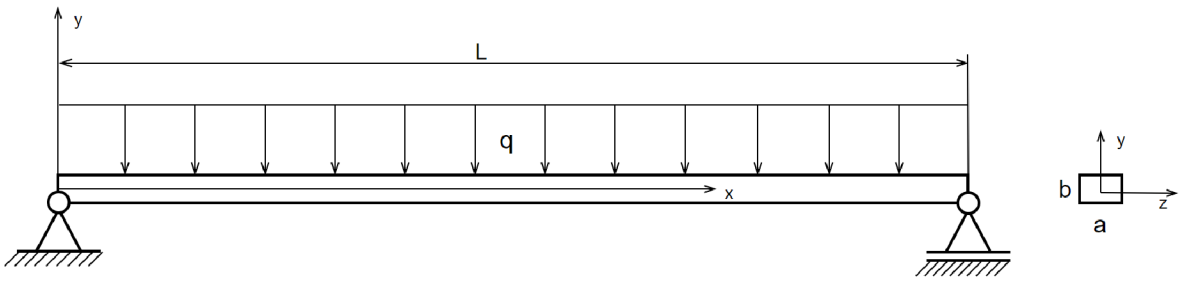


Obrázek 7.7: Graf eficientní hranice úlohy 1

První část funkce je polynom 3. stupně, protože dokud se může zvětšovat b, zvětšuje se ohybová pevnost se třetí mocninou b. Když dosáhne své maximální povolené velikosti $b_{max} = 100$ mm, funkce roste lineárně, protože roste rozměr a vyskytující se v rovnici pouze v první mocnině.

7.2 Úloha 2: Obdélníkové zatížení po celé délce prutu

Nyní modifikujeme příklad 1, místo síly uprostřed prutu budeme uvažovat obdélníkové zatížení po celé délce prutu podle obrázku 7.12.



Obrázek 7.8: Schéma úlohy 2

Oproti prvnímu příkladu bude rozdíl pouze ve vektoru zatížení, které bude konstantní pro všechna x. Veškeré odvození tedy máme uvedeno v předchozím příkladu. Můžeme proto rovnou uvést rovnici pro průhybovou čáru

$$E\frac{ab^3}{12}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-3} \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = h^4\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{N-3} \\ q_{N-2} \\ q_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Zapsáno maticově

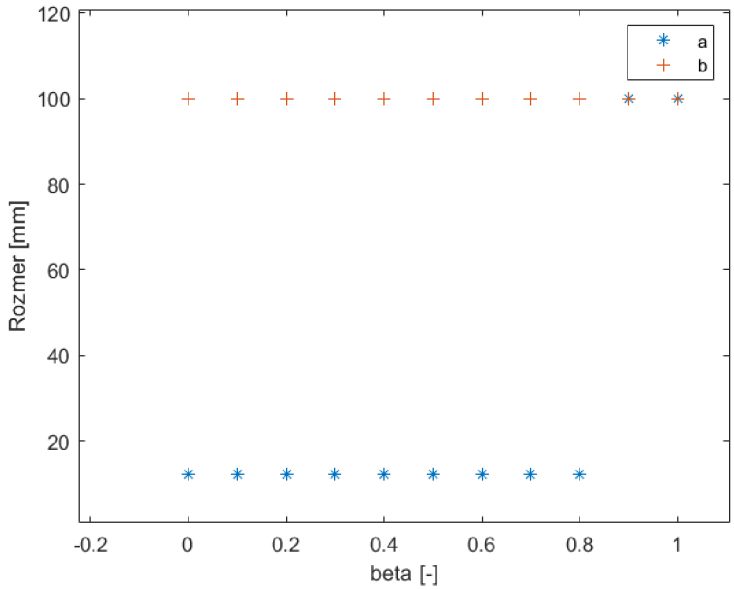
$$E\frac{ab^3}{12}\boldsymbol{KU} = h^4\boldsymbol{q}$$

Pravá strana této rovnice je jediná změna v našem modelu oproti prvnímu příkladu. Úlohu tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & (\alpha\frac{\varrho abL}{z_m} - \beta\frac{EJ}{z_p}) \\ \text{pro podmínky} \quad & E\frac{ab^3}{12}\boldsymbol{KU} = h^4\boldsymbol{q}, \\ & E\frac{b}{2}\boldsymbol{MU} \leq h^2\boldsymbol{\sigma}_k, \\ & U_0 = 0, U_N = 0, \\ & a_{min} \leq a \leq a_{max}, \\ & b_{min} \leq b \leq b_{max}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

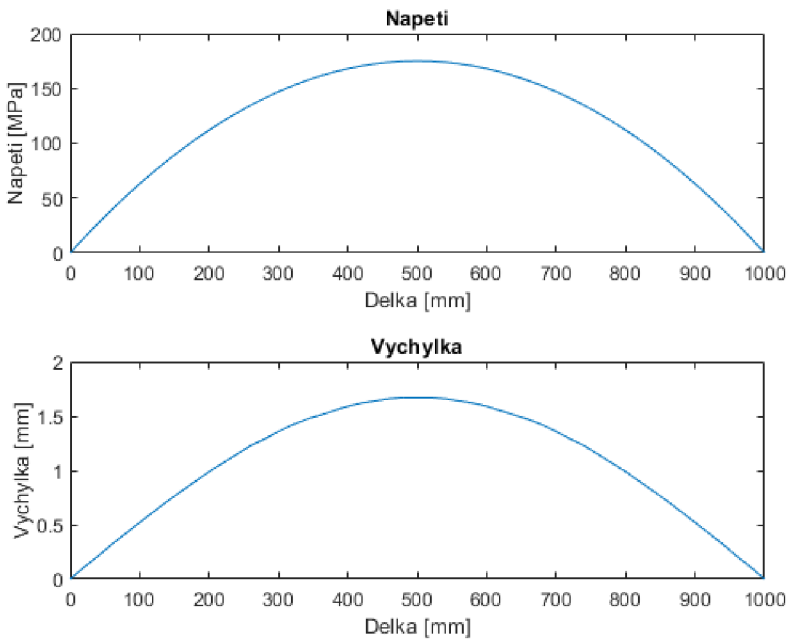
kde značení nerovnice (4.3) je stejné jako v úloze 1. Konkrétní zadání, s kterým jsme počítali: délka prutu $L = 1000$ mm, minimální rozměry průřezu $a_{min} = 10$ mm, $b_{min} = 10$ mm, maximální rozměry průřezu $a_{max} = 100$ mm, $b_{max} = 100$ mm, zatížení $q = 30\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$, Youngův modul $E = 210 \cdot 10^3$ Mpa, hustota materiálu $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-9}$ tmm^{-3}. Normalizační konstanta $z_p = 1{,}75 \cdot 10^{12}$ Nmm^2 je totožná jako v úloze 1. Normalizační konstanta z_m bude nyní $z_m = 9{,}70103 \cdot 10^{-3}$ t.

Počet možných optimálních řešení opět určíme pomocí parametrické analýzy



Obrázek 7.9: Parametrická analýza úlohy 2

Úloha má tedy 2 řešení. Pro první řešení jsou rozměry $a = 12{,}358$ mm, $b = 100$ mm, druhé řešení $a = 100$ mm, $b = 100$ mm. Uvedeme pouze výsledky pro první řešení:

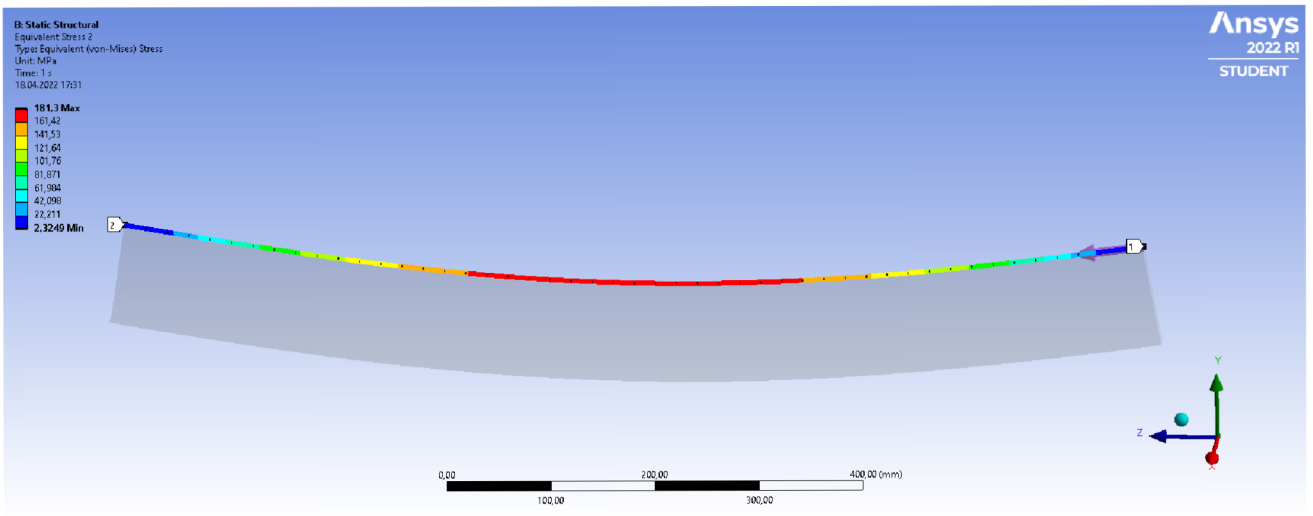


Obrázek 7.10: Výsledky napětí a vychýlení úlohy 2

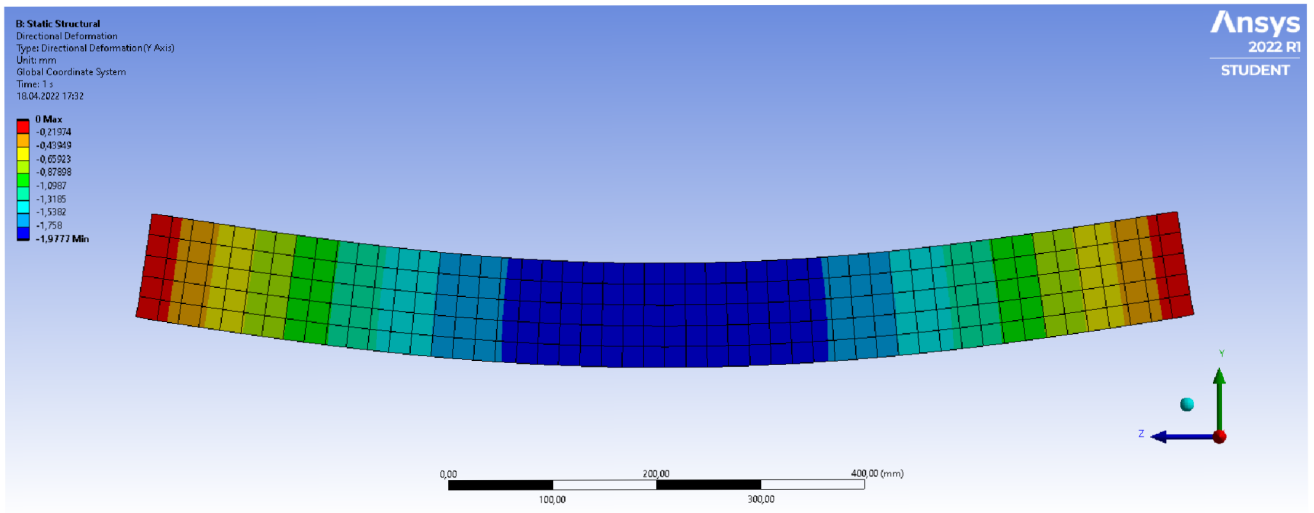
Maximální napětí $\sigma_{max} = 175$ MPa a maximální výchylka $u_{max} = 1{,}702$ mm. Maximální výchylku porovnáme s teoretickou hodnotou

$$u_{max,t} = \frac{5qL^4}{384EJ} \qquad \Rightarrow \qquad u_{max,t} = 1{,}771 \text{ mm}$$

Maximální průhyb se téměř shoduje s teoreticky spočteným výsledkem. Průběh výchylky odpovídá prvnímu příkladu, průběh napětí nyní nemá lineární průběh. Oba průběhy souhlasí s teorií. Porovnání s výsledky z programu Ansys:



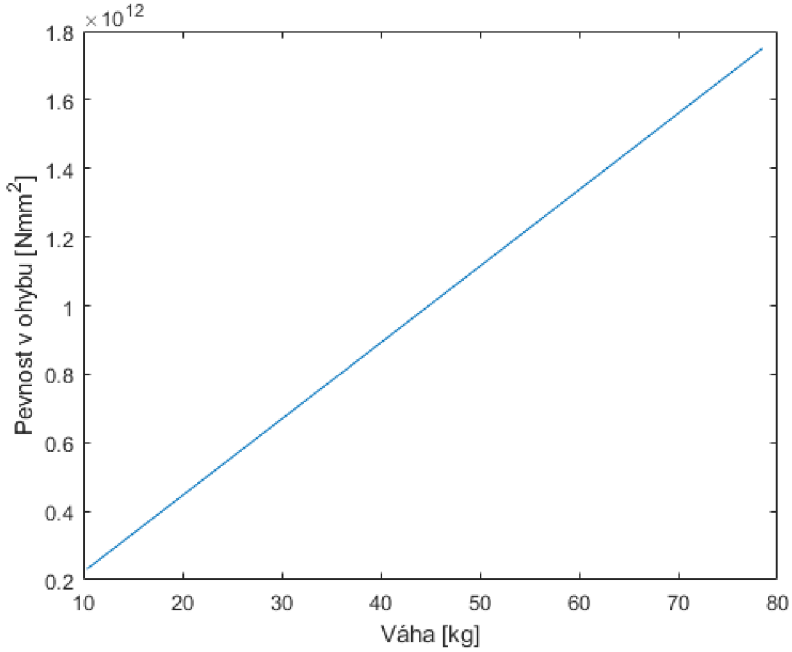
Obrázek 7.11: Napětí úlohy 2 v programu Ansys



Obrázek 7.12: Průhyb úlohy 2 v programu Ansys

Hodnota maximálního průhybu je $u_{max} = 1{,}8918$ mm, což řádově souhlasí s výsledky našeho modelu. Maximální ohybové napětí $\sigma_{max} = 181,3$ MPa též odpovídá vypočteným výsledkům. Odlišnosti mohou být způsobeny jinou metodou řešení programu Ansys, nebo volbou počtu uzlů v našem modelu.

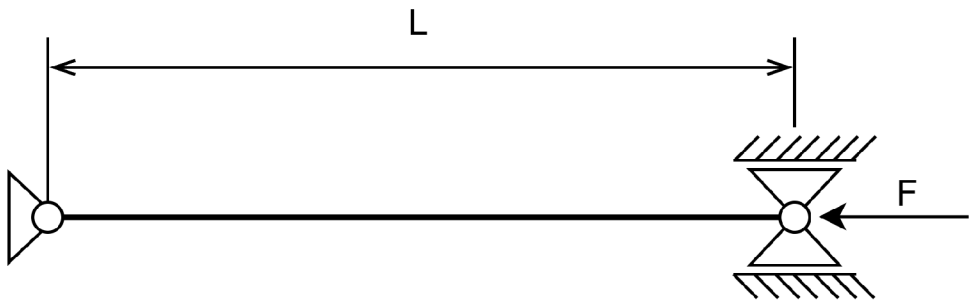
Graf eficientní hranice úlohy 2:



Obrázek 7.13: Graf eficientní hranice úlohy 2

Vidíme, že křivka eficientní hranice je přímka, protože rozměr b je od nejmenší hmotnosti maximalizován, proto se s rostoucí hmotností zvětšuje pouze rozměr a, který se vyskytuje v ohybové tuhosti v první mocnině.

7.3 Úloha 3: Prut zatížený na vzpěr



Obrázek 7.14: Schéma úlohy 3

Jako poslední úlohu budeme uvažovat prut, uložený podle obrázku 7.14. Tento prut je axiálně zatížen silou F. Jde tedy o úlohu vzpěrné stability. V této úloze budeme uvažovat pouze optimalizaci hmotnosti, to znamená minimalizovat hmotnost při udržení funkčnosti prutu.
V kapitole 5 jsme si určili rovnici průhybové čáry, kterou musíme diskretizovat. Z uložení nám vyplývají stejné okrajové podmínky, jako tomu bylo v dosavadních úlohách, to je

$$u(0) = 0,\ \frac{d^2u(0)}{dx^2} = 0,\ u(L) = 0,\ \frac{d^2u(L)}{du^2} = 0.$$

Proto diskretizovanou rovnici průhybové čáry můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 5-2\frac{F}{EJ}h^2 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 6-2\frac{F}{EJ}h^2 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 6-2\frac{F}{EJ}h^2 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 6-2\frac{F}{EJ}h^2 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 6-2\frac{F}{EJ}h^2 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4+\frac{F}{EJ}h^2 & 5-2\frac{F}{EJ}h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-3} \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Zapsáno maticově

$$\boldsymbol{KU} = \mathbf{0}.$$

Protože očekáváme velmi malé průhyby, nemusíme již prut kontrolovat na ohybové napětí. Konkrétní zadání úlohy jsme zvolili následovně: délka prutu $l = 1000$ mm, minimální rozměry průřezu $a_{min} = 10$ mm, $b_{min} = 10$ mm, maximální rozměry průřezu prutu $a_{max} = 100$ mm, $b_{max} = 100$ mm, sílu $F = 80000$ N, Youngův modul $E = 210 \cdot 10^3$ MPa, mez kluzu $\sigma_k = 225$ MPa.
Nyní už můžeme rovnou uvést tvar našeho modelu.

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho abl \\ \text{pro podmínky} \quad & \boldsymbol{KU} = \mathbf{0}, \\ & F \leq \frac{\pi^2 E J_a}{l^2}, && (4.4) \\ & F \leq \frac{\pi^2 E J_b}{l^2}, && (4.5) \\ & \frac{F}{ab} \leq \sigma_k, && (4.6) \\ & U_0 = 0, U_N = 0, \\ & a_{min} \leq a \leq a_{max}, \\ & b_{min} \leq b \leq b_{max}, \end{aligned}$$

kde nerovnice (4.4) a (4.5) jsou nerovnice kontrolující vzpěrnou stabilitu prutu. Musíme je uvádět dvakrát, protože síla F musí být menší než je kritická síla vztažená na kvadratický moment J_a i J_b. Kdyby tomu tak nebylo, prut by se prohnul do strany s menším kvadratickým momentem. Nerovnice (4.6) kontroluje tlakové napětí.
Vyřešením získáme rozměry průřezu prutu $a = b = 26{,}088$ mm, maximální výchylku $u_{max} = 0$ mm. Účelová funkce neboli váha $z = 5{,}343 \cdot 10^{-3}$ t. Výsledky se shodují s úvodními předpoklady, to znamená, že prut má čtvercový průřez. Nulová výchylka je způsobena nepřekročením vzpěrné stability. Prut se tedy stlačí, ale neprohne.

8 Závěr

Optimalizace byla využita k praktickému vyřešení tří úloh. V těchto úlohách jsme vytvořili matematický model problému, diskretizovali jsme diferenciální rovnici průhybové čáry metodou konečných diferencí. První dvě úlohy jsme optimalizovali na minimalizaci hmotnosti a maximalizaci ohybové tuhosti zároveň. Třetí úlohu jsme optimalizovali pouze na minimální hmotnost. Pro možnost určení váhových koeficientů multikriteriální optimalizace prvních dvou úloh jsme provedli parametrickou analýzu. U obou těchto úloh jsou možné pouze dvě řešení. Vždy jsme pro uvedení a srovnání výsledku uvažovali pouze řešení první.

Výsledky prvního úkolu, které jsme vybrali ze dvou možných řešení: rozměry průřezu $a = 10$ mm, $b = 22{,}23$ mm. Pro druhý příklad jsme opět vybrali první řešení, s rozměry: $a = 12{,}358$ mm, $b = 100$ mm. Pro tyto řešení jsme provedli srovnání výsledků průhybu a ohybového napětí v programu Ansys, model se s těmito výsledky kvalitativně shodoval. Odlišnosti mohou být způsobeny odlišnou metodou řešení v programu Ansys a v modelu řešeného v programu GAMS. Následně jsme uvedli také eficientní hranici pro vizualizaci největší možné ohybové tuhosti při dané hmotnosti. Výsledek třetí úlohy, tedy prutu zatíženého na vzpěr, je následující: $a = b = 26{,}088$ mm. Prut se kvůli nepřekročení kritického zatížení neprohne.

Reference

[1] BURDA, Pavel. *Matematika I.* Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 8024811995.

[2] KREML, Pavel. *Matematika II.* Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2007. ISBN 978-80-248-1316-5.

[3] BAZARAA, M. S., Hanif D. SHERALI a C. M. SHETTY. *Nonlinear programming: theory and algorithms.* 3rd ed. Hoboken: John Wiley, 2006. ISBN 978-0-471-48600-8.

[4] KLAPKA, J., DVOŘÁK, J., POPELA, P., *Metody operačního výzkumu.* Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001. ISBN 80-214-1839-7.

[5] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.

[6] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody.* [online]. Brno: Ústav matematiky FSI VUT v Brně, leden 2020 [cit. 2022-05-16]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/Numericke-metody-II/sc-1227-sr-1-a-238/default.aspx

[7] MÍKA, Stanislav, Petr PŘIKRYL a Marek BRANDNER. *Speciální numerické metody: numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice.* Plzeň: Vydavatelský servis, 2006. Texty z aplikované matematiky. ISBN 80-86843-13-0.

[8] VRBKA, Jan. *Pružnost a pevnost I.* Brno, 2011. Učební text. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně.

[9] JIRÁSEK, Milan, Vít ŠMILAUER a Jan ZEMAN. *Pružnost, pevnost, plasticita.* Praha, 2017. Pracovní verze výukového skripta. České vysoké učení technické.

[10] McCarl MCCARL, Bruce. *McCarl GAMS User Guide.* [online]. [cit. 2022-05-16]. Dostupné z: https://www.gams.com/mccarlGuide/mccarlgamsuserguide.pdf

Příloha A - Zdrojový kód úlohy 1

```
 Scalar
   N      'pocet uzlu                [-]'      /51/
   L      'delka prutu               [mm]'     / 1000 /
   rho    'hustota materialu prutu   [kg/mm^3]' /7850E-9 /
   E      'modul pruznosti v tahu    [MPa]'     / 210E3 /
   Phik   'mez kluzu                 [MPa]'     /175/
   q      'zatizeni                  [N/mm]'     /30/

Set
i 'index' /0*50/
j /0*10/

Parameter h krok;
h = L/N;
Parameter pj;
Parameter p(j);
p(j)=ord(j)-1;

Positive variables
a,b;


variables
z,
pruhyb
results(j)
u(i);

Equation
zdef
U0(i)
UN(i)
maxpruhyb
Mat1(i)
Mat2(i)
Mat3(i)
Mat4(i)
Mat5(i)
Mat6(i)
Omez1(i)
Omez2(i);

zdef..z=e=(1-(pj/10))*(rho*a*b*L)/1.745-(0+(pj/10))*E*(a*(b**3)/12)/1.750E+12;
maxpruhyb.. pruhyb=e=(q*h)*(L**3)/(48*E*(a*b**3)/12);
```

```
U0(i)$(ord(i) eq 1)..
u(i)=e=0;

UN(i)$(ord(i) eq card(i))..
u(i)=e=0;

Mat1(i)$(ord(i) eq 2)..
(5*u(i)-4*u(i+1)+1*u(i+2))=e=0;

Mat5(i)$(ord(i) eq (3))..
((-4*u(i-1)+6*u(i)-4*u(i+1)+u(i+2)))=e=0;

Mat2(i)$((ord(i)gt 3)and(ord(i) lt (card(i)-2)) and (ord(i)ne((card(i)+1)/2)))..
(u(i-2)-4*u(i-1)+6*u(i)-4*u(i+1)+u(i+2))=e=0;

Mat3(i)$(ord(i) eq ((card(i)+1)/2))..
E*((a*b**3)/12)*((u(i-2)-4*u(i-1)+6*u(i)-4*u(i+1)+u(i+2)))=e=q*(h**4);

Mat6(i)$(ord(i) eq (card(i)-2))..
((u(i-2)-4*u(i-1)+6*u(i)-4*u(i+1)))=e=0;


Mat4(i)$(ord(i) eq (card(i)-1))..
(u(i-2)-4*u(i-1)+5*u(i))=e=0;


Omez1(i)$(ord(i) gt 1 and ord(i) lt card(i))..
(E*b/((h**2)*2))*(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))=l=Phik;

Omez2(i)$(ord(i) gt 1 and ord(i) lt card(i))..
-(E*b/((h**2)*2))*(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))=l=Phik;

file Prut_citlivost1 /Prut_citlivost1.txt/;

Model SilaUprostred  / all /;
a.lo=10;a.up=100;b.lo=10;b.up=100;a.l=20;b.l=20;u.l(i)=0;

loop(j,
pj=p(j);
solve SilaUprostred minimizing z using nlp;
results.l(j)=z.l;

put Prut_citlivost1;

put a.l; put / /; put b.l; put / /;
display u.l,a.l,b.l,z.l;);
```

Příloha B - Zdrojový kód úlohy 2

```
Scalar
   N      'pocet uzlu                [-]'      /51/
   L      'delka prutu               [mm]'     / 1000 /
   rho    'hustota materialu prutu   [kg/mm^3]' /7850E-9 /
   E      'modul pruznosti v tahu    [MPa]'     / 210E3/
   Phik   'mez kluzu                 [MPa]'     /175/
   q      'zatizeni                  [N/mm]'     /30/

Set
i 'index' /0*50/
j /0*10/

Parameter h krok;
h = L/N  ;
Parameter pj;
Parameter p(j);
p(j)=ord(j)-1;

Positive variables
a,b;

variables
z,
pruhyb
results(j)
u(i);

Equation
zdef
U0(i)
UN(i)
maxpruhyb
Mat1(i)
Mat2(i)
Mat4(i)
Omez1P(i)
Omez2P(i)
Omez3P(i)
Omez1N(i)
Omez2N(i)
Omez3N(i);

zdef..z=e=(1-(pj/10))*(rho*a*b*L)/9.70103-(0+(pj/10))*E*(a*(b**3)/12)/1.750E+12;
maxpruhyb.. pruhyb=e=5*q*L**4/(384*E*(a*b**3/12));
```

```
U0(i)$(ord(i) eq 1)..
u(i)=e=0;

UN(i)$(ord(i) eq card(i))..
u(i)=e=0;

Mat1(i)$(ord(i) eq 2)..
E*((a*b**3)/12)*(5*u(i)-4*u(i+1)+1*u(i+2))=e=q*(h**4);

Mat2(i)$((ord(i)gt 2)and(ord(i) lt (card(i)-1)) )..
E*((a*b**3)/12)*(u(i-2)-4*u(i-1)+6*u(i)-4*u(i+1)+u(i+2))=e=q*(h**4);


Mat4(i)$(ord(i) eq (card(i)-1))..
E*((a*b**3)/12)*(u(i-2)-4*u(i-1)+5*u(i))=e=q*(h**4);


Omez1P(i)$(ord(i)eq 2)..
(E*b/((h**2)*2))*(-2*u(i)+u(i+1))=l=Phik;

Omez2P(i)$(ord(i)eq card(i)-1)..
(E*b/((h**2)*2))*(u(i-1)-2*u(i))=l=Phik;

Omez3P(i)$(ord(i) gt 2 and ord(i) lt card(i)-1)..
(E*b/((h**2)*2))*(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))=l=Phik;


Omez1N(i)$(ord(i)eq 2)..
-(E*b/((h**2)*2))*(-2*u(i)+u(i+1))=l=Phik;

Omez2N(i)$(ord(i)eq card(i)-1)..
-(E*b/((h**2)*2))*(u(i-1)-2*u(i))=l=Phik;


Omez3N(i)$(ord(i) gt 2 and ord(i) lt card(i)-1)..
-(E*b/((h**2)*2))*(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))=l=Phik;


file Prut_Citlivost /Prut_Citlivost.txt/;

Model Prut_Viceucel_CeleZatizeni  / all /;
a.lo=10;a.up=100;b.lo=10;b.up=100;a.l=40;b.l=40;u.l(i)=0;
Prut_Viceucel_CeleZatizeni.optfile=1;

loop(j,
pj=p(j);
solve Prut_Viceucel_CeleZatizeni minimizing z using nlp;
results.l(j)=z.l;
```

```
put Prut_Citlivost;
put a.l; put / /; put b.l; put / /;
display u.l,a.l,b.l,z.l;);
```

Příloha C - Zdrojový kód úlohy 3

```
Scalar
   N      'pocet uzlu                [-]'      /51/
   L      'delka prutu               [mm]'     / 1000 /
   rho    'hustota materialu prutu   [kg/mm^3]' /7850E-9 /
   E      'modul pruznosti v tahu    [MPa]'     / 210E3  /
   F      'sila pusobici na prut     [N]'      /80000 /
   k      'soucinitel bezpecnosti    [-]'       / 1 /
   Phik   'mez kluzu                 [Pa]'     /175/

Set
i 'index' /0*50/

Parameter h krok;
h = L/N;
Parameter napeti(i);

Positive variables
a,b;


variables
z,
pruhyb
test
u(i);


Equation
zdef
U0(i)
UN(i)
Mat1(i)
Mat2(i)
Mat3(i)
pruznost
VzperA
VzperB
;

zdef.. z=e=rho*a*b*L;

U0(i)$(ord(i) eq 1)..
u(i)=e=0;

UN(i)$(ord(i) eq card(i))..
u(i)=e=0;
```

```
Mat1(i)$(ord(i) eq 2)..
((5-2*(F/(E*((a*(b**3))/12) )*(h**2)))*u(i)+
((-4+(F/(E*((a*(b**3))/12))*(h**2)))*u(i+1))+1*u(i+2))=e=0;

Mat2(i)$((ord(i)gt 2)and(ord(i) lt (card(i)-1)))..
(u(i-2)+((-4+(F/(E*((a*(b**3))/12))*(h**2)))*u(i-1))+((6-(2*(F/(E*((a*(b**3))
/12)))*(h**2)))*u(i))+((-4+(F/(E*((a*(b**3))/12))*(h**2)))*u(i+1))+u(i+2))=e=0;

Mat3(i)$(ord(i) eq (card(i)-1))..
(u(i-2)+((-4+(F/(E*((a*(b**3))/12))*(h**2)))*u(i-1))+
((5-(2*(F/(E*((a*(b**3))/12))))*(h**2))*u(i)))=e=0;

Pruznost.. F/(a*b)=l=Phik;
VzperA.. ((pi**2)*E*((a*(b**3))/12))/L**2=g=k*F;
VzperB.. ((pi**2)*E*((b*(a**3))/12))/L**2=g=k*F;


Model PrutVaha  / all /;
a.lo=10;a.up=100;b.lo=10;b.up=100;a.l=20;b.l=20;u.l(i)=0;
PrutVaha.optfile=1;

solve PrutVaha minimizing z using nlp;
display u.l,a.l,b.l,z.l;
```