



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

APLIKACE OKRAJOVÝCH ÚLOH PRO OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V INŽENÝRSTVÍ

APPLICATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ENGINEERING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jakub Zapoměl

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Jakub Zapoměl
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Aplikace okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice v inženýrství

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diferenciální rovnice mají široké uplatnění v inženýrských procesech. Z hlediska podmínek kladených na řešení těchto rovnic můžeme úlohy rozdělit na počáteční a okrajové. V prvním případě je obvykle potřeba popsat stav na počátku děje, pak mluvíme o počáteční úloze. V některých modelech (například z teorie pružnosti a pevnosti) neznáme všechny potřebné podmínky v počátečním bodě, ale známe podmínky v bodech krajních. V těchto případech mluvíme o okrajových úlohách pro obyčejné diferenciální rovnice. I když se uvedené úlohy liší pouze typem podmínek, vlastnosti řešení mohou být odlišné, např. řešitelnost resp. jednoznačná řešitelnost uvažovaného problému.

Cíle bakalářské práce:

Nastudování základních vlastností okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice.
Aplikace získaných poznatků v konkrétních modelech zejména z teorie pružnosti a pevnosti.
Numerické řešení vybraných úloh ve vhodném matematickém software.

Seznam doporučené literatury:

KALAS, J., RÁB, M. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova universita Brno, 1995.

KIGURADZE, I. Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Brno: Masarykova universita Brno, 1997.

ZILL, D. G., CULLEN, M. R. Differential Equations with Boundary-Value Problems. Boston: Brooks-Cole, 2013.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá stanovením tvaru průhybové čáry u okrajových úloh z pružnosti pevnosti. Existuje několik metod řešení okrajových úloh. Tato práce se věnuje metodě Greenovy funkce. Poskytuje základní přehled vlastností obyčejných diferenciálních rovnic, představení metody Greenovy funkce a samotnou aplikaci poznatků na modelech ohybu nosníků. Konkrétní modely jsou řešeny pomocí interaktivního programu vytvořeného v software Matlab.

Abstract

This bachelor thesis deals with the determination of the shape of the deflection line for boundary value problems in strength of materials. There are several methods for solving boundary value problems. This thesis focuses on the Green's function method. It provides a basic review of the properties of ordinary differential equations, an introduction to the Green's function method and the actual application of the findings to beam bending models. The concrete models are solved using an interactive program developed in Matlab software.

Klíčová slova

Okrajové úlohy, Greenova funkce, vetknutý nosník, podepřený nosník

Keywords

Boundary value problems, Green's function, cantilever beam, simply-supported beam

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Aplikace okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice v inženýrství* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Zdeňka Opluštily, Ph.D. s využitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jakub Zapoměl

Rád bych poděkoval všem, kteří mě během psaní mé bakalářské práce motivovali a byli mi oporou v tomto náročném období. Především bych chtěl poděkovat rodičům za ne-skutečnou podporu a trpělivost během celého mého studia.

Jakub Zapoměl

Obsah

1	Úvod	2
2	Matematický aparát	3
2.1	Diferenciální rovnice	3
2.2	Obyčejné diferenciální rovnice	3
2.3	Lineární obyčejné diferenciální rovnice	4
2.3.1	Homogenní rovnice	5
2.4	Okrajové úlohy	9
2.4.1	Okrajová úloha LODR2	9
3	Greenova funkce	13
4	Aplikace Greenovy funkce	17
4.1	Jednostranně vetknutý nosník	18
4.2	Oboustranně podepřený nosník	27
5	Závěr	37
	Reference	38

1 Úvod

Diferenciální rovnice představují v technické praxi velice důležitou oblast. V rámci strojírenského odvětví se využívají například v hydromechanice, termomechanice nebo v oblasti pružnosti a pevnosti. V oblasti pružnosti a pevnosti se diferenciální rovnice využívají například ke stanovení tvaru průhybové čáry při známých okrajových podmínkách a zatížení. Znalost okrajových podmínek znamená, že známe průhyb, resp. natočení, či velikost ohybového momentu na kraji intervalu, v našem případě na kraji nosníku. Použité typy okrajových podmínek závisejí na uložení nosníku.

Bakalářská práce se věnuje stanovení tvaru průhybové čáry dvou typů uložení nosníku. Prvním typem uložení je jednostranně vetknutý nosník, tím druhým oboustranně podepřený. V práci bude představena hlavní výhoda výpočtu řešení okrajových úloh s využitím Greenovy funkce.

V předkládané práci se čtenář nejdříve seznámí se základními vlastnostmi obyčejných diferenciálních rovnic, s metodou nalezení řešení pomocí variace konstant. Dále je představena Greenova funkce a její vlastnosti, je také odvozena Greenova funkce pro LODR2 metodou variace konstant. V kapitole číslo 4 je metoda aplikována na modely z pružnosti pevnosti.

2 Matematický aparát

V této kapitole budou představeny a definovány základní typy a vlastnosti diferenciálních rovnic. Dále však bude zaměřena především na *Obyčejné diferenciální rovnice*, které představují obsah práce. Matematické definice a věty byly čerpány z literatury [1], [3], [8], [9], [10].

2.1 Diferenciální rovnice

Rovnici obsahující derivace jedné či více proměnných s ohledem na jednu či více nezávislých proměnných nazveme *Diferenciální rovnicí* (zkráceně DR). V oblasti Diferenciálních rovnic rozlišujeme mezi dvěma základními typy rovnic:

1. Obyčejnou diferenciální rovnicí (zkráceně ODR) nazýváme rovnici, ve které se vyskytuje (resp. vyskytují) derivace hledané funkce jedné proměnné.
2. Parciální diferenciální rovnicí (zkráceně PDR) nazýváme rovnici, ve které se vyskytují parciální derivace hledané funkce dvou nebo více proměnných.

Řádem diferenciální rovnice pak rozumíme nejvyšší řád derivace hledané funkce v uvažované DR.

Příklad 2.1 (Příklady DR).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 100\frac{dy}{dx} - 10y = e^{3x} \quad (2.1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y, \quad (2.2)$$

kde rovnice (2.1) představuje *Obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu* (ODR2) a (2.2) *Parciální diferenciální rovnici 1. řádu*.

2.2 Obyčejné diferenciální rovnice

Uvažujme nyní ODR $_n$ v tzv. *Normálním tvaru*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad (2.3)$$

kde f je reálná funkce definovaná na okolí $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. ODR $_n$ můžeme také zapsat ve tvaru

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$.

Definice 2.2 (Řešení ODR). Řešením ODR $_n$ na intervalu I je každá funkce φ , která má spojitě derivace až do řádu n včetně a vyhovuje dané rovnici. Po dosazení funkce φ a jejích derivací do rovnice dostaneme identickou rovnost na intervalu I .

Druhy řešení ODR $_n$

Nechť je ODR $_n$ v normálním tvaru, čili uvažujeme rovnici (2.3), pak rozlišujeme několik typů řešení této rovnice:

- Obecným řešením (zkráceně OŘ) rozumíme funkci závisující na obecných konstantách c_1, c_2, \dots, c_n takových, že každou přípustnou volbou konstant dostaneme řešení pro takovou rovnici.
- Partikulárním řešením (PŘ) rozumíme řešení, které dostaneme z OŘ pevnou volbou konstant c_1, c_2, \dots, c_n .
- Výjimečné (singulární) řešení nazveme takové řešení, které nelze získat žádnou volbou konstant c_1, c_2, \dots, c_n .
- Všechna řešení ODRn získáme jako sjednocení obecného a výjimečného řešení.

2.3 Lineární obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejnou diferenciální rovnici nazýváme lineární, jestliže je tato rovnice lineární vzhledem k hledané funkci i její derivaci (derivacím). Zkráceně zapisujeme LODR.

Příklad 2.3 (LODR, NODR).

$$y'' - 10y' + 5y = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y^2 = 0. \quad (2.5)$$

Rovnice (2.4) představuje LODR2, kdežto rovnice (2.5) NODR2 (Nelineární ODR).

Definice 2.4. Lineární obyčejnou diferenciální rovnici řádu $n \geq 2$ nazýváme rovnicí tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (2.6)$$

kde $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x), b(x)$ jsou spojité funkce proměnné x na intervalu I . Rozlišujeme 2 typy LODRn podle tvaru pravé strany:

- $b(x) = 0$ pro $\forall x \in I$, pak se jedná o *homogenní LODRn*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (2.7)$$

Někdy se můžeme setkat s následujícím zkráceným zápisem homogenní LODRn

$$Ly = 0,$$

kde

$$Ly := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

- $b(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, pak řekneme, že se jedná o *nehomogenní LODRn*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Za předpokladu, že jsou funkce $a_i(x), i = 0, 1, \dots, n$ konstantní, čili $a_i(x) = a_i$, $a_i \in \mathbb{R}, a_i \neq 0, i = 0, 1, \dots, n$, pak rovnici (2.6) můžeme napsat následovně

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \quad \forall x \in I. \quad (2.8)$$

Rovnice (2.8) je *LODRn s konstantními koeficienty*.

2.3.1 Homogenní rovnice

Zaměříme se nyní blíže na vlastnosti řešení homogenní rovnice (2.7), čili rovnice bez pravé strany.

Věta 2.5. *Množina všech řešení homogenní rovnice (2.7) tvoří vektorový prostor dimenze n .*

Definice 2.6 (Lineární nezávislost). Řekneme, že funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ definované na I jsou lineárně nezávislé na I , jestliže rovnost

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) = 0 \quad \forall x \in I, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

platí pouze pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Definice 2.7 (Wronského matice). Necht' funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ mají na I derivace až do řádu $(k-1)$, pak čtvercovou matici

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-2)}(x) & \dots & f_k^{(k-2)}(x) \\ f_1^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

nazveme *Wronského maticí* na I a její determinant nazýváme *wronskián*.

Necht' platí vztah (2.9), který opakovaně derivujeme až do vzniku čtvercové soustavy pro $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) &= 0 \\ \alpha_1 f_1'(x) + \dots + \alpha_k f_k'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 f_1^{(k-1)}(x) + \dots + \alpha_k f_k^{(k-1)}(x) &= 0, \end{aligned}$$

za předpokladu, že tato soustava má pouze jediné řešení a tím je řešení $\mathbf{0}$, čili $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, je třeba, aby matice (2.10) byla regulární alespoň pro jedno $x \in I$.

Věta 2.8. *Necht' $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešení rovnice (2.7) na I . Pak jsou tyto funkce na I lineárně nezávislé \iff Jejich Wronskián je nenulový pro nějaké $x \in I$.*

Důkaz. Z věty 2.5 víme, že množina všech řešení homogenní rovnice (2.7) tvoří vektorový prostor dimenze n . \square

Poznámka 2.9 (Fundamentální systém řešení). Každá n -tice lineárně nezávislých řešení rovnice (2.7) se nazývá fundamentální systém řešení rovnice (2.7).

Řešení každé homogenní rovnice (2.7) můžeme psát ve tvaru

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

kde y_1, y_2, \dots, y_n tvoří fundamentální systém řešení a konstanty c_1, \dots, c_n představují vhodné konstanty. Výše uvedený vztah (2.11) představuje obecné řešení rovnice (2.7).

Metoda variace konstant**Věta 2.10** (Variace konstant pro LODR2). *Obecné řešení rovnice*

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) \quad a_2 \neq 0 \quad (2.12)$$

s konstantními koeficienty a_2, a_1, a_0 lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = y_h + y_p = y_h(x) + y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx,$$

kde $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ je obecné řešení homogenní části rovnice (2.12), $W(x)$ je wronskián jejího fundamentálního systému a $W_1(x), W_2(x)$ jsou determinanty vytvořené z wronskiánu $W(x)$ nahrazením prvního (resp. druhého) sloupce vektorem pravých stran.

Důkaz. Předpokládáme, že jsme již našli řešení homogenní části lineární rovnice (2.12)

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (2.13)$$

Dále předpokládáme, že obecné řešení lineární rovnice (2.12) bude mít stejný tvar jako řešení homogenní části rovnice, avšak s rozdílem takovým, že ve vzorci (2.13) nahradíme konstanty c_1, c_2 neznámými funkcemi $c_1(x), c_2(x)$. Nahrazením konstant funkcemi jsme provedli tzv. **Variaci konstant**. Budeme dále tedy hledat řešení ve tvaru

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \quad c_1(x), c_2(x) = ? \quad (2.14)$$

Následně musíme určit první derivaci (2.14)

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2', \quad (2.15)$$

kdy vhodnou volbou funkcí $c_1(x), c_2(x)$ stanovíme vhodnou doplňující podmínku, kterou je požadavek, aby

$$c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0. \quad (2.16)$$

Následně tuto podmínku dosadíme do (2.15) a výsledný tvar znovu zderivujeme. Dostaneme poté výsledné vztahy pro první a druhou derivaci

$$\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2', \\ y'' &= c_1 y_1'' + c_1 y_1' + c_2 y_2'' + c_2 y_2'. \end{aligned}$$

Dosazením výše uvedených vztahů pro funkci $y(x)$ a jejích derivací do rovnice (2.12) a menší úpravou obdržíme

$$c_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + a_2(c_1' y_1 + c_2' y_2) = b(x). \quad (2.17)$$

Díky předpokladu, že y_1, y_2 jsou řešení příslušné homogenní rovnice, musí být výrazy v závorkách rovny nule a tudíž úpravou (2.17) dostaneme

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = \frac{b(x)}{a_2}. \quad (2.18)$$

Rovnice (2.18) představuje druhou podmínku. Nyní už můžeme řešit soustavu lineárních rovnic (2.16) a (2.18)

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(x)}{a_2} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Soustava pro neznámé funkce $c_1'(x), c_2'(x)$ je vždy jednoznačně řešitelná, jelikož determinant matice soustavy je wronskián lineárně nezávislých řešení y_1, y_2 příslušné homogenní rovnice a z věty 2.8 již víme, že je nenulový. Řešení soustavy (2.19) nalezneme pomocí *Cramerova pravidla* pro řešení soustav lineárních rovnic

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}, \quad (2.20)$$

kde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix} \quad a \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{b(x)}{a_2} \end{vmatrix}.$$

Po integraci výše uvedených vztahů (2.20) dostaneme

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + k_1 \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + k_2,$$

kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Následně námi vyjádřené vztahy pro $c_1(x), c_2(x)$ dosadíme do předpokládaného tvaru řešení (2.14), kdy po roznásobení dostaneme obecné řešení rovnice (2.12) ve tvaru, který jsme požadovali

$$y(x) = y_h + y_p = \underbrace{k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)}_{y_h} + \underbrace{y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx}_{y_p}.$$

□

Příklad 2.11. Metodou variace konstant spočítáme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$y'' + y = \sin x.$$

Řešení:

1. Homogenní část

Nejdříve vypočítáme homogenní část rovnice ve tvaru

$$y'' + y = 0,$$

kde budeme hledat kořeny charakteristické rovnice $P(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + 1 = 0 \\ \lambda &= \pm i, & a &= 0, b = 1; \\ y_1(x) &= e^{ax} \cos bx = \cos x \\ y_2(x) &= e^{ax} \sin bx = \sin x \end{aligned}$$

Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Nehomogenní část, kdy $b(x) = \sin x$

Předpokládáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x,$$

kde $c_1(x), c_2(x)$ jsou hledané funkce. Ze vztahů odvozených pro řešení nehomogenní rovnice pomocí MVK dostáváme soustavu lineárních rovnic pro c'_1, c'_2

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Pro samotné určení funkcí $c_1(x), c_2(x)$ vypočteme determinanty W, W_1, W_2 :

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin^2 x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin x \end{vmatrix} = \cos x \sin x.$$

$$\begin{aligned} c'_1 &= \frac{W_1}{W} = -\sin^2 x & c_1 &= -\int \sin^2 x \, dx \\ c'_2 &= \frac{W_2}{W} = \cos x \sin x & c_2 &= -\int \cos x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Dopočítáme nyní funkce $c_1(x), c_2(x)$

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \sin^2 x \, dx = -\int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = -\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = -\frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right] = -\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + k_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \cos x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ dx = -\frac{1}{\sin x} dt \end{array} \right] = \int -t \, dt = -\frac{t^2}{2} + k_1 = \\ &= -\frac{\cos^2 x}{2} + k_2 \end{aligned}$$

Obecné řešení dostaneme tím, že výsledné funkce $c_1(x), c_2(x)$ dosadíme do předpokládaného řešení.

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1 c_1(x) + y_2 c_2(x) = \cos x \left[-\frac{1}{2}x + \frac{2 \sin x \cos x}{4} + k_1 \right] + \sin x \left[-\frac{\cos^2 x}{2} + k_2 \right] = \\ &= -\frac{1}{2}x \cos x + \frac{\cos^2 x \sin x}{2} + k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{\cos^2 x \sin x}{2} = \\ &= k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x \end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy tvaru

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$$

2.4 Okrajové úlohy

V technické praxi se obvykle setkáme se situacemi, které vedou na okrajové úlohy. V našem případě se budeme věnovat deformaci nosníku. Průhyb nosníku je popsán funkcí $y(x)$, kdy x probíhá interval $I = \langle a, b \rangle$, který představuje délku nosníku, čili proměnná x představuje prostorovou souřadnici. Samotnou rovnici uvažovanou na intervalu I musíme doplnit informacemi o situaci na koncích nosníku, tj. v bodech a, b .

Na rozdíl od počátečních úloh, ve kterých máme v podstatě jedinou možnost, jak zadat počáteční podmínky v jednom bodě, v případě okrajových úloh lze zadat okrajové podmínky různými způsoby.

Z hlediska zkoumání existence a jednoznačnosti řešení jsou okrajové úlohy na rozdíl od počátečních úloh obtížnější. Úloha má pro některé hodnoty okrajových podmínek právě jedno řešení, pro jiné žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho.

2.4.1 Okrajová úloha LODR2

Uvažujme rovnici druhého řádu

$$y'' = f(x, y, y')$$

na intervalu $\langle a, b \rangle$ se spojitou funkcí $f(x, \xi, \eta)$. Rovnici musíme doplnit dvěma podmínkami. Podmínky obecně popíšeme vztahy

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = y_a, \quad (2.21)$$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = y_b, \quad (2.22)$$

kde a, b jsou koncové body intervalu I , v němž hledáme řešení a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou čísla vyhovující podmínce

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0,$$

$$|\gamma| + |\delta| \neq 0.$$

Jestliže $y_a = y_b = 0$ (respektive $y_a, y_b \neq 0$), hovoříme o tzv. homogenních okrajových podmínkách (respektive nehomogenních okrajových podmínkách).

Typy okrajových podmínek

Rozlišujeme 3 typy speciálních případů okrajových podmínek:

- **Dirichletovy okrajové podmínky**

V podmínkách (2.21), (2.22) volíme $\alpha = \gamma = 1$ a $\beta = \delta = 0$. Okrajové podmínky jsou pak tvaru:

$$y(a) = y_a \quad y(b) = y_b.$$

V pružnosti pevnosti má tato podmínka význam velikosti průhybu nosníku v krajním bodě.

- **Neumannovy okrajové podmínky**

V podmínkách (2.21), (2.22) volíme $\alpha = \gamma = 0$ a $\beta = \delta = 1$. Okrajové podmínky jsou pak tvaru:

$$y'(a) = y_a \quad y'(b) = y_b.$$

V pružnosti pevnosti má tato podmínka význam velikosti pootočení nosníku v krajním bodě.

- **Robinovy okrajové podmínky**

V podmínkách (2.21), (2.22) volíme $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$. Okrajové podmínky jsou pak tvaru:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = y_a, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = y_b,$$

Pro okrajové úlohy bohužel neplatí analogie Picardovy věty o jednoznačnosti počáteční (Cauchyho) úlohy. Na následujícím příkladě si ukážeme problém jednoznačnosti řešení okrajové úlohy.

Příklad 2.12. Uvažujme nyní lineární diferenciální rovnici druhého řádu tvaru

$$y'' + y = 0 \tag{2.23}$$

definovanou na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Picardova věta nám zaručuje jednoznačnost této úlohy vzhledem k počátečním podmínkám. Vhodnou volbou okrajových podmínek však docílíme stavu, kdy má okrajová úloha jediné řešení, resp. nekonečně mnoho řešení, resp. žádné řešení. Obecné řešení diferenciální rovnice (2.23) je tvaru

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

- Uvažujme následující okrajové podmínky

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Pak dosazením do OŘ dostaneme

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y(\pi) &= c_2 \sin \pi = c_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Konstanta c_2 může tedy nabývat libovolných hodnot, jelikož OP v bodě π bude vždy splněna. Dostáváme tedy případ, kdy máme nekonečně mnoho řešení rovnice (2.23).

- Následující volbou okrajových podmínek

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(\pi) &= A, \quad \text{kde } A \neq 0, A \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pak dosazením do OŘ dostaneme

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y(\pi) &= c_2 \sin \pi = c_2 \cdot 0 \neq A. \end{aligned}$$

Všimněme si, že jakoukoliv volbou konstanty c_2 nemůžeme dosáhnout toho, že by byla splněna druhá OP.

- Poslední volbou okrajových podmínek

$$\begin{aligned}y(0) &= A, \\y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= B,\end{aligned}$$

kde $A, B \neq 0$, $A, B \in \mathbb{R}$. Pak dosazením do OŘ dostaneme

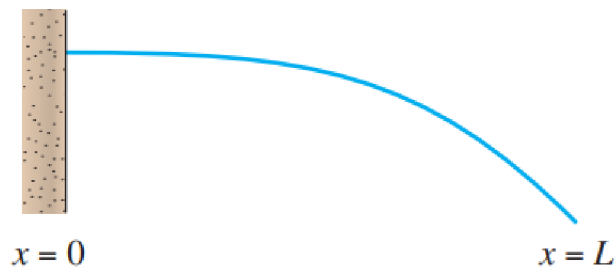
$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 = A, \\y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c_2 = B.\end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto případě řešení existuje a je jediné.

V kapitole 4 se budeme věnovat stanovení tvaru rovnice průhybové čáry nosníku na základě výpočtu diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami. Každé uložení nosníku má specifické okrajové podmínky. Podívejme se proto nyní na okrajové podmínky pro jednotlivé typy uložení, které budou dále uvažovány v 4.

Podmínky a obrázky v následujících odrážkách byly čerpány z [3] a z [6].

- Jednostranně vetknutý nosník



Obrázek 2.1: Jednostranně vetknutý nosník

Okrajové podmínky pro případ znázorněný na obrázku 2.1 jsou v případě uvažování LODR4 následující

$$\begin{aligned}\text{Vetknutý konec v bodě } x=0: & \quad y(0) = 0, \\ & \quad y'(0) = 0,\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\text{Volný konec v bodě } x=L: & \quad y''(L) = 0, \\ & \quad y'''(L) = 0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Jestliže však uvažujeme rovnici LODR2, je nutné předcházející podmínky (2.24)-(2.25) zredukovat na dvě:

$$\begin{aligned}\text{Vetknutý konec v bodě } x=0: & \quad y(0) = 0, \\ & \quad y'(0) = 0.\end{aligned}$$



Obrázek 2.2: Oboustranně podepřený nosník

- Oboustranně podepřený nosník

Okrajové podmínky pro případ znázorněný na obrázku 2.2 jsou v případě uvažování LODR4 následující

$$\begin{aligned} \text{Podepřený konec v bodě } x=0: \quad & y(0) = 0, \\ & y''(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Podepřený konec v bodě } x=L: \quad & y(L) = 0, \\ & y''(L) = 0. \end{aligned}$$

3 Greenova funkce

V této kapitole bude uvedena definice Greenovy funkce a záležitosti ohledně existence a jednoznačnosti řešení. Bude také odvozen vztah pro výpočet Greenovy funkce pro LODR2, který bude potom aplikován na vybraných příkladech z oblasti Pružnost pevnost.

Způsobů, jak odvodit samotnou Greenovu funkci je hned několik. Například odvození s využitím Fourierovy transformace nebo Laplaceovy transformace. Jelikož jsme si již dříve definovali metodu výpočtu nehomogenní rovnice s využitím metody variace konstant, tak odvodíme Greenovu funkci pomocí této metody. V této kapitole ohledně Greenovy funkce byly použity zdroje [2], [4].

Uvažujme interval $I = \langle a, b \rangle$, který je uzavřený a konečný, dále uvažujme obecně diferenciální systém s okrajovými podmínkami

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{q}(t), \quad (3.1)$$

$$l(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0, \quad (3.2)$$

kde předpokládáme, že \mathbf{P} je z prostoru integrovatelných funkcí $X : I \rightarrow R^{n \times n}$, q je z prostoru integrovatelných funkcí $X : I \rightarrow R^n$, $\mathbf{c}_0 \in R$ a l je obecně lineárně ohraničený operátor (v našem případě OP). Společně s (3.1), (3.2) budeme uvažovat také homogenní úlohu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \quad (3.3)$$

$$l(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Definice 3.1 (Greenova funkce). [2] Zobrazení $\mathbf{G} : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ se nazývá **Greenovou maticí** (funkcí) homogenní úlohy (3.3), (3.4), jestliže:

- pro libovolné $\tau \in (a, b)$ jsou zúžení sloupců matice \mathbf{G} na intervaly $\langle a, \tau \rangle$ a $\langle \tau, b \rangle$ řešením systému (3.3), přičemž

$$\mathbf{G}(\tau_+, \tau) - \mathbf{G}(\tau_-, \tau) = \mathbf{E},$$

- $\mathbf{G} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{I}, \mathbf{R}^{n \times n})$ (množina měřitelných a ohraničených zobrazení $\mathbf{X} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$) pro libovolné $t \in \mathbf{I}$,
- pro libovolné $\mathbf{q} \in \mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{R}^n)$ vyhovuje vektorová funkce

$$\mathbf{x}(t) = \int_a^b \mathbf{G}(t, \tau) \mathbf{q}(\tau) d\tau$$

podmínce (3.4).

Věta 3.2. [2] Pro jednoznačnou řešitelnost úlohy (3.1), (3.2) je nutné a stačí, aby odpovídající homogenní úloha (3.3), (3.4) měla pouze triviální řešení. Jestliže je poslední podmínka splněna, pak řešení \mathbf{x} úlohy (3.1), (3.2) lze psát ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \int_a^b \mathbf{G}(t, \tau) \mathbf{q}(\tau) d\tau,$$

kde \mathbf{x}_0 je řešením úlohy (3.3), (3.2) a \mathbf{G} je Greenova matice úlohy (3.3), (3.4).

Důkaz. viz [2] strana 82, Věta 3.1.. □

Více teoretických poznatků ohledně Greenovy funkce, jednoznačnosti řešení, či případně korektnosti, nalezne čtenář v literatuře [2].

Věta 3.3 (Greenova funkce pro okrajovou úlohu LODR2). *Uvažujme nehomogenní rovnici druhého řádu*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \text{ tj. } Ly = b(x) \quad (3.5)$$

a k ní příslušnou homogenní rovnici

$$Ly = 0, \quad (3.6)$$

s obecnými okrajovými podmínkami

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad (3.7)$$

$$\gamma y(l) + \delta y'(l) = 0. \quad (3.8)$$

Pak řekneme, že Greenova funkce pro okrajovou úlohu LODR2 je následujícího tvaru

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{W(x)} & \text{jestliže } 0 \leq x \leq \xi \leq l, \\ \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{W(x)} & \text{jestliže } 0 \leq \xi \leq x \leq l, \end{cases}$$

kde $W(x)$ představuje wronskián řešení homogenní rovnice (3.6) a $u_1(x), u_2(x)$ představují její nezávislé řešení splňující podmínky (3.7), (3.8).

Důkaz. Nejprve stanovme řešení u_1, u_2 homogenní části rovnice (3.5) splňující obecné podmínky (3.7), (3.8)

$$Lu_1 = 0 : \alpha u_1(0) + \beta u_1'(0) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0 \quad (3.9)$$

$$Lu_2 = 0 : \gamma u_2(l) + \delta u_2'(l) = 0, \quad |\gamma| + |\delta| \neq 0. \quad (3.10)$$

Je třeba určit u_1, u_2 tak, aby byly lineárně nezávislé a tvořily tak fundamentální systém řešení rovnice $Lu = 0$, čili chceme, aby wronskián byl nenulový.

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Řešení nehomogenní rovnice (3.5) s okrajovými podmínkami (3.7), (3.8) budeme hledat ve tvaru

$$y(x) = z_1(x)u_1(x) + z_2(x)u_2(x), \quad (3.11)$$

kde z_1, z_2 určíme ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} z_1' u_1 + z_2' u_2 &= 0 \\ z_1' u_1' + z_2' u_2' &= b, \end{aligned}$$

kterou můžeme zapsat maticově následujícím způsobem

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Neznámé konstanty z_1, z_2 vypočítáme pomocí Cramerova pravidla

$$z_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ b(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = -\frac{u_2(x)b(x)}{W(x)}, \quad (3.12)$$

$$z_2'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} u_1(x) & 0 \\ u_1'(x) & b(x) \end{vmatrix} = \frac{u_1(x)b(x)}{W(x)}. \quad (3.13)$$

Jestliže řešení hledané ve tvaru (3.11) splňuje okrajové podmínky (3.7), pak platí

$$\begin{aligned} \alpha[z_1(0)u_1(0) + z_2(0)u_2(0)] + \beta[z_1(0)u_1'(0) + z_2(0)u_2'(0)] &= 0 \\ \gamma[z_1(l)u_1(l) + z_2(l)u_2(l)] + \delta[z_1(l)u_1'(l) + z_2(l)u_2'(l)] &= 0 \end{aligned}$$

Jiným způsobem zapsáno

$$\begin{aligned} z_1(0)[\alpha u_1(0) + \beta u_1'(0)] + z_2(0)[\alpha u_2(0) + \beta u_2'(0)] &= 0 \\ z_1(l)[\gamma u_1(l) + \delta u_1'(l)] + z_2(l)[\gamma u_2(l) + \delta u_2'(l)] &= 0 \end{aligned}$$

Vzhledem k (3.9),(3.10) budou tyto vztahy splněny, jestliže

$$z_1(l) = 0, \quad z_2(0) = 0. \quad (3.14)$$

Pak vztahy (3.12),(3.13) spolu s podmínkami (3.14) představují dvě *Cauchyho* úlohy pro neznámé funkce z_1, z_2 . Řešením těchto dvou úloh budou funkce

$$\begin{aligned} z_1(x) &= -\frac{1}{W(x)} \int_l^x u_2(\xi)b(\xi) d\xi, \\ z_2(x) &= \frac{1}{W(x)} \int_0^x u_1(\xi)b(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Po dosazení těchto řešení funkcí z_1, z_2 do (3.11) dostáváme hledané řešení úlohy (3.5) s OP (3.7),(3.8) ve tvaru

$$y(x) = \frac{u_1(x)}{W(x)} \int_x^l u_2(\xi)b(\xi) d\xi + \frac{u_2(x)}{W(x)} \int_0^x u_1(\xi)b(\xi) d\xi. \quad (3.15)$$

Jestliže poté zavedeme funkci G předpisem

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{W(x)} & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq l, \\ \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{W(x)} & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq l, \end{cases} \quad (3.16)$$

můžeme vzorec (3.15) zapsat následovně:

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)b(\xi) d\xi. \quad (3.17)$$

□

Poznámka 3.4. Některé užitečné vlastnosti Greenovy funkce G

1. G je spojitá na $Q = \{[x, \xi] \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq \xi \leq L\}$,
2. pro každé $\xi \in \langle 0, L \rangle$ má funkce G jako funkce proměnné x spojitě (parciální) derivace G_x, G_{xx} , až do řádu n na intervalech $(0, \xi)$ a (ξ, L) ,
3. G je symetrická, tzn. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$,
4. $(n-1)$ derivace funkce G má v bodě $x = \xi$ obecně skok o velikosti $\frac{1}{a_n(\xi)}$ (n představuje řád DR), tzn. pro $n=2$ a $a_2 = 1$:

$$\frac{\partial G(\xi^+, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-, \xi)}{\partial x} = 1$$

Existuje několik způsobů, jak lze řešit ODR s využitím Greenovy funkce. V našem případě se nám v některých případech výpočtu proto budou hodit vlastnosti *Diracovy delta funkce* a tzv. *Heavisideovy funkce*.

Definice 3.5 (Diracova delta funkce). Nechť β je pevně dané reálné číslo. Pak zobrazení δ_β , které každé funkci $\alpha \in C^0(-\infty, \infty)$ přiřadí číslo $\alpha(\beta)$, nazveme *Diracovou δ funkcí* zapsanou jako:

$$\langle \delta_\beta, \alpha \rangle = \alpha(\beta). \quad (3.18)$$

Někdy používáme zápisu $\delta(t)$ pro δ_0 a $\delta(t - \beta)$ pro δ_β . Vztah (3.18) můžeme zapsat také symbolicky

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \beta) \alpha(t) dt = \alpha(\beta), \quad (3.19)$$

odkud speciálně pro $\alpha(t) = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \beta) dt = 1.$$

Poznámka 3.6. Další užitečnou funkcí je *Heavisideova funkce*, kterou získáme integrací Diracovy δ funkce následovně:

$$H(x - \beta) = \int_{-\infty}^x \delta(t - \beta) dt.$$

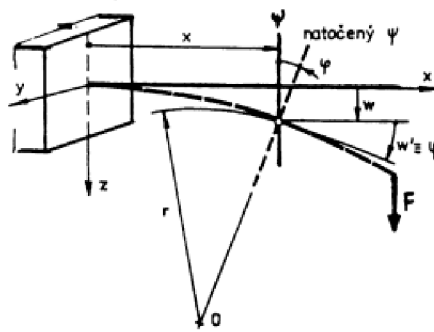
Pro Heavisideovu funkci platí následující

$$H(x - \beta) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < \beta, \\ 1 & \text{pro } x > \beta. \end{cases}$$

4 Aplikace Greenovy funkce

V této kapitole se již zaměříme na samotnou aplikaci metody Greenovy funkce k určení řešení okrajových úloh. Jak již bylo řečeno, zaměříme se na příklady z oblasti pružnosti pevnosti. Budou řešeny některé typy příkladů ohybu (jednostranně vetknutý nosník, oboustranně podepřený nosník). Obrázky jednotlivých uložení byly vytvořeny s využitím internetové stránky *Skyciv.com*. Konkrétní modely byly následně řešeny pomocí interaktivního programu vytvořeného v software MATLAB. V kapitole byla využita literatura [7].

Nejdříve se podíváme na vztah popisující průhyb nosníku. Uvažujme proto jednostranně vetknutý nosník



Obrázek 4.1: Ohyb jednostranně vetknutého nosníku, [7]

Průhyb nosníku $w(x)$ na obr. 4.1 můžeme obecně popsat vztahem

$$w''(x) = \pm \frac{M_o}{EJ} (1 + (w')^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.1)$$

kde $w(x)$ značí posun bodu střednice ve směru osy z , $w'(x)$ je natočení střednice nosníku, M_o je ohybový moment vzhledem k ose y , J představuje kvadratický moment průřezu okolo osy y a E je modul pružnosti v tahu. Vztah (4.1) představuje nelineární diferenciální rovnici 2. řádu, která je obtížně řešitelná. Pro stanovení tvaru průhybové čáry se proto zavádí několik zjednodušení. Za předpokladu, že nosník na obrázku 4.1 považujeme za štíhlý a dlouhý (délka $L \gg$ průměr d), lze provést linearizaci vztahu (4.1). Pro dlouhý štíhlý nosník platí, že pootočení průřezu $y' \approx 0$, proto vztah (4.1) můžeme zapsat následovně

$$w''(x) = \pm \frac{M_o}{EJ}. \quad (4.2)$$

Vztah (4.2) představuje lineární model, který musí splňovat předpoklady lineární pružnosti:

- materiál tělesa je lineárně pružný (Hookeovský)
- všechny posuvy ve směru os jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa
- okrajové podmínky jsou lineární

Nakonec je potřeba vyšetřit znaménko u vztahu pro průhybovou čáru. Jelikož uvažujeme rozložení os jako na obrázku 4.1 bude ve vztahu (4.2) mínus. Vztah se kterým bude dále počítáno má výsledný tvar

$$w''(x) = -\frac{M_o}{EJ}.$$

V případě popisu průhybové čáry s využitím diferenciální rovnice 4. řádu se využívá tzv. *Schwendlerových vztahů*.

$$\frac{d^2}{dx^2}M = -q$$

Průhyb nosníku lze tedy psát ve tvaru diferenciální rovnice 4. řádu následovně

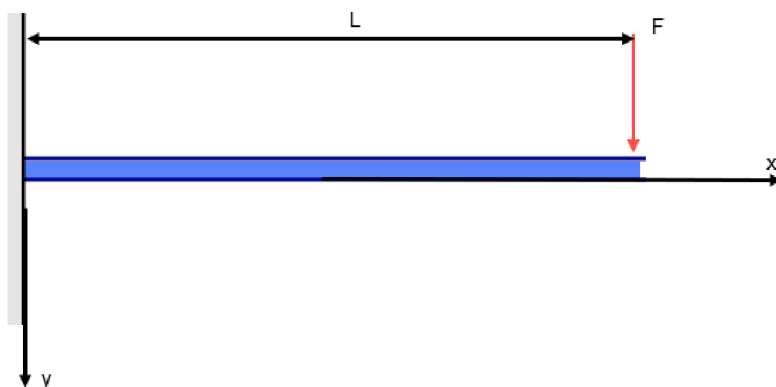
$$w^{(4)}(x) = -\frac{q}{EJ},$$

kde q představuje liniové zatížení působící na nosník.

4.1 Jednostranně vetknutý nosník

Budeme uvažovat případ, kdy je jeden konec nosníku vetknutý a druhý konec je volný.

Příklad 4.1. V prvním příkladě aplikujeme vztah pro výpočet průhybu nosníku s využitím *Greenovy funkce*, která byla odvozena v kapitole 3. Jde o speciální případ, kdy nám k výpočtu průhybu stačí LODR2 namísto LODR4. Uvažujme sílu F působící na volném konci nosníku, obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Jednostranně vetknutý nosník - síla na volném konci

Průhyb nosníku můžeme popsat rovnicí

$$EJy'' = -M_o. \quad (4.3)$$

Nejdříve ze všeho je třeba určit průběh **VSM** (vnitřní síly, momenty) působící na nosník 4.2. Čtenář se ohledně stanovení průběhu **VSM** (resp. ve starší literatuře uvedeno jakožto výsledné vnitřní účinky) může v případě zájmu více dočíst například v literatuře [7].

Z průběhu VSM zjistíme, že průběh Ohybového momentu M_o v našem případě zapíšeme jako

$$M_o = -F(L - x), \quad x \in \langle 0, L \rangle.$$

Okrajové podmínky v případě 4.2 jsou

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Nyní již můžeme přejít k samotnému výpočtu průhybové čáry. V prvním kroku určíme lineárně nezávislé řešení homogenní části rovnice (4.3)

$$y'' = 0.$$

Řešení homogenní části je zřejmě

$$y_h(x) = Ax + B.$$

Dvě nezávislá řešení homogenní rovnice jsou tvaru

$$y_1(x) = x \quad y_2(x) = 1.$$

Pro určení Greenovy funkce je potřeba vypočítat také wronskián řešení

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Partikulární řešení rovnice (4.3) můžeme zapsat ve tvaru

$$y_p(x) = \int_0^x G(x, \xi) b(\xi) d\xi, \quad (4.4)$$

kde $b(\xi)$ představuje pravou stranu rovnice (4.3). Greenova funkce $G(x, \xi)$ je pak tvaru

$$G(x, \xi) = \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{W(x)} = \frac{\xi - x}{-1} = (x - \xi). \quad (4.5)$$

Dosazením Greenovy funkce (4.5) do tvaru partikulárního řešení (4.4) získáme

$$y(x) = \int_0^x G(x, \xi) b(\xi) d\xi = \int_0^x (x - \xi) R(L - \xi) d\xi, \quad R = -\frac{F}{EJ}.$$

Následnou integrací a dosazením za R dostaneme

$$y(x) = \frac{FLx^2}{2EJ} - \frac{Fx^3}{6EJ},$$

kde funkce $y(x)$ je funkcí průhybu nosníku znázorněného na obrázku 4.2.

Aplikace pro příklad 4.1

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.2. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme vidět na pravé straně.

Input

Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

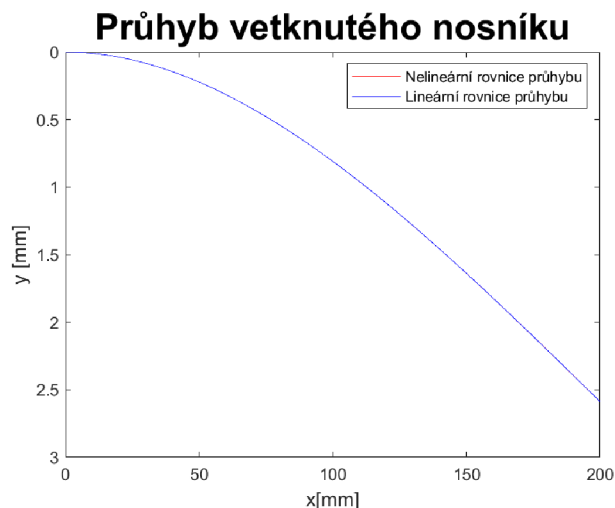
Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost síly [N]
100

Zadej vzdálenost působíště síly od vetknutého konce[mm]
200

Zadej délku prutu[mm]
200

OK Cancel



Obrázek 4.3: Jednostranně vetknutý nosník se silou působící na konci nosníku

V případě, kdy je porušena podmínka linearizace, situace dopadne následovně:

Input

Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

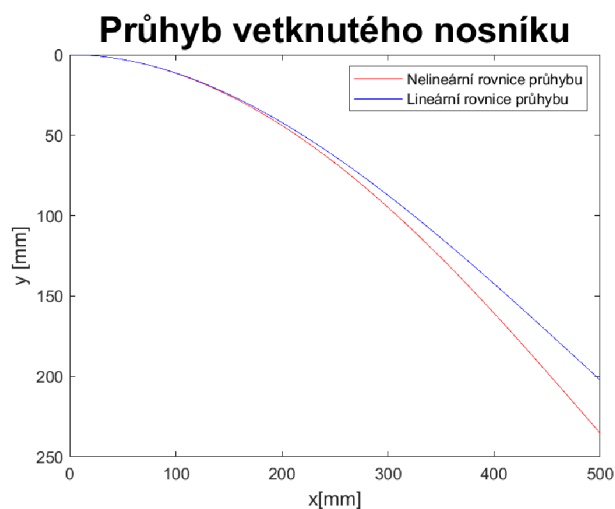
Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost síly [N]
500

Zadej vzdálenost působíště síly od vetknutého konce[mm]
500

Zadej délku prutu[mm]
500

OK Cancel



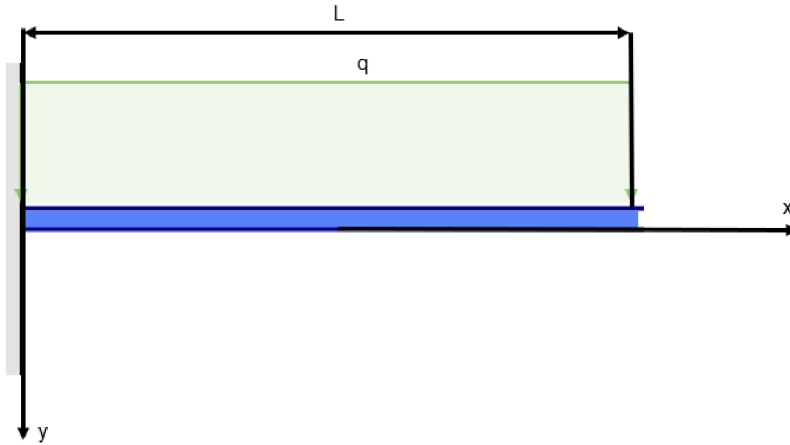
Obrázek 4.4: Jednostranně vetknutý nosník se silou působící na konci nosníku

Všimněme si, že v případě porušení předpokladu linearizace je rozdíl mezi lineárním a nelineárním modelem značný.

Příklad 4.2. V druhém příkladě se zaměříme na výpočet průhybové čáry za předpokladu liniového zatížení působící po celé délce nosníku znázorněného na obrázku 4.5.

Průhyb nosníku na obrázku 4.5 můžeme popsat rovnicí

$$EJy'' = \frac{q(L-x)^2}{2},$$



Obrázek 4.5: Jednostranně vetknutý nosník - liniové zatížení po celé délce

kde je velikost ohybového momentu M_o určena z průběhu VSM. Okrajové podmínky úlohy jsou totožné s OP v úloze 4.1. Jelikož jsou OP stejné, je i výsledný tvar řešení homogenní části totožný, s čímž souvisí i následný tvar Greenovy funkce. Jediný rozdíl ve výpočtu samotného průhybu je způsoben pouze odlišnou pravou stranou $b(x)$. Dosazením pravé strany $b(x)$ a příslušného tvaru Greenovy funkce (4.5) do tvaru partikulárního řešení (4.4) dostaneme

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \int_0^x G(x, \xi) b(\xi) d\xi = \int_0^x (x - \xi) \frac{q(L - \xi)^2}{2EJ} d\xi = \\
 &= \frac{q}{2EJ} \int_0^x (x - \xi)(L^2 - 2L\xi + \xi^2) d\xi = \\
 &= \frac{q}{2EJ} \int_0^x xL^2 - 2L\xi x + \xi^2 x - L^2\xi + 2L\xi^2 - \xi^3 d\xi = \\
 &= \frac{q}{2EJ} \left(\frac{1}{2}x^2L^2 - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) = \frac{qx^2}{24EJ} (6L^2 - 4Lx + x^2).
 \end{aligned}$$

Výsledný vztah pro průhyb jednostranně vetknutého nosníku s liniovým zatížením po celé délce nosníku můžeme popsat vztahem

$$y(x) = \frac{qx^2}{24EJ} (6L^2 - 4Lx + x^2).$$

Aplikace pro příklad 4.2

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.5. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme vidět na pravé straně.

Input

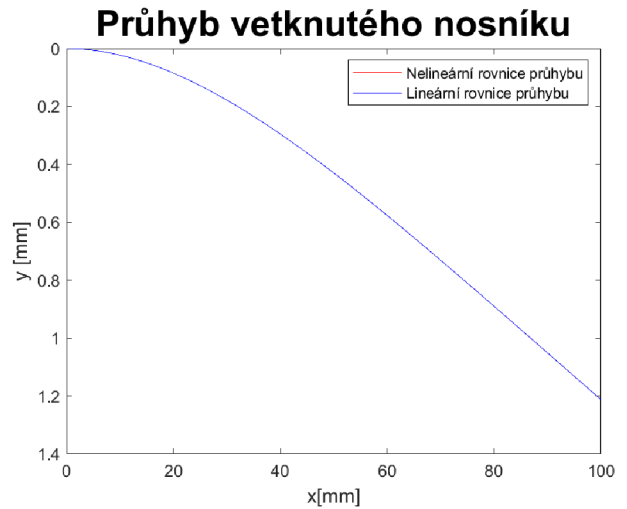
Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost liniového zatížení [N/mm]
10

Zadej délku prutu [mm]
200

OK Cancel



Obrázek 4.6: Jednostranně vetknutý nosník - liniové zatížení po celé délce

V případě, kdy je porušena podmínka linearizace, situace dopadne následovně:

Input

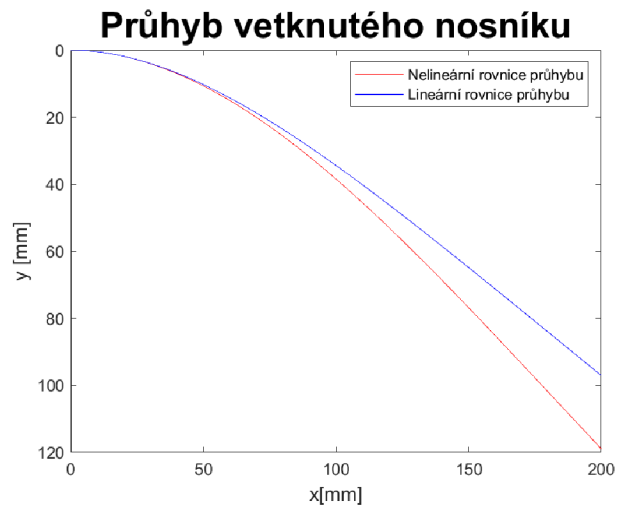
Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost liniového zatížení [N/mm]
50

Zadej délku prutu [mm]
200

OK Cancel



Obrázek 4.7: Jednostranně vetknutý nosník - liniové zatížení po celé délce

Opět si můžeme všimnout, že v případě porušení předpokladu linearizace je rozdíl mezi lineárním a nelineárním modelem značný.

V některých případech užití LODR2 není příliš vhodné. V dalším příkladě proto budeme počítat s LODR4. Postup řešení je popsán například v publikaci [5].

Příklad 4.3. Nechť máme jednostranně vetknutý nosník, na který působí síla F v obecné vzdálenosti a od vetknutého konce, viz obrázek 4.8.

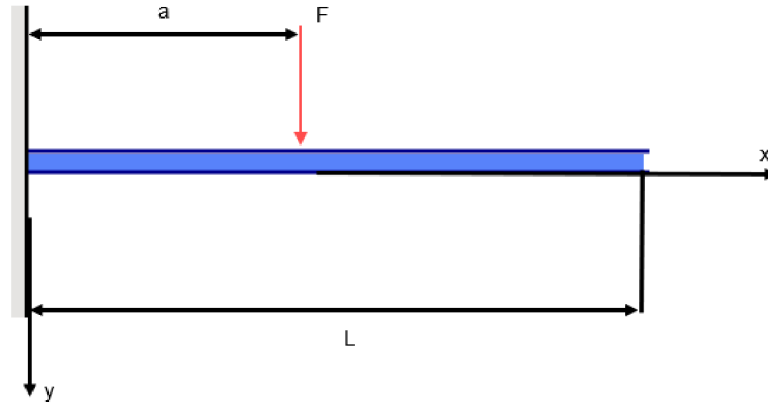
Budeme hledat řešení rovnice

$$y^{(4)} = -\frac{F\delta(x-a)}{EJ} \quad (4.6)$$

s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (4.7)$$

$$y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0. \quad (4.8)$$



Obrázek 4.8: Jednostranně vetknutý nosník se silou působící v obecné vzdálenosti

Jako v předchozích případech vypočítáme nejdříve řešení homogenní části rovnice (4.6) vyhovující okrajovým podmínkám (4.7),(4.8). Nezávislé řešení homogenní části rovnice (4.6) jsou

$$1, x, x^2, x^3, \\ 1, (L - x), (L - x)^2, (L - x)^3.$$

Greenova funkce $G(x, \xi)$ je poté obecně tvaru

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A_0(\xi) + A_1(\xi)x + A_2(\xi)x^2 + A_3(\xi)x^3 & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ B_0(\xi) + B_1(\xi)(L - x) + B_2(\xi)(L - x)^2 + B_3(\xi)(L - x)^3 & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases}$$

Jelikož již známe obecný tvar Greenovy funkce $G(x, \xi)$ je potřeba dopočítat funkce $A_i(\xi), B_i(\xi)$ pro $i = 0, \dots, 3$. Nejdříve do $G(x, \xi)$ dosadíme okrajové podmínky (4.7),(4.8)

$$y(0) = A_0(\xi) = 0, \\ y'(0) = A_1(\xi) = 0, \\ y''(L) = B_2(\xi) = 0, \\ y'''(L) = B_3(\xi) = 0.$$

Greenova funkce pro případ jednostranně vetknutého nosníku vypadá obecně následovně

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A_2(\xi)x^2 + A_3(\xi)x^3 & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ B_0(\xi) + B_1(\xi)(L - x) & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (4.9)$$

Je však potřeba určit koeficienty $A_2(\xi), A_3(\xi), B_0(\xi), B_1(\xi)$, které určíme pomocí vlastností z poznámky 3.4, především z 3.4.2, 3.4.4, čili víme, že $G(x, \xi)$ má v $\xi \in \langle 0, L \rangle$ spojitě derivace až do řádu $(n - 2)$ a v derivaci řádu $(n - 1)$ pro $x = \xi$ je skok o velikosti $\frac{1}{a_n(\xi)}$. Zapsáno pomocí rovnic:

$$A_2(\xi)\xi^2 + A_3(\xi)\xi^3 = B_0(\xi) + B_1(\xi)(L - \xi), \\ 2A_2(\xi)\xi + 3A_3(\xi)\xi^2 = -B_1(\xi), \\ 2A_2(\xi) + 6A_3(\xi)\xi = 0, \\ 6A_3(\xi) = 1.$$

Soustava rovnic byla vyřešena využitím software Matlab

$$\begin{aligned} A_2(\xi) &= -\frac{\xi}{2}, & A_3(\xi) &= \frac{1}{6}, \\ B_0(\xi) &= \frac{\xi^3}{6} - \frac{L\xi^2}{2}, & B_1(\xi) &= \frac{\xi^2}{2}. \end{aligned}$$

Dosazením koeficientů do (4.9) dostaneme

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\xi}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ \frac{\xi^3}{6} - \frac{L\xi^2}{2} + \frac{\xi^2}{2}(L-x) & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases}$$

Drobnou úpravou dostaneme tvar

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2(x-3\xi)}{6} & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ \frac{\xi^2(\xi-3x)}{6} & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (4.10)$$

Je vhodné funkci (4.10) převést na jednu funkci uvažovanou na celém intervalu $\langle 0, L \rangle$. Pomůžeme si již dříve zavedenou *Heavisideovou funkcí* následovně

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{x^2(x-3\xi)}{6} + \left(\frac{\xi^2(\xi-3x)}{6} - \frac{x^2(x-3\xi)}{6} \right) H(x-\xi), \\ G(x, \xi) &= \frac{x^2(x-3\xi)}{6} + \left(\frac{(\xi-x)^3}{6} \right) H(x-\xi). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Rovnice (4.11) je Greenova funkce pro případ jednostranně vetknutého nosníku (vetknutí na levé straně). V tomto konkrétním příkladu uvažujeme tvar pravé strany reprezentující zatížení nosníku

$$b(x) = -\frac{F\delta(x-a)}{EJ}.$$

Z předchozí kapitoly víme, že řešení dostaneme ze vztahu (3.17), čili

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x, \xi)b(\xi) d\xi = -\int_0^L \left[\frac{x^2(x-3\xi)}{6} + \left(\frac{(\xi-x)^3}{6} \right) H(x-\xi) \right] \frac{F\delta(\xi-a)}{EJ} d\xi = \\ &= -\int_0^L \left(\frac{x^2(x-3\xi)}{6} \right) \frac{F\delta(\xi-a)}{EJ} d\xi - \int_0^L \left(\frac{(\xi-x)^3}{6} \right) \frac{F\delta(\xi-a)}{EJ} H(x-\xi) d\xi = \\ &= -\frac{Fx^2}{6EJ}(x-3a) - \frac{F}{6EJ}(a-x)^3 H(x-a). \end{aligned}$$

Rovnici průhybové čáry můžeme rozepsat dále na jednotlivé intervaly

$$y(x) = \begin{cases} \frac{Fx^2}{6EJ}(3a-x) & \text{pro } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{Fa^2}{6EJ}(3x-a) & \text{pro } a \leq x \leq L. \end{cases}$$

Aplikace pro příklad 4.3

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.8. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme opět vidět na pravé straně.

Input

Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

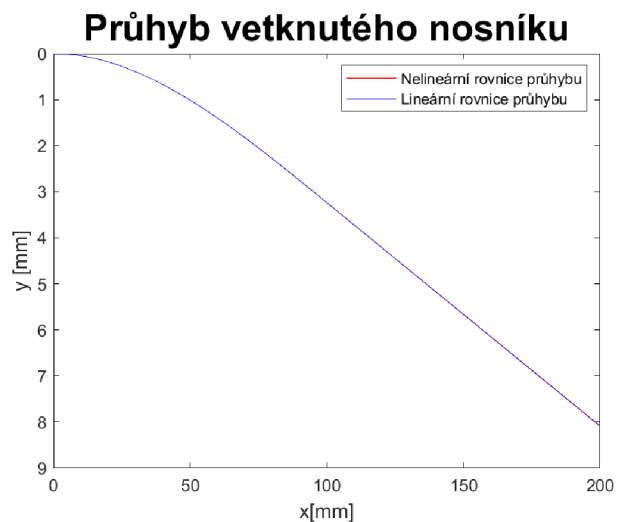
Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost síly [N]
1000

Zadej vzdálenost působíště síly od vetknutého konce[mm]
100

Zadej délku prutu[mm]
200

OK Cancel



Obrázek 4.9: Jednostranně vetknutý nosník se silou působící v obecné vzdálenosti

V případě, kdy je porušena podmínka linearizace, situace dopadne následovně:

Input

Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

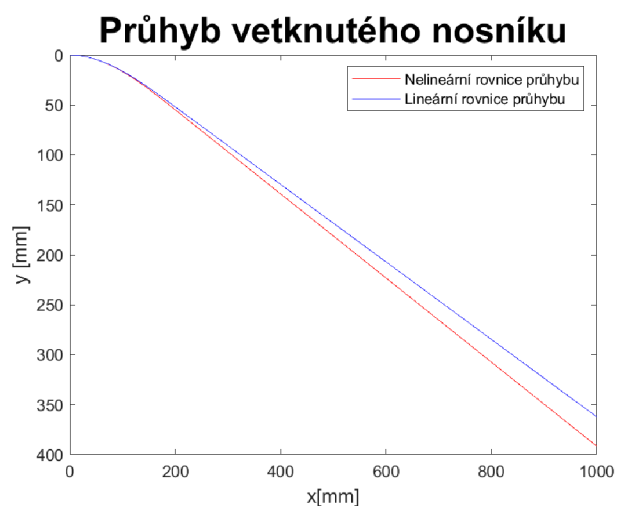
Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost síly [N]
2000

Zadej vzdálenost působíště síly od vetknutého konce[mm]
200

Zadej délku prutu[mm]
1000

OK Cancel



Obrázek 4.10: Jednostranně vetknutý nosník se silou působící v obecném vzdálenosti

Opět si můžeme všimnout, že v případě porušení předpokladu linearizace je rozdíl mezi lineárním a nelineárním modelem značný.

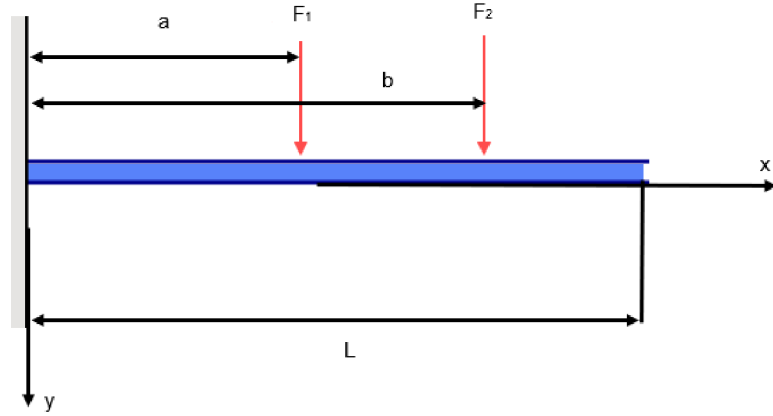
Příklad 4.4. Uvažujme nyní případ, kdy máme jednostranně vetknutý nosník zatížený dvěma osamělými silami, obr. 4.11.

V tomto případě budeme hledat řešení rovnice 4. řádu, která je tvaru:

$$y^{(4)} = -\frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ}.$$

Pravá strana $b(x)$ je

$$b(x) = -\frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ}. \quad (4.12)$$



Obrázek 4.11: Jednostranně vetknutý nosník - dvě síly v obecných vzdálenostech

Jelikož v tomto případě máme stejné okrajové podmínky jako v úloze 4.3, můžeme využít tvar Greenovy funkce vypočítaný v předchozím příkladu. Greenova funkce je tedy tvaru (4.11):

$$G(x, \xi) = \frac{x^2(x - 3\xi)}{6} + \left(\frac{(\xi - x)^3}{6} \right) H(x - \xi).$$

Nyní už nám stačí zase vypočítat integrál (3.17) s pravou stranou (4.12).

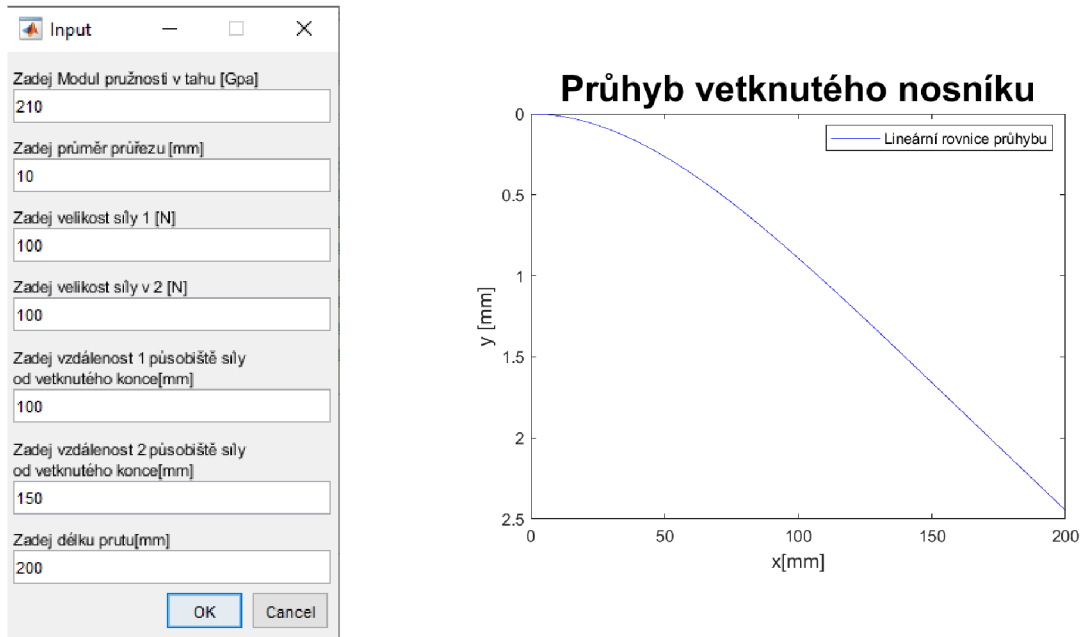
$$\begin{aligned} y(x) &= y(x) = \int_0^L G(x, \xi) b(\xi) d\xi = - \int_0^L \left[\frac{x^2(x - 3\xi)}{6} + \left(\frac{(\xi - x)^3}{6} \right) H(x - \xi) \right] \\ &\frac{F_1 \delta(\xi - a) + F_2 \delta(\xi - b)}{EJ} d\xi = - \int_0^L \left(\frac{x^2(x - 3\xi)}{6} \right) \frac{F_1 \delta(\xi - a) + F_2 \delta(\xi - b)}{EJ} d\xi - \\ &- \int_0^L \left(\frac{(\xi - x)^3}{6} \right) \frac{F_1 \delta(\xi - a) + F_2 \delta(\xi - b)}{EJ} H(x - \xi) d\xi = \\ &= - \frac{x^2}{6EJ} [F_1(x - 3a) + F_2(x - 3b)] - \frac{1}{6EJ} [(a - x)^3 H(x - a) + (b - x)^3 H(x - b)] \end{aligned}$$

Po drobné úpravě získáme následující tvar průhybové čáry

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6EJ} [F_1(3a - x) + F_2(3b - x)] & \text{pro } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{1}{6EJ} [F_1 a^2(3x - a) + F_2 x^2(3b - x)] & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ \frac{1}{6EJ} [F_1 a^2(3x - a) + F_2 b^2(3x - b)] & \text{pro } b \leq x \leq L. \end{cases}$$

Aplikace pro příklad 4.4

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.11. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme opět vidět na pravé straně.

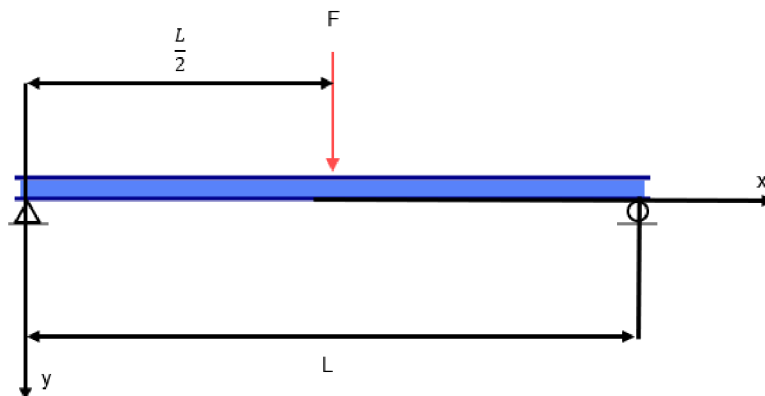


Obrázek 4.12: Jednostranně vetknutý nosník - dvě síly v obecných vzdálenostech

4.2 Oboustranně podepřený nosník

V další části kapitoly se podíváme na určení tvaru Greenovy funkce v případě oboustranně podepřeného nosníku a následné stanovení tvaru průhybové čáry. Nejdříve budou ilustrovány příklady, které můžeme snadno vyřešit pomocí Greenovy funkce pro LODR2. Některé situace je pohodlnější však řešit jako LODR4.

Příklad 4.5. Prvním případem je nosník na dvou podporách se silou F působící ve středu nosníku, viz obr. 4.13.

Obrázek 4.13: Oboustranně podepřený nosník se silou F ve středu intervalu

Uvažujme LODR2 tvaru

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ}. \quad (4.13)$$

Z obrázku je patrné, že nosník je symetrický, proto si ho můžeme rozdělit na dva intervaly $\langle 0, L/2 \rangle$ a $\langle L/2, L \rangle$. Ve stanovení tvaru průhybové čáry se budeme zabývat intervalem

$\langle 0, L/2 \rangle$. Z průběhu VSM zjistíme, že ohybový moment $M_o = F_A x$, kde $F_A = \frac{F}{2}$ je reakční síla v levé podpoře A a $x \in \langle 0, L/2 \rangle$. Budeme se proto zabývat rovnicí

$$y'' = -\frac{F_A x}{EJ}, \quad x \in \langle 0, L/2 \rangle.$$

Okrajové podmínky pro uvažovaný interval jsou

$$y(0) = 0, \quad y' \left(\frac{L}{2} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Dosazením okrajových podmínek do řešení homogenní části rovnice (4.13) získáme dvě nezávislá řešení rovnice tvaru

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1. \quad (4.15)$$

Wronskián řešení je $W(x) = -1$. Dosazením (4.15) do vztahu (3.16) získáme Greenovu funkci pro homogenní část (4.13) s OP (4.14)

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\xi & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L/2, \\ -x & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L/2. \end{cases}$$

Dosazením Greenovy funkce a pravé strany do (3.17) dostaneme

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x, \xi) b(\xi) d\xi = \int_0^x \xi^2 \frac{F_A}{EJ} d\xi + \int_x^{L/2} x \frac{F_A}{EJ} \xi d\xi = \\ &= \frac{F_A}{EJ} \left(\left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^x + x \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_x^{L/2} \right) = \frac{F_A x}{12EJ} \left(\frac{3}{4} L^2 - x^2 \right), \quad x \in \langle 0, L/2 \rangle. \end{aligned}$$

Aplikace pro příklad 4.5

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.13. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme opět vidět na pravé straně.

Všimněme si opět rozdílu v případě porušení podmínky linearizace.

Input

Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost síly [N]
100

Zadej vzdálenost působíště síly od levé podpory[mm]
100

Zadej délku prutu[mm]
200

OK Cancel

Obrázek 4.14: Oboustranně podepřený nosník se silou F ve středu intervalu

Input

Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]
210

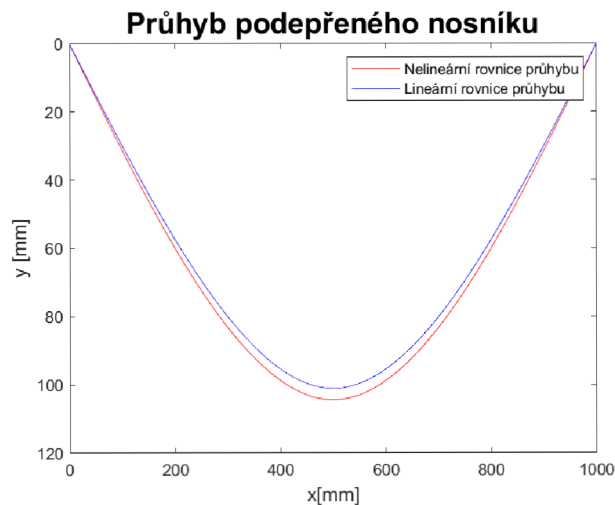
Zadej průměr průřezu [mm]
10

Zadej velikost síly [N]
500

Zadej vzdálenost působíště síly od levé podpory[mm]
500

Zadej délku prutu[mm]
1000

OK Cancel

Obrázek 4.15: Oboustranně podepřený nosník se silou F ve středu intervalu - porušení podmínky linearizace

Příklad 4.6. Mějme nosník zatížený liniovým zatížením q po celé délce prutu, viz obr. 4.16.

Budeme řešit LODR2 tvaru

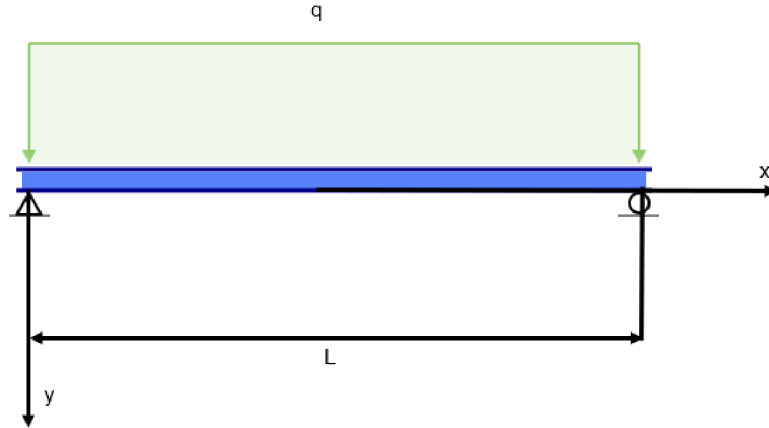
$$y'' = \frac{(qx^2 - qLx)}{2EJ}, \quad x \in \langle 0, L \rangle, \quad (4.16)$$

kde tvar pravé strany $b(x)$ opět zjistíme z průběhu VSM. Okrajové podmínky pro styl uložení podle obrázku 4.16 jsou

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \quad (4.17)$$

Výpočtem homogenní části rovnice (4.16) s okrajovými podmínkami (4.17) dostáváme dvě nezávislá řešení tvaru

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (4.18)$$



Obrázek 4.16: Oboustranně podepřený nosník - liniové zatížení po celé délce nosníku

Wronskián řešení je $W(x) = -1$. Dosazením nezávislých řešení (4.18) do vztahu (3.16) dostaneme Greenovu funkci pro uložení dle obrázku 4.16 tvaru

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\xi \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L, \\ -x \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L. \end{cases} \quad (4.19)$$

Pro určení tvaru průhybové čáry pro případ znázorněný na obrázku 4.16 je potřeba vypočítat integrál (3.17), kde $G(x, \xi)$ představuje výše stanovenou Greenovu funkci (4.19) a pravá strana $b(x) = \frac{1}{2EJ}(qx^2 - qLx)$.

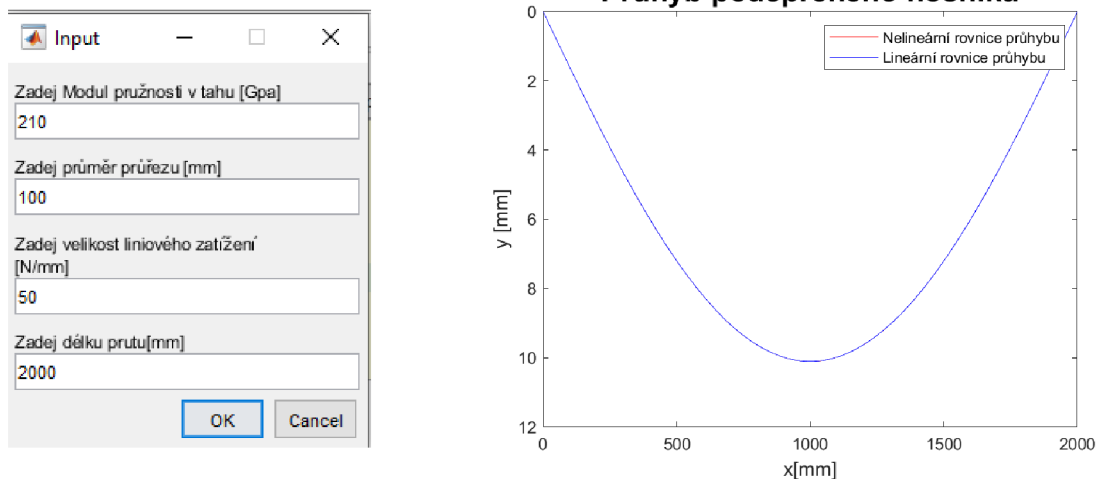
$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x, \xi) b(\xi) d\xi = - \int_0^x \xi \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{2EJ} (q\xi^2 - qL\xi) d\xi - \\ &\int_x^L x \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \frac{1}{2EJ} (q\xi^2 - qL\xi) d\xi = \frac{qx}{24EJ} (L^3 - 2Lx^2 + x^3). \end{aligned}$$

Rovnice průhybové čáry je tedy tvaru

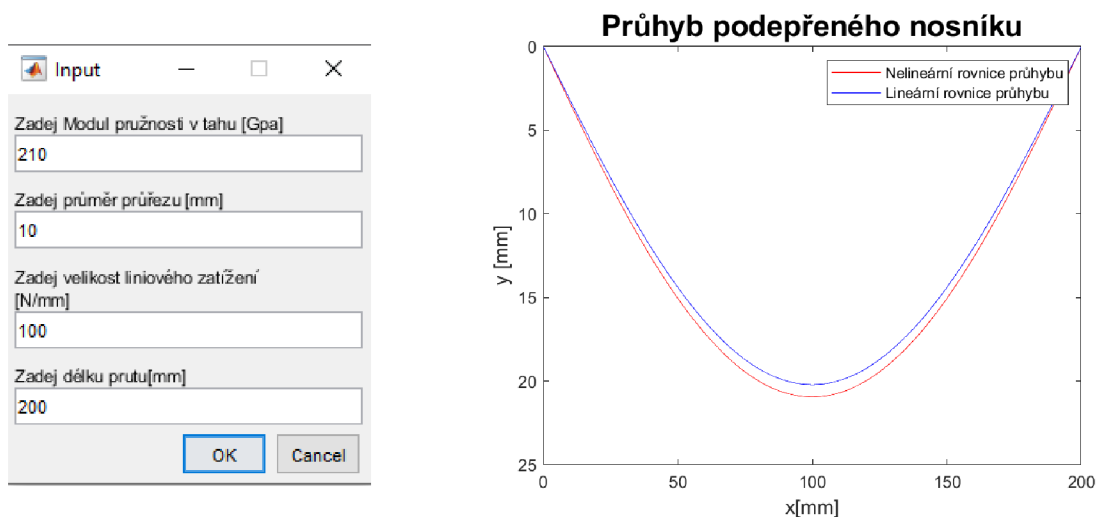
$$y(x) = \frac{qx}{24EJ} (L^3 - 2Lx^2 + x^3), \quad x \in \langle 0, L \rangle.$$

Aplikace pro příklad 4.6

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.16. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme opět vidět na pravé straně.



Obrázek 4.17: Oboustranně podepřený nosník - liniové zatížení po celé délce nosníku



Obrázek 4.18: Oboustranně podepřený nosník - liniové zatížení po celé délce nosníku

Všimněme si opět rozdílu mezi jednotlivými modely v případě porušení linearizace.

V některých případech je výhodnější uvažovat LODR4 tak, jako tomu bylo již v příkladech na jednostranně vetknutý nosník. Proto se nyní podíváme na příklady hledání tvaru průhybové čáry oboustranně podepřeného nosníku řešené využitím Greenovy funkce pro LODR4.

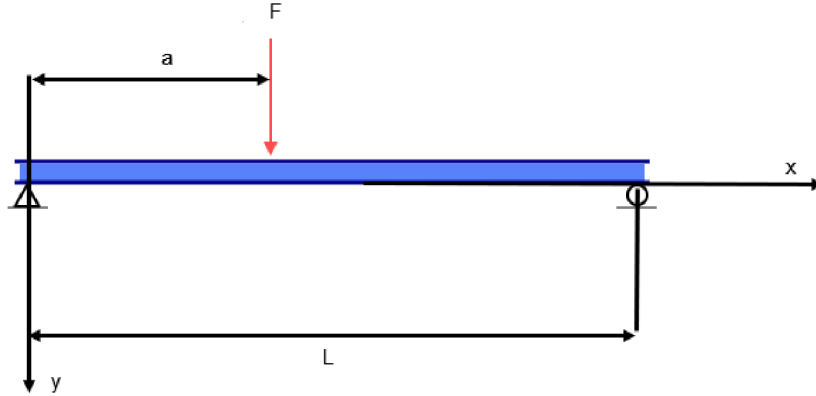
Příklad 4.7. Uvažujme nyní opět nosník uložený na dvou podporách se silou F působící na nosník v obecné vzdálenosti a od levé podpory, viz obr 4.19. Z obrázku vidíme, že se nyní budeme zabývat LODR4 tvaru

$$y^{(4)} = -\frac{F\delta(x-a)}{EJ}. \quad (4.20)$$

Pro uložení podle 4.19 uvažujeme okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad (4.21)$$

$$y(L) = 0, \quad y''(L) = 0. \quad (4.22)$$



Obrázek 4.19: Oboustranně podepřený nosník - síla působící v obecné vzdálenosti

Nezávislá řešení homogenní části rovnice (4.20) jsou

$$1, x, x^2, x^3, \\ 1, (L - x), (L - x)^2, (L - x)^3.$$

Greenovu funkci $G(x, \xi)$ obecně hledáme ve tvaru

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A_0(\xi) + A_1(\xi)x + A_2(\xi)x^2 + A_3(\xi)x^3 & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ B_0(\xi) + B_1(\xi)(L - x) + B_2(\xi)(L - x)^2 + B_3(\xi)(L - x)^3 & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases}$$

Dále je potřeba dopočítat příslušné koeficienty $A_i(\xi), B_i(\xi)$ pro $i = 0, \dots, 3$. Do Greenovy funkce $G(x, \xi)$ dosadíme okrajové podmínky (4.21), (4.22)

$$\begin{aligned} y(0) &= A_0(\xi) = 0, \\ y''(0) &= A_2(\xi) = 0, \\ y(L) &= B_0(\xi) = 0, \\ y''(L) &= B_2(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Greenova funkce pro případ oboustranně podepřeného nosníku je tedy obecně tvaru

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A_1(\xi)x + A_3(\xi)x^3 & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ B_1(\xi)(L - x) + B_3(\xi)(L - x)^3 & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (4.23)$$

Koeficienty $A_1(\xi), A_3(\xi), B_1(\xi), B_3(\xi)$ dopočítáme pomocí vlastností z poznámky 3.4. Zapsáno pomocí rovnic následovně

$$\begin{aligned} A_1(\xi)\xi + A_3(\xi)\xi^3 &= B_1(\xi)(L - \xi) + B_3(\xi)(L - \xi)^3, \\ A_1(\xi) + 3A_3(\xi)\xi^2 &= -B_1(\xi) - 3B_3(\xi)(L - \xi)^2, \\ 6A_3(\xi)\xi &= 6B_3(\xi)(L - \xi), \\ 6A_3(\xi) + 6B_3(\xi) &= 1. \end{aligned}$$

Soustava rovnic byla vypočtena pomocí software Matlab následovně

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &= -\frac{(2L^2\xi - 3L\xi^2 + \xi^3)}{6L}, & A_3(\xi) &= \frac{(L - \xi)}{6L}, \\ B_1(\xi) &= -\frac{(L^2\xi - \xi^3)}{6L}, & B_3(\xi) &= \frac{\xi}{6L}. \end{aligned}$$

Dosažením vypočtených koeficientů do (4.23) dostaneme

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{2L^2\xi - 3L\xi^2 + \xi^3}{6L}x + \frac{(L-\xi)}{6L}x^3 & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ -\frac{(L^2\xi - \xi^3)}{6L}(L-x) + \frac{\xi}{6L}(L-x)^3 & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L, \end{cases}$$

kdy drobnou úpravou získáme tvar Greenovy funkce následovně

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} & \text{pro } 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ \frac{\xi(L-x)(\xi^2 - 2Lx + x^2)}{6L} & \text{pro } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases}$$

Opět si Greenovu funkci převedeme s využitím *Heavisideovy funkce* následovně

$$G(x, \xi) = \frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} + \left(\frac{\xi(L-x)(\xi^2 - 2Lx + x^2)}{6L} - \frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} \right) H(x-\xi), \quad x \in \langle 0, L \rangle.$$

Drobnou úpravou získáme

$$G(x, \xi) = \frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} + \frac{1}{6}(\xi-x)^3 H(x-\xi). \quad (4.24)$$

Tvar průhybové čáry získáme výpočtem (3.17), kde $G(x, \xi)$ je námi vypočtená Greenova funkce tvaru (4.24) s tvarem pravé strany

$$b(x) = -\frac{F\delta(x-a)}{EJ}.$$

Řešíme tedy integrál tvaru

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x, \xi)b(\xi) d\xi = -\int_0^L \left(\frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} + \frac{1}{6}(\xi-x)^3 H(x-\xi) \right) \\ &\quad \frac{F\delta(\xi-a)}{EJ} d\xi = -\frac{F}{6EJL} \int_0^L x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)\delta(\xi-a) d\xi - \\ &\quad \frac{F}{6EJ} \int_0^L (\xi-x)^3 H(x-\xi)\delta(\xi-a) d\xi. \end{aligned}$$

Z vlastnosti Diracovy delta funkce (3.19) víme, že

$$-\frac{F}{6EJL} \int_0^L x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)\delta(\xi-a) d\xi = -\frac{F}{6EJL} x(L-a)(a^2 - 2La + x^2),$$

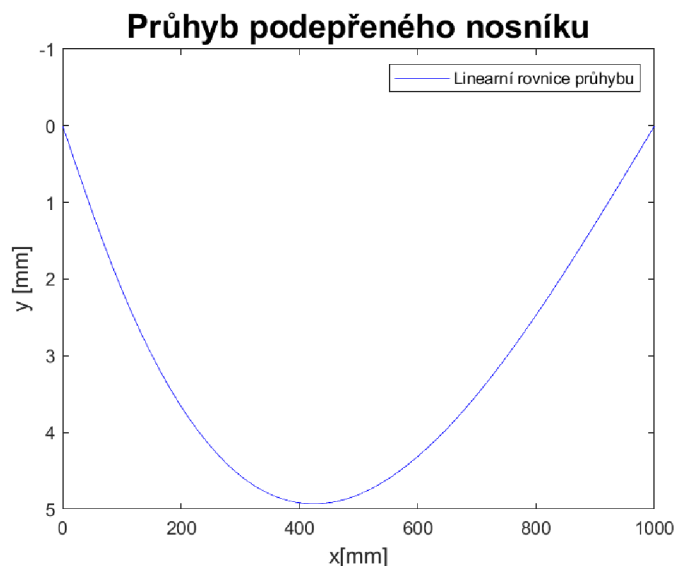
pro $a \in \langle 0, L \rangle$.

Můžeme si proto všimnout, že průhybová čára má následující tvar

$$y(x) = -\frac{F}{6EJ} \begin{cases} \frac{x}{L}(L-a)(a^2 - 2La + x^2) & \text{pro } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{x}{L}(L-a)(a^2 - 2La + x^2) + (a-x)^3 & \text{pro } a \leq x \leq L. \end{cases}$$

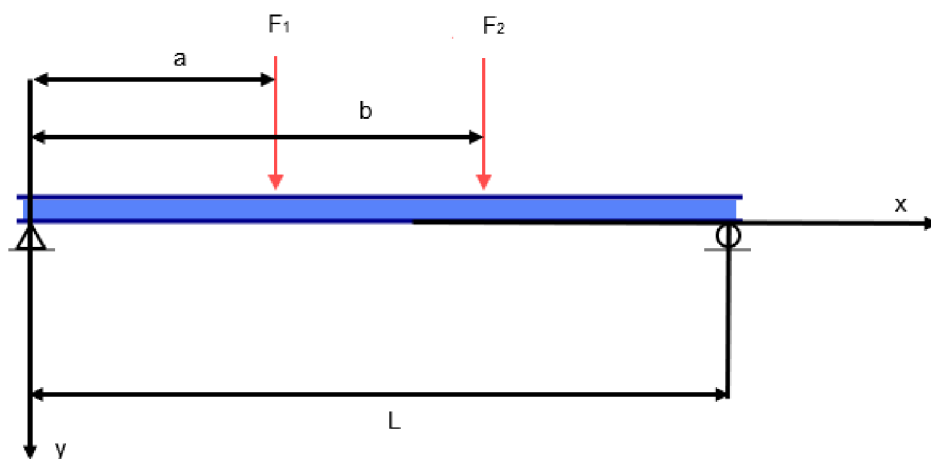
Aplikace pro příklad 4.7

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.19. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme opět vidět na pravé straně.



Obrázek 4.20: Oboustranně podepřený nosník - síla v obecné vzdálenosti

Příklad 4.8. Máme oboustranně podepřený nosník na který působí dvě osamělé síly ve vzdálenostech a, b od levé podpory. Viz obr 4.21.



Obrázek 4.21: Oboustranně podepřený nosník - dvě síly působící v obecných vzdálenostech

Budeme hledat řešení rovnice 4. řádu, která je tvaru

$$y^{(4)} = -\frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ}.$$

Pravá strana je tvaru

$$b(x) = -\frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ}. \quad (4.25)$$

Využijeme Greenovu funkci vypočítanou v předchozí úloze 4.7 tvaru

$$G(x, \xi) = \frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} + \frac{1}{6}(\xi-x)^3 H(x-\xi).$$

Jelikož máme již Greenovu funkci, stačí nám vypočítat integrál (3.17), kde pravá strana $b(x)$ je tvaru (4.25).

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x, \xi)b(\xi) d\xi = - \int_0^L \left(\frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} + \frac{1}{6}(\xi-x)^3 H(x-\xi) \right) \\ &\quad \frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ} d\xi = - \int_0^L \frac{x(L-\xi)(\xi^2 - 2L\xi + x^2)}{6L} \\ &\quad \frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ} d\xi - \int_0^L \frac{1}{6}(\xi-x)^3 \frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ} H(x-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Z vlastnosti Diracovy delta funkce (3.19) můžeme následně tvar průhybové čáry zapsat ve tvaru

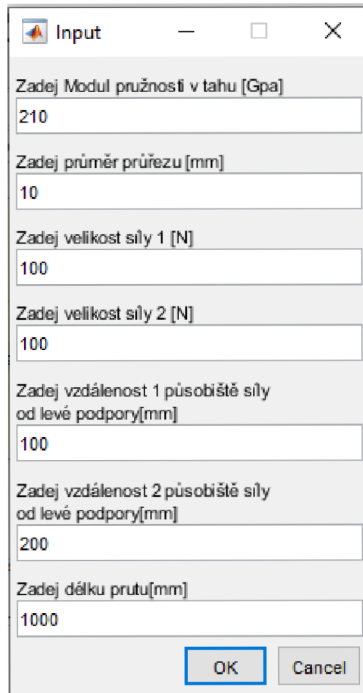
$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{x}{6EJL} (F_1(L-a)(a^2 - 2La + x^2) + F_2(L-b)(b^2 - 2Lb + x^2)) - \\ &\quad - \int_0^L \frac{1}{6}(\xi-x)^3 \frac{F_1\delta(x-a) + F_2\delta(x-b)}{EJ} H(x-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Průhybová čára má následující tvar

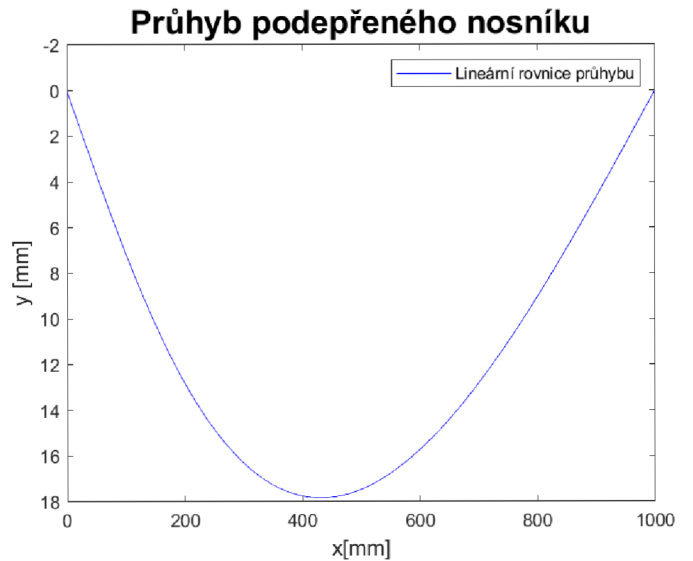
$$y(x) = -\frac{1}{6EJ} \begin{cases} \frac{x}{L} (F_1(L-a)(a^2 - 2La + x^2) + F_2(L-b)(b^2 - 2Lb + x^2)) & \text{pro } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{x}{L} (F_1(L-a)(a^2 - 2La + x^2) + F_2(L-b)(b^2 - 2Lb + x^2)) + (a-x)^3 F_1 & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ \frac{x}{L} (F_1(L-a)(a^2 - 2La + x^2) + F_2(L-b)(b^2 - 2Lb + x^2)) + \\ + (a-x)^3 F_1 + (b-x)^3 F_2 & \text{pro } b \leq x \leq L. \end{cases}$$

Aplikace pro příklad 4.8

Uvažujme nyní příklad uložení nosníku znázorněného na obrázku 4.21. Nosník splňuje předpoklady pro lineární model. Vlastnosti uložení jsou zobrazeny na obrázku vlevo, průhyb nosníku můžeme opět vidět na pravé straně.



Parameter	Value
Zadej Modul pružnosti v tahu [Gpa]	210
Zadej průměr průřezu [mm]	10
Zadej velikost síly 1 [N]	100
Zadej velikost síly 2 [N]	100
Zadej vzdálenost 1 působíště síly od levé podpory[mm]	100
Zadej vzdálenost 2 působíště síly od levé podpory[mm]	200
Zadej délku prutu[mm]	1000



Obrázek 4.22: Oboustranně podepřený nosník - dvě síly v obecných vzdálenostech

5 Závěr

Nalezení řešení okrajové úlohy diferenciální rovnice je v technické praxi hojně využíváno například při výpočtu průhybů nosníků. Je hned několik možností samotného stanovení řešení. Mezi nejznámější a na škole nejpoužívanější metody řešení lineárních rovnic patří metoda variace konstant a metoda neurčitých koeficientů. Metoda variace konstant je univerzální metodou, avšak bývá početně náročnější. Na druhé straně metoda neurčitých koeficientů je jednodušší, ale existuje však pouze pro zvláštní typy pravých stran.

V rámci práce jsem se však zaměřil na, mezi studenty většinou neznámou metodu, metodu Greenovy funkce. Výhodou této metody oproti ostatním je, že pro stejné okrajové podmínky a stejný tvar homogenní části rovnice dostaneme totožnou Greenovu funkci, kterou dále využijeme k samotnému stanovení řešení. V pružnosti, pevnosti by to tedy znamenalo, že by nám stačilo znát tvary Greenových funkcí pro jednotlivé typy uložení, kdy rovnici průhybu bychom dostali pouhou superpozicí Greenovy funkce a pravé strany. Někdy je však samotné nalezení Greenovy funkce velice náročné a mnohdy i nemožné.

Výsledky jednotlivých modelů jsou zapracovány do interaktivního programu v Matlabu, kde sám uživatel může zkoumat tvar průhybové čáry v závislosti na typu uložení a zatížení. Některé typy uložení nosníku, implementované v Matlabu, umožňují uživateli porovnat lineární a nelineární model. Rozdíly mezi modely jsou zřetelné po porušení předpokladů pro linearizaci modelu.

I přes veškerou snahu podat čtenáři výhody řešení pomocí metody Greenovy funkce je někdy snazší okrajovou úlohu vyřešit buď přímou integrací, či některou z výše zmíněných metod (MVK, MNK).

Reference

- [1] KALAS, J., RÁB, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita Brno, 1995. ISBN 978-80-210-5815-6.
- [2] KIGURADZE, I. *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic*. Brno: Masarykova univerzita Brno, 1997. ISBN 80-210-1664-7.
- [3] ZILL, D. G., CULLEN, M. R. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. 7th edition. Boston: Brooks-Cole, 2009. ISBN 978-0-495-10836-8.
- [4] MÍKA, S., KUFNER, A. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983. Matematika pro vysoké školy technické.
- [5] TETERINA, O. A. *The Green's Function Method for Solutions of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problem*. Master's Thesis, University of Tennessee, 2013. https://trace.tennessee.edu/utk_gradthes/2645
- [6] FRANČŮ, J. *Parciální diferenciální rovnice*. Studijní text, FSI VUT, 2021.
- [7] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., BURŠA, J. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3. vydání. Brno: CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [8] ČERMÁK, J., ŽENÍŠEK, A. *Matematika III*. Brno: CERM, 2001. ISBN 80-214-2010-3.
- [9] SCHREIBEROVÁ, P., VOLNÝ, P. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Studijní text VŠB-TUO. Ostrava, 2019.
- [10] KRAJC, B., BEREMLIJSKI, P. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Studijní text, VŠB-TUO, ZČU. 2012.