



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## URČOVÁNÍ KŘIVOSTI V OBECNÉM BODĚ TEPENNÝCH VÝDUTÍ

CURVATURE ASSESSMENT IN GENERAL POINT AT ARTERIAL ANEURYSMS

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Václav Pátek

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2018



## Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Václav Pátek</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### Určování křivosti v obecném bodě tepenných výdutí

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Aneurysma abdominální aorty (AAA) je závažné onemocnění, kdy dochází k postupnému zvětšování průměru aorty a někdy k život ohrožujícímu prasknutí AAA. Výpočtové modelování má potenciál odhalit riziková aneurysmata a snížit tak úmrtnost na toto onemocnění.

Cílem této práce je napsání algoritmu v programu ANSYS, který bude schopen určit hlavní křivosti v jednotlivých uzlech konečnoprvkové sítě. Existuje totiž hypotéza, podle které existuje spojitost mezi lokálními mechanickými vlastnostmi stěny tepny a její geometrií definovanou právě hlavními křivostmi. Jedná se o řešení geometrického problému určování hlavních křivostí ploch definovaných diskretními body. Konečnoprvkový systém ANSYS bude pouze využit jako prostředí, ve kterém má vytvořený algoritmus pracovat.

#### Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši způsobů určování křivosti obecných ploch a vybrat vhodný algoritmus, který bude dále implementován.
- 2) Otestovat zvolený algoritmus na primitivních geometriích, u kterých jsou hlavní křivosti známé a diskutovat dosažitelnou přesnost.
- 3) Aplikovat vytvořený algoritmus na konečnoprvkové sítě idealizovaných aneurysmat a zhodnotit vliv hustoty sítě na přesnost algoritmu.

#### Seznam doporučené literatury:

MARTUFI et al.: Three-Dimensional Geometrical Characterization of Abdominal Aortic Aneurysms: Image-Based Wall Thickness Distribution. J Biomech Eng. 131:061015, 2009

SHUM et al.: Quantitative Assessment of Abdominal Aortic Aneurysm Geometry. Ann Biomed Eng.39:277, 2011

SACKS et al.: In Vivo Three-Dimensional Surface Geometry of Abdominal Aortic Aneurysms. Ann Biomed Eng. 27:469-479, 1999

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zaměřuje na určování křivosti v obecných bodech tepenných výdutí, konkrétně určování hlavních křivostí v jednotlivých uzlech konečnoprvkové sítě idealizovaného aneurysmatu abdominální aorty.

## **Abstract**

This bachelor thesis focuses on determining curvatures in general points of aneurysms, concretely determining principal curvatures in individual points on finite element mesh of idealized abdominal aortic aneurysm.

## **Klíčová slova**

aneurysma abdominální aorty, křivost, hlavní poloměry křivosti

## **Keyword**

abdominal aortic aneurysm, curvature, principal radiuses of curvature

### **Bibliografická citace**

PÁTEK, V. Určování křivosti v obecném bodě tepenných výdutí. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 38 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Určování křivosti v obecném bodě tepenných výdutí“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

Václav Pátek

## **Poděkování**

Tímto bych chtěl poděkovat prof. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph.D. za jeho podněty a rady a chtěl bych také poděkovat mojí rodině za jejich podporu při psaní této práce.





# Obsah

1. Úvod.....	10
2. Kardiovaskulární systém .....	11
2.1. Krev .....	12
2.2. Srdce.....	12
2.3. Krevní cévy .....	14
2.3.1. Aorta.....	16
3. Aneurysma abdominální aorty (AAA).....	17
3.1. Aneurysma .....	17
3.2. Výskyt a rizikové faktory .....	18
3.3. Detekce a léčba.....	18
3.4. Zhodnocení rizika ruptury .....	20
4. Křivost.....	21
4.1. Křivost křivky.....	21
4.2. Křivosti plochy.....	22
4.3. Určování hlavních směrů a křivosti.....	23
5. Určování křivosti na konečnoprvkových sítích.....	25
5.1. Metody výpočtu křivosti .....	25
5.1.1. Cohen-Steiner & Morvan .....	25
5.1.2. Goldfeather & Interrante .....	25
5.1.3. Hildebrandt & Polthier .....	26
5.1.4. Meyer.....	26
5.2. Volba vhodné metody .....	26
6. Výpočet křivosti na idealizovaném modelu AAA.....	27
6.1. Algoritmus řešení .....	30
6.2. Výpočet .....	30
7. Závěr.....	34
8. Seznam použitých zdrojů .....	35
9. Seznam použitých zkratk a symbolů .....	37
10. Seznam příloh.....	38

# 1. Úvod

Nejčastější příčinou úmrtí jsou onemocnění oběhového systému, mezi které se řadí právě aneurysma abdominální aorty. AAA není symptomatické a bez specializovaného vyšetření obtížně zjistitelné onemocnění, při kterém dochází ke zvětšování průměru aorty, které může skončit protržením AAA. Toto onemocnění způsobuje přibližně 1,3 % úmrtí mužů ve věku 65-85 let a pokud k protržení aorty dojde mimo nemocnici, je až v 90 % případů smrtelné. [1],[2]

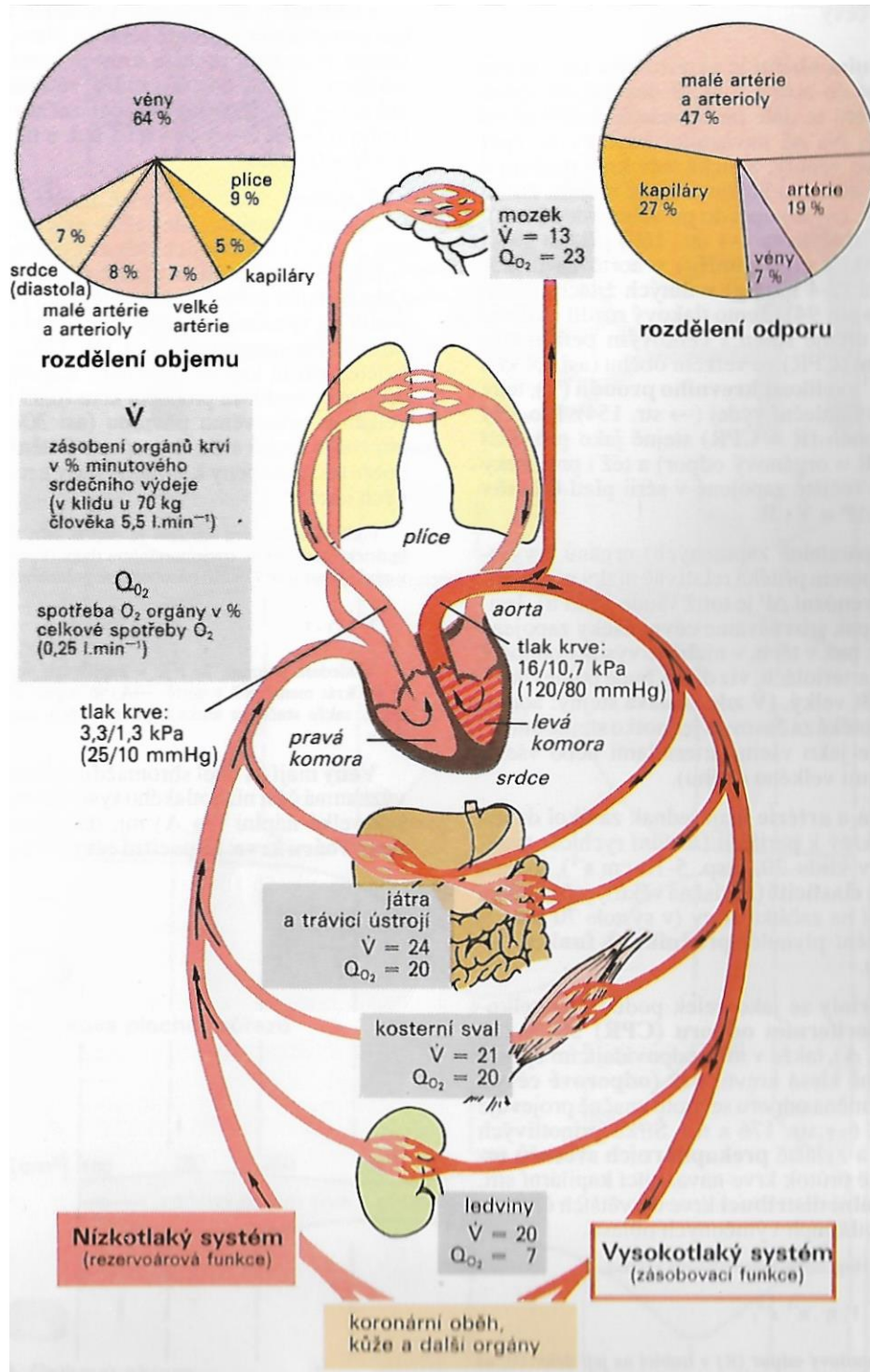
Prasknutí lze předejít buďto invazivní operací, při které dojde k otevření břišní dutiny, nebo méně invazivní endovaskulární opravou. Jako všeobecně uznávané kritérium rizika prasknutí se považuje průměr AAA. K preventivnímu zákroku dochází, pokud je průměr aneurysmatu větší než 55 mm nebo se zvětšuje o více než 6 mm ročně. [3]

Toto kritérium ovšem není dostatečné a je potřeba dalších kritérií pro posouzení individuálního rizika. Proto je potřeba přesně namodelovat a individuálně posoudit každé aneurysma, jelikož u každého pacienta je odlišná geometrie aneurysmatu, jakožto i mechanické vlastnosti stěny tepny. Existují hypotézy, podle kterých existuje spojitost právě mezi geometrickými parametry, jako je například křivost, a lokálními mechanickými vlastnostmi tepny.

Aby bylo možné testovat takovéto hypotézy, je nejdříve nutné mít spolehlivý nástroj pro výpočet těchto geometrických parametrů. Tato práce se proto zabývá existujícími metodami výpočtu křivostí a jejich aplikací na konečnoprvkové sítě idealizovaných aneurysmat.

## 2. Kardiovaskulární systém

Kardiovaskulární soustava (oběhová nebo cévní), je uzavřený dopravní systém, který slouží k transportu krve. Krev slouží k transportu kyslíku, oxidu uhličitého, živin, zplodin metabolismu a dalších látek, funguje také jako médium pro regulaci teploty organismu a v neposlední řadě jako obrana proti cizorodým látkám. [4]



Obrázek 2.1: Kardiovaskulární systém, naskenováno z [4].

Kardiovaskulární soustavu tvoří cévy, které vytvářejí systém umožňující dodávat krev do tkání po celém těle, a srdce, které funguje jako pumpa a umožňuje cirkulaci krve celým tělem.

Oběhovou soustavu můžeme rozdělit na dva sériově zapojené menší oběhy. Malý (plicní) oběh začíná v levém srdci, vede do plic, kde dochází k okysličování krve a přivádí okysličenou krev zpátky do srdce, přesněji do levé síně. Velký (tělní) oběh navazuje na malý, levá komora srdce vytlačuje krev a rozvádí ji do oběhu až ke kapilárám na periférii, odkud se pak žilami vrací zpět do pravé síně. Velký oběh zásobuje krví všechny vnitřní orgány, mozek, srdeční sval a zajišťuje výživu plicní tkáně.

Další rozdělení oběhové soustavy je na nízkotlaký a vysokotlaký systém. Nízkotlaký systém je tvořen z žil, pravého srdce a cév malého oběhu. Nízkotlaký je nazýván, protože je zde panuje relativně nízký tlak v průměru 2 kPa. Kvůli roztažitelnosti žil a velké kapacitě slouží jako zásobárna krve. Normálně se v něm nachází asi 80 % krve a při nedostatku krve se zmenšuje téměř výhradně nízkotlaký systém. Vysokotlaký (arteriální) systém rozvádí krev ze srdce pod vysokým tlakem do tělního oběhu ke tkáním a zásobuje je kyslíkem a živinami. Zpět do srdce se krev vrací nízkotlakým systémem.

## 2.1. Krev

Krev je tělní tekutina skládající se z tekuté fáze – plazmy a buněčných elementů – červených krvinek (erytrocytů), bílých krvinek (leukocyty) a krevních destiček (trombocyty). U dospělého člověka činí objem krve zhruba 6–8 % tělesné hmotnosti a z toho je 46 % u mužů a 41 % u žen tvořeno červenými krvinkami. Ke tvorbě krve dochází v červené kostní dřeni, ta se v dospělosti nachází v lebce, obratlích, pánvi, hrudním koši a dlouhých kostech. U novorozenců se červená kostní dřev nachází ve všech kostech, s přibývajícím věkem se však část mění na žlutou kostní dřev, která se již na krvetvorbě nepodílí. Kromě funkcí popsaných výše, udržuje krev acidobazickou rovnováhu v těle a její složky umožňují její srážení, nezbytnou vlastnost pro zastavení krvácení. [4]

**Plazma** se skládá převážně z vody, ve které jsou rozpuštěny bílkoviny (nejvýznamnější albumin, globuliny a fibrinogen), organické látky (glukóza a močovina) a ionty ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  a  $\text{HCO}_3^-$ ). Plazma se získává z nesrážlivé krve pomocí odstředování na centrifuze, při odstředování se krevní elementy usadí na dně nádoby.

**Červené krvinky (erytrocyty)** jsou bezjaderné buňky ve tvaru bikonkávních destiček, které obsahují hemoglobin. Jsou tvořeny v červené kostní dřeni a jejich funkcí je přeprava kyslíku a oxidu uhličitého mezi plicemi a tkáněmi. Doba života je přibližně 120 dnů.

**Bílé krvinky (leukocyty)** jsou skupinou buněk podílejících se na fungování imunitního systému, který tvoří ochranu před choroboplodnými mikroorganismy a infekcemi. Jsou zodpovědné za detekci, likvidaci a odbourávání cizorodých částic.

**Krevní destičky (trombocyty)** jsou buňky, které se aktivují při porušení vnitřní výstelky cév. Při aktivaci dochází ke změně tvaru, přilnutí (adheze) k poškozené stěně a následnému masovému shlukování destiček (agregace). Vzniklá destičková zátka spolu s vlastním srážením krve zastaví krvácení a umožní nastartování hojivého procesu.

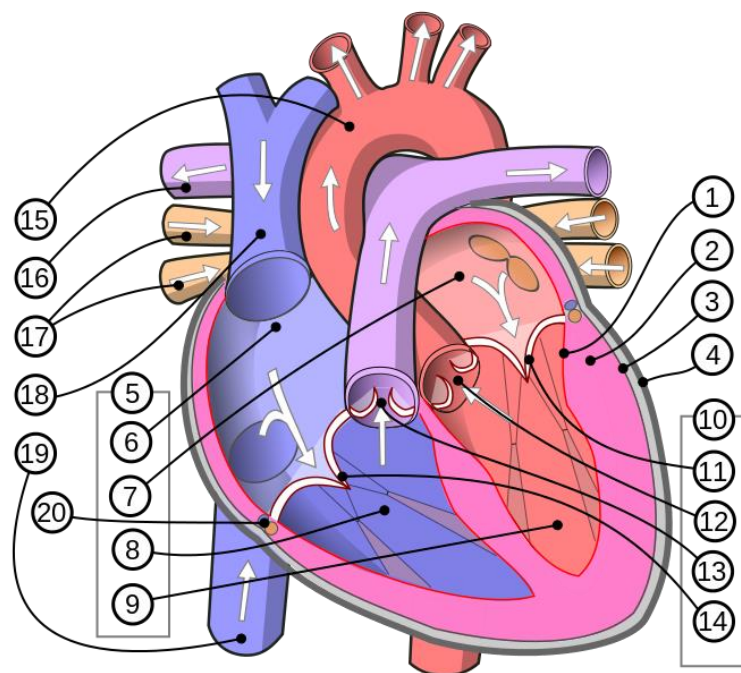
## 2.2. Srdce

Srdce je dutý svalový orgán, který pumpuje krev v krevním oběhu periodickými stahy. U dospělého člověka se jeho váha pohybuje v průměru okolo 300 g. Srdce je uloženo v obalu zvaném osrdečník (perikard) v hrudní dutině, z větší části na levé straně, je obklopeno plicemi

a spodní částí dosedá na bránici, tvarem připomíná nepravidelný kužel se základnou v horní zadní části a vrcholem směřujícím dopředu dolů a doleva. [5]

Srdce je rozděleno přepážkou na pravou a levou část, kde každá je dále rozdělena chlopněmi na síň a komoru. Kvůli rozdílům malého a velkého oběhu jsou pravá a levá komora odlišné. Levá komora, která pohání velký krevní oběh, má oprati pravé komoře až trojnásobnou tloušťku svaloviny stěn. Také má odlišný tvar, levá komora má téměř kruhovitý průřez, zatímco pravá se slabší stěnou je zploštělá.

Srdeční stěna je tvořena 3 vrstvami. Vnitřní vrstva-**endokard** je hladká lesklá membrána tvořená jednou vrstvou plochých endotelových buněk a sítěmi kolagenových vláken. Pokrývá celou srdeční dutinu. Střední vrstva-**myokard** je srdeční svalovina, tato hlavní složka srdeční stěny je tvořena zvláštním druhem příčně pruhovaného svalstva. Vnější vrstva-**epikard** je povlak povrchu srdce. Postupně přechází v perikard.



Obrázek 2.2: Schéma lidského srdce, převzato z [6].

Popis: 1 – endokard, 2 – myokard, 3 – epikard, 4 – perikard; 5 – srdeční dutiny, 6 – pravá síň, 7 – levá síň, 8 – pravá komora, 9 – levá komora, 10 – srdeční chlopně, 11 – mitrální chlopeň, 12 – aortální chlopeň, 13 – pulmonální chlopeň, 14 – trikuspidální chlopeň, 15 – oblouk aorty, 16 – pravá plicní tepna, 17 – pravé plicní žíly, 18 – horní dutá žíla, 19 – dolní dutá žíla, 20 – síňo-komorové septum

Stahy myokardu jsou řízeny převodním systémem srdečním. V těchto částech myokardu dochází k tvorbě a poté šíření vzruchů, pro řízení srdečního rytmu nejsou potřeba nervy, protože vzruch je veden přímo srdeční svalovinou. Nervy jdoucí do srdce tedy přímo neřídí jeho rytmus, ale pouze ovlivňují jeho činnost (zrychlení, zpomalení). Základním útvarem převodního systému je sinusový uzel, který tvorbou impulsů řídí frekvenci srdečních stahů, tyto impulsy poté pokračují přes atrioventrikulární uzly, Hisův svazek, atrioventrikulární raménka a Purkyňova vlákna do myokardu.

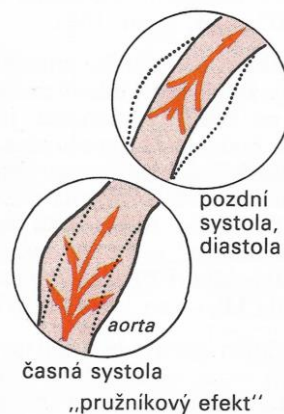
Srdeční cyklus je složen z fází, kterými jsou systola-stah srdce a diastola-uvolnění stahu. Aby bylo možné krev takto jednosměrně pumpovat, jsou v srdci srdeční chlopně, které fungují jako zpětné klapky umožňující průchod krve ze síní do komor. Jejich zavírání je ovládáno

rozdílem tlaků mezi síněmi, komorami a cévami. Při systole překročí tlak v komoře hodnotu tlaku na výstupní cévě a dojde k otevření chlopně. Po vypuzení krve se tlaky vyrovnají a dojde k zavření chlopní. Při diastole je tlak v komoře menší než v síni, otevře se chlopeň mezi nimi a komora se plní krví, dokud nedojde k vyrovnání tlaků a zavření chlopně.

### 2.3. Krevní cévy

Cévy jsou trubice, kterými je srdcem pumpována krev do celého těla. Jednotlivé cévy se liší v závislosti na umístění a funkci. Podle směru proudění rozlišujeme na cévy vedoucí ze srdce, tj. tepny (arterie), tepénky (arteriolae), vlasečnice (kapiláry) a cévy vedoucí směrem k srdci – žíly (venae). V malém oběhu vedou tepny neokysličenou krev do plic, ve velkém oběhu vedou okysličenou krev ze srdce.

**Tepny (arterie)** – jelikož musejí odolat pulsním nárazům krve ze srdce, jsou jejich stěny pevné a pružné, krev se v nich pohybuje rychle, se vzrůstající vzdáleností od srdce však rychlost klesá. Krevní pulz při systole roztahuje cévní stěnu a tato změna průměru je hmatná jako tep. Tepová vlna je mnohem rychlejší, než rychlost proudění krve (5-8 m/s). [5]



Obrázek 2.3: Pružnickový efekt, naskenováno z [4].

- **Tepny elastického typu** – díky jejich elasticitě jsou schopné se roztáhnout při systole a při diastole se vrátit zpět do původního průměru. Tímto způsobem zachycují vzestup tlaku při systole a pomáhají k rovnoměrnějšímu krevnímu proudu.
- **Tepny svalového typu** – svalovina ve stěně tepny funguje jako regulátor a řídí přítok krve v daných oblastech.

**Anastomosis** – tepenné spojky, které propojují větve sousedících tepen, do jisté míry umožňují změnu řečiště. Pokud se v orgánech tyto tepny nevyskytují nebo jsou jako v mozku nedostatečné, označují se tepny bez těchto spojek jako tepny konečné.

**Arterioly (arteriolae)** – jedná se o nejtenčí arterie s relativně silnou stěnou a malým průsvitem. Díky své svalovinně jsou schopny měnit průsvit a fungují jako regulátory průtoku. Jejich konečné úseky se označují jako prekapiláry.

**Vlasečnice (kapiláry)** – tyto velice úzké cévy (průměr okolo 7  $\mu\text{m}$ ) jsou tvořeny jedinou vrstvou endothelových buněk a sítí retikulárních vláken. Takto tenká stěna umožňuje látkovou výměnu mezi krví a tkáněmi.

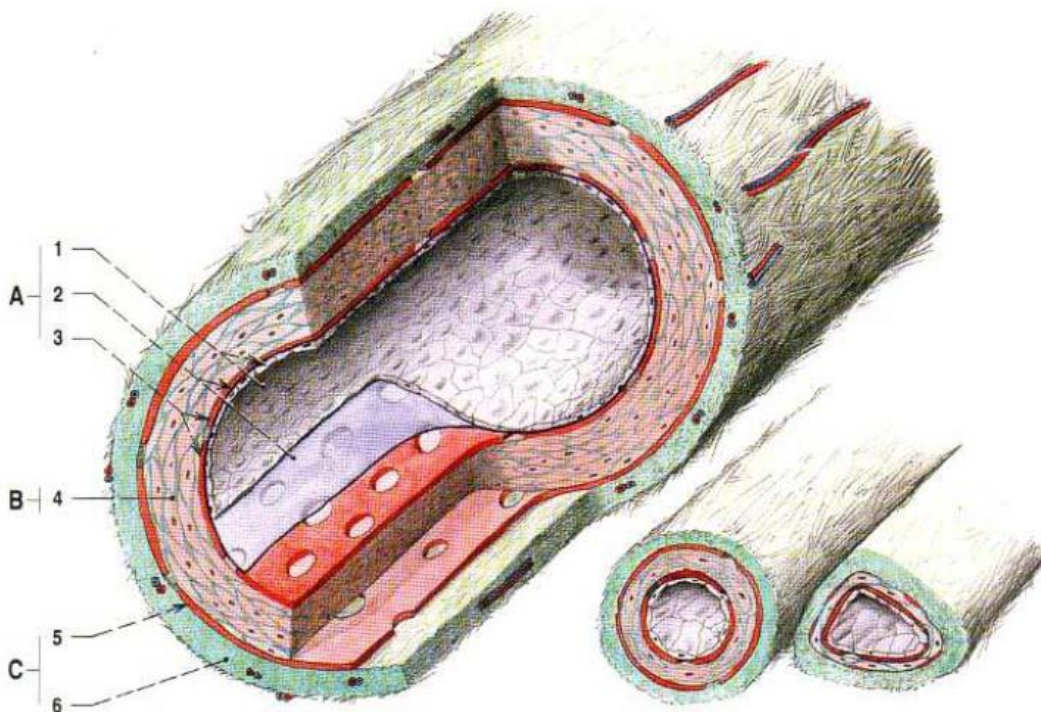
**Venuly (venulae)** – jsou to nejtenčí žíly, tunica media je tenká a neobsahuje elastická vlákna. Tunica externa je tvořena vrstvou vaziva s podélně orientovanými vlákny. Sbíhají se do žil.

**Žíly (venae)** – protože v žilách proudí krev pod mnohem menším tlakem než v tepnách, mají žíly tenčí stěnu než tepny stejného průměru. Žíly jakožto člen nízkotlakého systému mohou sloužit jako zásobárna krve. Charakteristickým útvarem pro žíly jsou žilní chlopně, jsou to vazivem vyztužené výběžky tunica intima. Tyto chlopně zabraňují zpětnému toku krve a zmenšují hydrostatický tlak v žilách tím způsobem, že rozdělují krevní sloupec.

**Arteriovenosní anastomosisy** – jsou to spojky, které obcházejí typické krevní řečiště a to tak, že arterioly nepřecházejí do kapilár, ale vytvářejí spojení přímo s žilním řečištěm.

Stěny tepen jsou tvořeny ze tří vrstev, jejich přítomnost a případná tloušťka ovšem záleží na konkrétní tepně. Jsou to:

- **Tunica intima** – vnitřní vrstva tepen tvořená jedinou vrstvou endothelových buněk podložených sítí elastických a kolagenových vláken.
- **Tunica media** – střední a nejsilnější vrstva z hladké svaloviny. Buňky jsou uspořádány v závitcích nebo spirálových závitcích proložených kolagenovými a elastickými vlákny. Velikost tepny určuje, zda převažuje svalová nebo elastická složka, proto dochází k rozdělení na tepny *elastického* nebo *svalového* typu. Velké tepny jsou elastického typu, u středních je poměr vyrovnaný a malé tepny jsou všechny svalového typu.
- **Tunica externa** – povrchová vrstva tvořená fibrálním vazivem s kolagenovými i elastickými vlákny, na povrchu se kříží a přecházejí do vaziva. Tímto způsobem je céva pružně zafixována ke svému okolí.



Obrázek 2.3: Schéma obecné stavby cévní stěny, převzato z [5]

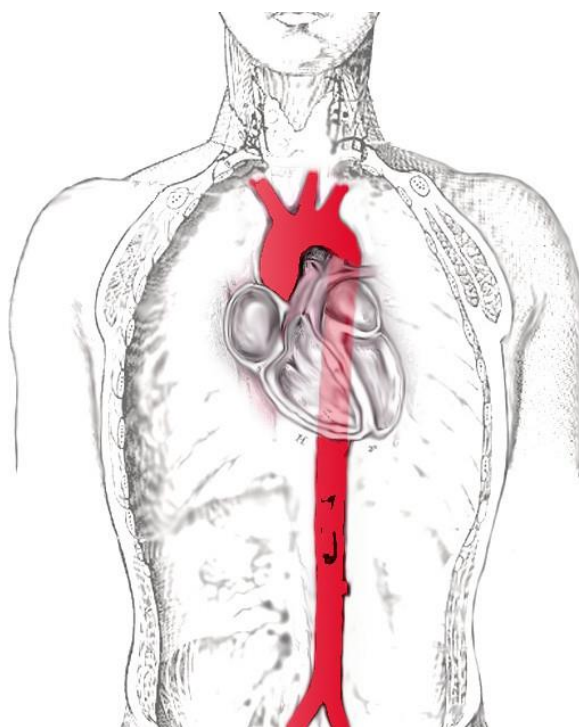
Popis: A – tunica intima, 1 – endothel, 2 – lamina basalis endothelu a subendothelová vrstvička vaziva, 3 – membrána elastica interna; B – tunica media, 4 – buňky hladké svaloviny v tunica media; C – tunica externa, 5 – membrána elastica externa, 6 – vazivo adventicie, v něm vasa vasorum.



### 2.3.1. Aorta

Aorta, česky srdečnice, je největší a nejdelší tepnou v lidském těle. Vystupuje kraniálně (směřující k hlavě) jako **vzestupná aorta (aorta ascendens)** z levé komory srdeční, poté se jako **oblouk aorty (arcus aortae)** stáčí k páteři a jako **sestupná aorta (aorta descendens)** pokračuje podél hrudní a bederní páteře. **Sestupná aorta** prochází skrze bránici, která ji rozděluje na část v hrudníku **aorta thoracica** a část v dutině břišní **aorta abdominalis**. U čtvrtého bederního obratle dochází k bifurkaci **aorta abdominalis** a tyto tepny pokračují do pánevní oblasti. [5]

Aorta, největší tepna v těle, je tepnou elastického typu a v její stěně je ve velké míře zastoupena elastická složka, což jí umožňuje vypořádat se s tlakovými rázy, které na ni působí ze srdce. I přesto se v místě, kde vzestupná aorta přechází do oblouku, nachází zejména u starších lidí rozšíření. Toto místo se nazývá *sinus aortae maximus* a vzniká pravděpodobně dlouhodobým vlivem nárazů přicházejících ze srdce.



Obrázek 2.4: *Lidská aorta*, převzato z [7].

### 3. Aneurysma abdominální aorty (AAA)

#### 3.1. Aneurysma

Tepenná výduť (aneurysma) je lokální rozšíření tepny, zapříčiněné výrazným zeslabením stěny. Toto zeslabení může být způsobeno řadou příčin, např.: vrozené defekty, úrazy, nádory, tuberkulóza, záněty, ateroskleróza atd. Ačkoliv může výduť vzniknout na kterékoliv cévě, nejčastěji vznikají aneurysmata na aortě a mozkových tepnách. Aneurysmata lze rozdělit do několika kategorií. [8]

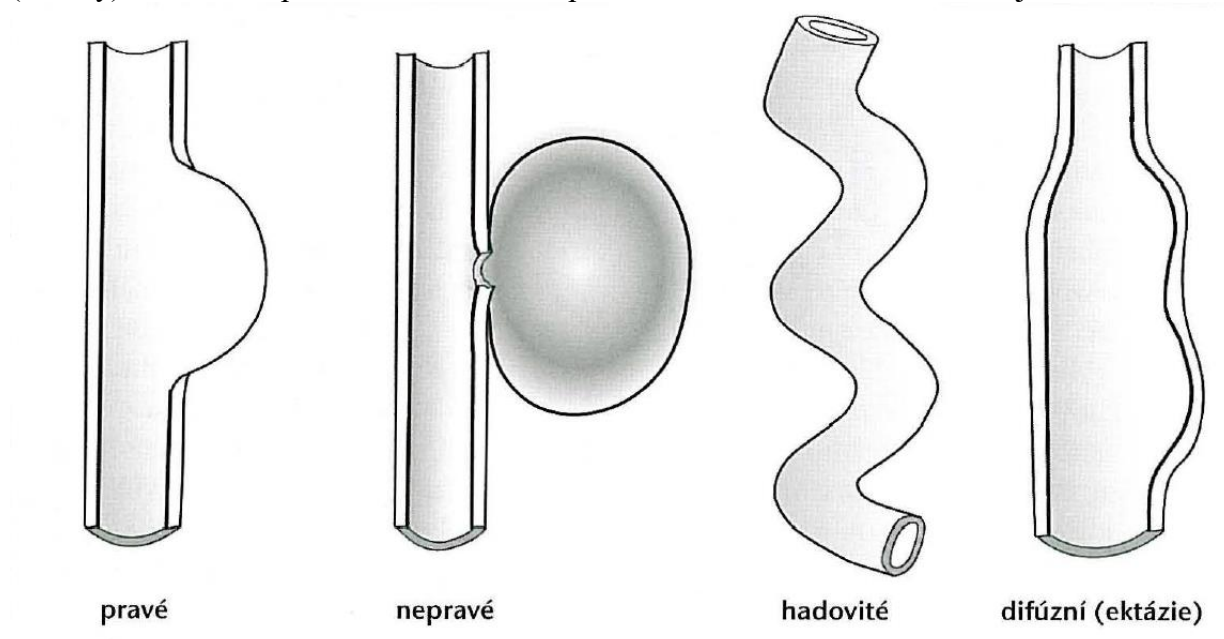
**Pravé aneurysma** má vřetenitý nebo vakovitý až kulovitý tvar a může dosahovat rozměrů až 15-20 cm, postihuje pak celý úsek od odstupů ledvinových tepen po bifurkaci aorty. V dnešní době je nejčastější příčinou ateroskleróza.

**Nepravé aneurysma**, nebo také pseudoaneurysma, vzniká při poškození stěn tepny. Po perforaci dochází k ohrazení krevního výronu a zastavení krvácení. V průběhu času dochází k zapouzdření hematomu do vazivové schránky.

**Hadovité aneurysma** je stav, ke kterému dochází při oslabení medie aterosklerózou, ale nedochází k rozšíření průměru tepny, nýbrž k jejímu prodloužení. Nadměrná délka vede k hadovitému tvaru.

**Arteriovenózní aneurysma** je buď vrozený nebo během života zformovaný útvar, ve kterém dochází k přímému propojení tepen a žil. Pokud je vrozené, vypadá jako chaotické klubko tepen, žil a vlásečnic a nejčastěji se vyskytuje v mozku, kde je možným zdrojem krvácení.

**Disekující aneurysma**, výraz používaný pro disekci aorty. Vzniká při defektu intimy a vzniku hematomu mezi intimou a mediou, který se může šířit. Takto dochází k odštěpení intimy a vzniku nového ramena, které má tendence k provalení. Pokud dojde k provalení zpět do tepny (reentry) má pacient šanci, provalení směrem ven je smrtelné.



Obrázek 3.1: Druhy aneurysmat, převzato z [8].

Pro potřeby této práce se dále budu zabývat pouze AAA, tedy pravým aneurysmatem břišní aorty. S postupem času aneurysma roste, což zvyšuje riziko ruptury. Při ruptuře dochází k masivnímu krvácení do retroperitonea a naděje na přežití jsou velice nízké. Z tohoto důvodu je velice důležité tento stav včas detekovat a preventivně řešit.

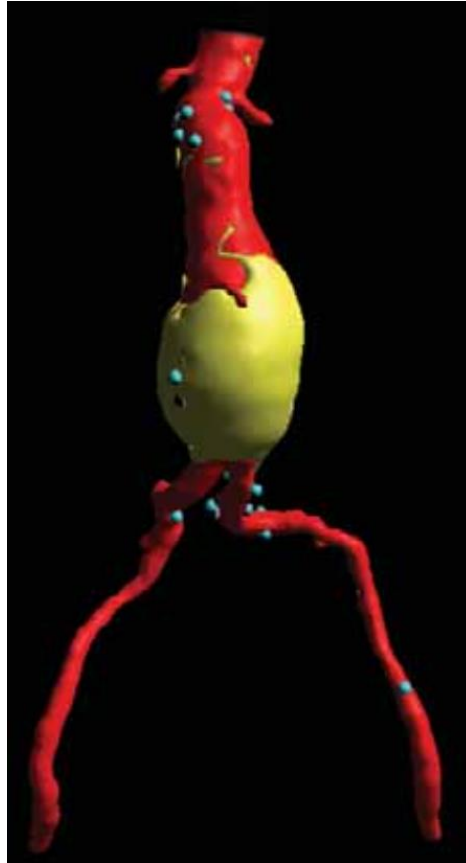
### 3.2. Výskyt a rizikové faktory

AAA je stav, jehož výskyt se primárně spojuje s dědičnými predispozicemi, vlivem prostředí a životním stylem. Existuje spojitost mezi AAA a arteriosklerózou, ale ne vždy se musí vyskytovat. Hlavním faktorem je věk a pohlaví, AAA se většinou vyskytuje u mužů a většina z nich je starších 65 let, ale i když se u žen nevyskytuje AAA tak často, hrozí u nich vyšší riziko ruptury. Významným přispěvatelem rizika vzniku AAA je kouření. Vliv kouření ovšem závisí na množství a u bývalých kuřáků riziko oproti současným s časem klesá. Vysoký krevní tlak a nezdravý životní styl taktéž zvyšují riziko výskytu AAA. Důležitý je také vliv dědičnosti. Výskyt aneurysma v rodině, zejména mezi mužskými příbuznými, nepříznivě ovlivňuje šance na vznik AAA. Významný je také vliv rasy, kdy výskyt u bělochů je významně vyšší než u ostatních ras. Nižší riziko výskytu AAA je u pacientů trpících cukrovkou z důvodů rozdílných procesů těchto nemocí. [2],[9]

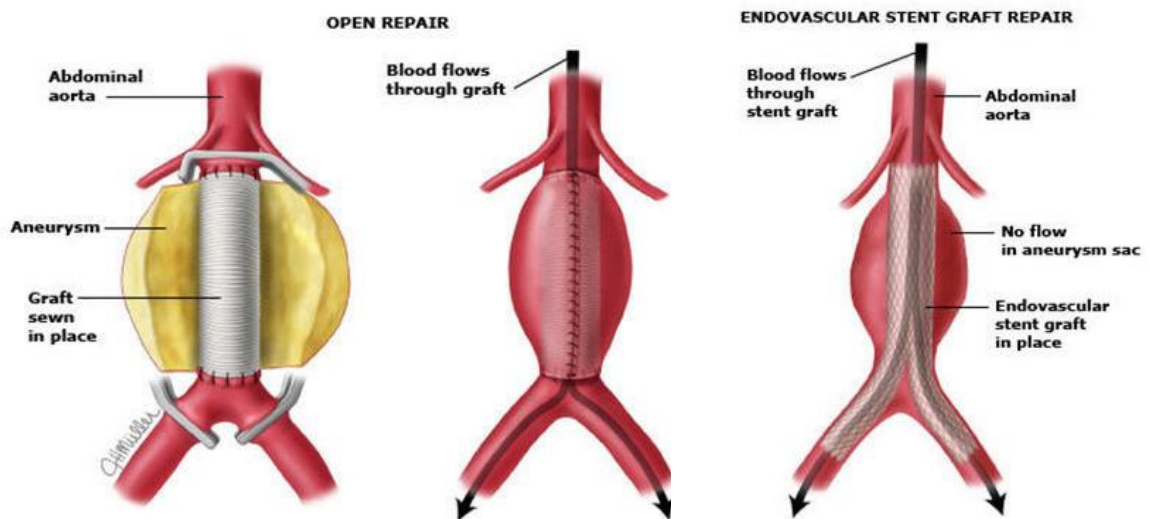
### 3.3. Detekce a léčba

Jelikož je AAA v klidovém stavu asymptomatické, je běžným vyšetřením velice těžko zjistitelné a včasná diagnóza je před propuknutím symptomů spíše náhodná. Přitom cílené ultrazvukové vyšetření dokáže s téměř 100% jistotou potvrdit přítomnost aneurysmatu. Proto je důležité, aby lékaři posílali na vyšetření pacienty z rizikových skupin popsaných výše. Za aneurysma se považuje trvalé rozšíření aorty na 1,5násobek normálního průměru a k preventivnímu opravnému zákroku dochází, pokud průměr přesáhne 5,5 cm nebo je roční přírůstek větší než 0,6 cm. Vývoj aneurysmatu je sledován průběžnými ultrazvukovými vyšetřeními a CT-skeny (obr. 3.2). Pokud se u pacienta začnou objevovat akutní symptomy, jako jsou bolesti v oblasti břicha nebo zad a pulzace v oblasti břicha, provede se urgentní CT vyšetření a po stabilizaci pacienta se přistupuje k operaci. [2]

Existují dvě hlavní metody opravy AAA, a to otevřená a endovaskulární (obr. 3.3). Tradiční **otevřená metoda** opravy vyžaduje přímý přístup k AAA skrze řez v břišní dutině a postižená oblast je nahrazena cévní protézou. Tato metoda je invazivnější, ale oproti endovaskulární je považována za definitivní a nejsou vyžadována následná radiologická vyšetření. **Endovaskulární oprava** se provádí zavedením stent graftu malými řezy na stehenních tepnách. Jakmile je stent na místě, roztáhne se a funguje jako bypass. Tímto způsobem snižuje tlak na stěny AAA a postupem času dochází k zmenšení a poklesu rizika ruptury. Zákrok je méně invazivní, ale je potřeba dalších radiologických vyšetření v daných intervalech k potvrzení účinnosti zákroku a případnému zjištění problému se stentem (problémy s fixací, posunutí, poškození). U endovaskulární metody je mírně nižší riziko úmrtí v nemocnici, ale v časovém horizontu pěti let byla úmrtnost u obou skupin stejná, navíc až u 2,8 % pacientů je potřeba provést následnou otevřenou opravu po endovaskulární léčbě. [2]



Obrázek 3.2: 3D CT sken AAA u symptomatického pacienta bez ruptury, převzato z [2].



Obrázek 3.3: Porovnání otevřené a endovaskulární metody opravy AAA, převzato z [10].

### 3.4. Zhodnocení rizika ruptury

Jak již bylo zmíněno výše, u asymptomatických AAA se riziko ruptury určuje pomocí maximálního průměru, kde se hraniční hodnota pohybuje okolo 55 mm. Dalším limitním faktorem je rapidní růst (za kritický se považuje růst o více než 6 mm za rok). Tyto faktory ovšem nejsou dostatečně určující, neboť dochází k rupturám aneurysmat o menších průměrech. Naopak jsou aneurysmata o průměru i 70 mm, kde k ruptuře nedošlo. [3]

K přesnější předpovědi se používají výpočtové modely založené na metodě konečných prvků (MKP), díky kterým je možné na modelech pořízených pomocí CT určit napětí ve stěně. Samotná hodnota napětí ovšem nestačí k posouzení nebezpečí, neboť aby došlo k ruptuře, musí hodnota napětí překročit limitní hodnotu napětí stěny tepny. Jelikož je však stěna tepny biologický materiál, její mechanické vlastnosti nejsou u všech lidí stejné a nemusejí být stejné ani na všech místech jednoho aneurysmatu.

Zkoumají se hypotézy, podle kterých mají geometrie aneurysmat vliv právě na lokální mechanické vlastnosti a napětí ve stěnách tepny. Mezi zkoumané veličiny patří lokální tloušťka stěny, Gaussova a střední křivost a samozřejmě lokální průměr. Ve studii [3] byl posuzován a statisticky analyzován vztah napětí stěny AAA a jeho geometrických veličin. Největší význam z hlediska predikce napětí ve stěně pomocí regresní analýzy vykazala lokální střední křivost.

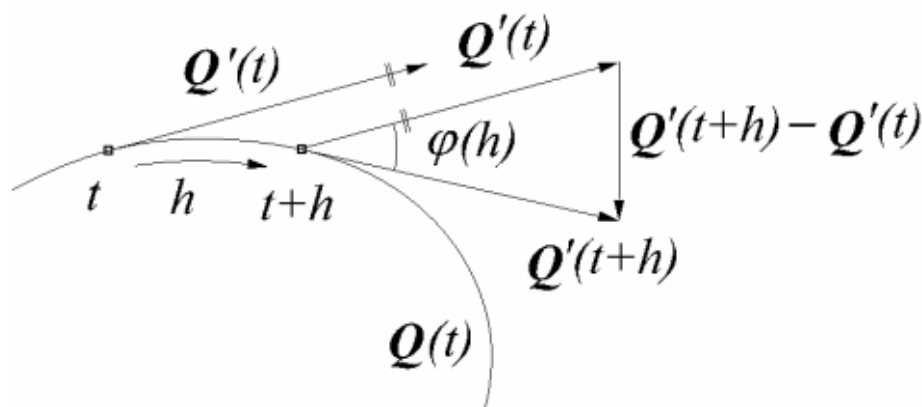
## 4. Křivost

### 4.1. Křivost křivky

Již ze střední školy známe oskulační kružnice kuželoseček. Jsou to kružnice, které mají právě jeden společný bod s danou křivkou a v tomto bodě mají i stejnou první a druhou derivaci. Křivost křivky ve společném bodě je obrácenou hodnotou poloměru oskulační kružnice procházející daným bodem.

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (4.1)$$

Nyní uvažujme regulární křivku  $\mathbf{Q}(t)$  a na ní dva různé body  $t$  a  $t+h$ . Každý z těchto bodů má směrový vektor, jsou to  $\mathbf{Q}'(t)$  a  $\mathbf{Q}'(t+h)$ . Úhel mezi těmito vektory označme jako  $\varphi(h)$ . [11]



Obrázek 4.1: Směrové vektory  $\mathbf{Q}'(t)$  a  $\mathbf{Q}'(t+h)$ , převzato z [11].

Vidíme, že pro jakékoliv  $h$  se bude velikost úhlu  $\varphi(h)$  zvětšovat, čím bude křivka „křivější“. Naopak, pokud bude křivka  $\mathbf{Q}(t)$  přímkou, úhel  $\varphi(h)$  bude nulový. Křivost můžeme tedy volně popsat jako odklon křivky od tečny. Číslo (4.2) nazýváme křivostí křivky  $\mathbf{Q}(t)$  v bodě  $t$ .

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} \quad (4.2)$$

Odtud lze dokázat výraz pro křivost křivky  $\mathbf{Q}(t)$  v bodě  $t$ :

$$\kappa = \frac{|\mathbf{Q}'(t) \times \mathbf{Q}''(t)|}{|\mathbf{Q}'(t)|^3} \quad (4.3)$$

Takto jsme schopni analyticky určit křivost libovolné rovinné křivky ve všech jejích bodech, které jsou regulární 2. řádu a vytvořit oskulační kružnice v těchto bodech.

Oskulační kružnice je možné vytvořit i pro prostorové křivky. V tomto případě je však třeba nejdříve určit rovinu, ve které bude oskulační kružnice ležet. Oskulační kružnici budeme sestavovat v rovině, určené vektory  $\mathbf{Q}'(t)$  a  $\mathbf{Q}'(t+h)$ , tedy vektorem  $\mathbf{Q}'(t+h) - \mathbf{Q}'(t)$ , respektive, jeho limitním případem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Q}'(t+h) - \mathbf{Q}'(t)}{h} = \mathbf{Q}''(t) \quad (4.4)$$

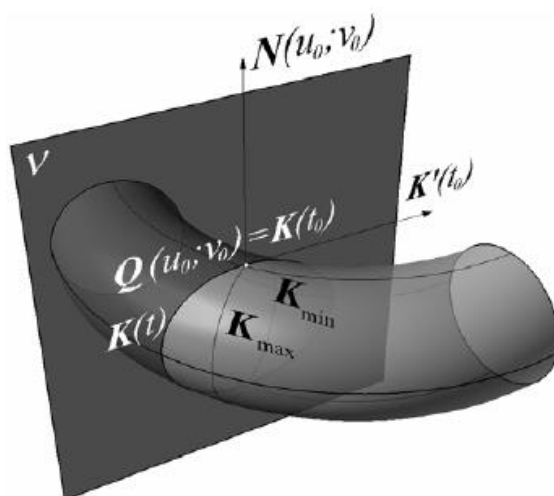
Rovina  $\sigma$  (4.5) se nazývá oskulační rovina křivky v bodě  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{Q}(t_0)$  a v ní ležící kružnice  $\mathbf{K}(t)$  je oskulační kružnice křivky  $\mathbf{Q}(t)$  v bodě  $t$ . S touto křivkou má obvykle jeden společný bod  $t$ , její poloměr je dán obrácenou hodnotou křivosti a její střed leží na normále křivky v oskulační rovině, kterou nazýváme **hlavní normálou křivky**.

$$\sigma = \mathbf{Q}(t_0) + \mathbf{Q}'(t_0)u + \mathbf{Q}''(t_0)v \quad (4.5)$$

Křivost je vyjádřena jako funkce parametru  $t$  a je u ní tedy možné určit extrémy. Lze tedy určit body s největší a nejmenší křivostí. Tyto body se nazývají **vrcholy křivky** a oskulační kružnice k těmto bodům se nazývají **hyperoskulační kružnice**.

## 4.2. Křivosti plochy

U ploch je situace složitější, protože ke každému bodu plochy je možné sestavit nekonečně mnoho ploch procházejících normálou dané plochy. Existuje tedy i nekonečně mnoho oskulačních kružnic o různých poloměrech pro každý bod plochy. Uvažujme tedy normálu  $\mathbf{N}(u_0; v_0)$  k ploše  $\mathbf{Q}(u; v)$  v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0)$  a proložme jí libovolnou plochou  $v$  (obr. 4.2). Tato plocha protne plochu  $\mathbf{Q}(u; v)$  a na průniku vytvoří křivku  $\mathbf{K}(t)$ . Nyní můžeme vytvořit vektor  $\mathbf{K}'(t)$ , v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0) = \mathbf{K}(t_0)$  provést výpočet křivosti  $\kappa$  v tomto bodě a nazvat ji **normálovou křivostí plochy**  $\mathbf{Q}(u; v)$  v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0)$ . Protože je normálová křivost závislá na zvoleném směru (rovině prokládané normálou), tak pro každý regulární bod plochy existují směry s největší a nejmenší normálovou křivostí. Tyto směry jsou označovány jako **hlavní směry** a křivosti k nim náležející jako **hlavní křivosti** plochy v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0)$ . [11]



Obrázek 4.2: Normálová křivost v bodě  $\mathbf{Q}(u_0; v_0)$ , převzato z [11].

### 4.3. Určování hlavních směrů a křivostí

V případě rovinné a kulové plochy je každý směr hlavní a normálová křivost je ve všech směrech stejná (nulová u roviny). Ve všech ostatních případech existují právě dva hlavní směry a ty jsou na sebe kolmé. [12]

Můžeme určit nenulový tečný vektor  $du^i$ , který leží v hlavním směru podle rovnosti (4.6), přičemž členy  $g_{ij}$  jsou **koeficienty první základní formy** a členy  $h_{ij}$  jsou **koeficienty druhé základní formy**. [12]

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 \cdot du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

Mějme tedy hlavní křivosti plochy ve dvou různých hlavních směrech  $k_1$  a  $k_2$  a platí  $k_1 \leq k_2$ . Potom můžeme vytvořit **Gaussovu křivost plochy** (4.7) a **střední křivost plochy** (4.8).

$$K = k_1 \cdot k_2 \quad (4.7)$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (4.8)$$

**GK** a **SK** mají některé důležité vlastnosti, které si nyní zmíníme. Pokud známe hlavní křivosti  $k_1$  a  $k_2$ , jsme pomocí Eulerova vzorce schopni určit normálovou křivost  $k_n$  ve směru určeném odchylkou  $\varphi$  od směru hlavní křivosti  $k_1$ .

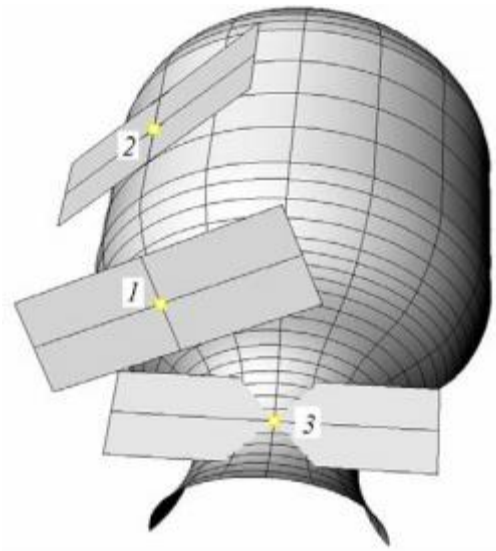
$$k_n = k_1 \cdot \cos \varphi + k_2 \cdot \sin \varphi \quad (4.9)$$

Další důležitou vlastností je, že poloviční součet navzájem kolmých normálových křivostí v bodě  $X$  je roven **SK** plochy v bodě  $X$ .

$$\frac{k_n^* + k_n^{**}}{2} = H \quad (4.10)$$

Podle hodnoty **GK** v bodech plochy jsme schopni rozlišit o jaké body se jedná. Pokud je  $H > 0$ , jedná se o eliptický bod, je-li  $H < 0$ , jde o hyperbolický bod a v případech, kdy  $H = 0$ , jsou tyto body buď parabolické nebo planární. V eliptických bodech má zadaná plocha a její normálová rovina v daném bodě společný pouze tento bod a obě hlavní křivosti mají stejné znaménko. V parabolických bodech má normálová rovina s plochou společnou část přímky, která je totožná s jedním hlavním směrem a hlavní křivost v tomto směru je nulová. V hyperbolických bodech prochází normálová rovina plochou a na řezu se objevují části hyperboly. Hlavní a vedlejší osy této hyperboly jsou hlavní směry v tomto bodě a platí, že jedna hlavní křivost má kladnou hodnotu a druhá zápornou. Pokud jsou na ploše přítomny jak body hyperbolické, tak i eliptické, budou v ní ležet i body parabolické. [11],[12]





Obrázek 4.3: *Druhy bodů na ploše*, převzato z [11].

Popis: 1 – eliptický bod, 2 – parabolický bod, 3 – hyperbolický bod.

## 5. Určování křivosti na konečnoprvkových sítích

Dosud se tato práce zabývala pouze analytickým určováním křivosti na spojitých a jednoznačně popsaných plochách, ale tento přístup není možné aplikovat na konečnoprvkové sítě používané pro zadání MKP analýzy, kde je plocha určena pomocí sítě diskretních bodů. Jedná se o aproximaci plochy pomocí uzlů o daných souřadnicích a elementů, které jsou určeny pomocí uspořádaného seznamu jejich uzlů. Protože většinou není možné přesně a jednoznačně proložit všemi těmito body plochu pro analytický výpočet, je potřeba zvolit jiný způsob.

Těchto způsobů existuje celá řada a každý z nich podává různé výsledky v závislosti na konkrétním algoritmu a vstupních datech. Neexistuje tedy univerzální nástroj pro všechny případy a pro konkrétní aplikaci je nutné vybrat vhodný algoritmus. Vyskytují se dva hlavní přístupy. Prvním je vytvoření hladkého povrchu aproximací uzlů na části plochy a vypočtení křivosti na této spojitě geometrii. Druhý způsob určuje křivost nebo související veličiny přímo z trojúhelníkové sítě. Aby bylo možné získat smysluplné výsledky, musí být vypočtené veličiny integrované na určité oblasti. Křivost v bodě je poté určena normalizovaným integrálem na velice malé ploše. [13]

Kritický vliv na přesnost výpočetních algoritmů má přítomnost datového šumu. Pokud je algoritmus určený pro použití na sítích se šumem (např. 3D skeny objektů), pracuje s širším okolím bodu a kvůli vyhlazování ztrácí lokální přesnost.

Některé algoritmy spoléhají na přítomnost normál v uzlech sítě. Pokud tyto normály však nejsou přesně zadány a musejí se aproximovat, budou tyto algoritmy už z principu méně přesné.

Studie [13] se zabývá možnostmi stávajících algoritmů sloužících k výpočtu křivosti na různých trojúhelníkových sítích a posouzení vhodnosti jejich použití pro různé případy. Autoři této práce také vytvořili řešič, který na základě analýzy vstupních dat provede výběr vhodného výpočetního algoritmu.

### 5.1. Metody výpočtu křivosti

Nyní si uděláme přehled některých používaných metod z hlediska principu a vhodnosti jejich použití. Jednotlivé metody jsou zde rozděleny podle autorů, ale algoritmy založené na zde popsaných principech se vyskytují i jinde.

#### 5.1.1. Cohen-Steiner & Morvan

Přístup založený na výpočtu integrovaných operátorů tvaru (s vyměněnými vlastními čísly) na malé ploše sítě. Tento přístup staví na tom, že tento operátor je nenulový pouze na hranách, a i tam může být jeho integrál vypočítán z torsního úhlů. Křivosti jsou získány dekompozicí vlastních čísel odhadovaného operátoru. [13]

Tato metoda je vhodná pro sítě zatížené šumem, protože je schopna eliminovat jeho vliv. Z toho samého důvodu se nehodí pro použití na sítě nezatížené šumem, dochází k vyhlazování a klesá přesnost lokální křivosti.

#### 5.1.2. Goldfeather & Interrante

Metoda založená na jednom z nejpoužívanějších principů, tedy aproximací lokálního povrchu kružnicemi anebo parabolami. Tento přístup vytváří oskulační proud, který je obvykle

popisován pomocí matice  $2 \times 2$ , kde vlastní čísla odpovídají křivostem proudu v počátku. Je to jedna z metod, která je závislá na normálách v bodech.

Metoda je vhodná pro sítě bez šumu, z důvodu jejího lokálního zaměření. Poskytuje na těchto sítích velice dobré výsledky i v případech, kdy síť není úplně regulární.

### **5.1.3. Hildebrandt & Polthier**

Hlavní křivosti mohou být získány pomocí tvarových operátorů. V tomto případě jsou navrženy dvě zobecněné verze tvarových operátorů  $\hat{S}, \bar{S}$  a jejich lokální odhad je odvozen pomocí lokální funkce. Oba zobecněné operátory mohou být konvertovány na standardní tvarový operátor  $S$ , ze kterého je možné získat křivosti.

Tento algoritmus je určený pro sítě zatížené šumem, kdy poskytuje relevantní výsledky a stabilitu při správně zvolené šířce lokálního okolí.

### **5.1.4. Meyer**

Tato metoda je založená na dalším velmi používaném principu, tedy na diskretizaci Laplace-Beltramiho operátoru. Výpočtem diskrétního Laplaceova operátoru na trojúhelníkové síti je možné získat normálu hlavní křivosti, ze které je možné poměrně jednoduše vypočítat hodnotu střední křivosti.

Jedna z nejpřesnějších metod pro výpočet křivostí na sítích bez šumu, avšak za předpokladu, že daná síť je regulární.

## **5.2. Volba vhodné metody**

Metodu pro výpočet křivosti budeme volit na základě charakteristiky plochy, na které bude analýza prováděna. Jelikož zkoumanou plochou je idealizované aneurysma, bude jeho model vytvořen pomocí modelářského programu a na něm vytvořená síť nebude zatížena šumem. Podle těchto kritérií můžeme zvolit z používaných metod. [13] V tomto případě se jeví jako vhodní kandidáti metody podle Goldfeathera a Meyera. Pro další výpočty volíme způsob podle Goldfeathera, protože poskytuje relativně přesné výsledky i na sítích, které nemají pravidelné elementy.

## 6. Výpočet křivostí na idealizovaném modelu AAA

Prvním krokem pro určení hlavních směrů a následně hlavních křivostí na povrchové síti je určení normálových vektorů  $N'_p$  pro každý bod sítě. Tyto jsou buď známé z modelu, nebo jsou určeny pomocí normál elementů, jejichž je bod  $p$  vrcholem, jako jejich vektorový součet. Dalším krokem je určení ortonormálních vektorů  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$ , které leží v rovině procházející bodem  $p$  s normálou  $N'_p$ . Tímto způsobem vytvoříme lokální prostorový ortonormální souřadný systém  $L = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, N'_p\}$ . [14]

Mějme  $W$  jako neznámou Weingartenovu matici vztaženou na lokální souřadný systém  $L$  v bodu  $p$ . Předpokládejme, že existuje  $n$  vrcholů sousedících s  $p$  a označme je jako  $q_i$ . Označíme poté  $\mathbf{y}_i$ , jednotkový vektor vzniklý promítnutím vektoru  $pq_i$  do plochy procházející bodem  $p$  s normálovým vektorem  $N'_p$ . Normálová křivost ve směru udaném vektorem  $\mathbf{y}_i$  je určena podle vzorce (6.1). Aproximace jednotlivých dílčích normálových křivostí je popsána vzorcem (6.2) a jedná se o křivost jednotlivých oskulačních kružnic procházejících body  $p$  a  $q_i$  s normálou  $N'_p$ .

$$k'_{\mathbf{y}_i} = \mathbf{y}_i^T \cdot W \cdot \mathbf{y}_i \quad (6.1)$$

$$k'_{\mathbf{y}_i} = 2 \frac{(p-q_i) \cdot N'_p}{(p-q_i) \cdot (p-q_i)} \quad (6.2)$$

Takto získáváme soustavu rovnic pro  $i = 1, 2, \dots, n$ , kde  $n$  je počet bodů sousedících s bodem  $p$ . Nyní je potřeba určit  $W$ . Jestliže napíšeme  $W$  a  $\mathbf{y}_i$  ve tvaru (6.3), můžeme provést následující úpravu vzorce (6.1):

$$W = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_i = (u_i, v_i) \quad (6.3)$$

$$k'_{\mathbf{y}_i} = \mathbf{y}_i^T \cdot W \cdot \mathbf{y}_i = (u_i \quad v_i) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = (u_i^2 \quad 2u_i v_i \quad v_i^2) \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Nyní může být tato rovnice upravena na maticovou rovnici (6.5) s následující substitucí.  $U$  je  $n \times 3$  matice s řádky  $(u_i^2 \quad 2u_i v_i \quad v_i^2)$ ,  $\mathbf{x}$  je transponovaná matice  $(A \ B \ C)$  a  $\mathbf{d}$  je  $n$ -vektor, kde jednotlivé členy jsou hodnoty  $k'_{\mathbf{y}_i}$ .

$$U\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad (6.5)$$

Matice  $U$  závisí na směrových vektorech promítnutých do tečné roviny a tyto vektory jsou určeny body sítě.  $U$  je tedy závislé na parametrech konečnoprvkové sítě, které ovlivňují přesnost vypočtených hodnot. V případě, že hodnoty ve vektoru  $\mathbf{d}$  jsou skutečné hodnoty normálových křivostí, bude mít tato soustava rovnic přesné řešení. V praxi je ovšem nutné použít metodu nejmenších čtverců pro nalezení vektoru  $\mathbf{x}$ . Vypočtená matice  $W$  slouží k určení

hlavních směrů. Vlastní čísla matice  $W$  (6.7) jsou aproximované hlavní křivosti  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  v bodě  $p$  a vlastní vektory  $p_1$  a  $p_2$  (6.6), jsou směrové vektory těchto aproximovaných hlavních křivostí v lokálním souřadném systému  $L$ . Další druhy křivostí lze jednoduše vypočítat pomocí vzorců (4.7) a (4.8).

$$(W - \lambda E) \cdot p = 0 \quad (6.6)$$

$$\det(W - \lambda E) = 0 \quad (6.7)$$

Další variantou této metody je aproximace sousedních bodů kvadratickou plochou. Opět je nutné vytvořit lokální souřadný systém, ve kterém v ose  $z$  leží normála daného bodu. Aproximace se provádí plochou tohoto tvaru:

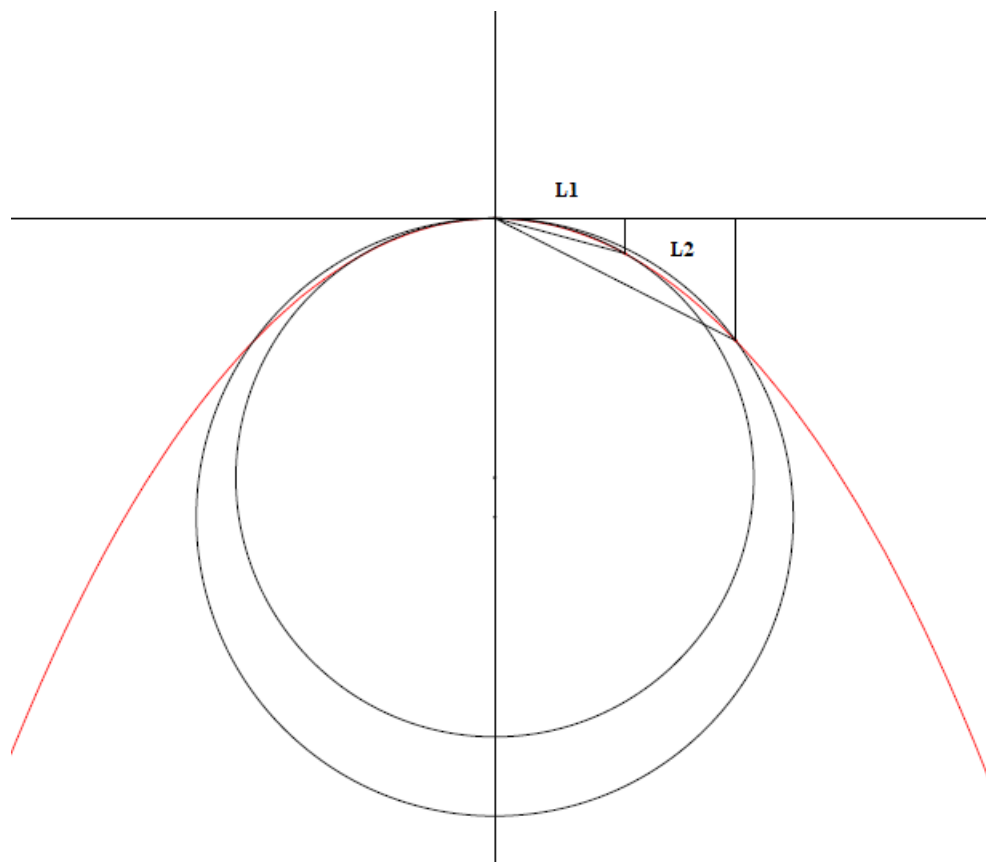
$$z = f(x, y) = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2 \quad (6.8)$$

Koeficienty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  jsou opět členy Weingartenovy matice a je tedy možné získat hodnoty hlavních křivostí a jejich směrů jako vlastní čísla a vektory této matice. Pro jejich získání je třeba řešit soustavu rovnic podobného tvaru jako u předchozí metody. (6.9) Znovu není výsledek jednoznačný a je nutné provést výpočet metodou nejmenších čtverců. Způsob výpočtu je tedy podobný jako v předchozím případě, avšak pro aproximaci křivostí nejsou použity kružnice, ale paraboly.

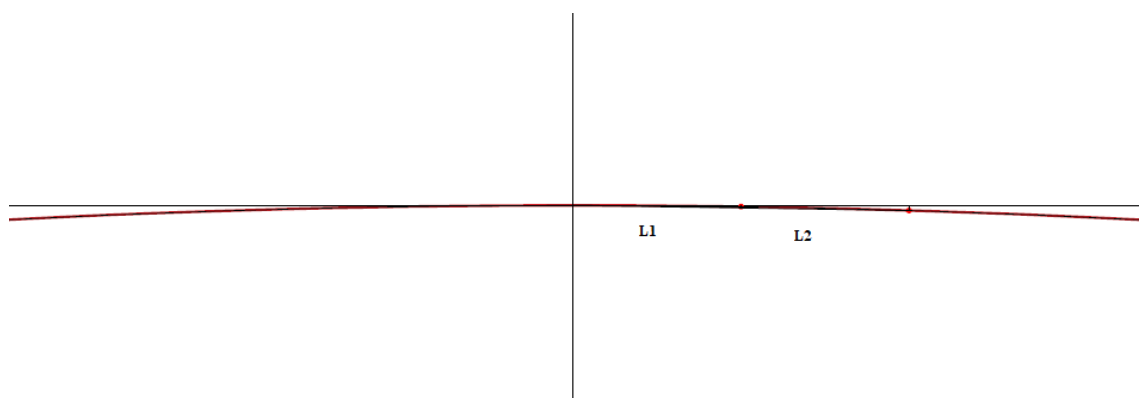
$$\left( \frac{1}{2}x_i^2 \quad x_i y_i \quad \frac{1}{2}y_i^2 \right) \mathbf{x} = z_i \quad (6.9)$$

Je nutné vyhodnotit přesnost na známých geometriích a vliv hustoty sítě na přesnost výpočtu. Jelikož je tato metoda založena na aproximaci pomocí oskulačních kružnic nebo kvadratických ploch, je tato aproximace přesná, pokud je v blízkém okolí bodu křivost konstantní. Na rovinné, kulové nebo válcové ploše je tedy tato metoda přesná. Záleží ovšem na způsobu získání normál, pokud jsou tyto získávané ze soustavy diskrétních bodů, např. pomocí normál elementů, může docházet k chybám, protože vektor získaný aproximací je zdrojem chyby. Jelikož je tato normála stěžejní pro další výpočty, chyba se může kumulovat. Pokud se však normály v bodech dají považovat za přesné, je možné v takovýchto oblastech plochy použít hrubší síť a nebude to mít větší vliv na přesnost. Naopak v oblastech, kde je změna křivosti značná, velice záleží na hustotě sítě. Tento jev je znázorněn na obrázcích (obr. 6.1.) a (obr. 6.2), kde je na jednotlivých osách znázorněna aproximace hyperoskulačních kružnic na jedné elipse. V obou případech jsou použity dva body se shodnými vzdálenostmi od příslušného vrcholu jako znázornění dvou rozdílných hustot sítě. Na druhém obrázku je však velice těžké rozlišit jednotlivé oskulační kružnice, právě z důvodu velmi malé změny křivosti ve velmi malém okolí bodu. Pro efektivní použití je tedy vhodné vytvořit síť, která bude hrubá v oblastech s malou změnou křivosti a v oblastech s velkou změnou křivosti, které nás pravděpodobně zajímají, bude síť zjemněná.

Co se týká přesnosti na geometriích s analyticky vypočítanou křivostí a porovnáním s výsledky získanými touto metodou, vykazuje tato metoda vysokou přesnost na sítích nezatížených šumem, a to i v porovnání s jinými dostupnými metodami. [13]



Obrázek 6.1: *Aproximace hyperoskulační kružnice elipsy I*



Obrázek 6.2: *Aproximace hyperoskulační kružnice elipsy II*

Popis: V obou případech je použita elipsa  $a=40$  mm a  $b=10$  mm. L1 je v obou případech 1 mm a L2=2 mm.

## 6.1. Algoritmus řešení

Nyní si specifikujeme vlastní algoritmus výpočtu křivosti v bodě  $p$ .

- Získání normál  $N'_p$  v bodech sítě (buďto existujících nebo aproximací z normál elementů)
- Vytvoření lokálního ortonormálního souřadného systému  $L$
- Určení sousedních bodů  $q_i$
- Transformace souřadnic bodů  $q_i$
- Lokální aproximace kvadratickou plochou
- Výpočet vektoru  $x$  z rovnice (6.9) pomocí metody nejmenších čtverců
- Pomocí získaných hodnot matice  $W$  se vypočítají hlavní křivosti  $\lambda_1, \lambda_2$  a jednotkové vektory hlavních směrů  $p_1, p_2$
- Hodnoty GK a SK vypočteme z  $\lambda_1, \lambda_2$

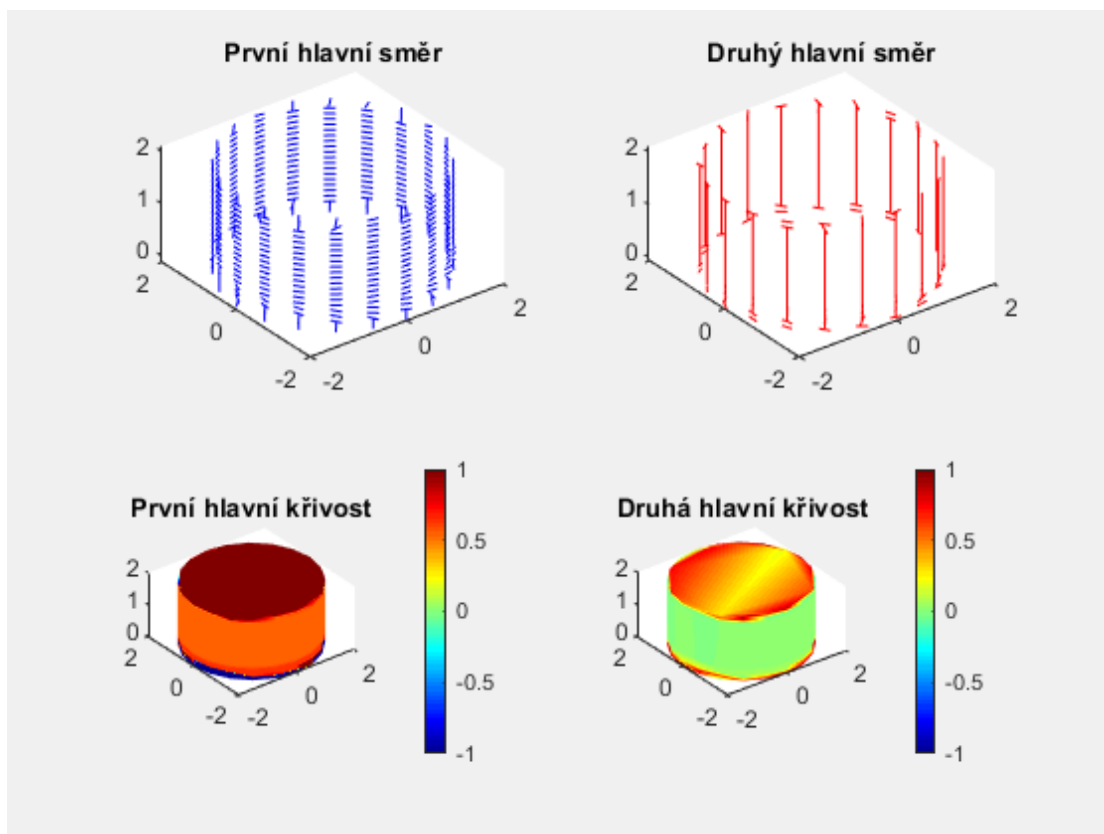
## 6.2. Výpočet

Algoritmus je aplikovaný v programu MATLAB, ve kterém jsou tvořeny i sítě pro jeho použití. Pro otestování algoritmu jsou použity geometrie, na kterých jsme schopni přesně určit hlavní křivosti v každém bodě. V tomto případě se jedná o válcovou plochu, kulovou plochu a rotační elipsoid. Na těchto plochách je v každém bodě analyticky určena jednotková normála a hodnoty křivosti pro porovnání. Pro dílčí úkony jsou použity některé funkce vytvořené uživateli z databáze MathWorks a vzorce použité pro analytický popis jsou převzaty z portálu MathWorld. [15],[16],[17]

Nejdříve byl program vyzkoušen na válcové ploše. Plocha je zadána parametricky, takže síť bodů je pravidelná. Kvůli způsobu tvoření sítě se objevují hodnoty křivosti i na otevřených koncích válcové plochy. Na hraně nedokáže tento skript získat relevantní výsledky, nejvíce je to patrné na vektorech hlavních křivosti. Vypočtené hodnoty nejsou zcela přesné, pokud však pomíneme chyby na koncích plochy, tak se blíží analytickým hodnotám. Jelikož byla použita metoda aproximace parabolou, vliv hustoty sítě na přesnost vypočtených křivosti je znatelný. Na obrázcích (obr. 6.3) a (obr. 6.4) je válcová plocha s poloměrem  $r = 2$  a výškou  $l = 2$ . V prvním případě je použita hrubší síť a relativní chyba střední křivosti se pohybuje okolo 12 %, ve druhém případě byla použita jemnější síť a tato chyba, mimo hodnoty na koncích plochy, je pod 2 %.

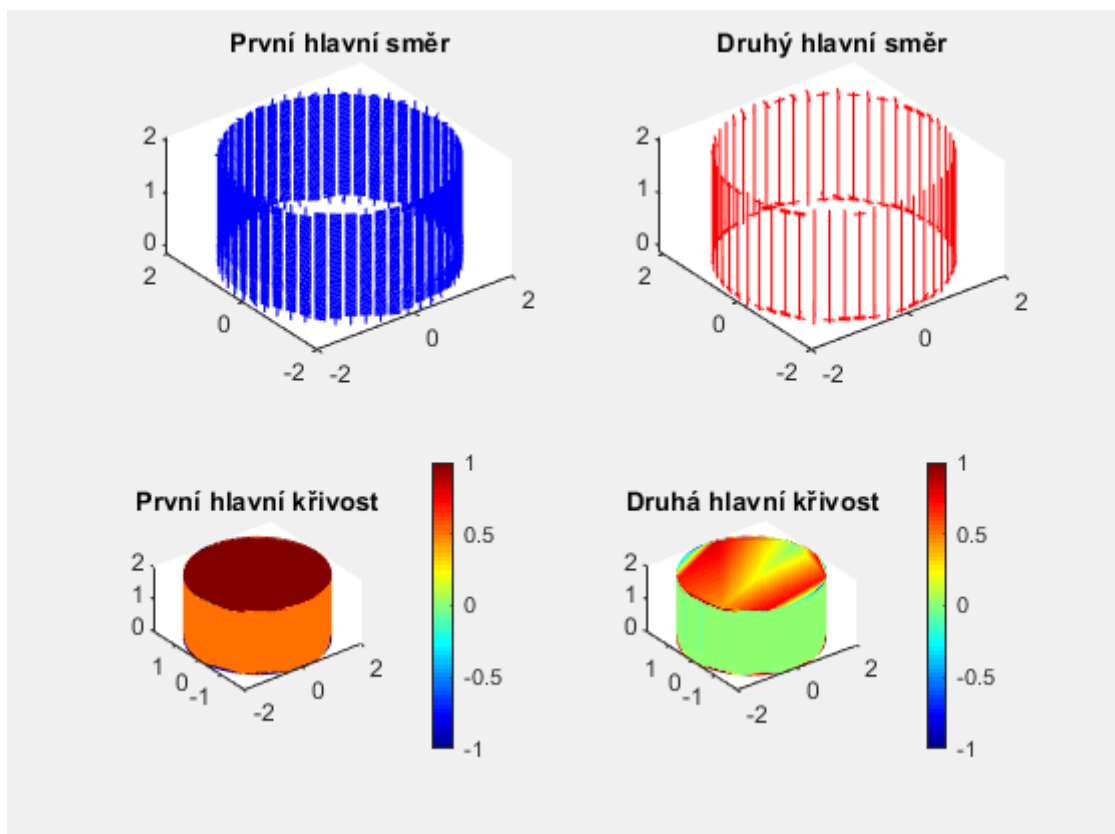
Další zkoušenou geometrií je elipsoid. Opět byl zadán parametricky. Volbou velikostí hlavních poloos je tedy možné vytvořit všechny jeho varianty, kulovou plochu, rotační elipsoid a obecný elipsoid. Na obrázku (obr. 6.5) je vidět odlišně zbarvená oblast. V této oblasti dochází k otočení znaménka, ale ne ke změně velikosti. To je zřejmé z (obr. 6.6), kde jsou hodnoty křivosti použity jako absolutní hodnoty. Změna znaménka křivosti určuje, že dochází k přechodu mezi konkávní a konvexní oblastí. To ovšem na kulové ploše není možné. Získaná hodnota křivosti na kulové ploše o poloměru  $r = 10$  byla v případě hrubší sítě  $\lambda_1 \cong \lambda_2 = 0,113$  a u jemnější sítě  $\lambda_1 \cong \lambda_2 = 0,106$ .

V případě, že prodloužíme jednu hlavní osu, kulová plocha se protáhne na rotační elipsoid. Tento útvar už nemá konstantní hodnotu křivosti. I v tomto případě dochází k otočení znaménka. Při použití absolutní hodnoty se objevuje oblast neodpovídající rozložení křivosti na rotačním elipsoidu (obr. 6.7). Jedná se o oblast nespojitosti vzniklou v důsledku způsobu tvorby sítě. Tato a další podobné oblasti nejsou tedy chybou algoritmu, ale použitých vstupních dat. Na zbytku elipsoidu je vidět postupné zvětšování křivosti směrem k vrcholu s minimem na středovém průměru. Hodnota první hlavní křivosti tady téměř přesně odpovídá analytické hodnotě, tedy  $\lambda_1 = 0,1$ . Křivost ve vrcholu je analyticky 0,3 pro  $a = 10$  a  $b = 30$ , tato hodnota se sice v okolních bodech vyskytuje, ale maximální hodnoty křivosti ve vrcholu směřují k 0,6. Ke zpřesnění nedochází, ani při zjemnění sítě. V tomto případě je tedy algoritmus schopný detekovat místa s maximální křivostí, ale není schopen danou křivost přesně určit.

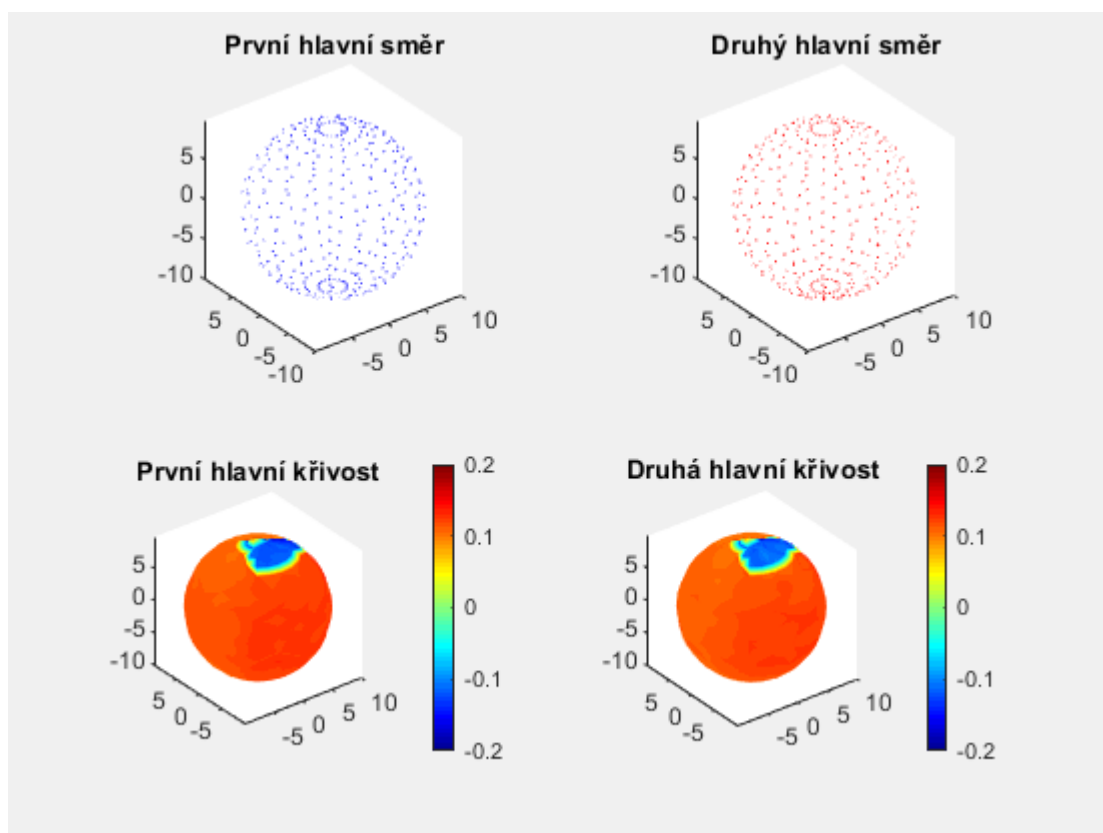


Obrázek 6.3: Vypočtené hodnoty křivosti na válcové ploše ( $n = 20$ )

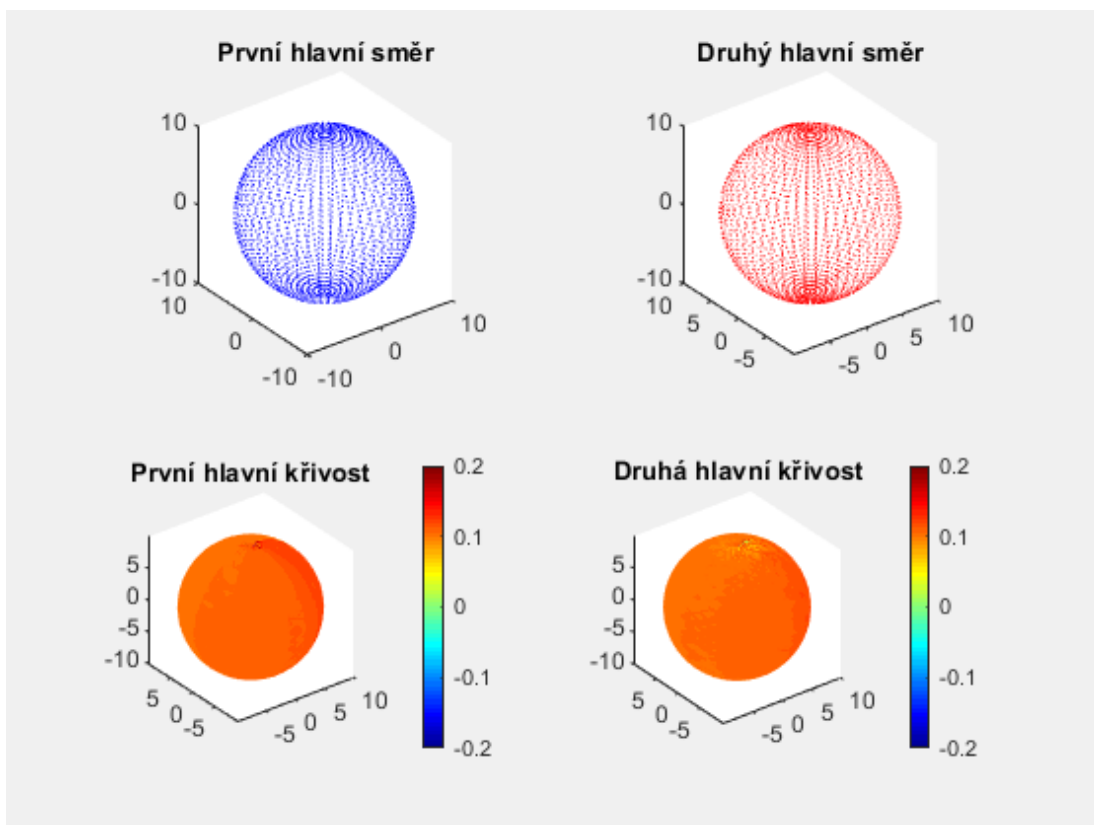




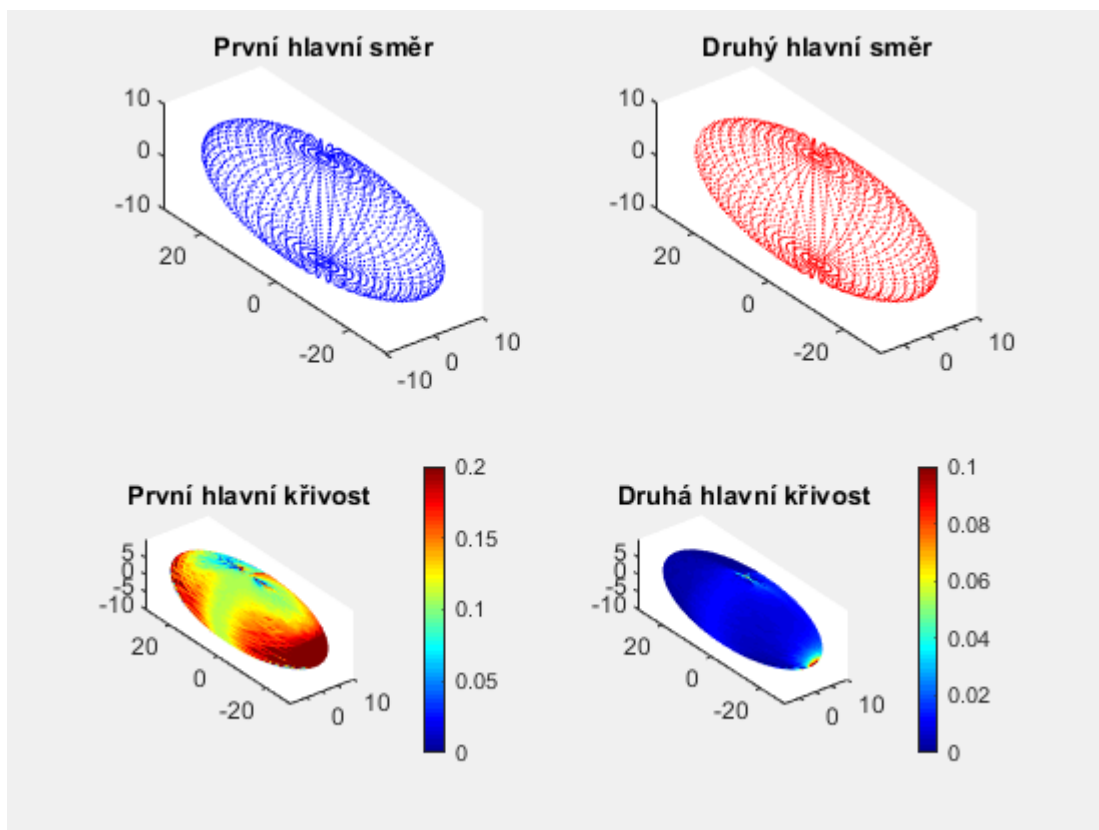
Obrázek 6.4: Vypočtené hodnoty křivosti na válcové ploše ( $n = 50$ )



Obrázek 6.5: Vypočtené hodnoty křivosti na kulové ploše ( $a = b = c = 10, n = 20$ )



Obrázek 6.6: Vypočtené hodnoty křivosti na kulové ploše, absolutní hodnoty křivosti ( $a = b = c = 10, n = 50$ )



Obrázek 6.7: Vypočtené hodnoty křivosti na rotačním elipsoidu, absolutní hodnoty křivosti ( $a = c = 10, b = 30, n = 50$ )

## 7. Závěr

Vytvořeným algoritmem byly určena křivosti na parametricky popsaných elementárních geometriích. Po menších úpravách by měl být použitelný pro určování křivosti na sítích vytvořených i v jiných softwarech, než je MATLAB. Aplikace těchto sítí by mohla eliminovat problémy spojitosti, které se vyskytly na rotačním elipsoidu. Aby mohly být tyto sítě využity, bude nutné přidat algoritmus pro aproximaci normál jednotlivých bodů pomocí normál elementů. Dále je potřeba určit důvod změny znaménka na ploše kde nedochází k přechodu mezi konkávní a konvexní oblastí. Pro použití na složitějších geometriích je potřebné, aby tato znaménková konvence bezchybně fungovala.

Pro určování křivosti na konečnoprvkových sítích se používá celá řada dalších metod, které se neustále vyvíjejí, ale žádná z nich není vhodná pro všechny aplikace. Proto si myslím, že dalším krokem je vytvoření programů, které na základě parametrů sítě vyberou vhodný algoritmus a provedou řešení [13]. Tímto způsobem bude možné pomocí jednoho rozhraní, bez nutnosti hlubšího pochopení problematiky, vypočítat křivost na modelech idealizovaných aneurysmat vytvořených pomocí modelovacího softwaru bez šumu a reálných aneurysmat, jejichž model byl vytvořen za použití CT skenu. Pokud se prokáže hypotéza o bližší spojitosti lokální křivosti a napětí ve stěně, bude tímto způsobem možné přímo v nemocnici, bez použití programů pro analýzu MKP a s tím spojených vyškolených pracovníků, určit potenciálně nebezpečné výdutě a přispět tak k jednodušší a účinnější prevenci tohoto onemocnění.

## 8. Seznam použitých zdrojů

- [1] SAKALHASAN, N., et al., Abdominal Aortic Aneurysm. *Lancet* [online]. 2005, 365(9470), pp. 1577–1589 [cit. 2018-05-13]. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(05\)66459-8](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(05)66459-8)
- [2] UPCHURCH, G. R., and SCHAUB, T. A., 2006, Abdominal Aortic Aneurysm,” *Am. Fam. Phys.* [online]. 2006, 73(7), pp. 1198–1204 [cit. 2018-05-13]. Dostupné z: <https://www.aafp.org/afp/2006/0401/p1198.html>
- [3] RUIZ DE GALARRETA, Sergio, AITOR, Cazon, ANTÓN, Raúl and FINOL, Ender, The Relationship Between Surface Curvature and Abdominal Aortic Aneurysm Wall Stress. *Journal of Biomechanical Engineering* [online]. May 2017, 139(8) [cit. 2018-05-15]. DOI: 10.1115/1.4036826. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/317150544\\_The\\_Relationship\\_Between\\_Surface\\_Curvature\\_and\\_Abdominal\\_Aortic\\_Aneurysm\\_Wall\\_Stress](https://www.researchgate.net/publication/317150544_The_Relationship_Between_Surface_Curvature_and_Abdominal_Aortic_Aneurysm_Wall_Stress)
- [4] SILBERNAGL, Stefan a Agamemnon DESPOPOULOS. *Atlas fyziologie člověka*. Vydání druhé české podle třetího německého, přepracovaného a rozšířeného. Praha: Grada Avicenum, 1993, 352 stran: barevné ilustrace. ISBN 80-85623-79-X.
- [5] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie 3*. 2. vyd. Praha: Grada Publishing, 2002, 655 s. ISBN 80-7169-140-2.
- [6] WikiSkripta [online]. [cit. 2018-05-13]. Dostupné z: <https://www.wikiskripta.eu/w/Srdce>
- [7] WikiSkripta [online]. [cit. 2018-05-13] Dostupné z: <https://www.wikiskripta.eu/w/Aorta>
- [8] POVÝŠIL, Ctibor a Ivo ŠTEINER. *Speciální patologie*. Druhé doplněné a přepracované vydání. Praha: Galén, 2007 ISBN 978-80-7262-494-2
- [9] KENT, K. Craig, Robert M. ZWOLAK, Natalia N. EGOROVA, Thomas S. RILES, Andrew MANGANARO, Alan J. MOSKOWITZ, Annetine C. GELIJNS a Giampaolo GRECO. Analysis of risk factors for abdominal aortic aneurysm in a cohort of more than 3 million individuals. *Journal of Vascular Surgery* [online]. Mosby, 2010, 52(3), 539-548 [cit. 2018-05-15]. DOI: 10.1016/j.jvs.2010.05.090. ISSN 0741-5214. Dostupné z: [https://www.jvascsurg.org/article/S0741-5214\(10\)01302-9/fulltext](https://www.jvascsurg.org/article/S0741-5214(10)01302-9/fulltext)
- [10] Bangkok hospital [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: [https://www.bangkokhospital.com/heart/hospital/en/heart-health-info/heart-disease-and-treatment/57/full\\_detail/disease](https://www.bangkokhospital.com/heart/hospital/en/heart-health-info/heart-disease-and-treatment/57/full_detail/disease)
- [11] Matematika online [online]. [cit. 2018-05-17]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/default.aspx>
- [12] BUDINSKÝ, Bruno. *Analytická a diferenciální geometrie*. Praha: SNTL, 1983, 296 s.
- [13] VÁŠA, L., P. VANĚČEK, M. PRANTL, V. SKORKOVSKÁ, P. MARTÍNEK a I. KOLINGEROVÁ. Mesh Statistics for Robust Curvature Estimation. *Computer Graphics Forum* [online]. 2016, 35(5), 271-280 [cit. 2018-05-17]. DOI: 10.1111/cgf.12982. ISSN 0167-7055. Dostupné z: <https://doi-org.ezproxy.lib.vutbr.cz/10.1111/cgf.12982>
- [14] GOLDFEATHER, Jack a Victoria INTERRANTE. A novel cubic-order algorithm for approximating principal direction vectors. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* [online]. ACM, 2004, 23(1), 45-63 [cit. 2018-05-19]. DOI: 10.1145/966131.966134. ISSN 0730-0301. Dostupné z: <https://dl-acm-org.ezproxy.lib.vutbr.cz/citation.cfm?doid=966131.966134>

- [15] KROON, D. J., 2014, *Patch Curvature*, MathWorks, Natick, MA [online] [cit. 2018-05-20]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32573-patch-curvature>
- [16] MathWorks [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- [17] Wolfram MathWorld [online]. [cit. 2018-05-21]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/>

## 9. Seznam použitých zkratk a symbolů

Zkratka	Popis	Jednotka
AAA	aneurysma abdominální aorty	
CT	computed tomography (výpočetní tomografie)	
MKP	metoda konečných prvků	
GK	Gaussova křivost	
SK	střední křivost	
$\kappa$	křivost	$[\text{mm}^{-1}]$
$k_1$	maximální hlavní křivost plochy	$[\text{mm}^{-1}]$
$k_2$	minimální hlavní křivost plochy	$[\text{mm}^{-1}]$
$k_n$	normálová křivost plochy v určitém směru	$[\text{mm}^{-1}]$
$K$	Gaussova křivost plochy	$[\text{mm}^{-2}]$
$H$	střední křivost plochy	$[\text{mm}^{-1}]$
$\varphi$	úhlová odchylka	$[\text{rad}]$
$p$	bod na konečnoprvkové síti	$[-]$
$q_i$	bod sousedící s bodem $p$	$[-]$
$N'_p$	normálový vektor v bodě $p$	$[-]$
$\vec{p}q_i$	směrový vektor bodu $q_i$	$[-]$
$y_i$	promítnutí vektoru $\vec{p}q_i$ do tečné roviny	$[-]$
$W$	Wiengartenova matice	$[-]$
$A, B, C$	členy Wiengartenovy matice	$[-]$
$k'_{y_i}$	křivost oskulační kružnice procházející body $p$ a $q_i$	$[-]$
$\lambda_1, \lambda_2$	aproximované hlavní křivosti v bodě $p$	$[-]$
$p_1, p_2$	hlavní směry aproximovaných hlavních křivostí	$[-]$
$\mathbf{E}$	jednotková matice	$[-]$

## 10. Seznam příloh

Přílohou této práce je CD s těmito soubory:

- elektronická verze této práce
- adresář **Krivost** obsahující souboru programu MATLAB použité ve výpočetní části