

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

Zita PETROŠOVÁ

**ÚVOD DO TEORIE GEODETICKÝCH
ZOBRAZENÍ**

Diplomová práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Josef Mikeš, DrSc.

Olomouc 2014

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Prof. RNDr. Josefa Mikeše, DrSc. a v seznamu použité literatury uvádím veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci 9. dubna 2014

.....

podpis autora

Děkuji vedoucímu diplomové práce Prof. RNDr. Josefu Mikešovi, DrSc. a E.S. Stepanovové, PhD. za ochotné vedení práce, cenné rady, obětavou pomoc a ochotné poskytování materiálů během psaní diplomové práce.

Děkuji rodině za trpělivost, podporu a zázemí po dobu vypracovávání diplomové práce.

OBSAH

Úvod.....	5
1. Úvod do teorie ploch	7
1.1 Základní vlastnosti plochy v E_3	7
1.2 Normálová a geodetická křivost.....	9
2. Geodetické křivky	11
2.1 Geodetické křivky z geometrického pohledu	11
2.2 Další způsoby zápisu geodetických křivek	13
3. Geodetické křivky z pohledu variačního počtu.....	14
3.1 Bernoulliho úloha	14
3.2 Zápis geodetické křivky ve tvaru s kanonickým parametrem.....	17
4. Geodetická zobrazení na Riemannových prostorech	20
4.1 Definice geodetického zobrazení	20
4.2 Geodetické zobrazení v E_3	20
5. Příklady geodetických zobrazení ploch.....	22
5.1 Projekce rovnoběžných rovin.....	22
5.2 Projekce nerovnoběžných rovin	23
5.3 Gnómonická projekce	24
6. Levi-Civitovy rovnice geodetických zobrazení na Riemannových prostorech	29
6.1 Odvození Levi-Civitových rovnic.....	29
6.2 Vybraní matematikové zabývající se geodetickým zobrazením	31
6.3 Levi-Civitovy rovnice a jejich gradient.....	32
6.4 Transformace Levi-Civitových rovnic	33
7. Další příklady geodetických zobrazení	35
7.1 Beltramiho polovina hyperboloidu.....	35
7.2 Geodetická zobrazení dimenze 2.....	35
7.3 Věta U. Diniho o netriviálním geodetickém zobrazení ploch.....	38
Závěr.....	41
Anotace.....	43
Klíčová slova.....	43
Annotation.....	44
Key words	44
LITERATURA.....	45

Úvod

Předložená diplomová práce je věnována základním poznatkům teorie geodetických zobrazení, která je velmi důležitou součástí diferenciální geometrie. Diferenciální geometrie je široký vědní obor, a jako věda, zkoumá vlastnosti geometrických objektů s pomocí diferenciálního počtu. Diplomová práce je komplexně doplněna o historické souvislosti vývoje a návaznosti jednotlivých blíže zmiňovaných témat souvisejících s geodetickými zobrazeními. Obecným vlastnostem geodetických zobrazení se věnovali, a celou teorii o významné výsledky obohatili, zejména E. Beltrami, U. Dini, T. Levi-Civita, H. Weyl, L. P. Eisenhart, N. S. Sinyukov aj. [**]. V současné době se teorií geodetického zobrazení zabývá např. J. Mikeš a V. E. Berezovskij [**].

První kapitola je věnována úvodu do teorie ploch, jsou zde shrnuty základní poznatky teorie ploch v Euklidovském prostoru E^3 , stručně jsme nastínili základní pojmy jako jsou normálová a geodetická křivost.

Druhá a třetí kapitola se zabývají speciální třídou křivek, které nazýváme geodetické křivky. Podrobným způsobem je zde zpracováno Bernaulliho řešení brachyostromy a následná podkapitola se věnuje zápisu geodetické křivky ve tvaru s kanonickým parametrem.

Rozlišným příkladům geodetického zobrazení na Riemannových prostorech jsou věnovány kapitoly čtyři a pět. V úvodní části kapitoly čtyři je definován pojem geodetického zobrazení a následně zpracovány jednotlivé příklady využití geodetického zobrazení jako projekci rovnoběžných a nerovnoběžných rovin a gnónickou projekci. U gnómonické projekce se nejedná o projekci ekvidistantní, ekvivalentní ani konformní. Mluvíme o projekci tzv. kompenzační. Z tohoto důvodu popisujeme její využití zejména v námořní a leteckou navigaci a pro zakreslení ortodrom. Velmi zajímavé vlastnosti stereografické projekce jsme zmínili v páté kapitole. Jedná se o projekci konformní a využívá se zejména v geodézii a astronomii.

Kapitola šest obsahuje numerický popis geodetických zobrazení na libovolných Riemannových prostorech a je věnována převážně odvození, gradientu a transformaci Levi-Civitových rovnic. T. Levi-Civita je považován za jednoho ze zakladatelů moderní tenzorové analýzy, stál u základů teorie modelování dynamických procesů s využitím geodetických

zobrazení Riemannových prostorů v rámci teoretické mechaniky. Je zde uveden úplný důkaz Levi-Civitových rovnic, popisujících geodetická zobrazení.

Sedmá kapitola doplňuje celkový obraz diplomové práce o další příklady geodetického zobrazení. Zde zmiňujeme významnou Větu U. Diniho, O netriviálním geodetickém zobrazení ploch a důkaz této věty uzavírá předloženou teorii.

1. Úvod do teorie ploch

1.1 Základní vlastnosti plochy v E_3

Úvodem připomeneme základní pojmy a označení vztahující se k ploše S . Jak známo, plocha v trojrozměrném eukleidovském prostoru E_3 je zadána vektorovými rovnicemi

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(x^1, x^2), \quad (1)$$

kde x^1, x^2 jsou souřadnice měnící se v některé konvexní oblasti $D \subset R^2$. Dále budeme předpokládat, že S patří do třídy C^r , $r \geq 3$. Na ploše S byly Gaussem zavedeny I. a II. kvadratická forma, a to následujícím způsobem:

$$I = g_{ij}(x^1, x^2) dx^i dx^j,$$

$$II = b_{ij}(x^1, x^2) dx^i dx^j,$$

kde g_{ij} a b_{ij} jsou koeficienty I. a II. kvadratické formy plochy S , které se definují následujícím způsobem:

$$g_{ij} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j,$$

$$b_{ij} = \mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{m}, \quad \text{přičemž } \mathbf{p}_i = \partial_i \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_{ij} = \partial_j \mathbf{p}_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, 2.$$

g_{ij} považujeme za složky regulárního metrického tenzoru typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, který na ploše S udává

metriku $ds^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2 \equiv g_{ij} dx^i dx^j$. Jak je vidět, pohybujeme se na Riemannově prostoru V_2 . Inverzní tenzor k metrickému budeme značit g^{ij} . Samozřejmě nesmíme zapomenout zmínit, že bereme v úvahu Einsteinovo pravidlo sčítání přes opakující se index.

Jednotkový vektor normály S má vyjádření $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2|}$. Pro úplnost upřesněme, že

trojice vektorů $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}$ má pravou orientaci. Pro plochu S platí, že $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ nejsou kolineární. Tento vztah nás ujišťuje o regulárnosti bodů na dané ploše.

Nechť máme na ploše S danu libovolnou křivku γ (viz Obr. 1). Pokud budeme považovat s za přirozený parametr γ , lze křivku zapsat rovnicemi

$$x^i = x^i(s). \quad (2)$$

Rovnice (2) se nazývají vnitřní rovnice křivky γ . Nechť je na ploše S dán pevný bod M , jímž prochází tečna ℓ , která leží v tečné rovině této plochy. Jestliže $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ jsou jednotkové vektory Frenetova trojhranu tohoto parametru a k udává křivost γ v jejím regulárním bodě M , pak se

The diagram shows a curved surface S with a curve γ on it. A point M is on γ . A line ℓ is tangent to γ at M . A vector $\mathbf{t}$ points along γ from M . A vector $\mathbf{n}$ points from M to a point A . A vector $\mathbf{m}$ points from M to a point N . A vector $\mathbf{G}$ points from M to a point G . The angle between the vertical line segment MN and the vector $\mathbf{n}$ is labeled α .

Délky výše zmíněných vektorů označíme $k_n = |\overline{MN}|$ a $k_g = |\overline{MG}|$ a nazveme po řadě normálovou a geodetickou křivostí křivky γ na ploše S . Pro následné počítání je vhodné si uvědomit, že k nezápornému k_n připisujeme záporné znaménko, pokud vektory $\mathbf{m}$ a $\overline{MN}$ mají opačný směr. Z Obr. 1 je patrné, že pro vektory $\overline{MA}$, $\overline{MN}$ a $\overline{MG}$ platí následující vztah:

Když do (3) dosadíme a umocníme délky vektorů, dostaneme zápis

8

1.2 Normálová a geodetická křivost

Pozastavme se u geodetické křivosti k_g . Nejprve však bude pro následující řádky vhodné zmínit, co je to izometrická deformace plochy. Je to právě taková její deformace, při níž nedochází ke změně délek oblouků jejich libovolných křivek. Opačně také když jsou dány dvě plochy, jež jsou přiřazeny ke stejným souřadnicím a mají stejné první kvadratické formy, pak jsou tyto plochy určeny s přesností do jejich izometrické deformace. Připomeňme také, jak se definuje vnitřní geometrie plochy. Je to množina vlastností a všech objektů plochy, která závisí pouze na její první kvadratické formě. Z toho nám vyplývá, že právě pouze vnitřní geometrie je invariantní při izometrických deformacích.

Ukažme nyní, že geodetická křivost k_g je prvkem vnitřní geometrie a tudíž také invariantem izometrických deformací plochy. Pokud dosadíme (2) do (1), získáme rovnice křivky γ v E_3 :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(x^1(s), x^2(s)) = \mathbf{p}(s).$$

Po derivaci dostaneme

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \partial_1 \mathbf{p} \frac{dx^1}{ds} + \partial_2 \mathbf{p} \frac{dx^2}{ds} = \mathbf{p}_i \frac{dx^i}{ds}.$$

Derivační Gaussovy formule pro plochu S mají tvar $\mathbf{p}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{p}_k + b_{ij} \mathbf{m}$, kde $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ija} \cdot g^{ak}$ jsou Christoffelovy symboly 2. typu a $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$ se nazývají Christoffelovy symboly 1. typu. Když vezmeme v úvahu první Frenetovu formuli pro křivku γ :

$$d\mathbf{t}/ds = k\mathbf{n}$$

a derivační Gaussovy formule $\mathbf{p}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{p}_k + b_{ij} \mathbf{m}$, pak obdržíme druhou derivaci zapsanou ve tvaru $\frac{d^2 \mathbf{p}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{p}_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} + \mathbf{p}_i \frac{d^2 x^i}{ds^2}$, z čehož nám plyne následující vztah, který ukazuje rozložení vektoru křivosti $k\mathbf{n}$ v bázi $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ a $\mathbf{m}$:

$$k\mathbf{n} = \left(\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) \mathbf{p}_k + b_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \mathbf{m}. \quad (5)$$

Podíváme-li se na vztahy (5) a (3), zjistíme, že jejich srovnání nás vede k vyjádření k_n a k_g :

$$\overline{MN} = b_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \mathbf{m}, \quad (6)$$

$$\overline{MG} = \left(\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) \mathbf{p}_k. \quad (7)$$

Z (6) lehce zapíšeme normálovou křivost k_n jako délku vektoru $\overline{MN}$ se znaménkem:

$$k_n = b_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \frac{b_{ij} dx^i dx^j}{ds^2} = \frac{b_{ij} dx^i dx^j}{g_{ij} dx^i dx^j}.$$

Tato rovnost je dobře známa z diferenciální geometrie, neboť udává křivost normálového řezu, který odpovídá křivce γ . Normálová křivost k_n závisí na b_{ij} a není prvkem vnitřní geometrie, a tedy při procesu izometrické deformace nezůstává neměnná.

Pokud upravíme (7) pomocí skalárního součinu, získáme zápis geodetické křivosti k_g :

$$k_g^2 = \overline{MG}^2 = \left(\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) \left(\frac{d^2 x^h}{ds^2} + \Gamma_{pq}^h \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} \right) g_{kh}. \quad (8)$$

Tento zápis geodetické křivosti (8) nám ukazuje, že geodetická křivost je prvkem vnitřní geometrie plochy a dokonce z něj můžeme i vyvodit, že k_g je invariantem izometrických deformací plochy (tenzor g_{ij} je v týchž souřadnicích neměnný).

Soudit, že k_g je prvkem vnitřní geometrie, lze také z toho, že g_{ij} , a tedy i g^{ij} , $\Gamma_{ijk}^{def} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$, $\Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha}$ jsou prvky vnitřní geometrie. K tomuto tvrzení nás navádí fakt, že izometrická deformace zachovává beze změny v každém bodě plochy hodnoty křivočarých souřadnic x^1, x^2 , a tedy zůstávají stejné také jejich derivace $\frac{dx^i}{ds}$, $\frac{d^2 x^i}{ds^2}$. Zde je vhodné podotknout, že délka oblouku s křivky γ je též invariantním prvkem izometrické deformace.

Nechť je na ploše S zadáný pevný bod M a nechť jím prochází tečna ℓ , která leží v tečné rovině této plochy. Pak lze vyslovit tvrzení, že všechny křivky, jež se dotýkají tečny ℓ , mají různé křivosti k . Tuto rozdílnost křivostí můžeme jednoduše vyvodit ze vztahu (4), když si uvědomíme, že každá křivka má různou geodetickou křivost k_g . Ale přestože je takových křivek nekonečně mnoho, mají všechny jedinou shodnou normálovou křivost k_n . To proto, že normálová křivost a křivost příslušného normálového řezu jsou shodné, a v našem případě normálové řezy pro všechny křivky procházející bodem M a zároveň se dotýkající tečny ℓ jsou definovány jednoznačně. [12]

2. Geodetické křivky

2.1 Geodetické křivky z geometrického pohledu

Na základě faktů zmíněných v první kapitole se definuje speciální třída křivek – geodetických křivek, kterým je věnována následující kapitola. Jak již bylo zmíněno výše, k_g je prvek vnitřní geometrie plochy a závisí pouze na tvaru křivky této plochy. Pokud zredukujeme naše úvahy pouze na skupinu křivek, které mají nulovou geodetickou křivost, pak můžeme vyslovit definici geodetické křivky.

Definice 1. *Křivka na ploše se nazývá **geodetická**, jestliže geodetická křivost v každém jejím bodě je rovna nule.*

Křivka na ploše s nulovou geodetickou křivostí je tedy ta křivka, která je, zjednodušeně řečeno, nejprímější, neboť podle (4) vybíráme právě takové křivky procházející bodem M určitým směrem na ploše S , které mají nejmenší křivost k . To proto, že normálová křivost k_n je pro všechny takové křivky stejná, neboť je závislá na tvaru plochy. Geodetické křivky se na ploše zobrazují na rozdíl od např. hlavních křivek opět jako geodetické křivky. Je to z toho důvodu, že geodetické křivky spadají stejně jako k_g do vnitřní geometrie a izometrickou deformací se nemění.

Právě zmíněná definice geodetické křivky má jasně stanovený geometrický charakter. Autorství bývá připisováno italsko-francouzskému matematikovi Josephu Louisovi Lagrangemu, který své myšlenky zveřejnil r. 1806. V další kapitole se budeme blíže zabývat myšlenkou geodetických křivek, která se bude odvíjet ze zcela odlišného směru. Tím však ještě naše zkoumání geodetické křivky z geometrického pohledu nepředbíhejme.

Předpokládejme stále, že $k_g = 0$. Víme, že $\overline{MG}$ je průmětovým vektorem $k\mathbf{n}$ na tečnou rovinu. Pak ovšem vztah $k_g = 0 \Leftrightarrow \overline{MG} = 0$ může nastat právě ve dvou následujících situacích:

- a) $k\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$,
- b) $k\mathbf{n} = 0$, což omezuje křivost na jedinou vyhovující možnost $k = 0$, a to je případ, kdy se jedná o inflexní body. V případě, že by křivka byla složena jen ze samých inflexních bodů, jednalo by se o přímku.

Uvedený poznatek můžeme formulovat v následující větě:

Věta 1. *Aby křivka na ploše byla geodetická, pak je nutné a postačující, aby její hlavní normála ve všech bodech byla současně normálou plochy nebo aby ostatní body křivky byly inflexní.*

Touto větou je v podstatě řečeno, že geodetickými křivkami na ploše jsou např. hlavní kružnice kulové plochy, neboť jejich hlavní normály jsou totožné s jejími normálami a procházejí středem kulové plochy. Také tvořící přímky na rozvinutelných plochách jsou právě geodetickými křivkami.

Než se podíváme na geodetické křivky z pohledu také variační definice, zbývá nám ještě pro úplnost kapitoly zapsat diferenciální rovnice geodetických křivek. Vyjdeme ze skutečnosti, že pro geodetické křivky a pouze pro ně platí výše zmíněný vztah $\overline{MG} = 0$. To si odvážíme tvrdit v souvislosti se (7), pokud

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad \text{pro } k = 1, 2. \quad (9)$$

Tento tvar rovnic geodetických křivek použil r. 1868 matematik Elwin Bruno Christoffel. Jedná se o soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu Cauchyovského typu, přičemž hledanými funkcemi jsou $x^1(s)$ a $x^2(s)$, s je proměnná. Druhé derivace funkcí $x^i(s)$ lze zapsat těmito funkcemi a jejich první derivací.

Řešení vyhovující libovolným počátečním podmínkám Cauchyovy úlohy

$$x^i(s_0) = x_o^i, \quad \frac{dx^i(s_0)}{ds} = \left(\frac{dx^i}{ds} \right)_0$$

je právě jedno. Toto tvrzení můžeme prohlásit v souvislosti s větou o existenci řešení soustavy diferenciálních rovnic. Ta je ovšem jen lokálního charakteru, a tím pádem potvrzuje samotnou existenci geodetických křivek pouze v okolí bodu (x_o^1, x_o^2) . Budeme-li ale opakovaně používat tuto větu, můžeme geodetickou křivku prodloužit až k hranici plochy, pokud za počáteční podmínky, jimiž jsou bod a směr, vezmeme vždy právě konec již sestrojeného úseku geodetické křivky a jeho směru na ní.

Výše zmíněné Cauchyovy podmínky nám říkají, že existuje v každém bodě (x_o^1, x_o^2) jediná geodetická křivka, která tímto bodem prochází a zároveň má předem zadaný směr $\left(\frac{dx^i}{ds} \right)_0$. Zjednodušeně je možné to říct také tak, že geodetické křivky na ploše se chovají naprosto stejně jako přímky v rovině. Vycházíme přitom z faktu, že geodetickými křivkami

roviny jsou právě a pouze přímky roviny. Na ploše je jich dostatek k tomu, aby právě ony vytvářely dvouparametrickou soustavu křivek na ploše.

2.2 Další způsoby zápisu geodetických křivek

Geodetické křivky je možné zapsat také jiným způsobem, než jsme doposud uvedli. Když si uvědomíme, že argument s geometricky určuje v soustavě rovnic (9) délku oblouku, pak je důležité přiřadit funkcím $x^1(s)$, $x^2(s)$ další podmínku, a to

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (10)$$

Abychom předešli složitým vyjádřením, můžeme si vypomoci tím, že zapíšeme křivku (2) ve tvaru funkce parametru t , což znamená, že $s = s(t)$ a $t = t(s)$. Tím získáme rovnost

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{1}{s'}, \quad \text{kde } s' = \frac{ds}{dt},$$

a také rovnost

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \cdot \frac{1}{s'^2} - \frac{dx^i}{ds} \frac{s''}{s'^3},$$

které obě dosadíme do (9). Dostaneme se tak k dalšímu možnému zápisu geodetických křivek na ploše, který je pro naše účely vyjádření geodetické křivky totožný se soustavou (9) a záleží jen na vhodnosti matematického využití při upřednostnění jedné z variant. Rovnice geodetické křivky lze tedy zapsat také následujícím způsobem:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \rho(t) \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad \rho(t) = \frac{s''}{s'}. \quad (11)$$

Pro rovnice geodetických křivek v pozdějším pokračování textu oceníme ještě následující zápis geodetických křivek:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} \frac{dx^h}{dt} - \frac{d^2 x^h}{dt^2} \frac{dx^k}{dt} + \left(\Gamma_{ij}^k \frac{dx^h}{dt} - \Gamma_{ij}^h \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad (12)$$

přičemž jsme vycházeli z (11), ale namísto indexu k jsme zvolili index h a vyloučili jsme funkci $\rho(t)$, což bude mít pro nás zásadní význam dále. Všechny tři způsoby zápisu rovnic geodetických křivek (9), (11) i (12) jsou ekvivalentní a podmínky jejich diferencovatelnosti, které vyžadujeme pro platnost věty o existenci řešení, se nám evidentně splňují. [12]

3. Geodetické křivky z pohledu variačního počtu

3.1 Bernoulliho úloha

Pro následující řádky bude pro nás užitečné odpoutat se od dvourozměrného Riemannova prostoru V_2 v E_3 a začít se pohybovat na n -rozměrném Riemannově prostoru V_n . Jelikož se nemusíme zabývat znaménkem metrické formy V_n , smíme (10) přepsat následujícím způsobem:

$$ds^2 = e g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

kde $e = \pm 1$ volíme tak, aby $ds^2 \geq 0$. Jelikož se pohybujeme nyní na V_n , všechny indexy necháme v následujícím textu probíhat od 1 až do n .

V předchozí kapitole jsme se zmínili, že existuje mnohem starší pohled na geodetické křivky, než jakým způsobem jsme se na ně dívali výše. Roku 1697 poslal švýcarský matematik Johann I. Bernoulli dopis G. V. Leibnizovi, v němž se objevila úloha sestrojít na zadané ploše křivku jdoucí dvěma danými body tak, aby její oblouk spojující tyto dva krajní body měl nejmenší délku ze všech možných oblouků, které by procházely těmito body. Dalšího roku mu již J. I. Bernoulli odpovídá, že řešení této úlohy objevil. Zároveň oznámil Leibnizovi, že objevil také význam věty o geodetických křivkách, kterou jsme se zabývali v předchozí kapitole, včetně jejího důkazu. Tím se do matematiky dostává téma geodetických křivek. O 30 let později je o nich sepsána dokonce první práce, kterou vytvořil Leonard Euler, žák právě J. I. Bernoulliho. Vstup geodetických křivek do povědomí některých matematiků roku 1698 se tak může hodnotit jako samotný vznik pojmu geodetická křivka. Na základě Bernoulliho úlohy o geodetických křivkách a Gallileovy úlohy o křivce s nejrychlejším sestupem (brachistrochoně), jež obě vyřešil J. I. Bernoulli, stojí počátek variačního počtu.

Ukážeme si nyní ve stručnosti, jak vypadalo Bernoulliho řešení zmíněné úlohy. Mějme regulární křivku γ , která je zadána rovnicemi $x^i = x^i(t)$. Necht' A, B jsou dva body ležící na této křivce a odpovídající parametrům t_0 a t_1 . Nejdříve si ukážeme stručný postup, jak získat tvar Eulerových rovnic, které v řešení Bernoulliho úlohy využijeme. Necht' je dána nekonečně malá veličina ε a funkce $\omega^i(x)$ taková, že $\omega^i(A) = \omega^i(B) = 0$. Pak lze zapsat rovnici $\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \omega^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, která charakterizuje novou křivku $\bar{\gamma}$, která je velmi blízká křivce

γ a zároveň prochází body A, B. Pokud budeme derivace $\frac{dx^i}{dt}$ pro jednoduchost a přehlednost označovat $\dot{x}^i$, pak můžeme zapsat integrál

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \phi(x^1, x^2, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n) dt, \quad (14)$$

kde ϕ je analytickou funkcí zadaných argumentů. Podobně můžeme zapsat také integrál $\bar{I}$ pro křivku $\bar{\gamma}$, který lze upravit rozvinutím ϕ na Taylorovu řadu podle mocnin ε :

$$\bar{I} = I + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \omega^i + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \dot{x}^j \right) dt + \dots,$$

ovšem v tomto integrálu tečky značí členy řádu ε^2 a vyšších. Koeficienty zapsané při $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots$ se jmenují první, druhá, ... variace integrálu I a značí se $\partial I, \partial^2 I, \dots$. První variaci integrálu tedy

lze zapsat ve formě: $\partial I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \omega^i + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \dot{x}^j \right) dt$, popř. $\partial I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \omega^i dt$. Tento

druhý tvar uvádíme tehdy, když druhou část součtu upravíme pomocí integrace po částech a nezapomeneme ani na vlastnosti funkce $\omega^i(x)$. Pokud $\partial I = 0$ pro libovolně zvolenou soustavu funkcí $\omega^i(x)$, pak integrál (14) pojmenujeme stacionární. Aby byl integrál stacionární, musí být splněna následující podmínka:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 0.$$

Tím jsme se dostali až ke tvaru Eulerových rovnic. Můžeme tedy říci, že Eulerovy rovnice jsou nutnou a postačující podmínkou toho, aby integrál byl stacionární.

Každou křivku, pro niž je integrál stacionární, pojmenujeme extrémálou integrálu. Víme, že délku oblouku libovolné křivky γ můžeme zapsat ve tvaru integrálu. Podle (13) se dá takováto rovnice délky oblouku křivky zadané rovnicemi $x^i = x^i(t)$ vyjádřit následujícím způsobem:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{eg_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt, \quad \text{kde } \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Předpokládejme, že tento integrál je stacionární. Budeme-li se snažit o vyjádření jeho extrémál, použijeme právě výše zmíněné Eulerovy rovnice. Jelikož platí vztah

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^k} = \frac{eg_{kj} \dot{x}^j}{\sqrt{eg_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} = \frac{eg_{kj} \dot{x}^j}{\frac{ds}{dt}}$$

a zároveň platí i rovnost

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \frac{e \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \frac{ds}{dt}},$$

pak použitím Eulerových rovnic získáme

$$g_{ik} \ddot{x}^i + \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j - \rho(t) g_{ik} \dot{x}^i = 0.$$

Pokud si uvědomíme platnost vztahu $g_{ij} g^{ik} = \delta_i^k$, přičemž víme, že δ_i^k jsou Christoffelovy symboly, pak se nám nabízí úprava posledního zápisu na tvar

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \rho(t) \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Tím jsme našli hledané rovnice extrémů integrálu. Není náhodou, že (11) a (15) se shodují. Soustavu rovnic tvaru (9) obdržíme, pokud parametr t budeme považovat za délku oblouku, tj. $\rho(t) = 0$. Zjistili jsme tedy, že soustava rovnic (15) není jediná, která udává extrémů integrálu délky oblouku; také křivky vyhovující soustavě (9) jsou dané extrémů. Víme, že pokud se pohybujeme na V_2 , pak řešením jsou právě geodetické křivky. Když se přehoupneme na n -rozměrný Riemannův prostor, můžeme z výše popsaných poznatků vyslovit definici geodetické křivky:

Definice 2. *Libovolná integrální křivka soustavy rovnic (15), popř. (9) se nazývá geodetická ve V_n .*

V této chvíli se můžeme ptát, zda každá geodetická křivka je zároveň nejkratší křivkou. Pokud budou mít dva body od sebe dostatečně krátkou vzdálenost, pak jimi bude určena geodetická křivka, jež bude mít většinou i nejkratší vzdálenost. Platí to ale obecně pro libovolně vzdálené body? Víme, že nutnou podmínkou pro nalezení extrému definovaného integrálem jsou Eulerovy rovnice. Na základě všech našich předešlých úvah ale můžeme vyslovit větu, která nám říká, jaký vztah nastává mezi křivkou s nejkratší délkou oblouku a křivkou geodetickou.

Věta 2. *Jestliže mezi dvěma body ve V_n existuje křivka mající mezi těmito body nejkratší délku oblouku, potom je tato křivka geodetická.*

3.2 Zápis geodetické křivky ve tvaru s kanonickým parametrem

Mohlo by se zdát, že dvě zmíněné definice geodetické křivky musí vyčerpat základní úhel pohledu na tento typ křivek. Opak je pravdou. Geodetickou křivku lze zapsat také ve tvaru s kanonickým parametrem. Spíše jen pro ukázkou existence další varianty se podívejme na tento typ zápisu vhodný pro prostor s afinní konexí A_n . Hlavní myšlenka se zakládá na faktu, že geodetické křivky v A_n se chovají podobně jako přímky v eukleidovském prostoru E_n .

Pro tento zápis si nejprve připomeňme základní charakteristiku A_n . Varieta třídy C^r , na níž máme definovaný objekt afinní konexe, nazýváme prostorem afinní konexe A_n . Jinak řečeno, v každé soustavě souřadnic $x^1, x^2, \dots, x^n$ na varietě je možné najít objekt zapsaný funkcemi $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Tyto funkce se mění transformací souřadnic $x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ a $x^i = x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ podle následujícího transformačního zákona:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma'} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}}.$$

Pro Riemannův prostor V_n používáme na místo objektu afinní konexe jednoduše Christoffelovy symboly.

Pracujme se soustavou rovnic geodetických křivek (9) a (11). Pokud je v prostoru V_n křivka γ zadána rovnicemi $x^i = x^i(t)$, pak kovariantní vektor $\lambda^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$ nazveme tečný vektor křivky γ v každém jejím bodě. Rovnice (9) získají za takových podmínek tvar

$$\frac{d\lambda^k}{ds} + \Gamma_{ij}^k \lambda^i \lambda^j = 0.$$

Můžeme vzít v úvahu vztah $\frac{d\lambda^k}{ds} = \frac{d\lambda^k}{dx^i} \lambda^i$ a tím se nám předchozí součet změní po vytknutí λ^i na

$$\left(\frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i} + \lambda^j \Gamma_{ij}^k \right) \lambda^i = 0,$$

což je soustava

$$\lambda_{;i}^k \lambda^i = 0, \text{ nebo jinak zapsáno } \left(\frac{dx^k}{ds} \right)_{;i} \frac{dx^i}{ds} = 0. \quad (16)$$

Ve vzorcích (16) čárka vyjadřuje kovariantní derivaci na bázi metrického tenzoru g_{ij} . Soustavu (11) pak je možné převést stejným způsobem na rovnice tvaru

$$\lambda^k_{,i} \lambda^i = \rho(t) \lambda^k. \quad (17)$$

Těmito soustavami rovnic (16) a (17) jsme obdrželi další způsob zápisu diferenciálních rovnic geodetické křivky.

Pokud přejdeme z V_n do A_n , můžeme na základě teorie popsané v předchozích dvou odstavcích zadefinovat geodetickou křivku v prostoru afinní konexe. Chybí nám pouze znění definice rekurentního vektorového pole, kterou ihned doplníme. Mějme v A_n zadánu křivku γ nám již známým způsobem $x^i = x^i(t)$ a necht' $\lambda^i = \frac{dx^i}{dt}$ je jejím tečným vektorem. Pak můžeme vyslovit následující definici:

Definice 3. Vektorové pole $\phi^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$, zadané body křivky γ , se nazývá **rekurentní** podél γ , když v každém jejím bodě jsou splněny podmínky $\phi^k_{,i} \lambda^i \equiv \frac{d\phi^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} \lambda^i \phi^j = \rho \phi^k$, kde $\rho(t)$ je některý invariant.

Pokud $\rho(t) = 0$, pak se parametr t geodetické křivky γ nazývá kanonický. Ve V_n je tímto způsobem zadána délka oblouku. Následující definice nás seznamuje s rovnoběžností vektorového pole vůči křivce v A_n , a to takovým způsobem, jak rovnoběžnost definoval (upřesněme, že ve V_n) roku 1917 T. Levi-Civita:

Definice 4. Pole kontravariantního vektoru $\phi^k(x)$, definované na křivce γ , se nazývá **rovnoběžným** podél této křivky v prostoru A_n , jestliže platí

$$\phi^k_{,i} \lambda^i \equiv \frac{d\phi^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} \lambda^i \phi^j = 0. \quad (18)$$

Po této krátké vsuvce, která uváděla téma do souvislostí, se již můžeme věnovat očekávané definici geodetické křivky. Jelikož je možná záměna vektorového pole $\phi^k(x)$ z Definice 3 za tečný vektor λ^k křivky γ , tak také podmínky z této definice je možné vyjádřit pomocí (17). Jak víme, tato soustava nám udává rovnice geodetické křivky ve V_n , a tedy jsme schopni pro A_n vyslovit následující definici geodetické křivky:

Definice 5. Křivka *prostoru afinní konexe* A_n se nazývá **geodetická**, *jestliže tečné vektorové pole této křivky je podél ní rekurentní*.

Pokud právě zmíněnou definici aplikujeme na porovnání (18) a (16), vyplyne nám z toho, že každá geodetická křivka, jejíž rovnice zapíšeme s kanonickým parametrem, má tečné vektory rovnoběžné podél této geodetické křivky. V podstatě se jedná o zobecnění té vlastnosti přímky v eukleidovském prostoru, která nám říká, že přímka nabývá v každém bodě konstantního směru.

Celkově se dá říci, že se geodetické křivky ve V_n a v A_n na lokální úrovni připodobňují svým chováním přímkám v E_n . Kromě výše zmíněné vlastnosti konstantního směru se jedná zejména o vlastnost, kdy jakýmkoliv bodem prochází v libovolném směru právě jediná geodetická křivka. To plyne z toho, že mezi dvěma body je dostatečně malý oblouk geodetické křivky nejkratší ze všech rektifikovatelných křivek spojující tyto dva body. Navíc platí tvrzení, že každému bodu lze najít okolí U takové, v němž můžeme libovolné dva body propojit geodetickou křivkou tak, aby tato křivka nepřesahovala okolí U . [12]

4. Geodetická zobrazení na Riemannových prostorech

4.1 Definice geodetického zobrazení

Doposud jsme se zabývali geodetickými křivkami. Ty nám připravily půdu pro zavedení pojmu geodetické zobrazení. Jak již napovídá název kapitoly, budeme se pohybovat v Riemannových prostorech, a to konkrétně využijeme značení V_n a $\overline{V}_n$. Pruh nad označeními geometrických útvarů z $\overline{V}_n$ bude upozorňovat na jejich přiřazení právě tomuto prostoru.

Definice 6. *Geodetické zobrazení prostoru V_n na $\overline{V}_n$ se nazývá vzájemně jednoznačné zobrazení mezi jejich body, při kterém se každá geodetická křivka prostoru V_n zobrazí na geodetickou křivku prostoru $\overline{V}_n$.*

4.2 Geodetické zobrazení v E_3

Budeme-li se pohybovat v E_3 , pak se můžeme pozastavit u ploch S a $\overline{S}$ z prostorů V_2 a $\overline{V}_2$. Triviálními geodetickými zobrazeními budou právě ta zobrazení, v nichž se plocha S přenese pomocí zobrazení na druhou plochu $\overline{S}$ tak, že ve společné soustavě souřadnic těchto ploch budeme moci zaznamenat stejné Christoffelovy symboly druhého typu pro obě plochy. Takováto zobrazení můžeme nalézt alespoň lokálně u všech ploch.

Např. při zobrazení plochy S na $\overline{S}$ takovým způsobem, že plochu S považujeme za pevné těleso v trojrozměrném eukleidovském prostoru, které se na základě svého pohybu zobrazí na $\overline{S}$, mluvíme o triviálním geodetickém zobrazení, neboť na zobrazené ploše $\overline{S}$ budou zachovány nejen geodetické křivky, ale i původní souřadnice v každém bodě plochy $\overline{S}$. Pokud se nám podaří zobrazit plochu S na $\overline{S}$, která je k tomu ještě izometrickou deformací původní plochy, pak již víme, že se nám vnitřní geometrie plochy nezmění, a tudíž geodetické křivky zůstanou zachovány a můžeme stále hovořit o geodetickém zobrazení, byť triviálním.

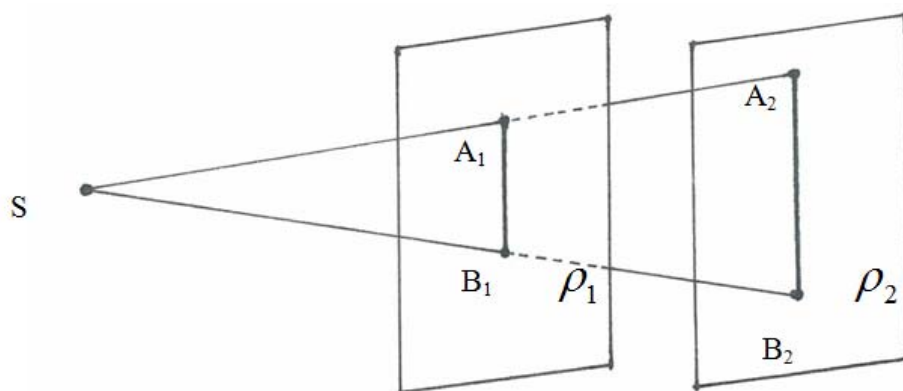
Také zobrazení plochy S , která se zobrazí na $\overline{S}$ pomocí homotetie, můžeme označit za triviální geodetické zobrazení. Je to dáno tím, že pokud označíme koeficient homotetie h ,

potom platí vztah $\overline{g}_{ij} = h^2 g_{ij}$, z něhož plyne rovnost Christoffelových symbolů: $\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, a tedy můžeme říct, že geodetické křivky se zobrazí opět na geodetické křivky. Tím pádem je i celé zobrazení geodetické, jak tomu je např. u názorné ukázky takového zobrazení – zobrazení mezi dvěma soustřednými kulovými plochami. [12]

5. Příklady geodetických zobrazení ploch

5.1 Projekce rovnoběžných rovin

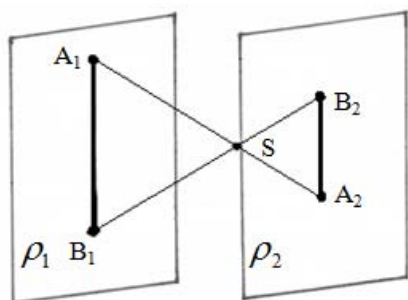
Jako příklad geodetického zobrazení nám může posloužit bodová projekce rovin či gnómonické zobrazení. Necht' máme v E_3 dány dvě roviny ρ_1 a ρ_2 a bod S , který neleží v ani jedné z těchto rovin. Pak bodová projekce rovin vedená z bodu S nám zobrazí body $A_1, B_1 \in \rho_1$ ($A_1 \neq B_1$) na různé body $A_2, B_2 \in \rho_2$ tak, že přímky A_1A_2 a B_1B_2 prochází daným bodem S . Pokud jsou roviny ρ_1 a ρ_2 rovnoběžné, pak úsečky $A_1B_1 \in \rho_1$ a $A_2B_2 \in \rho_2$ zachovávají při této bodové projekci rovnoběžnost (viz Obr. 2). [13]



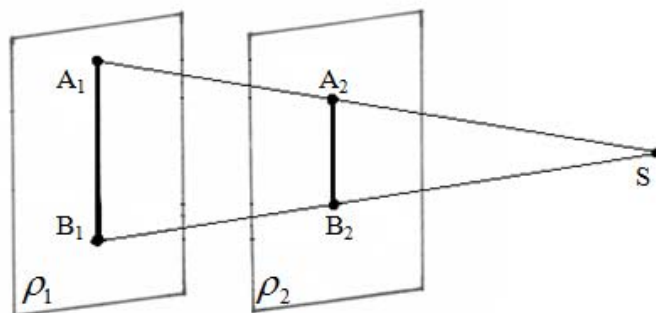
Obr. 2 Projekce rovnoběžných rovin

Poznámka 1. Bod S nesmí ležet v rovině ρ_1 ani ρ_2 . V opačném případě dané zobrazení neexistuje.

Poznámka 2. Bod S je na Obr. 2 na straně roviny ρ_1 . Samozřejmě není překážkou, aby tento bod ležel z druhé strany roviny ρ_1 ; ať už mezi rovinami ρ_1 a ρ_2 (Obr. 3), nebo až za rovinou ρ_2 (Obr. 4).



Obr. 3 Projekce rovnoběžných rovin:
bod S leží mezi rovinami ρ_1 a ρ_2



Obr. 4 Projekce rovnoběžných rovin: bod
 S leží „za“ rovinou ρ_2

Poznámka 3. Tato projekce je bijektivní a spojitě zobrazení mezi ρ_1 a ρ_2 .

Poznámka 4. Toto geodetické zobrazení zachovává velikosti úhlů.

Poznámka 5. Jestliže v afinních souřadnicích na ρ_1 má přímka $p \in \rho_1$ rovnice:

$$p: \quad \begin{aligned} x^1 &= x^1_0 + t \cdot a^1 \\ x^2 &= x^2_0 + t \cdot a^2, \end{aligned}$$

pak rovnice odpovídajících si bodů $x \mapsto f(x)$ bude mít tvar:

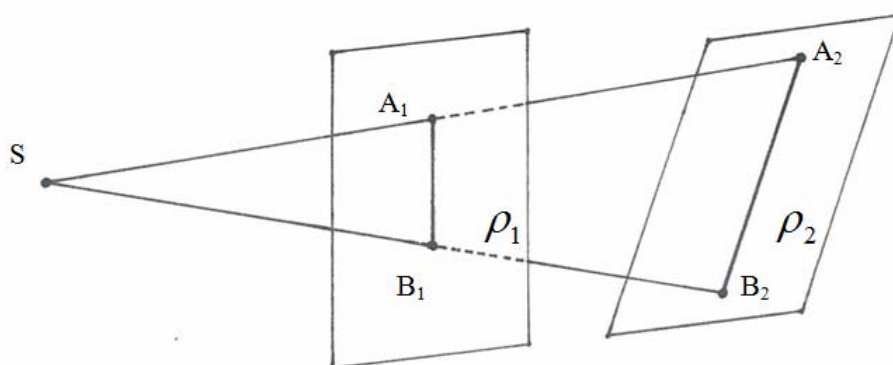
$$f(p): \quad \begin{aligned} \bar{x}^1 &= f(x^1_0) + t \cdot \bar{a}^1 \\ \bar{x}^2 &= f(x^2_0) + t \cdot \bar{a}^2 \end{aligned}$$

v afinních souřadnicích $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ na ρ_2 . Parametr t je na p a $f(p)$ společný.

Poznámka 6. Z předchozí poznámky (Poznámka 5) vyplývá, že při tomto geodetickém zobrazení se zachovává afinní parametr přímek (tj. geodetik). Toto geodetické zobrazení je afinní.

5.2 Projekce nerovnoběžných rovin

V případě různoběžnosti rovin ρ_1 a ρ_2 jsou také úsečky $A_1B_1 \in \rho_1$ a $A_2B_2 \in \rho_2$ různoběžné (viz Obr. 5). [13]



Obr. 5 Projekce nerovnoběžných rovin

Poznámka 7. Jako i v předchozím případě rovnoběžných rovin platí, že S nesmí ležet na rovině ρ_1 ani na rovině ρ_2 .

Poznámka 8. Bod S můžeme umístit jak v úhlu, který svírají roviny po řadě ρ_1 ρ_2 , tak také v úhlu mezi ρ_2 a ρ_1 . Tedy stejně jako u projekce rovnoběžných rovin může bod S ležet před i za rovinou ρ_1 , ale opět nesmí ležet přímo v rovinách ρ_1 ani ρ_2 .

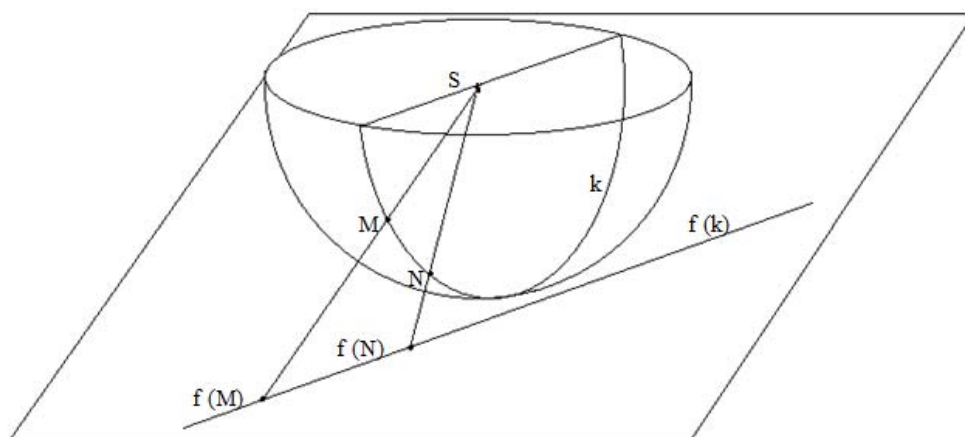
Poznámka 9. Zobrazení f není bijektivní zobrazení mezi rovinami ρ_1 a ρ_2 . V případě, že je směr promítání (promítací paprsek) rovnoběžný s rovinou ρ_2 , pak zobrazení nemá obrazy. V případě rovnoběžnosti směru promítání s rovinou ρ_1 zobrazení nemá vzory.

Poznámka 10. V případě různoběžnosti rovin již nejsou platné rovnice z poznámky 5; ty platí pouze pro projekci rovnoběžných rovin.

5.3 Gnómonická projekce

Gnómonickou projekci známe z kartografie, kdy promítáme ze středu sféry na tečnou rovinu (viz Obr. 6). Název této projekce se používá od roku 1836, kdy jej navrhl třicetiletý britský matematik Augustus De Morgan jako alternativu k téměř sto let zaběhnutému názvu gnómonická projekce od Williama Emersona (1749) [5]. Zavedení základů gnómonické projekce připisujeme již Thaletovi z Milétu (624 – 546 př. Kr.), který díky ní vytvářel hvězdné mapy. Gnómonickou projekci v šikmé (obecné) poloze použil Thales pro konstrukci

slunečních hodin, kdy se úhly mezi jednotlivými hodinami shodují s úhly mezi poledníky gnómonické projekce pro stejnou zeměpisnou šířku. Jednotlivé hodinové údaje na slunečních hodinách zobrazoval stejně jako poledníky po 15° zeměpisné délky v gnómonické projekci [11]. Již v 16. stol. se pak objevují mapy zeměkoule konstruované na základě gnómonické projekce sféry na stěny tečných mnohostěnů. Své uplatnění získává tato projekce zejména pro námořní a leteckou dopravu [5], neboť obrazem všech hlavních kružnic (a tedy i všech poledníků a rovníku) jsou přímky [10] a obrazem ortodrom (což jsou nejkratší spojnice dvou bodů na zemském povrchu) jsou části přímk. Jedná se o středové promítání sféry Γ do roviny, přičemž střed promítání je shodný se středem O sféry Γ [10].



Obr. 6 Promítání ze středu sféry na rovinu

Vezměme v úvahu kulovou plochu nahrazující zeměkouli, kde máme určený severní a jižní pól. Zemskou osou pak rozumíme přímku, procházející středem a oběma póly. Na tuto osu je kolmá rovina rovníku, přičemž samotný rovník můžeme určit jako kružnici, která je určena průnikem roviny rovníku a sféry. Ostatní rovnoběžky leží na průniku sféry a rovin rovnoběžných s rovinou rovníku; a tyto kružnice určují v geografii zeměpisnou šířku $0^\circ < \omega < 90^\circ$ (rovník má nulovou zeměpisnou šířku, směrem k pólům zeměpisná šířka – severní i jižní – narůstá). Zeměpisná délka je určována pomocí poledníků, které leží na hlavních kružnicích procházejících oběma póly. Zeměpisná délka bývá označována φ

a nabývá kladných hodnot do 180° (rozlišujeme východní a západní zeměpisnou délku). Poledníky a rovnoběžky spolu tvoří na sféře pravoúhlou souřadnicovou síť.

Mějme sféru $S_2: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, kde (x, y, z) jsou souřadnice kartézské soustavy v E_3 a $R > 0$ značí poloměr sféry [6]. Zvolme následující parametrizaci sféry:

$$x = R \cos \omega,$$

$$y = R \sin \omega \cos \nu,$$

$$z = R \sin \omega \sin \nu,$$

kde $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vyjadřuje zeměpisnou šířku a (u, v) jsou souřadnice jednotkové kružnice,

pro níž platí $u^2 + v^2 = 1$. Poledníky pak můžeme vyjádřit jako kružnice na sféře, které mají pevně dané (u, v) , přičemž body o souřadnicích $(0, 0, R)$ a $(0, 0, -R)$ jsou póly sféry. Rovníkem rozumíme kružnici, která je dána průnikem sféry a roviny $z = 0$. Na každé takové sféře pak můžeme najít netriviální projektivní transformaci (viz Obr. 7). Vezměme v úvahu transformaci $\pi_t: S_2 \rightarrow S_2$, kterou budeme charakterizovat následovně:

1. Každé dva body M a M_t , jež si navzájem odpovídají, přiřadíme ke stejnému poledníku.

2. Jestliže máme hodnoty ω a ω_t , určující zeměpisné šířky po řadě bodů M a M_t , pak pro ně platí následující pravidlo:

$$\cot \omega_t = e^t \cot \omega, \text{ pro } \omega \neq 0,$$

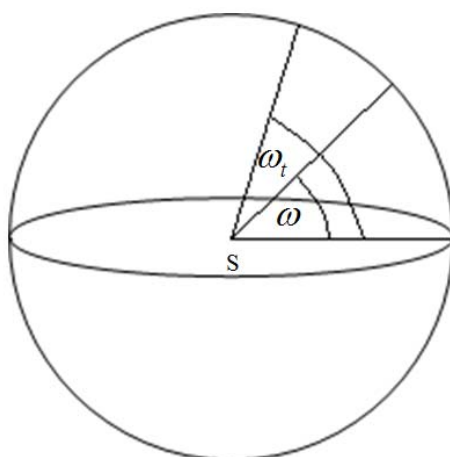
$$\omega_t = 0, \text{ pro } \omega = 0,$$

kde $t \in \mathbf{R}$ je parametr pro π_t .

Pro ω_t pak dostaneme následující:

$$\omega_t = \begin{cases} -\pi + \arccot(e^t \cot \omega), & \omega \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right); \\ 0, & \omega = 0; \\ \arccot(e^t \cot \omega), & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Body na rovníku a na pólech jsou přitom ponechány neměnné. π_t je spojitá transformace sféry S_2 , která zobrazí hlavní kružnice sféry opět na hlavní kružnice. π_t není izometrická, konformní ani afinní transformace, π_t je netriviální projektivní transformace (což jsme chtěli ukázat). [6]



Obr. 7 Netriviální projektivní transformace na sféře

V kartografii se rozlišují 3 druhy gnómonického zobrazení, a to v poloze normální, příčné nebo obecné. Normální (pólová) gnómonická projekce zobrazí poledníky do svazku přímek se středem v obraze pólů, obrazem rovníku je nevlastní přímka průmětny a zbylé rovnoběžky tvoří soustavu soustředných kružnic se středem v obraze pólů. Tato projekce je použita tehdy, když zemská osa je kolmá k průmětně a bodem dotyku sféry a tečné roviny je severní nebo jižní pól. Příčná (rovníková) gnómonická projekce nastává, když rovina rovníku je kolmá na průmětnu. Tak se zobrazí poledníky do svazku rovnoběžných přímek, obrazem rovníku je jejich kolmice a ostatní rovnoběžky jsou zobrazeny jako hyperboly (jejich společnými osami jsou obraz rovníku a základního poledníku, což je poledník procházející bodem dotyku sféry a rovníku). Pokud není tečná rovina sféry kolmá na rovinu rovníku ani na zemskou osu, hovoříme o obecné gnómonické projekci. Ta zobrazí poledníky opět do svazku přímek se středem v obraze pólů, rovník bývá zobrazován jako přímka (průsečnice roviny rovníku s průmětnou), ale rovnoběžky jsou zobrazovány jako elipsy, paraboly a hyperboly. [10]

Pokud by střed promítání neležel ve středu sféry, ale promítalo by se z povrchu sféry, nejednalo by se již o gnómonickou projekci, nýbrž o projekci stereografickou. Její zavedení bývá spojováno s 2. stol. př. Kr., konkrétně bývá za autora považován astronom Hipparchos z Nikeje (190 – 125 př. Kr.) [2], který jako první v dějinách rozdělil sféru-zeměkouli do pomyslné mřížky tvořené rovnoběžkami a poledníky [9] a své poznatky stereografického zobrazení využíval pro znázornění hvězdné oblohy [4]. Název

„stereografická projekce“ se užívá od r. 1613, kdy její principy propracoval belgický jezuita, matematik, fyzik a architekt Franciscus Aguilonius (1567 - 1617). Do té doby bývala stereografická projekce nazývána planisphere [11]. Nyní se toto zobrazení využívá převážně v geodézii a astronomii. Narozdíl od gnómonické projekce je stereografická projekce úhlojevná.

Stejně jako u gnómonické projekce, rozlišuje se v kartografii stereografická projekce v pólové, rovníkové a obecné poloze. Pólová stereografická projekce nastává, když střed promítání leží v jednom z pólů a opačný pól je bodem dotyku sféry a průmětny. Rovník se tak zobrazí jako svazek přímek se středem v pólu. Pokud je rovina rovníku kolmá k průmětně, hovoříme o rovníkové projekci. Střed promítání umístíme v takovém případě do bodu na rovníku, který leží na sféře naproti bodu dotyku rovníku a průmětny. Kružnice a půlkružnice sféry procházející bodem dotyku (tedy rovník a jeden z poledníků) se zobrazí na dvě navzájem kolmé přímky, obrazem ostatních poledníků i rovnoběžek jsou opět kružnice (kruhové oblouky). V obecné poloze stereografického promítání je situace podobná, jen jako přímka se může spolu s libovolným poledníkem procházejícím středem promítání zobrazit kterákoli rovnoběžka (nejsme omezeni pouze na rovník), která prochází středem promítání. [3], [10] Pro stereografickou projekci platí zásada, že všechny kružnice z kulové plochy se zobrazí opět jako kružnice, pokud na sféře neprocházejí středem promítání; kružnice procházející středem promítání se stereograficky zobrazí jako přímky [3].

Podobně by se daly kartograficky popsat také projekce scénografická (střed promítání leží ve vlastním bodě mimo sféru) či ortografická (promítáme z nevlastního bodu), ovšem tím se v této diplomové práci nebudeme zabývat.

6. Levi-Civitovy rovnice geodetických zobrazení na Riemannových prostorech

6.1 Odvození Levi-Civitových rovnic

Abychom nezůstávali pouze u 2-dimenzionálních prostorů, podívejme se obecně, jak geodetická zobrazení fungují na libovolných Riemannových prostorech. Necht' máme dány prostory V_n a $\overline{V}_n$, které se nám vzhledem k zobrazení budou vztahovat ke společné soustavě souřadnic $x^1, x^2, \dots, x^n$. V předchozí kapitole jsme uvedli, že transformační zákon $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}}$ uváděný pro A_n lze jednoduše použít také pro Riemannův prostor V_n , jestliže na místo objektu afinní konexe použijeme Christoffelovy symboly. Z této transformace Christoffelových symbolů Γ_{ij}^k a $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ podle transformačního zákona dostaneme

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \left(\overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}} \cdot \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^k},$$

což nás navádí na záměnu rozdílu uvedeného v závorce za symetrický tenzor typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$P_{ij}^k \stackrel{def}{=} \overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k \quad (19)$$

Ukažme si nyní, že geodetická křivka $x^i = x^i(t)$ prostoru V_n se zobrazí jako geodetická křivka se stejnými rovnicemi a se stejným parametrem také v prostoru $\overline{V}_n$, pokud je zobrazení V_n na $\overline{V}_n$ geodetické. Vycházejme při tom z již pro nás známé rovnice (12), kterou přepíšeme na tvar pro čárkované koeficienty z $\overline{V}_n$:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} \frac{dx^h}{dt} - \frac{d^2 x^h}{dt^2} \frac{dx^k}{dt} + \left(\overline{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^h}{dt} - \overline{\Gamma}_{ij}^h \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0.$$

Pokud tuto rovnici upravíme tak, že odečteme (12), dostaneme soustavu ve tvaru

$$\left(\overline{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^h}{dt} - \overline{\Gamma}_{ij}^h \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0,$$

což za použití (19) přepíšeme na

$$\left(P_{ij}^k \frac{dx^h}{dt} - P_{ij}^h \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0,$$

a to můžeme upravit na tvar

$$(P_{ij}^k \delta_l^h - P_{ij}^h \delta_l^k) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0. \quad (20)$$

Lehce vidíme rovnost formule (20); zejména pro triviální geodetické zobrazení $P_{ij}^l = 0$ je platnost zřejmá. Identicky platí samozřejmě také soustava (20) pro $P_{ij}^l \neq 0$. Když geodetické křivky mohou prostoupit každý bod prostoru, pak jsou v obou prostorech V_n i $\overline{V}_n$ shodné. Formule (20) nám tedy bude platit pro každý bod aniž bychom se museli ohlížet na uvedené derivace $\frac{dx^i}{dt}, \frac{dx^j}{dt}, \frac{dx^l}{dt}$, a proto se budou koeficienty z výrazu (20) rovnat 0.

Pro všechny indexy $i, j, l, k, h = 1, 2, \dots, n$ můžeme proto odvodit rovnost

$$P_{ij}^k \delta_l^h + P_{jl}^k \delta_i^h + P_{li}^k \delta_j^h = P_{ij}^h \delta_l^k + P_{jl}^h \delta_i^k + P_{li}^h \delta_j^k. \quad (21)$$

Budeme-li formuli (21) kontrahovat přes h a l , pak dostaneme rovnost

$$(n+1)P_{ij}^k = P_{jh}^h \delta_i^k + P_{ih}^h \delta_j^k,$$

kterou můžeme nahradit, v případě výměny výrazu $\frac{1}{n+1} P_{ih}^h$ za ψ_i , zápisem

$$P_{ij}^l = \psi_i \delta_j^l + \psi_j \delta_i^l. \quad (22)$$

Pokud do (19) dosadíme právě získanou rovnici (22), dostaneme soustavu

$$\overline{\Gamma}_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l + \psi_i \delta_j^l + \psi_j \delta_i^l. \quad (23)$$

Tím jsme získali rovnice, které objevil Levi-Civita. Svě slávy se ale rovnice dočkaly až roku 1918, kdy byly prvně prezentovány matematikem Wylem. Podle autora se tyto rovnice nazývají Levi-Civitovými rovnicemi a jsou nejen nutnými, ale zároveň i postačujícími podmínkami. Kdybychom zaměnili prostor V_n za prostor s afinní konexí A_n , nic by se v případě rovnic (23) nestalo, protože jsme nikde nezakládali náš postup na tom, že by objekt afinní konexe Γ_{ij}^l byl Riemannův. Výhodou Levi-Civitových rovnic tedy je, že je lze formou i obsahem použít pro A_n . Z toho můžeme vyvodit i tvrzení, že definice geodetických křivek z předchozí kapitoly (Definice 2 a Definice 5) jsou v A_n a V_n shodné.

Dokončeme nyní důkaz toho, že $x^i = x^i(t)$ je geodetickou křivkou také ve $\overline{V}_n$. Vezmeme-li v úvahu, že $x^i = x^i(t)$ je řešením soustavy (15) a pro společnou soustavu souřadnic vzhledem k zobrazení prostorů V_n a $\overline{V}_n$ platí (23), potom můžeme rovnice (15) napsat také ve tvaru

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} + \bar{\Gamma}_{ij}^l \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \bar{\rho}(t) \frac{dx^l}{dt} = 0,$$

kde invariant $\bar{\rho}(t)$ vyjádříme způsobem $\bar{\rho}(t) = \rho(t) + 2\psi_i \frac{dx^i}{dt}$, čímž jsme dokázali, že $x^i = x^i(t)$ je geodetická křivka také ve $\bar{V}_n$. [12]

6.2 Vybraní matematikové zabývající se geodetickým zobrazením

Ital Tulio Levi-Civita (1875 – 1941) získal prvenství mezi matematiky s tématem paralelního přenosu na Riemannových prostorech, kdy své nejdůležitější výsledky bádání vztahující se ke geodetickému zobrazení uveřejnil roku 1917. Jeho výsledky měly značný vliv na pozdější aplikaci diferenciální geometrie do teorie relativity. [7] Ovšem T. Levi-Civita nebyl jediný, kdo královnu věd obohatil o poznatky týkající se geodetického zobrazení. Pro nalezení počáteční nitě musíme putovat na italsko-francouzskou půdu. Roku 1779 zde matematik Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) uvedl první netriviální příklady geodetického zobrazení [7].

Poprvé se komplexnější náznak geodetického zobrazení objevil v kartografické úloze, kterou roku 1865 vyřešil E. Beltrami, když se snažil najít zobrazení plochy V_2 na Euklidovskou rovinu $\bar{E}_2$ [12]. Eugenio Beltrami (1835 – 1899) svými objevy pootevřel dveře pro začátek zkoumání neeuklidovské geometrie, kterou se později zabývali a vybudovali zejména Rus Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, maďarský matematik János Bolyai či německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss [7].

Obecně se geodetickým zobrazením začal zabývat až italský matematik a politik Ulisse Dini (1845 – 1918), který své řešení existence geodetického zobrazení V_2 na $\bar{V}_2$ uvedl v roce 1869. Tento objev, poněkud složitě zkonstruovaný, byl ještě mnohokrát upravován a zjednodušován do přijatelnější podoby. [7] O sedmadvacet let později, v roce 1896, vydal již zmiňovaný T. Levi Civita práci o transformaci rovnic dynamiky, v níž popsal základní rovnice, někdy též nazývány fundamentální rovnice [12].

Geodetické zobrazení se nadále vyvíjelo, zvláště v návaznosti na upřednostnění tenzorového počtu v oblasti diferenciální geometrie. Např. Němec Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 - 1955) nebo americký matematik Luther Pfahler Eisenhart (1876 - 1965) se

postarali o to, aby se geodetické zobrazení začalo zkoumat z takového pohledu, který se zakládal na invariantním vztahu k souřadnicím. [12]

6.3 Levi-Civitovy rovnice a jejich gradient

Na závěr kapitoly se pozastavme znovu u Levi-Civitových rovnic v Riemannových prostorech. Podívejme se nejdříve, čím je vlastně vektor ψ_i ve (23). K tomu se nám bude hodit znalost Voss-Weylovy formule, která je vyjádřena vztahem:

$$\Gamma_{il}^i = \partial_l \ln \sqrt{|g|}. \quad (24)$$

Při jejím odvození jsme vycházeli z následujících poznatků. Uvědomme si, že derivace determinantu n -řádu je rovna součtu n determinantů řádu n . Přitom každý takový determinant obdržíme, pokud v původním determinantu postupně zaměníme vždy jeden řádek za řádek poskládaný z derivací.

Máme-li proto $g \stackrel{def}{=} \det \|g_{ij}\|$ a zvolíme-li A_{ij} jako algebraický doplněk k prvku g_{ij} v determinantu g , potom můžeme napsat, že platí rovnost

$$\partial_l g = \sum_{i,j=1}^n \partial_l g_{ij} \cdot A_{ij} = g g^{ij} \partial_l g_{ij}.$$

Nyní vyjádříme $\partial_l g_{ij}$ ve tvaru součtu, tedy

$$\partial_l g_{ij} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli},$$

a tento zápis můžeme do předchozího dosadit následovně:

$$\frac{\partial_l g}{g} = g^{ij} (\Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli}) = 2\Gamma_{il}^i.$$

Tuto rovnost můžeme přepsat na $\Gamma_{il}^i = \partial_l \ln \sqrt{|g|}$, což je výše zmíněná Voss-Weylova formule.

Nyní již můžeme tuto formuli, když ji máme dokázanou, využít pro naše účely zkoumání vektoru ψ_i . Vyjděme z rovnic (23) a kontrahujme je přes indexy j a l . Za použití

(24) získáme $\partial_i \ln \sqrt{|g|} = \partial_i \ln \sqrt{|g|} + (n+1)\psi_i$, což lze přepsat jako

$$\psi_i = \frac{1}{2(n+1)} \partial_i \ln \left| \frac{g}{g} \right|. \quad (25)$$

Metrický tenzor g_{ij} se mění při transformaci souřadnic ve V_n na základě zákona

$$g'_{kh} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^h}. \text{ Z toho dostaneme } g' = g J^2, \text{ kde } J = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \right\| \text{ je Jakobián transformace}$$

souřadnic. Stejně tak $\bar{g}' = \bar{g} J^2$, a proto $\frac{\bar{g}}{g}$ je invariantní. Tím z (25) dostaneme, že

$\psi_i = \psi_{,i}$ bude gradientní vektor, který je nulový v situaci, kdy je geodetické zobrazení triviální. Tím jsme si ukázali, že vektor ψ_i z Levi-Civitových rovnic je gradientem, tedy pro něj platí rovnost $\psi_i = \psi_{,i} = \partial_i \psi$, kde $\psi = \psi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ je invariant. [12]

6.4 Transformace Levi-Civitových rovnic

Nyní si také ještě ukažme, jak lze Levi-Civitovy rovnice ve V_n transformovat. Dostaneme se tak k rovnicím, které budou sice shodné s Levi-Civitovými rovnicemi, avšak jejich zápis bude odpovídat podobě, v jaké je vyjádřil roku 1922 L. P. Eisenhart.

Každý tenzor, který závisí na x , můžeme vztáhnout jak k V_n , tak také k $\bar{V}_n$, neboť oba dva tyto prostory mají totožné souřadnice $\{x^i\}$. Vezměme $\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}(x)$ a určíme u něj kovariantní derivaci vzhledem k metrickému tenzoru g_{ij} : $\bar{g}_{ij,l} = \partial_l \bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ik} \Gamma_{jl}^k - \bar{g}_{kj} \Gamma_{il}^k$. Pravou stranu získané rovnosti převedeme s ohledem na (23) a také s vědomím, že $\bar{g}_{ij}$ je ve $\bar{V}_n$ kovariantně konstantní, na následující tvar:

$$\bar{g}_{ij,l} = 2\bar{g}_{ij}\psi_l + \bar{g}_{il}\psi_j + \bar{g}_{jl}\psi_i. \quad (26)$$

Srovnáme-li tuto pro nás novou formuli (26) s nám již dobře známou soustavou (23), zjistíme, že jsou zaměnitelné. Toto tvrzení v následujícím odstavci dokážeme.

Mějme prostory V_n a $\bar{V}_n$ a v nich definován tenzor (19). Necht' v obou prostorech platí soustava rovnic (26). Pomocí zmíněného tenzoru (19) můžeme použít následující tvar zápisu:

$$\bar{g}_{ij,l} = \partial_l \bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ik} \Gamma_{jl}^k - \bar{g}_{kj} \Gamma_{il}^k = \bar{g}_{ik} P_{jl}^k + \bar{g}_{kj} P_{il}^k.$$

Tento vztah nám po dosazení do (26) dá vyjádření

$$\bar{g}_{ik} P_{jl}^k + \bar{g}_{kj} P_{il}^k = 2\bar{g}_{ij}\psi_l + \bar{g}_{il}\psi_j + \bar{g}_{jl}\psi_i. \quad (27)$$

Pokud použijeme rovnost

$$Q_{ilj} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{g}_{jk} P_{il}^k - \bar{g}_{ij}\psi_l - \bar{g}_{jl}\psi_i = Q_{lij}, \quad (28)$$

pak můžeme (27) zjednodušit na tvar

$$Q_{ilj} + Q_{jli} = 0. \quad (29)$$

Kdybychom v (29) zaměnili indexy i a l , nic by se nám nezměnilo. Proto můžeme napsat také následující tvar:

$$Q_{lij} + Q_{jil} = 0. \quad (30)$$

Pokud od (29) odečteme (30), můžeme na základě (28) zapsat, že platí:

$$Q_{jli} - Q_{jil} = 0, \quad (31)$$

což lze pomocí cyklické záměny indexů (j, l, i) napsat také jako

$$Q_{lij} - Q_{lji} = 0. \quad (32)$$

Nabízí se nám součet výrazu (29) s postupně získanou rovností (32). Danou operaci provedeme a dostaneme

$$2Q_{ilj} = 0,$$

což nám upraví (28) na tvar

$$\bar{g}_{kj} P_{il}^k = \bar{g}_{ij} \psi_l + \bar{g}_{jl} \psi_i.$$

Když navíc napíšeme index j zpět na původní pozici, získáme

$$P_{il}^j = \psi_l \delta_i^j + \psi_i \delta_l^j,$$

čímž se navracíme zpět k rovnosti (22). Jak již víme, formule (22) ve spojení s (19) nám dá Levi-Civitovy rovnice ve tvaru (23). K tomuto závěru jsme chtěli dojít, abychom dokázali, že ze soustavy (26) nám plyne (23). Tedy transformace Levi-Civitových rovnic je ve V_n korektní a můžeme také tvar (26) nalezený L. P. Eisenhartem považovat za Levi-Civitovy rovnice. [12] Dokonce rovnice (23) a (26) bývají společně nazývány základními rovnicemi teorie geodetických zobrazení Riemannových prostorů, což nám potvrdí následující vyslovená věta:

Věta 3. *Zobrazení Riemannova prostoru V_n na Riemannův prostor $\bar{V}_n$ je geodetické tehdy a jen tehdy, právě když ve společné soustavě souřadnic, vzhledem k tomuto zobrazení, mezi Christoffelovými symboly platí vztah (23), nebo ekvivalentně, když metrický tenzor $\bar{g}_{ij}$ prostoru $\bar{V}_n$ v prostoru V_n bude vyhovovat podmínkám (26). [12]*

7. Další příklady geodetických zobrazení

7.1 Beltramiho polovina hyperboloidu

Výše zmíněné gnómonické zobrazení známe v matematice zejména díky J. L. Lagrangeovi (1736 – 1813), který rozpracoval promítání $f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{y}, -\frac{y}{z}, -1\right)$ určující dvojdimenzionální zobrazení polokoule na rovinu. Při tomto zobrazení se křivky z polokoule $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, která je definovaná pro všechna $z < 0$, zobrazí na rovinu $E = \{(x, y, z) \in R^3 : z = -1\}$. Italský matematik Eugenio Beltrami (1835 - 1899) nahradil polokouli za polovinu hyperboloidu $H = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. Pak zobrazení libovolné křivky z tohoto rotačního tělesa leží na průniku promítací roviny a roviny obsahující křivku z povrchu hyperboloidu spolu s bodem $(0, 0, 0)$. Takovýmto zobrazením křivky z poloviny hyperboloidu na rovinu je opět přímka.

Samozřejmě tato zobrazení lze zobecnit i pro vyšší dimenze. V tom případě bychom zapsali např. gnómonické zobrazení poloviny sféry ve tvaru $S^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} : x^{1^2} + x^{2^2} + \dots + x^{n+1^2} = 1\}$. Zaměřme se raději na prostory dimenze 2, neboť ty nám skýtají dostatek zajímavých podnětů pro naše zkoumání. [7]

7.2 Geodetická zobrazení dimenze 2

Předpokládejme geodetické zobrazení Riemannova prostoru $V_2 = (M_n, g)$ s konexí ∇ na Riemannův prostor $\bar{V}_2 = (\bar{M}_n, \bar{g})$ s konexí $\bar{\nabla}$. Uvažujme symetrický tenzor $q = e^{-4\psi} g$, který rozepíšeme na složky následujícím způsobem:

$$q_{ij} = e^{-4\psi} \bar{g}_{ij}. \quad (33)$$

Funkce ψ je charakterizována vztahem

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln \left| \frac{\bar{G}}{G} \right|, [7]$$

kde (podle [8])

$$G = \det(g_{ij}) \text{ a } \bar{G} = \det(\bar{g}_{ij}). \quad (34)$$

Jelikož g i $\bar{g}$ mají kladné determinanty, nemusíme při vyjádření tvaru funkce ψ psát absolutní hodnotu, a tedy ji můžeme rozepsat pro dvojdimensionální potřeby následujícím způsobem:

$$\psi = \frac{1}{6} \ln \frac{\bar{G}}{G}. \quad (35)$$

Takto zadaný tenzor q nazvěme tenzorem geodetického zobrazení. V předchozí kapitole jsme se zabývali transformací Levi-Civitových rovnic. Pokusme se na základě znalosti tenzoru geodetického zobrazení dostat až k tvaru, který uvedl roku 1922 L. P. Eisenhart, tj.:

$$q_{ij,k} + q_{jk,i} + q_{ki,j} = 0.$$

Vraťme se nyní k rovnici (33) a označme písmenem Q determinant složek tenzoru:

$$Q = \det(q_{ij}).$$

Díky poznatku (34) [7] můžeme Q rozepsat na tvar

$$Q = \det(e^{-4\psi} \bar{g}_{ij}),$$

což umíme upravit následujícím způsobem:

$$Q = \det e^{-4\psi} \bar{G} = (e^{-4\psi})^2 \bar{G} = e^{-8\psi} \bar{G} > 0. [7]$$

Pokusme se pomocí Q vyjádřit funkci ψ . K tomu užijeme podílový tvar Q a G , který upravíme pomocí (34) takto:

$$\frac{Q}{G} = \frac{e^{-8\psi} \bar{G}}{\det g_{ij}} = e^{-8\psi} \frac{\bar{G}}{G}. \quad (36)$$

Výraz (36) zlogaritmujeme a obdržíme:

$$\ln \frac{Q}{G} = \ln \left(e^{-8\psi} \frac{\bar{G}}{G} \right),$$

což jednoduše upravíme na rovnici

$$\ln \frac{Q}{G} = \ln e^{-8\psi} + \ln \frac{\bar{G}}{G}$$

a dostaneme tvar

$$\ln \frac{Q}{G} = -8\psi + \ln \frac{\bar{G}}{G}. \quad (37)$$

Pokud vynásobíme (37) číslem -3, můžeme již běžnými matematickými úpravami získat z předchozí rovnosti vyjádření funkce ψ pomocí Q . Úpravy vypadají následovně.

Nejprve provedeme již zmíněný součin (37) a čísla -3:

$$-3 \ln \frac{Q}{G} = 24\psi - 3 \ln \frac{\bar{G}}{G}.$$

Poté za ψ dosadíme (35):

$$-3 \ln \frac{Q}{G} = 24 \left(\frac{1}{6} \ln \frac{\bar{G}}{G} \right) - 3 \ln \frac{\bar{G}}{G},$$

upravíme na tvar

$$-3 \ln \frac{Q}{G} = 4 \ln \frac{\bar{G}}{G} - 3 \ln \frac{\bar{G}}{G}$$

a dostáváme žádanou rovnici:

$$-3 \ln \frac{Q}{G} = \ln \frac{\bar{G}}{G}, \quad (38)$$

ze které již vyjádříme ψ , neboť když do (35) dosadíme (38), získáme:

$$\psi = \frac{1}{6} \ln \frac{\bar{G}}{G} = \frac{1}{6} \left(-3 \ln \frac{Q}{G} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{Q}{G}.$$

V následujícím postupu využijeme označení $\tilde{q}^{ij}$ pro inverzní matici ke q_{ij} [7]. Současně algebraický doplněk složek q_{ij} v determinantu Q zapíšeme jako Q_{ij} . Potom nám platí, že:

$$\tilde{q}^{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q_{ij}}.$$

Pro vyjádření kovariantní derivace ∇q použijeme rovnici:

$$q_{ij,k} = -2q_{ij}\psi_k + q_{ik}\psi_j + q_{jk}\psi_i, \quad (39)$$

kde jsme využili znalosti rovnice:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}. \quad (40)$$

Můžeme dokonce říci, že rovnice (39) a (40) sobě odpovídají. Když přehlédneme tuto rovnost a vrátíme se pouze k výrazu (39), můžeme jako jeho důsledek zapsat systém diferenciálních rovnic:

$$q_{ij,k} + q_{jk,i} + q_{ki,j} = 0. \quad (41)$$

Tímto tvarem jsme dospěli k podobě, v níž rovnice roku 1922 zapsal L. P. Eisenhart. A toho jsme chtěli dosáhnout. Dá se navíc dokázat, že rovnice (40) a (41) se sobě rovnají, čímž se ale v této práci nebudeme zabývat (případní zájemci mohou najít podrobný důkaz v [7]).

Podle L. P. Eisenharta můžeme vyslovit následující větu [7] (důkaz nebudeme uvádět):

Věta 4. *Zobrazení dvourozměrných pseudo-Riemannových prostorů je geodetické právě tehdy, když tenzor zobrazení $q = e^{-4\psi} g$ vyhovuje soustavě diferenciálních rovnic (41). [7]*

7.3 Věta U. Diniho o netriviálním geodetickém zobrazení ploch

O půl století dříve než byla uvedena Eisenhartova věta, přesněji v roce 1869, přišel matematik U. Dini s obdobným výsledkem, ovšem v jiném geometrickém znění:

Věta 5. *Plochu můžeme netriviálním geodetickým zobrazením přenést na jinou plochu pouze za předpokladu, že daná plocha je Liouvilleova. Pak existuje netriviální geodetické zobrazení na jinou plochu právě tehdy, když tato plocha je Liouvilleova.*

Poznamenejme, že Liouvilleovy plochy jsou pojmenovány po jejich objeviteli, Rogeru Liouvilleovi, který je zkoumal již od roku 1850. Jsou to plochy, jejichž obrazy jsou v geodetickém zobrazení opět Liouvilleovými plochami. Vzorným příkladem Liouvilleových ploch jsou např. všechny rotační plochy.

Tato věta U. Diniho byla postupem času dokazována větším počtem matematiků. Naznačme proto jen lehce důkaz této věty, který ovšem není původním zněním důkazu od samotného autora věty.

Důkaz. Budeme předpokládat, že existuje geodetické zobrazení plochy S na plochu $\bar{S}$. Potom s ohledem na dané zobrazení můžeme najít kartézský systém souřadnic (u, v) , pro něhož platí, že $g_{12} = \bar{g}_{12} = 0$. Christoffelovy symboly jsou pak následující:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial v}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial v}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial v}.\end{aligned}$$

Když se podíváme zpět na systém rovnic (41), můžeme jej zapsat ve tvaru

$$q_{11,1} = q_{22,2} = 0, \quad q_{11,2} + 2q_{12,1} = 0, \quad q_{22,1} + 2q_{12,2} = 0. \quad (42)$$

První rovnost z výše zmíněného systému rovnic (42) nám pro Christoffelovy symboly Γ_{ij}^k předkládá tvar

$$\frac{\partial q_{11}}{\partial u} - \frac{q_{11}}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u},$$

neboli jinak zapsáno:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\ln \frac{q_{11}}{g_{11}} \right) = 0.$$

Ve výše zmíněné rovnosti objevujeme rovnici $q_{11} = g_{11}V(v)$, kde $V(v)$ je libovolná kladná reálná funkce. Stejně tak můžeme jako kladnou reálnou funkci charakterizovat funkci $U(u)$, kterou získáme zápisem rovnosti $q_{11,2} + 2q_{12,1} = 0$ ze systému rovnic (42) jako $q_{22} = g_{22}U(u)$. Spojením těchto poznatků spolu s třetí rovností ze (42) dostáváme následující výraz:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{q_{11}}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{q_{22}}{g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{q_{11}}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0,$$

Který lze snadno pomocí funkcí $U(u)$ a $V(v)$ přepsat na tvar

$$(U(u) - V(v)) \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - g_{11} \frac{\partial (U(u) - V(v))}{\partial v} = 0.$$

Pokud by funkce $U(u)$ a $V(v)$ sobě odpovídaly, tedy pokud by platilo, že $(U(u) - V(v)) = 0$, pak by se jednalo o konstantní funkce a dospěli bychom k pouze triviálnímu zobrazení. Předpokládejme proto, že $(U(u) - V(v)) \neq 0$. Tím získáváme (pro $\phi(u) > 0$) vyjádření

$$g_{11} = (U(u) - V(v))\phi(u),$$

neboť funkce $\frac{g_{11}}{(U(u) - V(v))}$ je závislá pouze na u . Stejně tak jsme schopni napsat, že

$$g_{22} = (U(u) - V(v))\kappa(v),$$

kde $\kappa(v)$ je stejně jako $\phi(u)$ kladná funkce. V tomto případě nám ovšem platí formule

$$ds^2 = (U(u) - V(v))(\phi(u)du^2 + \kappa(v)dv^2),$$

kterou lze po vhodné změně souřadnic u a v zapsat také ve tvaru

$$ds^2 = (U(u) - V(v))(du^2 + dv^2). \quad (43)$$

Ve skutečnosti se jedná o vyjádření Liouvilleových ploch. Jelikož

$$Q = q_{11} \cdot q_{22} = G \cdot U(u) \cdot V(v)$$

a zároveň $\psi = -\frac{1}{2} \ln \frac{Q}{G}$, jak jsme určili výše, dostáváme funkci ψ vyjádřenou rovnicí

$$\psi = -\frac{1}{2} \ln U(u) \cdot V(v).$$

To nás ovšem navádí podle (35) na zápis

$$\bar{g}_{ij} = e^{4\psi} q_{ij} = \frac{q_{ij}}{U^2 V^2},$$

z něhož jednoduše vypíšeme $\bar{g}_{11}$, $\bar{g}_{22}$ a $\bar{g}_{12}$ následujícím způsobem:

$$\bar{g}_{11} = \frac{(U - V) \varphi(u)}{U^2 V},$$

$$\bar{g}_{22} = \frac{(U - V) \kappa(v)}{U V^2}$$

$$\bar{g}_{12} = 0.$$

A tím se dostáváme ke konci našeho důkazu. Pokud lze plochu zapsat pomocí (43), pak rovnost

$$ds^2 = \left(\frac{1}{U(u)} - \frac{1}{V(v)} \right) \left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V} \right)$$

vyjadřuje metrickou formu obrazu dané plochy získaného geodetickým zobrazením. [7] ■

Celou kapitolu zakončíme výsledkem ze zkoumání metrik matematikem Levi-Civitou (větu uvádíme pro jednoduchost bez důkazu):

Věta 6. *Nechť jsou dány Riemannovy metriky g a $\bar{g}$, které jsou výhradně nesouměrné v jakémkoli daném bodě p . Potom v okolí tohoto bodu p můžeme nalézt souřadnicový systém $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ takový, že metrické formy ds^2 a $\bar{ds}^2$ vypadají následovně:*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |X_i(x^i) - X_j(x^j)| \cdot dx^{i^2},$$

$$\bar{ds}^2 = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^n X_{\alpha}(x^{\alpha})} \cdot \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |X_i(x^i) - X_j(x^j)| \cdot \frac{dx^{i^2}}{X_i(x^i)},$$

kde $X_i(x^i) > 0$ (pro $i = 1, 2, \dots, n$) jsou diferencovatelné funkce v parametru x^i .

Takovéto metriky nazýváme Levi-Civitovými metrikami. [7]

Závěr

Geodetická zobrazení jsou jen výřezem z celého vědního oboru diferenciální geometrie. A i přesto je to velmi obsáhlé téma, kterému je věnováno mnoho vědeckých pojednání a také několik monografií. Některá témata z této diplomové práce by se dala v rámci jednotlivých kapitol více rozepsat či se od nich odklonit a postupovat jinými směry. Cílem diplomové práce nebylo shrnout všechny poznatky o geodetických zobrazeních a systematicky je vypsát jeden za druhým, ale jak již napovídá název práce „Úvod do teorie geodetických zobrazení“, primárním cílem bylo uvést čtenáře do povědomí o těchto zobrazeních.

Diplomová práce je strukturována ve výsledku tak, aby předkládala i čtenáři s minimální orientací v diferenciální geometrii co nejjasnější pohled na geodetická zobrazení. Úvodní kapitoly byly proto zaměřeny zejména na ty poznatky o plochách a geodetických křivkách, které jsou potřebné k pochopení následujících kapitol o samotných geodetických zobrazeních. Ani v rámci kapitol pojednávajících čistě o geodetických zobrazeních jsem neuváděla všechny poznatky daného tématu. Zaměřila jsem se převážně na konkrétní příklady geodetického zobrazení (ať už na projekce nebo na Beltramiho polovinu hyperboloidu) a nechťela jsem vynechat ani mnohé poznatky o Levi-Civitových rovnicích (odvození, transformace) a Levi-Civitových metrikách.

Pro určitou kompaktnost práce jsem se snažila obohatit text o souvislosti týkající se historického vývoje jednotlivých témat. Někteří matematikové navazovali na práce předešlých vědců a bez těchto souvislostí by tento text byl jen suchým, nesrozumitelným výčtem několika informací, které by do sebe nezapadaly. S drobnými vsuvkami o historickém vývoji tak dostala práce kompaktnější charakter.

Jelikož jsem studentkou dvouoborového učitelského studia s aprobací matematika – geografie, možná jsem i tajně doufala, že se najde v tématu diplomové práce alespoň výsek, který by propojil oba mnou studované předměty. V rámci páté kapitoly jsem ke svému potěšení objevila propojení diferenciální geometrie s kartografií. Není proto divu, že téma gnómonické projekce jsem rozvinula o mnoho více než ostatní příklady geodetického zobrazení. Navíc se mi podařilo odhalit veřejnosti málo známou a přesto věrohodnou literaturu, v níž je za praotce gnómonické projekce považován Thales z Milétu (624 – 546 př. Kr.), který její prazáklady používal pro konstruování hvězdných map [11].

Diplomová práce, kterou jsem psala na základě poznatků z uvedené použité literatury, byla pro mne obohacením v tom směru, že jsem se mohla zamýšlet nad konkrétními souvislostmi jednotlivých témat a snažit se je vhodně uspořádat do jednotlivých kapitol. Jako autorka práce pevně věřím, že se najde čtenář, kterého geodetická zobrazení nadchnou a sáhne po literatuře obohacující jeho rozhled v tomto tématu.

Anotace

Diplomová práce pojednává o teorii geodetických zobrazení ploch, Riemannových a pseudo-Riemannových prostorů. Jsou zde uvedeny základní pojmy geodetických křivek a zobrazení těchto prostorů, které mají základ v pracích T. Levi-Civita a L. P. Eisenharta. Tyto pojmy jsou demonstrovány na mnohých příkladech geodetických zobrazení, jako jsou projekce rovin, gnómonická projekce aj. Dále zde uvádíme řešení U. Diniho o geodetických zobrazeních ploch.

Klíčová slova

geodetické křivky, geodetická zobrazení, projekce rovin, gnómonická projekce, Levi-Civitovy rovnice, Riemannovy prostory

Annotation

The thesis treats of the theory of geodesic mappings of surfaces, Riemann and pseudo-Riemann spaces. There are noted the basic concepts of geodesic curves and mappings of this spaces, which have the basis in the works of T. Levi-Civita and L. P. Eisenhart in this thesis. These concepts are demonstrated on the many examples of geodesic mappings, such are projections of planes, gnomonic projection etc. Further, here we note the solution of U. Dini about the geodesic mappings of surfaces.

Key words

geodesic curves, geodesic mappings, projections of planes, gnomonic projection, Levi-Civita equations, Riemann spaces

LITERATURA

1. Eisenhart, L. P. *Riemannian Geometry*. Princeton: Princeton University Press, 1968 (1925).
2. Harley, J. B. *The History of Cartography: Cartography in Prehistoric, Ancient and Medieval Europe and the Mediterranean, Vol. 1*. Chicago; London: The University of Chicago Press, 1987. 167.
3. Hložek, M. *Sférická geometrie*. 2005. Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni. Diplomová práce. 31-32.
4. Honl, I., Procházka, E. *Úvod do dějin zeměměřictví I*. Praha: Ediční středisko ČVUT, 1981. 47.
5. Lakomá, H. *Gnómonická projekce*. ČVUT FSv. Studijní materiál (dostupné z <https://mat.fsv.cvut.cz/lakoma/KOGG/2013/GnomonickaProjekce2013.pdf>). Praha, 2013. 5, 6.
6. Mikeš, J. *On the existence of n -dimensional compact Riemannian spaces admitting nontrivial global projective transformations*. Dokl. AN SSSR, Vol. 39, No. 2, 1989.
7. Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurová, A. *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*. Olomouc: Palacký University Press, 2008. 63, 67-68, 111-115.
8. Mikeš, J., Vanžurová, A., Hinterleitner, I. *Geodesic Mappings and Some Generalizations*. Olomouc: Palacký University Press, 2009. 167.
9. National Geographic Society (Spojené státy americké). *Mapping the World: An Illustrated History of Cartography*. Editor: Ehrenberg, R. E. Washington: National Geographic Society, 2006. 9.

10. Nguyen, V. B. *Kartografické projekce*. 2012. Gymnázium Christiana Dopplera. Praha. Ročníková práce z deskriptivní geometrie. 9-19.
11. Synder, J. P. *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*. Chicago; London: The University of Chicago Press, 1993. 18, 20.
12. Škodová, M. *Geodetická zobrazení a deformace Riemannových prostorů*. 1999. PŘF, UP Olomouc. Diplomová práce. 8-26.
13. ÚM FSI VUT v Brně. *3 Projektivní prostor*. Studijní text. Brno, 2012. 50-54.