UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Normalita a s ní související distribuce

Vedoucí bakalářské práce:

prof. RNDr. Ing. Lubomír Kubáček, DrSc., Dr. h. c.

Vypracoval:

Jaroslav Janoušek

MATEKO, III. ročník

Rok odevzdání: 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana prof. RNDr. Ing. Lubomíra Kubáčka, DrSc., Dr. h. c., a že jsem uvedl všechny použité zdroje.

V Olomouci dne 11. března 2014

Obsah

Úvod

Normální rozdělení má ve statistice výjimečné postavení. V různých vědních oborech (např. v biologii, medicíně, psychologii aj.) se vyskytuje mnoho statistických znaků, které se alespoň přibližně řídí normálním rozdělením. Obecně se normální rozdělení vyskytuje u těch veličin, jejichž hodnoty jsou výsledkem většího počtu nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů. Nejběžnějším typem takovéto veličiny jsou náhodné chyby (např. chyby vznikající při měření fyzikálních veličin); proto také bývá normální rozdělení označováno jako zákon chyb. V teorii pravděpodobnosti jsou teoretické předpoklady normality statistického znaku popsány v podobě tzv. Centrálních limitních vět, z nichž ta nejobecnější (věta Ljapunovova) říká, že náhodná veličina vzniklá součtem n vzájemně nezávislých libovolně rozdělených náhodných veličin se za určitých podmínek s rostoucím n blíží k normálnímu rozdělení. Dá se říci, že všude tam, kde hraje roli náhoda a velký počet vlivů, se musí vždy alespoň přibližně dojít k normálnímu rozdělení. Filosofická podstata všudypřítomnosti normálního rozdělení však nebyla nikdy přesně objasněna. Normální rozdělení je především základní pomůckou statistické práce.

Text této práce je rozdělen do dvou kapitol. První kapitola je věnována normálnímu rozdělení, kde je nejdříve stručně nastíněn jeho historický vývoj včetně dvou historicky významných odvození- Gaussova a Herschelova. Dále jsou popsány vlastnosti normálního rozdělení a závěr kapitoly je věnován mnohorozměrnému normálnímu rozdělení. V první kapitole bylo čerpáno především z [1] a [4]. Obsahem druhé kapitoly jsou tři pravděpodobnostní rozdělení, které lze získat přímo z normálního rozdělení transformací náhodné veličiny. U každého rozdělení je objasněn jeho vztah k normálnímu rozdělení. Tato pravděpodobnostní rozdělení nacházejí široké uplatnění v oblasti zjišťování intervalů spolehlivosti při testování statistických hypotéz. V druhé kapitole bylo čerpáno především z [2] a [10].

Grafická reprezentace (vyjma obrázků 1.3 a 1.4) byla vytvořena v programu MATLAB. Bakalářská práce předpokládá základní znalosti z oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické analýzy.

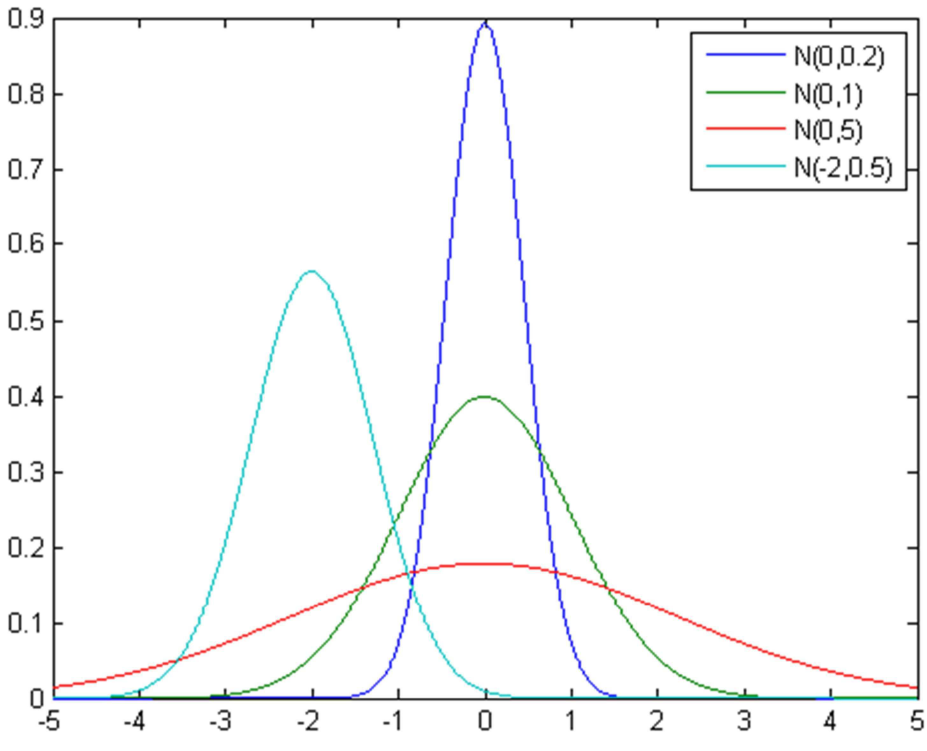
Kapitola 1

Normální rozdělení

1.1 Definice normálního rozdělení

Definice 1.1 Náhodná veličina X má normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti s parametry $\mu \in R$ a $\sigma^2 > 0$ (zapisujeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), je-li její hustota tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$



Obrázek 1.1: Grafy hustot normálního rozdělení s různými dvojicemi parametrů μ a σ^2

1.2 Geneze normálního rozdělení

1.2.1 Hledání křivky chyb

Normální rozdělení je často označované jako Gaussovo dle německého matematika a fyzika Carla Friedricha Gausse (30. 4. 1777 – 23. 2. 1855).

Ten křivku normálního rozdělení odvodil na počátku 19. století. Ve skutečnosti se objev křivky datuje podstatně dříve, a to 12. listopadu 1733, kdy francouzský matematik Abraham de Moivre (26. 5. 1667 – 27. 11. 1754) zveřejnil latinský článek *Approximatio ad summam terminorum binomii (a+b)^n in seriem expansi*. De Moivre se snažil aproximovat binomické rozdělení $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ tak, aby bylo možno provádět složitější výpočty pravděpodobností pro velký počet pokusů (např. házení mincí), a dokázal, že

$$\sum_{j}^{i} \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} \approx \mathrm{N}\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \mathrm{N}\left(\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

kde

$$\mathrm{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx.$$

Tento více méně náhodný objev křivky normálního rozdělení však upadl do zapomnění, neboť integrál $\int e^{-x^2} dx$ byl vyčíslen až zhruba o padesát let později, a princip hustoty pravděpodobnosti De Moivre neznal. Později v průběhu 18. století mohl mít jeho objev veliký význam pro astronomy, kteří věčně stáli před problémem, jak stanovit nejlepší odhad skutečné vzdálenosti kosmických objektů (hvězd a planet) z odlišných naměřených hodnot. Tato měření byla zatížena chybami, především vinou měřicího přístroje a povětrnostních podmínek, a tudíž se různila.

Astronomie byla vůbec první vědou, která volala po jednotné a korektní statistické metodě ke stanovení nejlepšího odhadu skutečné hodnoty z několika měření. Již ve 2. století přnl. používal Hipparchus při řešení astronomických problémů průměrování naměřených dat. V 16. století zavedl Tycho Brahe do astronomických postupů opakovaná měření. Následně astronomové používali různé metody, jak prezentovat naměřené hodnoty, nejčastěji však používali aritmetický průměr nebo medián či jejich kombinaci. Postupem času převážil výhradně aritmetický průměr. Intuice tedy vedla astronomy tím správným směrem, chybělo však matematické opodstatnění tohoto počínání.

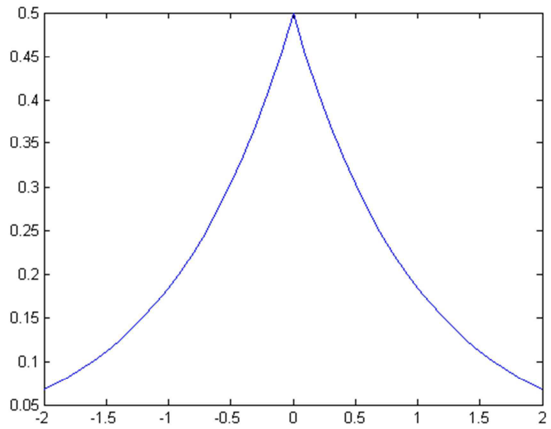
Jak již bylo řečeno, rozdílnost astronomických měření způsobovaly chyby, především chyby systematické (nepřesnost měřicího přístroje). Prvním vědcem, který se pokusil hlouběji analyzovat tyto odchylky, byl italský astronom a fyzik Galileo Galilei.

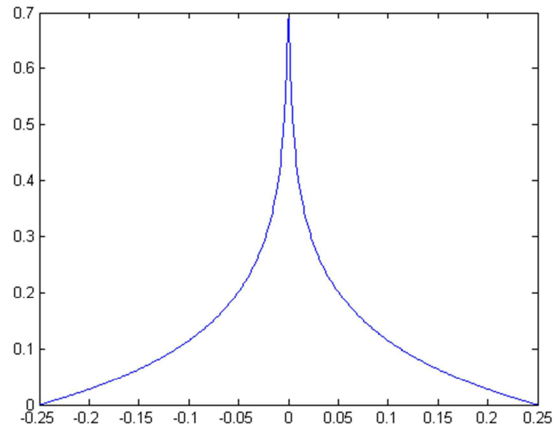
Jeho úvahy ohledně chyb měření z knihy *Dialogy o dvou největších systémech světa* z roku 1632 se dají shrnout do čtyř bodů:

1. Existuje pouze jediná správná hodnota vzdálenosti hvězdy od středu Země.
2. Všechna pozorování jsou vlivem použitých nástrojů a dalších podmínek zatížena chybami.
3. Naměřené hodnoty jsou rozloženy symetricky kolem skutečné hodnoty; tudíž chyby měření jsou rozloženy symetricky kolem nuly.
4. Malé chyby se vyskytují častěji než velké chyby.

Galileo nicméně nenavrhl, jak by měla vypadat křivka chyb, nebo jak by se měla skutečná hodnota odhadnout. Až o více než sto let později byla na světě první křivka, která již dostatečně připomínala onen známý zvonovitý tvar hustoty normálního rozdělení. Jejím autorem byl francouzský matematik, fyzik a astronom Pierre Simon de Laplace (23. 3. 1749 – 5. 3. 1827).

Jeho prvním zobrazením chyb měření byla křivka tvaru $f(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|}$, o tři roky později předložil alternativu tvaru $f(x) = \frac{1}{2a} ln \frac{a}{|x|}$.





Obrázek 1.2: První a druhá Laplaceho křivka chyb

Snahu o matematické vyjádření křivky chyb završil až Carl Friedrich Gauss, který byl přesvědčen, že aritmetický průměr naměřených hodnot je nejlepším odhadem skutečné hodnoty. Tuto podmínku potom využil při hledání hustoty pravděpodobnosti chyb měření.

1.2.2 Gaussovo odvození

Gauss při svém odvození vycházel z těchto předpokladů:

1. Malé chyby jsou pravděpodobnější než velké chyby.
2. Pro jakékoli reálné číslo ϵ je pravděpodobnost chyby o hodnotách ϵ a $-\epsilon$ stejná.
3. Z několika měření stejné veličiny je nejpravděpodobnější správnou hodnotou aritmetický průměr z těchto měření.

Nechť p je skutečná, ale neznámá hodnota měřené veličiny, nechť máme n nezávislých měření $M_1, M_2, \dots, M_n$, a nechť $\varphi(x)$ je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny udávající velikost náhodné chyby. Z prvního předpokladu vyplývá, že $\varphi(x)$ má maximum v $x = 0$, zatímco druhý předpoklad implikuje sudost funkce $\varphi(x)$, a tedy $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Pokud definujeme

$$f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \tag{1.1}$$

potom platí

$$f(-x) = -f(x), \tag{1.2}$$

neboť $f(-x) = \varphi'(-x)/\varphi(-x) = -\varphi'(x)/\varphi(x) = -f(x)$. Pokud $M_i - p$ představuje velikost chyby i-tého měření, a chyby jednotlivých měření jsou stochasticky nezávislé, potom

$$\Omega = \varphi(M_1 - p)\varphi(M_2 - p) \dots \dots \varphi(M_n - p)$$

je sdružená hustota pravděpodobnosti pro n chyb. Podle třetího Gaussova předpokladu je hodnota $\overline{M}$ definovaná jako

$$\overline{M} = \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n}$$

nejlepším odhadem hodnoty p. Tedy při dosazení $\overline{M}$ za neznámou hodnotu p musí funkce Ω v souladu s prvním předpokladem nabývat maximální hodnoty. Tudíž platí, že

$$0 = \frac{d\Omega}{dp|_{p=\overline{M}}} = -\varphi'\left(M_1 - \overline{M}\right)\varphi\left(M_2 - \overline{M}\right) \dots \varphi\left(M_n - \overline{M}\right) -$$

$$-\varphi\left(M_1 - \overline{M}\right)\varphi'\left(M_2 - \overline{M}\right) \dots \varphi\left(M_n - \overline{M}\right) - \cdots$$

$$-\varphi(M_1-\overline{M})\varphi(M_2-\overline{M})\dots\varphi'(M_n-\overline{M})=$$

$$=-\left(\frac{\varphi'(M_1-\overline{M})}{\varphi(M_1-\overline{M})}+\frac{\varphi'(M_2-\overline{M})}{\varphi(M_2-\overline{M})}+\cdots+\frac{\varphi'(M_n-\overline{M})}{\varphi(M_n-\overline{M})}\right)\Omega.$$

Protože Ω je nenulová funkce, platí vzhledem k (1.1)

$$f(M_1-\overline{M})+f(M_2-\overline{M})+\cdots+f(M_n-\overline{M})=0. \tag{1.3}$$

Jestliže hodnoty měření M_i mohou nabývat libovolných hodnot, můžeme zjednodušit situaci a zavést označení

$$M_1=M, \qquad M_2=M_3=\cdots=M_n=M-nN,$$

kde M a N jsou libovolná reálná čísla. Potom pro $\overline{M}$ bude platit

$$\overline{M}=\frac{M_1+M_2+\cdots+M_n}{n}=\frac{M+(n-1)(M-nN)}{n}=\frac{n(M-nN+N)}{n}=M-(n-1)N.$$

Substitucí do (1.3) a s následným využitím (1.2) dostaneme

$$f\big((n-1)N\big)+(n-1)f(-N)=0 \quad \text{neboli} \quad f\big((n-1)N\big)=(n-1)f(N).$$

Tato vlastnost[1] spolu se spojitostí f vede k řešení $f(x)=kx$ pro nějaké $k\in R$. Podle (1.1) tedy dostaneme rovnici

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=kx.$$

Integrací vzhledem k proměnné x obdržíme

$$ln\varphi(x)=\frac{k}{2}x^2+c \quad \text{neboli} \quad \varphi(x)=Ae^{kx^2/2}.$$

Jelikož předpokládáme, že $\varphi(x)$ má maximum v $x=0$, pak k musí být záporné a proto položíme $k/2=-h^2$. Máme tedy funkci $\varphi(x)=Ae^{-h^2x^2}$. Aby tato funkce byla hustotou pravděpodobnosti, musí platit, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-h^2x^2}dx=1.$$

[1] $f(nx)=nf(x)$ je důsledkem Cauchyovy funkcionální rovnice $\mathrm{f}(x+y)=f(x)+f(y)$, jejímž řešením nad množinou racionálních čísel je skupina funkcí $f(x)=cx$ (tzv. aditivní funkce), kde $c=f(1)$. Rozšíření této skupiny pro řešení nad množinou reálných čísel $f: R\to R$ je zajištěno předpokladem spojitosti $f(x)$.

S pomocí vztahu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ vypočteme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Za A tedy dosadíme obrácenou hodnotu a výsledkem je hustota pravděpodobnosti ve tvaru

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

kde h je kladná konstanta, kterou Gauss považoval za ‘přesnost procesu měření’. Jeho křivka chyb je známou hustotou normálního rozdělení pro $\mu = 0$ a $\sigma = 1/\sqrt{2}h$.

1. 1. 1801 objevil italský astronom Giuseppe Piazzi novou planetku a pojmenoval ji Ceres. Dříve než však bylo možno provést dostatek měření k výpočtu její oběžné dráhy, Ceres zmizela za Sluncem. Mnoho astronomů se snažilo odhadnout oblast, kde by se měla planetka opět vynořit. Gaussův předpoklad se značně lišil od ostatních návrhů a ukázalo se, že byl správný. Vysvětlil, že k výpočtu dráhy planetky použil vlastní metodu, totiž metodu nejmenších čtverců, tehdy ještě neznámou, kterou odůvodnil výše popsanou teorií chyb. Jelikož je aritmetický průměr v podstatě speciální případ metody nejmenších čtverců (bodová aproximace), Gauss vlastně použil konkrétní aplikaci metody nejmenších čtverců jako předpoklad v jeho teorii chyb, kterou, jak již bylo řečeno, následně použil k odůvodnění obecné metody nejmenších čtverců. Tento ‘samozaváděcí‘ přečin měl za následek, že ostatní statistici zaujali k jeho objevům skeptický postoj, a sám Gauss se načas dalším využitím křivky normálního rozdělení nezabýval. To však učinil Laplace, který v roce 1810 odvodil Centrální limitní větu, čímž zdůraznil význam normálního rozdělení ve statistice.

1.2.3 Herschelova hypotéza

Anglický astronom a matematik John Herschel (7. 3. 1792 – 11. 5. 1871) odvodil normální rozdělení v roce 1850. Jeho odvození je zajímavé z hlediska malého počtu předpokladů, ze kterých při své hypotéze vycházel. Herschel vzal v úvahu dvourozměrnou hustotu pravděpodobnosti pro chyby při měření polohy hvězdy $\rho(x, y)$, kde x je chyba ve směru zeměpisné délky (východ – západ) a y je chyba ve směru zeměpisné šířky (sever – jih). Rozdělení pravděpodobností je u obou proměnných totožné. Herschel uvažoval dva předpoklady:

1. Chyby měření jsou v jednotlivých směrech navzájem nezávislé.

Tudíž sdruženou hustotu pravděpodobnosti můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\rho(x,y) = p(x)p(y). \tag{1.4}$$

Budeme-li uvažovat polární souřadnice místo kartézských, můžeme psát

$$\rho(x,y) = g(r,\theta), \tag{1.5}$$

tj. hustota pravděpodobnosti v bodě (x,y) závisí na vzdálenosti r a úhlu θ, přičemž r (velikost chyby) je vzdálenost bodu (x,y) od počátku souřadnicové sítě tvořeného skutečnou polohou hvězdy (teoreticky bodovou) a θ úhel mezi spojnicí bodu (x,y) s počátkem a přímkou s úhlem 0°.

2. Hustota pravděpodobnosti v bodě (x,y) závisí pouze na vzdálenosti r.

Tedy $g(r,\theta) = g(r)$, a podle (1.4) a (1.5) obdržíme

$$p(x)p(y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{1.6}$$

neboť $r^2 = x^2 + y^2$. Položíme-li $y = 0$, dostaneme $p(x)p(0) = g(x)$, naopak při $x = 0$ obdržíme $p(y)p(0) = g(y)$. Rovnice (1.6) tedy přejde do tvaru

$$p(x)p(y) = p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)p(0),$$

a vydělením $[p(0)]^2$ dostáváme

$$\frac{p(x)}{p(0)}\frac{p(y)}{p(0)} = \frac{p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{p(0)}.$$

Položíme-li $f(x) = ln[p(x)/p(0)]$, obdržíme rovnici

$$f(x) + f(y) = f(r), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Řešení této funkcionální rovnice je zřejmé: funkce proměnné x plus funkce proměnné y je funkce výrazu $x^2 + y^2$, takže řešením, vzhledem ke spojitosti f, je $f(x) = cx^2$ pro nějaké $c \in R$. Takže

$$ln\left[\frac{p(x)}{p(0)}\right] = cx^2.$$

Odtud dále

$$\frac{p(x)}{p(0)} = e^{cx^2} \quad \text{neboli} \quad p(x) = p(0)e^{cx^2}.$$

K tomu, aby $p(x)$ byla hustota pravděpodobnosti, je nutné, aby c bylo záporné číslo, proto položíme $c = -1/2\sigma^2$ a podobně jako u Gaussova odvození dopočteme normalizační faktor $p(0) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Výsledkem je tedy funkce

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

což je hustota normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 0$ a rozptylem σ.

Gaussovo i Herschelovo odvození tedy prezentuje normální rozdělení jako zákon chyb, které ovšem vždy vznikají přičiněním člověka, ať již nepřesnými postupy či nedokonalostí přístrojů, které sám sestrojil. V 2. pol. 19. století dokázal skotský fyzik James Clerk Maxwell, že normální rozdělení je ‚čistě přírodní jev‘, když demonstroval, že počet částic, jejichž rychlost pohybu na tzv. volné dráze (mezi dvěma srážkami s jinými částicemi) má hodnotu mezi x a $x + dx$, je roven

$$N \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx,$$

kde N je celkový počet částic a α je průměrná rychlost pohybu.

1.3 Vlastnosti normálního rozdělení

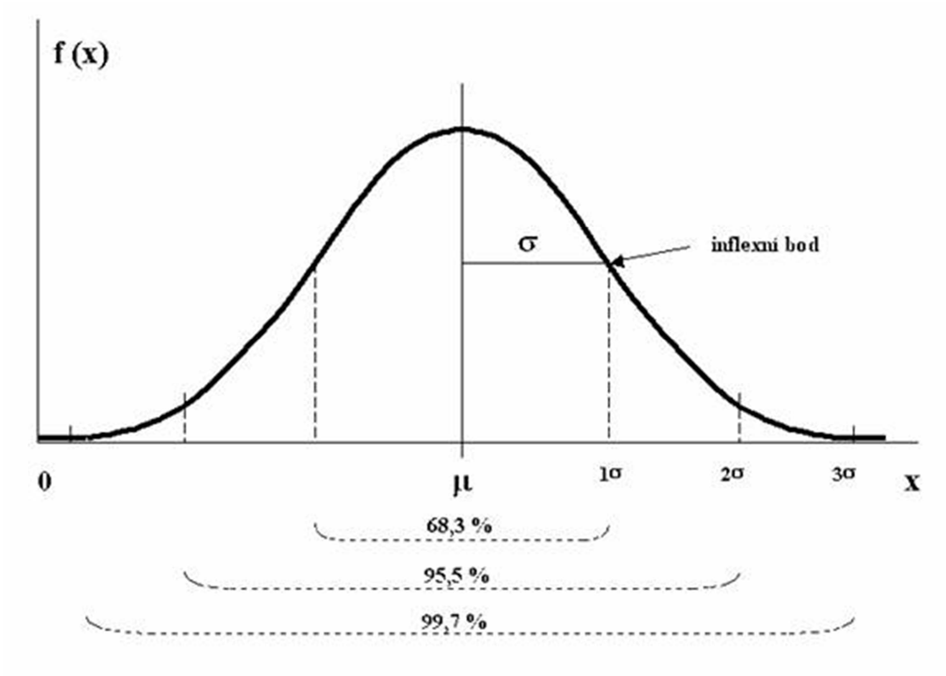
1.3.1 Hustota a distribuční funkce normálního rozdělení

Z definice normálního rozdělení již víme, že jeho hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$

Pro $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ obdržíme tzv. normované normální rozdělení $N(0,1)$ s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R.$$



Obrázek 1.3: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení

Komentář k obrázku 1.3: Hustota nabývá maxima v hodnotě μ. V bodech $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$ má inflexní body. Pravděpodobnost, že rozdíl mezi hodnotou náhodné veličiny s normálním rozdělením a její střední hodnotou je menší než jedna směrodatná odchylka, je rovna 68,3 %; než dvě směrodatné odchylky 95,5 % a než tři 99,7 %. Pravděpodobnost rozdílu menšího než čtyři a více směrodatných odchylek se blíží jistotě.

Distribuční funkce normálního rozdělení:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad x \in R.$$

Jelikož integrál $\int e^{-x^2} dx$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, jsou hodnoty distribuční funkce tabelovány. Nikoliv však pro všechny kombinace μ a σ^2, ale jen pro $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Pro ostatní případy lze využít vztahu

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \in R,$$

kde $\Phi(\mathrm{x})$ označuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení.

Jak již bylo řečeno v úvodu, normální rozdělení má ve statistice významnou úlohu. V teorii pravděpodobnosti o něm hovoří centrální limitní věty. V matematické statistice má základní význam v aplikacích, zejména při testování statistických hypotéz a v teorii odhadu.

1.3.2 Parametry normálního rozdělení

V definici normálního rozdělení jsme si uvedli parametry μ a σ^2. Nyní si ukážeme, že se jedná o střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení. K tomu použijeme momentovou vytvořující funkci, která je pro spojitou náhodnou veličinu X definována takto:

$$m_X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x) dx.$$

Vypočteme momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$m_X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{vmatrix} t = (x-\mu)/\sigma \\ dt = dx/\sigma \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

následně upravíme výraz uvnitř integrálu

$$e^{\sigma t z} e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2 + \sigma t z} = e^{-\frac{1}{2}(t-\sigma z)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2},$$

a tedy

$$m_X(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-\sigma z)^2} dt = \begin{vmatrix} r = (t-\sigma z)/\sqrt{2} \\ dr = dt/\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} e^{-r^2} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \sqrt{2}\sqrt{\pi} = e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}}.$$

Pro momentovou vytvořující funkci platí, že

$$m_X(z)^{(k)}|_{z=0} = E(X^k),$$

tedy, že k-tá derivace v bodě 0 dává k-tý obecný moment. Pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bude platit:

$$E(X) = \left(e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)' |_{z=0} = e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} (\mu + \sigma^2 z)|_{z=0} = \mu.$$

Rozptyl vypočteme pomocí vztahu $var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$:

$$var(X) = \left(e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} (\mu + \sigma^2 z)\right)' |_{z=0} - \mu^2 = \left(\mu e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} + \sigma^2 z e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)' |_{z=0} - \mu^2 =$$
$$= \left(\mu e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} (\mu + \sigma^2 z) + \sigma^2 e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} + \sigma^2 z e^{\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} (\mu + \sigma^2 z)\right)' |_{z=0} - \mu^2$$
$$= \mu^2 + \sigma^2 + 0 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Pomocí momentové vytvořující funkce lze určovat přímo pouze obecné momenty. Vzorec pro centrální momenty normálního rozdělení odvodíme pomocí jejich definice:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^k f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{vmatrix} t = (x-\mu)/\sigma \\ dt = dx/\sigma \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

V dalším postupu využijeme tzv. funkci gama, která je definována následovně:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0.$$

Uvědomíme-li si, že hustota normálního rozdělení je sudá funkce, můžeme dále počítat:

$$\mu_k = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \begin{vmatrix} r = t^2/2 \\ dr = tdt \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{2\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{2r}^{k-1} e^{-r} dr = \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} r^{\frac{k+1}{2}-1} e^{-r} dr = \frac{2^{\frac{k}{2}}\sigma^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

Náhodná veličina, jejíž hustota je symetrická kolem střední hodnoty, má všechny liché centrální momenty nulové. Vzorec upravíme pouze pro sudé momenty tak, že zaměníme k za $2k$ a máme:

$$\mu_{2k} = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right), \quad k = 1,2,3, \ldots$$

Nyní s využitím vzorce $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ určíme:

$$\mu_2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\mu_4 = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\mu_6 = \frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}} \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Z toho je patrné, že:

$$\mu_{2k} = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\frac{(2k-1)}{2} \frac{(2k-3)}{2} \ldots \ldots \frac{1}{2}}_{k\times} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

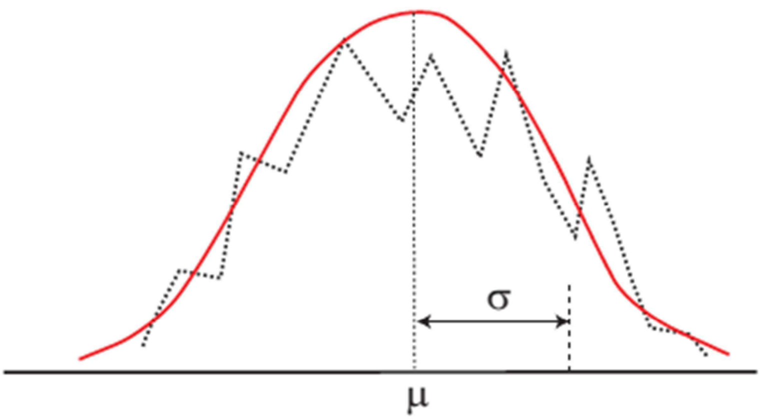
Jelikož $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ dostáváme po úpravě:

$$\mu_{2k} = \sigma^{2k} \prod_{i=1}^{k} (2i-1), \quad k = 1,2,3, \ldots$$

1.3.3 Maximální entropie při dané střední hodnotě a daném rozptylu

Jedna z vlastností normálního rozdělení je, že má maximální entropii při dané střední hodnotě a daném rozptylu. Entropii lze popsat jako míru neuspořádanosti či neurčitosti systému a je předmětem šetření všude tam, kde hovoříme o pravděpodobnosti možných stavů daného systému či soustavy.

Uvažme nyní soubor experimentálně naměřených dat, jejichž histogram je složitějšího tvaru, jinak řečeno netvoří ani přibližně plynulou křivku a předpokládejme, že tato data neodpovídají žádnému pravděpodobnostnímu rozdělení. Z těchto dat vypočteme a uchováme pouze střední hodnotu a rozptyl. Chceme-li posléze pouze pomocí těchto dvou charakteristik namodelovat původní data, stojíme před problémem, které rozdělení z celé škály pravděpodobnostních rozdělení použijeme, aby nová získaná data co nejvíce odpovídala původně naměřeným.



Obrázek 1.4: Histogram dat (tečkovaná čára) a příslušná Gaussova křivka

Řešením tohoto problému je použití normálního rozdělení. To, že má normální rozdělení maximální entropii, znamená, že jeho použitím vytváříme co nejobecnější případ, bez jakýchkoliv nadbytečných odhadů či předpokladů. Můžeme předpokládat, že při větším počtu pozorování se histogram ‘vyhladí’, a v souladu s tím, co bylo řečeno v úvodu, bude odpovídat normálnímu rozdělení. Vlastnost maximalizace entropie tedy lze považovat za alternativu k roli normálního rozdělení v centrálních limitních větách- každý statistický znak splňující podmínky již zmíněné je v té nejobecnější rovině znakem s normálním rozdělením pravděpodobností.

Nyní si ukážeme, že normální rozdělení má maximální entropii při dané střední hodnotě a daném rozptylu.

V případě diskrétních stavů i pravděpodobností je entropie definována jako veličina typu:

$$E(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i log_2 p_i.$$

Nechť $\{p_i\}_n$ a $\{u_i\}_n$ jsou pravděpodobnostní funkce dvou diskrétních náhodných veličin, tedy $\sum p_i = \sum u_i = 1$. Pomocí nerovnosti $log_2 x \leq (x-1)$ určíme:

$$\sum p_i log_2 \frac{u_i}{p_i} \leq \sum p_i \left(\frac{u_i}{p_i} - 1\right) = \sum u_i - \sum p_i = 0,$$

a odtud

$$\sum p_i log_2 \frac{u_i}{p_i} = \sum p_i log_2 \frac{1}{p_i} + \sum p_i log_2 u_i \leq 0,$$

takže

$$-\sum p_i log_2 p_i \leq -\sum p_i log_2 u_i, \tag{1.7}$$

tedy entropie rozdělení $\{p_i\}_n$ je ohraničena výrazem $-\sum p_i log_2 u_i$.

Definice 1.2 Nechť X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f(x)$, kde $x \in R$. Potom funkce $h(X)$ definovaná jako

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) log_2 f(x) dx$$

se nazývá diferenciální entropie náhodné veličiny X. Analogicky k (1.7) bude platit nerovnost:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) log_2 f(x) dx \leq -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) log_2 g(x) dx \tag{1.8}$$

kde $g(x)$ je libovolná hustota náhodné veličiny X definovaná pro $x \in R$. Rovnost nastává pouze a jedině tehdy, když $f(x) = g(x)$.

Nyní si vypočteme entropii normálního rozdělení. Nejdříve vyslovíme následující větu:

Věta 1.1 (*bez důkazu*) Nechť X je spojitá náhodná veličina a $c \in R$. Potom platí následující rovnost:

$$h(X + c) = h(X).$$

Dle věty 1.1 tedy platí, že diferenciální entropie náhodných veličin $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $Y \sim N(\mu - \mu, \sigma^2)$ se rovnají, takže stačí určit entropii náhodné veličiny $Y \sim N(0, \sigma^2)$.

Pro zjednodušení budeme dále používat přirozený logaritmus místo logaritmu o základu dvou. Na celkovém výsledku se nic nezmění.

Výpočet diferenciální entropie náhodné veličiny $Y \sim N(0, \sigma^2)$ bude následující:

$$h(Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(y) ln f(y) dy == -\int_{-\infty}^{\infty} f(y) ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right) dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) ln(\sqrt{2\pi}\sigma e^{\frac{y^2}{2\sigma^2}}) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + ln(e^{\frac{y^2}{2\sigma^2}}))dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

K dalšímu výpočtu užijeme vztah pro střední hodnotu transformované náhodné veličiny $g(Y)$:

$$E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy,$$

a tedy

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = E\left(\frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) =$$
$$= \frac{E(Y^2)}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) = \frac{[E(Y)]^2 + \sigma^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2).$$

S pomocí předešlých poznatků dokážeme následující větu:

Věta 1.2 Pro spojitou náhodnou veličinu X definovanou na R a s rozptylem σ^2 platí:

$$h(X) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2).$$

Důkaz. Nechť $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X definované na R a s rozptylem σ^2. Nechť μ je její střední hodnota. Jestliže $g(x)$ je hustota normálního rozdělení se stejnými parametry, potom:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) ln g(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ln\left((2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2) dx$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2} f(x)(x-\mu)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2),$$

neboť $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx = \sigma^2$.

Dosazením do nerovnosti (1.8) máme:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) log_2 f(x) dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln(2\pi\sigma^2),$$

což znamená, že normální rozdělení má při dané střední hodnotě a daném rozptylu maximální entropii.

1.4 Mnohorozměrné normálního rozdělení

1.4.1 Definice a odvození hustoty mnohorozměrného normálního rozdělení

Definice 1.3 Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ má p-rozměrné normální rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ (značíme $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$), jestliže je absolutně spojitý s hustotou pravděpodobnosti

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \tag{1.9}$$

kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ je vektor středních hodnot a $\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ je symetrická regulární matice typu $p \times p$ (je to kovarianční matice vektoru $\boldsymbol{X}$).

Mnohorozměrné normální rozdělení má ovšem hustotu tvaru (1.9) pouze v případě, že $h(\boldsymbol{\Sigma}) = p$. V případě, kdy $h(\boldsymbol{\Sigma}) = k < p$, nelze hustotu explicitně vyjádřit. Nyní si popíšeme její odvození.

Nechť $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + B\boldsymbol{Y}$, tj. vektor $\boldsymbol{\mu} + B\boldsymbol{Y}$ má totožné rozdělení pravděpodobnosti jako vektor $\boldsymbol{X}$, přičemž $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)'$ je vektor nezávislých náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$, a B je matice typu $p \times p$, pro kterou platí $\boldsymbol{\Sigma} = BB^T$. Jelikož $h(\boldsymbol{\Sigma}) = p$, pak platí $|\boldsymbol{\Sigma}| = |BB^T| = |B||B^T| \neq 0$ a tedy $|B| \neq 0$, což zaručuje existenci B^{-1}. Můžeme proto uvažovat inverzní vztah

$$\boldsymbol{Y} = B^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}). \tag{1.10}$$

Hustota pravděpodobnosti vektoru $\boldsymbol{Y}$ bude mít tvar

$$f(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_p^2}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}}.$$

Hustotu pravděpodobnosti vektoru $\boldsymbol{X}$ obdržíme v souladu s transformačním vztahem (1.10) dosazením $B^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ za $\boldsymbol{y}$ do hustoty vektoru $\boldsymbol{Y}$. Ještě potřebujeme jakobián $|J|$ transformace (1.10). Označíme-li $\boldsymbol{u} = B^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$, a $\left(a_{i,j}\right) = B^{-1}$, potom $|J| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|$, a tedy

$$J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left[\left(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}\right)(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2, \dots, x_3-\mu_3)'\right]}{\partial x_j} = a_{ij}.$$

Jakobián $|J|$ je tedy roven $|B^{-1}| = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$, neboť $|B^{-1}| = |B|^{-1} = (|B|^2)^{-\frac{1}{2}} = (|B||B^T|)^{-\frac{1}{2}} = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$. Nyní můžeme určit hustotu pravděpodobnosti vektoru $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[B^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]'[B^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]\right\}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'(B^{-1})^T B^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \end{aligned}$$

neboť $(B^{-1})^T B^{-1} = (B^T)^{-1}B^{-1} = (BB^T)^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$.

1.4.2 Dvourozměrné normálního rozdělení

V případě, kdy $p = 2$, máme tzv. dvourozměrné normální rozdělení. Označíme-li $\sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$, potom

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $\sigma_{12} = \sigma_{12}$ neboť $cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_1)$, a $\sigma_{12} = \varrho\sigma_1\sigma_2$, kde ϱ je korelační koeficient, pak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \varrho^2\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{-\varrho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \varrho^2\sigma_1^2\sigma_2^2} \\ \frac{-\varrho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \varrho^2\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \varrho^2\sigma_1^2\sigma_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\varrho^2}\begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & -\frac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dále

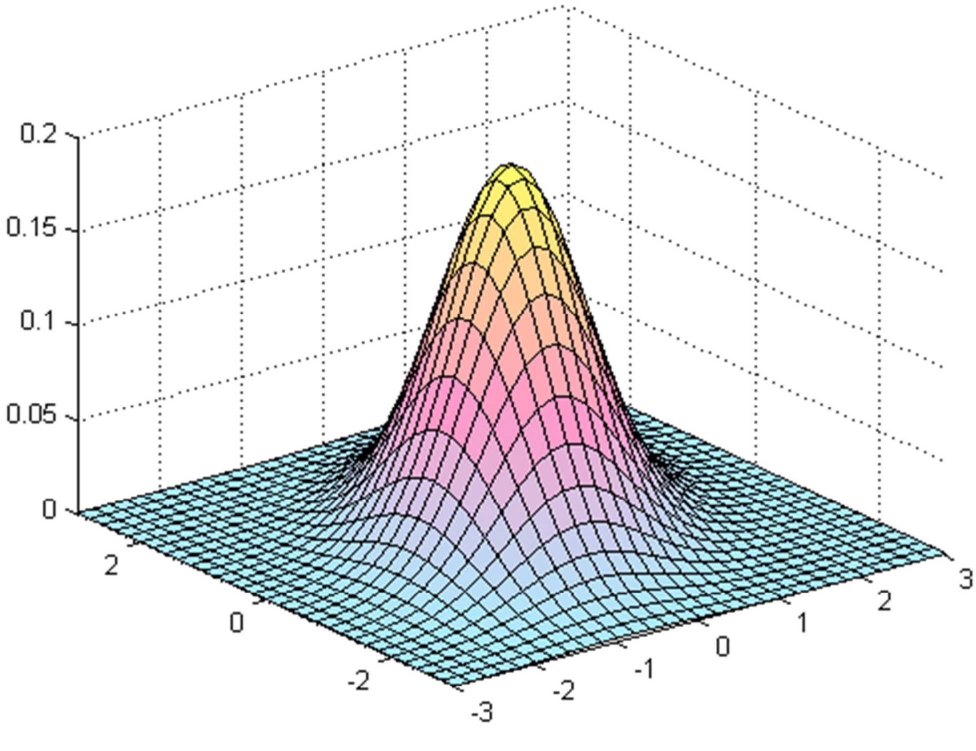
$$|\mathbf{\Sigma}| = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \varrho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\varrho^2).$$

Nyní dosazením do vzorce pro hustotu mnohorozměrného normálního rozdělení obdržíme hustotu dvourozměrného normálního rozdělení:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & -\dfrac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\dfrac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$



Obrázek 1.5: Graf hustoty dvourozměrného normálního rozdělení s parametry $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 0.75$, $\sigma_2^2 = 1$, $\varrho = 0{,}35$

Kapitola 2

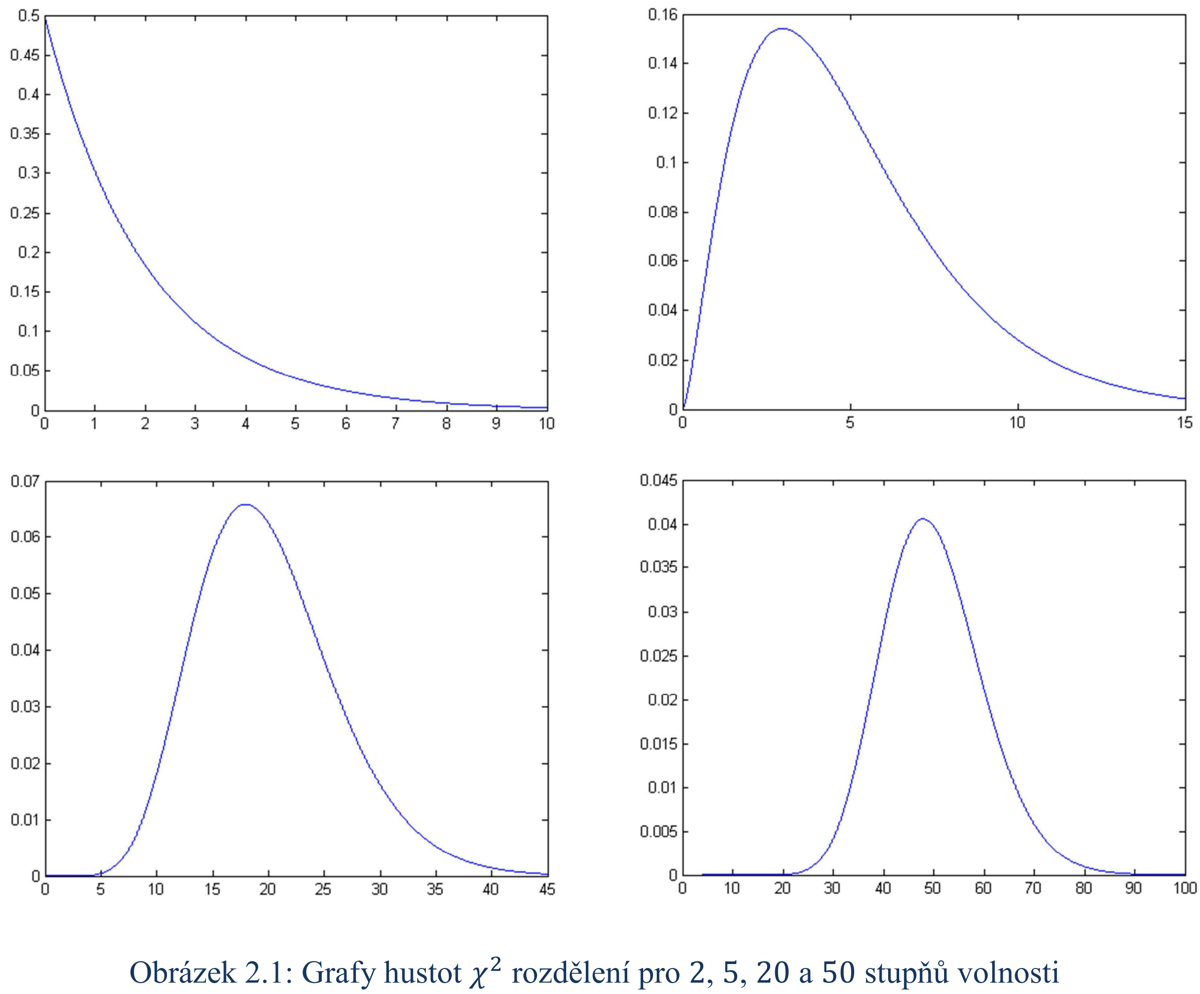
Odvozená rozdělení

2.1 Pearsonovo χ^2 rozdělení

2.1.1 Definice a odvození χ^2 rozdělení

Definice 2.1 Náhodná veličina X má χ^2 (chí kvadrát) rozdělení o n stupních volnosti (zapisujeme $X \sim \chi^2(n)$), jestliže její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$



Obrázek 2.1: Grafy hustot χ^2 rozdělení pro 2, 5, 20 a 50 stupňů volnosti

Nyní si objasníme vztah mezi normálním rozdělením a rozdělením χ^2.

Věta 2.1 Nechť má náhodná veličina X standardizované normální rozdělení, $X \sim N(0,1)$. Potom náhodná veličina X^2 má χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti, $X^2 \sim \chi^2(1)$.

Důkaz. Náhodná veličina X má hustotu ve tvaru

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R.$$

Označme $f(x)$ hustotu náhodné veličiny X^2. Potom platí

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} P\left(X^2 \leq x\right) = \frac{d}{dx} P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}},$$

kde jsme využili sudosti hustoty normovaného normálního rozdělení a vzorec pro derivaci integrálu $\frac{d}{dx}\left[\int_c^{g(x)} f(t)dt\right] = f\big(g(x)\big)g'(x)$.

Věta 2.2 Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$. Potom náhodná veličina $U = X_1 + X_2$ má χ^2 rozdělení o $n_1 + n_2$ stupních volnosti, $U \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

Důkaz. Toto tvrzení dokážeme tak, že nejprve určíme sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru, přičemž jedna složka tohoto vektoru bude mít tvar náhodné veličiny U. Ze sdružené hustoty pravděpodobnosti posléze vypočteme marginální hustotu, a tím obdržíme hledanou hustotu pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu U.

Dle (2.1) má hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X_i tvar

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n_i}{2}}\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} x_i^{\frac{n_i}{2}-1} e^{-\frac{x_i}{2}} & \text{pro } x_i > 0, \\ 0 & \text{pro } x_i \leq 0, \end{cases} \qquad i = 1,2.$$

Mějme dva náhodné vektory $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ a $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, a zobrazení $g\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, které je definované takto:

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad y_2 = x_2 .$$

Vyjádřeme si inverzní zobrazení $g^{-1}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$

$$\left(\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}\right),$$

takže

$$x_1 = y_1 - y_2; \quad x_2 = y_2, \text{ a jakobián } |\mathrm{J}| = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1.$$

Následně vypočteme sdruženou hustotu náhodného vektoru **Y**:

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= f_{X_1,X_2}(y_1-y_2,y_2)\cdot 1 = f_{X_1}(y_1-y_2)f_{X_2}(y_2) = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}(y_1-y_2)^{\frac{n_1}{2}-1}e^{-\frac{(y_1-y_2)}{2}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}y_2^{\frac{n_2}{2}-1}e^{-\frac{y_2}{2}} = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}e^{-\frac{y_1}{2}}(y_1-y_2)^{\frac{n_1}{2}-1}y_2^{\frac{n_2}{2}-1}. \end{aligned}$$

Podle (2.1) musí platit $y_1 - y_2 \geq 0 \wedge y_2 \geq 0$, a proto $y_2 \in (0, y_1)$. Integrací sdružené hustoty v tomto intervalu obdržíme marginální hustotu náhodné veličiny $Y_1 = X_1 + X_2$:

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}e^{-\frac{y_1}{2}}\int_0^{y_1}(y_1-y_2)^{\frac{n_1}{2}-1}y_2^{\frac{n_2}{2}-1}dy_2 = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}e^{-\frac{y_1}{2}}y_1^{\frac{n_1}{2}-1}y_1^{\frac{n_2}{2}-1}y_1\int_0^{y_1}\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}\frac{dy_2}{y_1} = \\ &= \begin{vmatrix} t = y_2/y_1 \\ dt = dy_2/y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}e^{-\frac{y_1}{2}}y_1^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\int_0^1(1-t)^{\frac{n_1}{2}-1}t^{\frac{n_2}{2}-1}dt, \end{aligned}$$

užijeme-li následně tzv. funkci beta, definovanou $\beta(p,q) = \int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$, kde $p > 0$ a $q > 0$, a vztahu mezi funkcemi gama a beta $\beta(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$, dostaneme

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}e^{-\frac{y_1}{2}}y_1^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}e^{-\frac{y_1}{2}}y_1^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}, \quad y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Věta 2.3 Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozdělením, $X_i \sim N(0,1), i = 1, \dots, n$. Potom náhodná veličina $U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$ má χ^2 rozdělení o n stupních volnosti.

Důkaz. Plyne z předchozích dvou vět. Věta 2.1 říká, že má-li náhodná veličina X standardizované normální rozdělení, potom $X^2 \sim \chi^2(1)$. Věta 2.2 říká, že pokud $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ a $X_2 \sim \chi^2(n_2)$, pak $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$. Potom ale náhodná veličina, která je rovna součtu n náhodných veličin s χ^2 rozdělením o jednom stupni volnosti, musí mít χ^2 rozdělení o n stupních volnosti.

2.1.2 Momenty χ^2 rozdělení

Vypočteme momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny $X \sim \chi^2(n)$ pro $x > 0$:

$$m_X(z) = \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{zx} dx =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-z\right)x} dx = \left| \begin{matrix} t = (1/2 - z)x \\ dt = (1/2 - z)dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{1/2 - z} \left(\frac{t}{1/2 - z}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{1/2 - z}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1 - 2z}\right)^{\frac{n}{2}} = (1 - 2z)^{-\frac{n}{2}}, \qquad z < \frac{1}{2}.$$

Pomocí momentové vytvořující funkce vypočteme střední hodnotu:

$$E(X) = \left((1 - 2z)^{-\frac{n}{2}}\right)' |_{z=0} = n(1 - 2z)^{-\frac{n}{2}-1}|_{z=0} = n.$$

Rozptyl vypočteme pomocí vztahu $var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, takže:

$$var(X) = \left(n(1 - 2z)^{-\frac{n}{2}-1}\right)' |_{z=0} - n^2 = (n^2 + 2n)(1 - 2z)^{-\frac{n}{2}-2}|_{z=0} - n^2 = 2n.$$

Pro obecné momenty k-tého řádu platí vzorec:

$$v_k = \frac{2^k \Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma \frac{n}{2}}, \quad k = 1,2, \dots$$

Vraťme se nyní k obrázku 2.1. Z něho je patrné, že χ^2 rozdělení se s rostoucím n blíží k normálnímu rozdělení se střední hodnotou n. Podle Lévyho-Lindebergovy centrální limitní věty pro náhodnou veličinu

$$U = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}},$$

kde X je náhodná veličina vzniklá součtem n vzájemně nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou $E(X_i) = \mu$ a rozptylem $var(X_i) = \sigma^2$, platí

$$\lim_{n\to\infty} P(U < u) = \Phi(\mathrm{u}),$$

tj. pro $n \to \infty$ konverguje k rozdělení $N(0,1)$. Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim \chi^2(1)$. Je zřejmé, že $E(X_i) = 1$ a $var(X_i) = 2$. Potom tedy náhodná veličina $(X - n)/\sqrt{2n}$ konverguje pro $n \to \infty$ k $N(0,1)$. Jelikož ale $X \sim \chi^2(n)$, $E(X) = n$ a $var(X) = 2n$, a platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - n}{\sqrt{2n}} < x\right) = \Phi(\mathrm{x}) = \left(\frac{Y - n}{\sqrt{2n}}\right),$$

kde $Y \sim N(n, 2n)$, vyplývá nám z toho, že χ^2 rozdělení o n stupních volnosti konverguje pro $n \to \infty$ k normálnímu rozdělení se střední hodnotou n a rozptylem $2n$.

2.1.3 Využití χ^2 rozdělení

χ^2 rozdělení má v praxi široké uplatnění. Zde si uvedeme nejčastější případy:

- Test dobré shody – chceme-li testovat, zda náhodná veličina pochází z určitého rozdělení. Předpokládejme, že máme určitý počet tříd o určitém vymezeném rozsahu. Označme π_j pravděpodobnost toho, že zkoumaná náhodná veličina se realizuje v j-té třídě. Tato pravděpodobnost je známá ze zkušenosti či z určitého pravděpodobnostního modelu. Mějme náhodný výběr o rozsahu n, při kterém se náhodná veličina realizuje v j-té třídě s pravděpodobností p_j, tedy četnost v j-té třídě se rovná np_j. Naším úkolem a záměrem je otestovat, zda se p_j rovná π_j, přesněji řečeno zjistit porovnáním zjištěných četností np_j a očekávaných četností $n\pi_j$, zda jsou odchylky mezi těmito četnostmi v takových mezích, že náhodný výběr splňuje strukturu, která vychází ze zkušenosti či z určitého modelu.

Jako příklad uveďme házení kostkou, kdy při dostatečně velkém počtu pokusů testujeme, zda se p_j rovná $1/6$, tedy ověřujeme, že kostka není cinknutá.

- Test nezávislosti – při němž zjišťujeme závislost, resp. nezávislost dvou statistických znaků. Příkladem může být taková dvojice, kde první veličina udává, zda byl člověk očkován nebo ne, a druhá ponese informaci, zda příslušnou chorobou onemocněl nebo nikoliv. Pomocí testu nezávislosti tedy zjišťujeme, zda má očkování proti chorobě vliv na její prodělání.
- Test homogenity – při němž testujeme, zda dva či více výběrů jsou 'homogenní', tj. mají stejné proporcionální zastoupení vzhledem k určité veličině.
- Test hypotéz o rozptylu normálního rozdělení

2.2 Studentovo t-rozdělení

2.2.1 Definice a odvození t-rozdělení

Definice 2.2 Náhodná veličina X má t-rozdělení o n stupních volnosti (zapisujeme $X\sim t(n)$), jestliže její hustota pravděpodobnosti má tvar

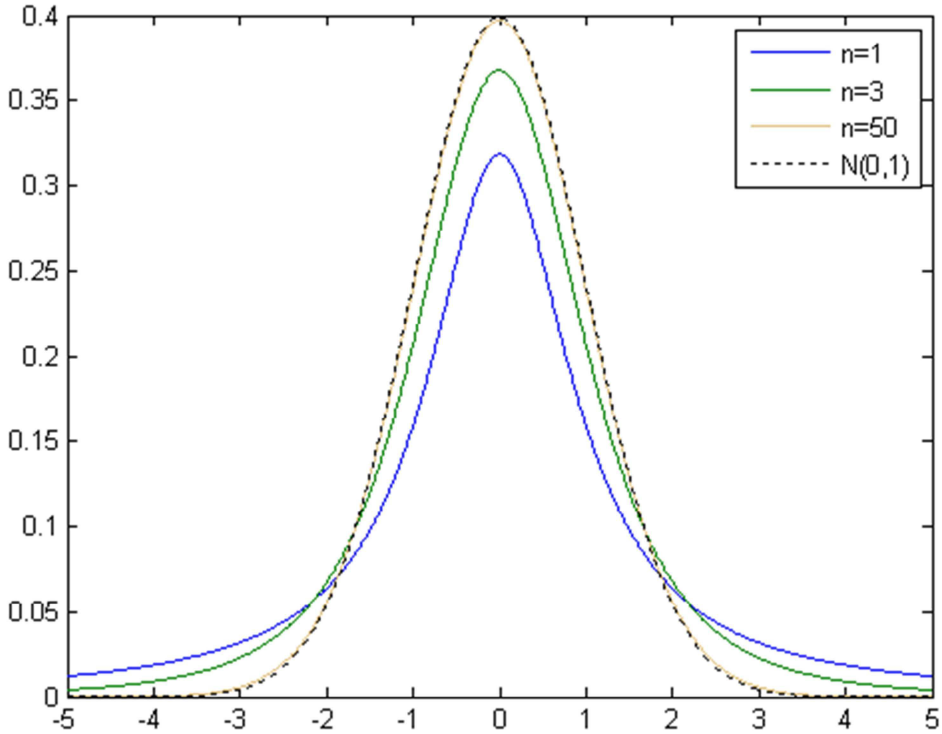
$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{pro } x \in R. \tag{2.2}$$

Při odvození t-rozdělení bychom mohli postupovat analogicky jako v případě χ^2 rozdělení, místo toho ale využijeme větu o hustotě podílu dvou náhodných veličin, a tím celý proces zjednodušíme.

Věta 2.4 (*bez důkazu*) Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé, absolutně spojité náhodné veličiny s hustotami f_1 a f_2. Předpokládejme, že $f_2(x) > 0$ pro $x > 0$ a $f_2(x) = 0$ pro $x \leq 0$. Potom náhodná veličina $X = X_1/X_2$ má hustotu danou vztahem:

$$f_X(t) = \int_0^\infty y f_1(ty) f_2(y) dy, \quad \text{pro } t \in R.$$

Věta 2.5 Nechť náhodné veličiny $X \sim N(0,1)$ a $V\sim\chi^2(n)$ jsou nezávislé. Potom náhodná veličina $T = \frac{X}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$ má t-rozdělení o n stupních volnosti.



Obrázek 2.2: Grafy hustot t-rozdělení pro 1, 3 a 50 stupňů volnosti.

Komentář k obrázku 2.2: t-rozdělení konverguje pro $n \to \infty$ k rozdělení $N(0,1)$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Důkaz. Pro náhodnou veličinu $X \sim N(0,1)$ platí:

$$f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R.$$

Označme $Y = \sqrt{V/n} = g(v)$, takže $V = nY^2 = g^{-1}(y)$. Pro hustotu transformované náhodné veličiny Y bude platit $f_Y = f_V\big(g^{-1}(y)\big)\left|\frac{d}{dy}\big(g^{-1}(y)\big)\right|$. Tedy dosazením ny^2 za x do (2.1) a vynásobením $2ny$ dostaneme hustotu náhodné veličiny Y:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(ny^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{ny^2}{2}}2ny = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}n^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n}y^{n-2}e^{-\frac{ny^2}{2}}2ny$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}n^{\frac{n}{2}}y^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2}}, \quad y > 0.$$

Nyní s pomocí věty 2.5 vypočteme hledanou hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $T = X/Y$:

$$f_T(r)=\int_0^\infty yf_X(ry)f_y(y)dy=\int_0^\infty y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2y^2}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}n^{\frac{n}{2}}y^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2}}=$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty y^ne^{-\frac{1}{2}(r^2+n)y^2}dy=\begin{vmatrix}t=(r^2+n)y^2/2\\dt=(r^2+n)ydy\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(r^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}t^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(r^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\left(1+\frac{r^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

2.2.2 Momenty *t*-rozdělení

Z obrázku je patrné, že t-rozdělení má střední hodnotu v bodě 0. Ověříme výpočtem:

$$E(X)=\int_{-\infty}^\infty xf(x)dx=\int_{-\infty}^0 xf(x)dx+\int_0^\infty xf(x)dx=\begin{vmatrix}x=-t\\dx=-dt\end{vmatrix}=$$

$$=-\int_\infty^0(-t)f_X(-t)dt+\int_0^\infty xf(x)dx=-\int_0^\infty tf_X(-t)dt$$

$$+\int_0^\infty xf(x)dx=\begin{vmatrix}t=x\\dt=dx\end{vmatrix}=$$

$$=-\int_0^\infty xf(-x)dt+\int_0^\infty xf(x)dx=-\int_0^\infty xf(x)dt+\int_0^\infty xf(x)dx=0.$$

Při výpočtu jsme sudosti hustoty t-rozdělení, tj. $f(-x)=f(x)$. Jelikož je střední hodnota t-rozdělení nulová, obecné a centrální momenty stejného řádu se rovnají. Všechny liché momenty jsou nulové, neboť hustota t-rozdělení je symetrická podle střední hodnoty.

Rozptyl bude tedy roven $E(X^2)$:

$$var(X)=\int_{-\infty}^\infty x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^0 x^2f(x)dx+\int_0^\infty x^2f(x)dx=\begin{vmatrix}x=-t\\dx=-dt\end{vmatrix}=$$

$$=-\int_\infty^0 t^2f_X(-t)dt+\int_0^\infty x^2f(x)dx=\int_0^\infty t^2f_X(t)dx+\int_0^\infty x^2f(x)dx=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x\\dt=dx\end{vmatrix}=2\int_0^\infty x^2f(x)dx=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\int_0^\infty x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx.$$

V dalším postupu využijeme vztahy $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ a $\Gamma(z-1)(z-1) = \Gamma(z)$,

$$var(X) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\int_0^\infty x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx = \begin{vmatrix} t = x^2/n \\ dt = 2xdx/n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n^3}}{2}\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1}(1+t)^{\frac{3}{2}+\frac{n}{2}-1} = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n^3}}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{n}{2}-1\right) =$$

$$= n\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} = n\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)} =$$

$$= n\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}} = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

Lze ukázat (viz [10]), že obecně je při výpočtu k-tého momentu druhý parametr ve funkci beta roven $\frac{n-k}{2}$, a proto z definice beta funkce musí platit $n > k$. Z toho důvodu nemůžeme uvažovat momentovou vytvořující funkci t-rozdělení, neboť pokud by existovala, pak pro každé $k \in N$ existuje konečný k-tý obecný moment. U t-rozdělení jsou však definovány momenty pouze pro $k < n$.

Obecný vzorec pro momenty t-rozdělení při podmínce $k < n$ má tvar

$$\nu_{2k} = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad k = 1,2,\ldots$$

2.2.3 Využití t-rozdělení

Studentovo t-rozdělení se nejčastěji uplatňuje při:

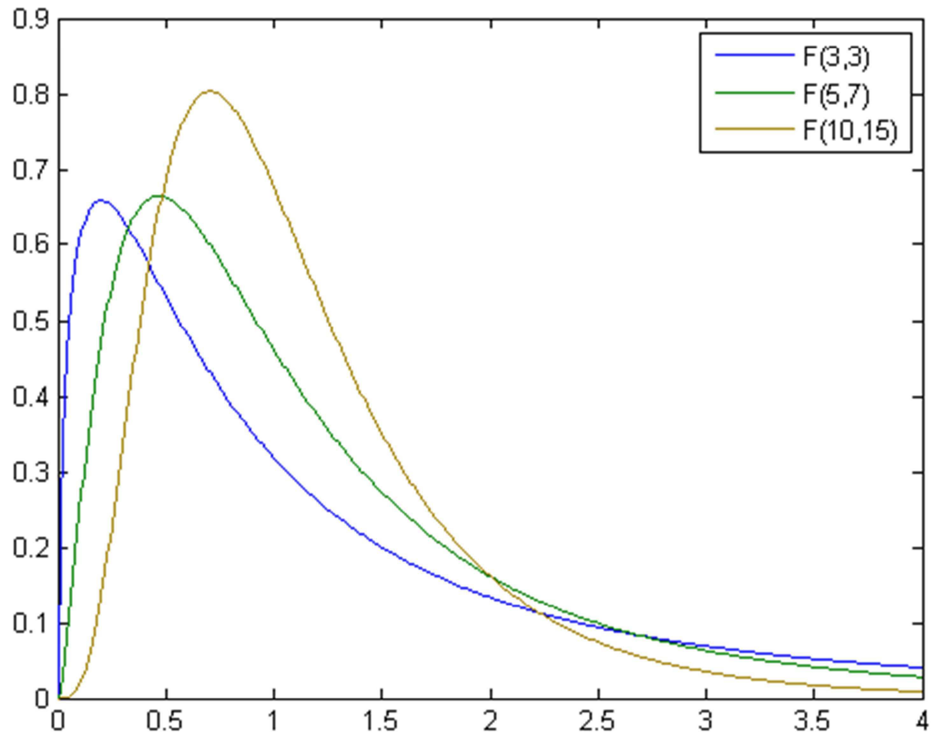
- Testování hypotéz o střední hodnotě normálního rozdělení při neznámém rozptylu
- Testování hypotéz o shodě středních hodnot dvou normálně rozdělených statistických znaků, přičemž mezi nimi musí existovat nezávislost.
- Testování statistické významnosti korelačních koeficientů při korelační analýze
- Široké užití má též v regresní analýze.

2.3 Fisherovo – Snedecorovo F-rozdělení

2.3.1 Definice a odvození F-rozdělení

Definice 2.3 Náhodná veličina X má F-rozdělení o n_1 a n_2 stupních volnosti (zapisujeme $X \sim F(n_1, n_2)$), jestliže její hustota je tvaru

$$f_{n_1,n_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)} \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$



Obr. Grafy hustot F-rozdělení pro různé dvojice stupňů volnosti.

Věta 2.6 Nechť náhodné veličiny $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ a $X_2 \sim \chi^2(n_2)$ jsou nezávislé. Potom náhodná veličina $F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$ má F-rozdělení o n_1 a n_2 stupních volnosti.

Důkaz. Označme si $T = X_1/X_2$. Podle věty 2.4 můžeme vypočítat hustotu náhodné veličiny T pro $t > 0$:

$$f_T(t)=\int_0^\infty y f_{X_1}(ty)f_{X_2}(y)dy=\int_0^\infty y\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}(ty)^{\frac{n_1}{2}-1}e^{-\frac{ty}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}y^{\frac{n_2}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}=$$

$$=\frac{t^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty y^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(1+t)y}dy=\begin{vmatrix} z=1/2(1+t)y \\ dz=1/2(1+t)dy\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{t^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty \left(\frac{2}{1+t}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}z^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{t^{\frac{n_1}{2}-1}2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)(1+t)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}t^{\frac{n_1}{2}-1}(1+t)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}.$$

Následně určíme hustotu náhodné veličiny $X=\frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$. Tedy $X=T\frac{n_2}{n_1}=g(t)$, $T=X\frac{n_1}{n_2}=g^{-1}(x)$. Pro hustotu náhodné veličiny X pak platí $f_X=f_T\left(g^{-1}(x)\right)\left|\frac{d}{dx}\left(g^{-1}(x)\right)\right|$, takže dosazením $x\frac{n_1}{n_2}$ za t do hustoty náhodné veličiny T a vynásobením $\frac{n_1}{n_2}$ obdržíme hledanou hustotu:

$$f_X(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},\quad x>0.$$

F-rozdělení lze též získat ze Studentova rozdělení transformací T^2, $T\sim t(n)$. Podle věty 2.5 pak máme $T^2=X^2/(V/n)$, kde $X^2\sim\chi^2(1)$ a $V\sim\chi^2(n)$, což odpovídá znění věty 2.6.

2.3.2 Momenty *F*-rozdělení

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{n_1}{2}}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}dx=\begin{vmatrix} t=n_1x/n_2 \\ dt=n_1dx/n_2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\int_0^\infty\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1+2}{2}}t^{\frac{n_1+2}{2}-1}(1+t)^{-\left(\frac{n_1+2}{2}+\frac{n_2-2}{2}\right)}dt=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}B\left(\frac{n_1+2}{2},\frac{n_2-2}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}=\frac{n_2}{n_2-2},\qquad n_2>2.$$

Rozptyl vypočteme opět pomocí vztahu $var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Výpočet $E(X^2)$ bude obdobný jako v případě $E(X)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\int_0^{\infty} x^{\frac{n_1}{2}+1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}dx = \left|\begin{matrix} t = n_1x/n_2 \\ dt = n_1dx/n_2\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\int_0^{\infty}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1+4}{2}} t^{\frac{n_1+4}{2}-1}(1+t)^{-\left(\frac{n_1+4}{2}+\frac{n_2-4}{2}\right)}dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}B\left(\frac{n_1+4}{2},\frac{n_2-4}{2}\right) = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\Gamma\left(\frac{n_1+2}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n_2-2}{2}-1\right)\left(\frac{n_2-2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2-2}{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{n_1+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2-2}{2}-1\right)} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{n_1+2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2-4}{2}\right)\left(\frac{n_2-2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4n_1n_2^2(n_1+2)}{4n_1^2(n_2-2)(n_2-4)} = \frac{n_2^2(n_1+2)}{n_1(n_2-2)(n_2-4)}, \quad n_2 > 4.$$

Nyní můžeme přejít k určení vzorce pro rozptyl:

$$var(X) = \frac{n_2^2(n_1+2)}{n_1(n_2-2)(n_2-4)} - \left(\frac{n_2}{n_2-2}\right)^2 = \frac{n_2^2(n_1+2)(n_2-2) - {n_2}^2n_1(n_2-4)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)} =$$

$$= \frac{n_2^2(n_1n_2 - 2n_1 + 2n_2 - 4 - n_1n_2 + 4n_1)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)} = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}, \quad n_2 > 4.$$

Momentová vytvořující funkce pro F-rozdělení neexistuje, neboť k-tý obecný moment je definován pouze pro $2k < n_2$. Při této podmínce platí obecný vzorec:

$$\nu_k = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}, \quad k = 1,2,\ldots$$

2.3.3 Využití *F*-rozdělení

- Test hypotéz o shodě rozptylů dvou nezávislých normálně rozdělených statistických znaků
- Test hypotéz o shodě středních hodnot pro více náhodných výběrů
- Testování v regresní analýze, např. test o významnosti vysvětlujících proměnných ve vícenásobné regresi.

2.4 Wishartovo rozdělení

Vezměme v úvahu n p-rozměrných náhodných veličin a od každé z nich po jednom pozorování. Nechť $\boldsymbol{X}_i$ je pozorování i-té veličiny (je to p-rozměrný vektor). Pozorování lze zapsat ve tvaru matice

$$U' = \begin{array}{|cccc|c} \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{X}_1} & \boldsymbol{X}_2 & & \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{X}_n} & \\ \hline x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & \boldsymbol{Y}'_1 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & \boldsymbol{Y}'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} & \boldsymbol{Y}'_p \\ \hline \end{array} \tag{2.3}$$

kde j-tý řádek $\boldsymbol{Y}'_j$ obsahuje pozorování j-té složky všech p-rozměrných náhodných veličin. U' je tedy matice typu $p \times n$.

Definice 2.4 Nechť $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1,2,\dots,n$, jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Sdružené rozdělení prvků matice

$$(S_{ij}) = \boldsymbol{S} = \sum_1^n \boldsymbol{X}_r \boldsymbol{X}'_r = (\boldsymbol{Y}'_i \boldsymbol{Y}_j) = U'U,$$

kde $\boldsymbol{Y}_j$ a U jsou definovány v (2.3), se nazývá Wishartovo rozdělení s n stupni volnosti (značeno $W_p(\boldsymbol{\Sigma}, n)$). Při $p = 1$ se rozdělení $W_1(\sigma^2, n)$ shoduje s rozdělením $\sigma^2\chi^2(n)$, tedy Wishartovo rozdělení je vícerozměrným zobecněním χ^2 rozdělení.

Matici $(S_{ij}) = \boldsymbol{S}$ můžeme podrobněji rozepsat pomocí vektorů $\boldsymbol{Y}_j$ do tvaru:

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}'_1\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}'_1\boldsymbol{Y}_2 & \dots & \boldsymbol{Y}'_1\boldsymbol{Y}_p \\ \boldsymbol{Y}'_2\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}'_2\boldsymbol{Y}_2 & \dots & \boldsymbol{Y}'_2\boldsymbol{Y}_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{Y}'_p\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}'_p\boldsymbol{Y}_2 & \dots & \boldsymbol{Y}'_p\boldsymbol{Y}_p \end{pmatrix}$$

tzn. že i-tý prvek na diagonále je součet čtverců i-tých složek vektorů $\boldsymbol{X}_r$ (např. $\boldsymbol{Y}'_1\boldsymbol{Y}_1 = x_{11}^2 + x_{21}^2 + \cdots + x_{n1}^2$), a prvek průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce je součet součinů i-tých a j-tých složek (např. $\boldsymbol{Y}'_1\boldsymbol{Y}_2 = x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} + \cdots + x_{n1}x_{n2}$).

Hustota Wishartova rozdělení existuje pro $n > p - 1$ a má tvar:

$$f(\boldsymbol{S}) = \frac{|\boldsymbol{S}|^{\frac{n-p-1}{2}}}{2^{\frac{np}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{S})\right\},$$

kde $\Gamma_p(a) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{j=1}^{p} \Gamma[a + (1-j)/2]$ je vícerozměrné zobecnění gama funkce a $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ je součet diagonálních prvků čtvercové matice. Postup k odvození hustoty Wishartova rozdělení lze najít v [1].

Nyní určíme střední hodnotu Wishartova rozdělení:

$$E(\boldsymbol{S}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} E(\boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i') = \sum_{i=1}^{n} (var(\boldsymbol{X}_i) + [E(\boldsymbol{X}_i)]^2) = \sum_{i=1}^{n} var(\boldsymbol{X}_i) = n\,\boldsymbol{\Sigma},$$

kde jsme využili toho, že $\boldsymbol{X}_i^2 = \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i'$ a $E(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{0}$.

Pro rozptyl náhodné veličiny S_{ij} platí

$$var(S_{ij}) = n(\sigma_{ij}^2 + \sigma_{ii}\sigma_{jj}),$$

kde σ_{ij} jsou prvky matice $\boldsymbol{\Sigma}$.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo popsat genezi normálního rozdělení a odvodit rozdělení Pearsonovo, Studentovo, Fisherovo – Snedecorovo a Wishartovo včetně prvních momentů těchto rozdělení. Jedná se tedy převážně o teoretickou náplň, proto byl v práci kladen důraz na logickou správnost a metodičnost jednotlivých postupů. Taktéž zde byla snaha o zpřehlednění s důrazem na objasnění souvislostí mezi jednotlivými poznatky. V bakalářské práci nebylo zaznamenáno odvození Wishartova rozdělení z důvodu složitosti a rozsáhlosti tohoto postupu.

V souvislosti s normálním rozdělením by bylo vhodné se dále zabývat jeho rolí v centrálních limitních větách a jejich praktickém využití, dále testováním statistických hypotéz o parametrech normálního rozdělení a též testováním normality statistických znaků. U odvozených rozdělení rovněž jejich praktické využití (regresní a korelační analýza apod.).

Literatura:

[1] Rao, C. R., Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace. Praha: Academia, 1978.

[2] Lamoš, F., Potocký, R., Pravdepodobnosť a matematická štatistika, Štatistické analýzy. Bratislava: Alfa, 1989.

[3] Hron, K., Kunderová, P., Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013.

[4] Stahl, S., The Evolution of the Normal Distribution [online], dostupné z https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/stahl96.pdf, [citováno 3. 2. 2013].

[5] Jaynes, E. T., Probability Theory, The Logic of Science [online], 198-204, dostupné z http://download.bioon.com.cn/view/upload/201110/10095826_7731.pdf [citováno 3. 3. 2013].

[6] Rojas, R., Why the Normal Distribution? [online], dostupné z http://www.inf.fu-berlin.de/inst/ag-ki/rojas_home/documents/tutorials/Gaussian-distribution.pdf [citováno 3. 3. 2013].

[7] Forbelská, M., Vlastnosti normálního rozdělení a odvozená rozdělení [online], dostupné z http://www.math.muni.cz/~kolacek/vyuka/statistika/TransfNormal.pdf [citováno 3. 3. 2013].

[8] Conrad, K., Probability distributions and maximum entropy [online], dostupné z http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/entropypost.pdf [citováno 3. 3. 2013].

[9] Nydick, S. W., The Wishart and Inverse Wishart Distributions [online], dostupné z http://www.tc.umn.edu/~nydic001/docs/unpubs/Wishart_Distribution.pdf [citováno 3. 3. 2013].

[10] Probability distributions [online], dostupné z http://www.statlect.com/distri.htm [citováno 3. 3. 2013].

[11] Stanovský, D., Cauchyova rovnice [online], dostupné z http://mks.mff.cuni.cz/library/CauchyovaRovniceDS/CauchyovaRovniceDS.pdf [citováno 3. 3. 2013].

[12] Momentová vytvořující funkce [online], dostupné z http://referaty-seminarky.cz/momentova-vytvorujici-funkce/ [citováno 3. 3. 2013].

[13] Entropie [online], dostupné z http://cs.wikipedia.org/wiki/Entropie [citováno 3. 3. 2013].

[14] Normal distribution [online], dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution [citováno 3. 3. 2013].

Příloha

A) Statistické tabulky

Tabulka 1: Kvantily normovaného normálního rozdělení

P	u_P	P	u_P	P	u_P	P	u_P
0,50	0,000	0,75	0,674	0,950	1,645	0,975	1,960
0,51	0,025	0,76	0,706	0,951	1,655	0,976	1,977
0,52	0,050	0,77	0,739	0,952	1,665	0,977	1,995
0,53	0,075	0,78	0,772	0,953	1,675	0,978	2,014
0,54	0,100	0,79	0,806	0,954	1,685	0,979	2,034
0,55	0,126	0,80	0,842	0,955	1,695	0,980	2,054
0,56	0,151	0,81	0,878	0,956	1,706	0,981	2,075
0,57	0,176	0,82	0,915	0,957	1,717	0,982	2,097
0,58	0,202	0,83	0,954	0,958	1,728	0,983	2,120
0,59	0,228	0,84	0,994	0,959	1,739	0,984	2,144
0,60	0,253	0,85	1,036	0,960	1,751	0,985	2,170
0,61	0,279	0,86	1,080	0,961	1,762	0,986	2,197
0,62	0,305	0,87	1,126	0,962	1,774	0,987	2,226
0,63	0,332	0,88	1,175	0,963	1,787	0,988	2,257
0,64	0,358	0,89	1,227	0,964	1,799	0,989	2,290
0,65	0,385	0,900	1,282	0,965	1,812	0,990	2,326
0,66	0,412	0,905	1,311	0,966	1,825	0,991	2,366
0,67	0,440	0,910	1,341	0,967	1,838	0,992	2,409
0,68	0,468	0,915	1,372	0,968	1,852	0,993	2,457
0,69	0,496	0,920	1,405	0,969	1,866	0,994	2,512
0,70	0,524	0,925	1,440	0,970	1,881	0,995	2,576
0,71	0,553	0,930	1,476	0,971	1,896	0,996	2,652
0,72	0,583	0,935	1,514	0,972	1,911	0,997	2,748
0,73	0,613	0,940	1,555	0,973	1,927	0,998	2,878
0,74	0,643	0,945	1,598	0,974	1,943	0,999	3,090

Pro $P < 0{,}5$: $u_P = -u_{1-P}$

Tabulka 2: Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983

$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Tabulka 3: Kvantily Pearsonova χ^2 rozdělení- 1. část

n	P					
	0,001	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100
1	$1{,}571 \cdot 10^{-6}$	$3{,}927 \cdot 10^{-5}$	$1{,}571 \cdot 10^{-4}$	$9{,}821 \cdot 10^{-4}$	$3{,}932 \cdot 10^{-3}$	$1{,}579 \cdot 10^{-2}$
2	0,0020	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211
3	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584
4	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06
5	0,210	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61
6	0,381	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20
7	0,598	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83
8	0,857	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4
21	6,45	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2
22	6,98	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0
23	7,53	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8
24	8,08	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7
25	8,65	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5
26	9,22	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3
27	9,80	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1
28	10,4	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9
29	11,0	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8
30	11,6	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6

Tabulka 3: Kvantily Pearsonova χ^2 rozdělení- 2. část

n	P					
	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Tabulka 4: Kvantily Studentova t-rozdělení

n	P					
	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385

Pro $\mathrm{P} < 0{,}5$: $\mathrm{t}_{\mathrm{P}}(n) = -\mathrm{t}_{1-\mathrm{P}}(n)$

Tabulka 5/1: Kvantily Fisherova – Snedecorova *F*-rozdělení pro $P = 0{,}95$- 1. část

n_2	n_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,014	8,941	8,887	8,845	8,812
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999
5	6,608	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,773
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,501	3,438	3,388
9	5,117	4,257	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,136	3,072	3,020
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,791	2,707	2,641	2,588
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393
21	4,325	3,467	3,073	2,840	2,685	2,573	2,488	2,421	2,366
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,275	2,388	2,321	2,266
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,450	2,336	2,249	2,180	2,124
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959
∞	3,842	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880

$F_P(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-P}(n_2, n_1)}$

Tabulka 5/1: Kvantily Fisherova – Snedecorova *F*-rozdělení pro $P = 0{,}95$- 2. část

n_2	n_1									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,0	250,1	251,1	252,2	253,2	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,786	8,745	8,703	8,660	8,639	8,617	8,594	8,572	8,549	8,527
4	5,964	5,912	5,858	5,803	5,774	5,746	5,717	5,688	5,658	5,628
5	4,735	4,678	4,619	4,558	4,527	4,496	4,464	4,431	4,398	4,365
6	4,060	4,000	3,938	3,874	3,842	3,808	3,774	3,740	3,705	3,669
7	3,637	3,575	3,511	3,445	3,411	3,376	3,340	3,304	3,267	3,230
8	3,347	3,284	3,218	3,150	3,115	3,079	3,043	3,005	2,967	2,928
9	3,137	3,073	3,006	2,937	2,901	2,864	2,826	2,787	2,748	2,707
10	2,978	2,913	2,845	2,774	2,737	2,700	2,661	2,621	2,580	2,538
11	2,854	2,788	2,719	2,646	2,609	2,571	2,531	2,490	2,448	2,405
12	2,753	2,687	2,617	2,544	2,506	2,466	2,426	2,384	2,341	2,296
13	2,671	2,604	2,533	2,459	2,420	2,380	2,339	2,297	2,252	2,206
14	2,602	2,534	2,463	2,388	2,349	2,308	2,266	2,223	2,178	2,131
15	2,544	2,475	2,404	2,328	2,288	2,247	2,204	2,160	2,114	2,066
16	2,494	2,425	2,352	2,276	2,235	2,194	2,151	2,106	2,059	2,010
17	2,450	2,381	2,308	2,230	2,190	2,148	2,104	2,058	2,011	1,960
18	2,412	2,342	2,269	2,191	2,150	2,107	2,063	2,017	1,968	1,917
19	2,378	2,308	2,234	2,156	2,114	2,071	2,026	1,980	1,930	1,878
20	2,348	2,278	2,203	2,124	2,083	2,039	1,994	1,946	1,896	1,843
21	2,321	2,250	2,176	2,096	2,054	2,010	1,965	1,917	1,866	1,812
22	2,297	2,226	2,151	2,071	2,028	1,984	1,938	1,890	1,838	1,783
23	2,275	2,204	2,128	2,048	2,005	1,961	1,914	1,865	1,813	1,757
24	2,255	2,183	2,108	2,027	1,984	1,939	1,892	1,842	1,790	1,733
25	2,237	2,165	2,089	2,008	1,964	1,919	1,872	1,822	1,768	1,711
26	2,220	2,148	2,072	1,990	1,946	1,901	1,853	1,803	1,749	1,691
27	2,204	2,132	2,056	1,974	1,930	1,884	1,836	1,785	1,731	1,672
28	2,190	2,118	2,041	1,959	1,915	1,869	1,820	1,769	1,714	1,654
29	2,177	2,105	2,028	1,945	1,901	1,854	1,806	1,754	1,698	1,638
30	2,165	2,092	2,015	1,932	1,887	1,841	1,792	1,740	1,684	1,622
40	2,077	2,004	1,925	1,839	1,793	1,744	1,693	1,637	1,577	1,509
60	1,993	1,917	1,836	1,748	1,700	1,649	1,594	1,534	1,467	1,389
120	1,911	1,834	1,751	1,659	1,608	1,554	1,495	1,429	1,352	1,254
∞	1,831	1,752	1,666	1,571	1,517	1,459	1,394	1,318	1,221	1,000

$F_P(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-P}(n_2, n_1)}$

Tabulka 5/2: Kvantily Fisherova – Snedecorova *F*-rozdělení pro $P = 0{,}975$- 1. část

n_2	n_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
2	38,506	39,000	39,165	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473
4	12,218	10,649	9,979	9,605	9,365	9,197	9,074	8,980	8,905
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,696	5,600	5,523
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823
8	7,571	6,060	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880
20	5,872	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763
23	5,750	4,349	3,751	3,408	3,184	3,023	2,902	2,808	2,731
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677
26	5,659	4,266	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,027	2,867	2,746	2,651	2,575
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222
∞	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114

$F_P(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-P}(n_2, n_1)}$

Tabulka 5/2: Kvantily Fisherova – Snedecorova *F*-rozdělení pro $P = 0{,}975$- 2. část

n_2	n_1									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0	1018,3
2	39,40	39,41	39,43	39,44	39,45	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	8,844	8,751	8,657	8,560	8,511	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
5	6,619	6,525	6,428	6,329	6,278	6,227	6,175	6,123	6,069	6,015
6	5,461	5,366	5,269	5,168	5,117	5,065	5,015	4,959	4,905	4,849
7	4,761	4,666	4,568	4,467	4,415	4,362	4,309	4,254	4,199	4,142
8	4,295	4,200	4,101	4,000	3,947	3,894	3,840	3,784	3,728	3,670
9	3,964	3,868	3,769	3,667	3,614	3,560	3,506	3,449	3,392	3,333
10	3,717	3,621	3,522	3,419	3,365	3,311	3,255	3,198	3,140	3,080
11	3,526	3,430	3,330	3,226	3,173	3,118	3,061	3,004	2,944	2,883
12	3,374	3,277	3,177	3,073	3,019	2,963	2,906	2,848	2,787	2,725
13	3,250	3,153	3,053	2,948	2,893	2,837	2,780	2,720	2,659	2,596
14	3,147	3,050	2,949	2,844	2,789	2,732	2,674	2,614	2,552	2,487
15	3,060	2,963	2,862	2,756	2,701	2,644	2,585	2,524	2,461	2,395
16	2,986	2,889	2,788	2,681	2,625	2,568	2,509	2,447	2,383	2,316
17	2,922	2,825	2,723	2,616	2,560	2,502	2,442	2,380	2,315	2,247
18	2,866	2,769	2,667	2,559	2,503	2,445	2,384	2,321	2,256	2,187
19	2,817	2,720	2,617	2,509	2,452	2,394	2,333	2,270	2,203	2,133
20	2,774	2,676	2,573	2,465	2,408	2,349	2,287	2,223	2,156	2,085
21	2,735	2,637	2,534	2,425	2,368	2,308	2,247	2,182	2,114	2,042
22	2,700	2,602	2,498	2,389	2,332	2,272	2,210	2,145	2,076	2,003
23	2,668	2,570	2,467	2,357	2,299	2,239	2,176	2,111	2,042	1,968
24	2,640	2,541	2,437	2,327	2,269	2,209	2,146	2,080	2,010	1,935
25	2,614	2,515	2,411	2,301	2,242	2,182	2,118	2,052	1,981	1,906
26	2,590	2,491	2,387	2,276	2,217	2,157	2,093	2,026	1,955	1,878
27	2,568	2,469	2,364	2,253	2,195	2,133	2,069	2,002	1,930	1,853
28	2,547	2,448	2,344	2,232	2,174	2,112	2,048	1,980	1,907	1,829
29	2,529	2,430	2,325	2,213	2,154	2,092	2,028	1,959	1,886	1,807
30	2,511	2,412	2,307	2,195	2,136	2,074	2,009	1,940	1,866	1,787
40	2,388	2,288	2,182	2,068	2,007	1,943	1,875	1,803	1,724	1,637
60	2,270	2,169	2,061	1,945	1,882	1,815	1,744	1,667	1,581	1,482
120	2,157	2,055	1,945	1,825	1,760	1,690	1,614	1,530	1,433	1,310
∞	2,048	1,945	1,833	1,709	1,640	1,566	1,484	1,388	1,268	1,000

$F_P(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-P}(n_2, n_1)}$

B) Vztahy mezi pravděpodobnostními rozděleními