UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti: náhodný jev

Vedoucí bakalářské práce:
Doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2012

Vypracoval:
Liboslav Lichnovský
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením paní doc. RNDr. Evy Fišerové, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje, ze kterých jsem čerpal při zpracování bakalářské práce.

……………………………..

Liboslav Lichnovský

V Olomouci dne 12. dubna 2012

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat hlavně své vedoucí bakalářské práce paní doc. RNDr. Evě Fišerové, Ph.D. za spolupráci, odbornou pomoc a čas strávený při konzultacích a při řešení problémů, s kterými jsem se při tvorbě bakalářské práce potýkal. Také bych rád poděkoval své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali a motivovali.

Obsah

Úvod

Téma této bakalářské práce jsem si vybral proto, že se s pojmem náhodného jevu z oblasti statistiky a pravděpodobnosti v běžném životě setkáváme nejčastěji. Je to základní pilíř a umožňuje nám řešit spoustu zajímavých problémů a praktických příkladů.

Bakalářskou práci jsem rozčlenil na dvě části a to na teorii a příklady. Na začátku teoretické části si vysvětlíme a osvojíme základní znalosti kombinatoriky, protože ta je nezbytnou součástí pro výpočet pravděpodobnosti náhodného jevu. Dále si pak v teoretické části vysvětlíme problematiku tématu týkající se náhodného jevu, základní pojmy a představíme si vzorce, které se používají při řešení příkladů. Budeme se vždy snažit k pojmům a vzorcům uvádět i konkrétní příklady tak, abychom snáze pochopili jejich význam a použití v praxi. U některých si ukážeme hned i řešení. Zejména pak ale v páté kapitole, která se týká pravděpodobnosti náhodného jevu, si budeme uvádět jen typy příkladů, které se vztahují k probíranému tématu, ale řešit je nebudeme. Půjde nám hlavně o to si uvědomit, které typy příkladů se k tomuto tématu vážou. Příklady k páté kapitole a jejich řešení pak bude obsahovat část příkladová, kde si vše názorně ukážeme a vysvětlíme.

Tato práce má sloužit jako příručka a návod pro řešení základních příkladů týkajících se náhodného jevu. Je zaměřena na širší okruh čtenářů, kteří s uvedeným tématem nemají předchozí zkušenosti, a proto jsem se snažil vše co nejjednodušeji a nejpodrobněji vysvětlit a popsat. Z tohoto důvodu nebudu v nadcházející teorii žádná tvrzení dokazovat. Sbírka by měla sloužit i jako pomocný text k samostudiu náhodného jevu.

Doufám, že se mi můj záměr zpracování sbírky o náhodném jevu a s ním souvisejících pravděpodobností vydaří, text bude snadno pochopitelný a příklady názorně ukážou postup výpočtu a využití v praxi.

Teoretická část

1 Kombinatorika

Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá vytvářením navzájem různých skupin z daných prvků a určováním počtu takových skupin. Dané prvky uspořádává podle určitých pravidel do skupin. Důležité je, že kombinatorika pracuje jen s prvky z konečných množin.

Kombinatoriku využijeme kdykoliv, kdy budeme potřebovat znát počet možností, jak lze něco provést. Např. jak můžeme při sportovním turnaji kombinovat družstva, jak lze sestavit rozvrh hodin z daných předmětů, jak můžeme vybírat pracovníky do různých pozic, kolika způsoby lze sestavit pruhovanou vlajku ze tří barev, jaké mohou nastat situace při hodu určitého počtu hracích kostek, kolik je možností vytažení určité karty s balíčku karet, atd.

Především poslední dva příklady podnítily podrobnější zájem o tento obor. Šlo o hazardní hry, a tak se kombinatorika začala na přelomu 16. a 17. století mnohem více rozvíjet. V dnešní době nachází uplatnění v teorii pravděpodobnosti, ve statistice, informatice, fyzice, chemii, geografii a v dalších oborech.

Základním pojmem v kombinatorice je pojem *k-prvková skupina* nebo také *k-tice prvků*, kde k je přirozené číslo, tj. $k \in \mathbb{N}$. Podstatné je, jestli u prvků v *k-tici* záleží na pořadí nebo nikoli. Jestliže v *k-tici* záleží na pořadí prvků, mluvíme o uspořádaných *k-ticích*, jestliže na pořadí prvků v *k-tici* nezáleží, mluvíme o neuspořádaných *k-ticích*. Dále také rozlišujeme, jestli se prvky v *k-tici* mohou nebo nemohou opakovat. Pokud se každý prvek může v *k-tici* vyskytnout nejvýše jednou, mluvíme o skupinách bez opakování, jestliže se může libovolný prvek v *k-tici* vyskytnout vícekrát (nejvýše však *k-krát*), mluvíme o skupinách s opakováním.

Kombinatorické pravidlo součinu – Počet všech uspořádaných *k-tic*, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až *k-tý* člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 * n_2 * \cdots * n_k$. Např. při hodu dvěma hracími kostkami (tedy $k = 2$) s čísly od 1 do 6 je počet všech možných uspořádaných dvojic roven číslu 36, protože na první kostce máme 6 možných variant a na druhé také, proto

$6 * 6 = 36$; při hodu třemi mincemi (tedy $k = 3$) je počet všech možných uspořádaných trojic roven číslu 8, protože na každé minci jsou právě dvě možné varianty (panna, orel), proto $2 * 2 * 2 = 8$, atd.

Kombinatorické pravidlo součtu – Jestliže jsou $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a pokud každé dvě z těchto množin jsou neslučitelné, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Např. máme-li 3 žluté kuličky, 5 zelených a 2 modré, potom máme dohromady 10 kuliček, protože $3 + 5 + 2 = 10$; nebo např. kolik dětí nic nedělá, jestliže je na táboře celkem 20 dětí a z toho 5 plave, 6 kreslí a 4 hází míčem? 5 dětí nic nedělá, protože $20 - 5 - 6 - 4 = 5$.

Faktoriál $\boldsymbol{n}$ – Faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}$ je v matematice číslo rovno součinu všech celých kladných čísel, které jsou menší nebo rovny právě tomuto číslu. Značí se vykřičníkem, tedy $n!$, a platí $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \cdots * 2 * 1$. Definujeme $0! = 1$ (viz Permutace).

1.1 Variace, permutace a kombinace bez opakování

Variace

Variace nám slouží k tomu, abychom zjistili, jaký je počet možností výběru *k-členné* skupiny z n prvků. Např. kolik máme možností, jak obsadit 3 pracovní pozice z 5 zaměstnanců.

Platí, že *k-členná* variace z n prvků neboli variace *k-té* třídy z n prvků, je uspořádaná *k-tice* sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše jedenkrát. Jestliže vybíráme všechny prvky z n, tedy $k = n$, jedná se o speciální případ variace a v těchto situacích budeme mluvit o permutaci (viz níže). Pokud by bylo $k > n$, tak nejsme schopni žádnou takovou *k-tici* sestavit.

Variace *k-té* třídy z n prvků se značí $V(k,n)$ nebo taky $V_k(n)$ a vypočítá se pomocí vzorce:

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad 1.1: Máme 10 sportovců, kteří soutěží mezi sebou o zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili. Kolika způsoby můžeme tyto 3 medaile mezi ně rozdělit?

Řešení:

$n = 10;\ k = 3$ potom $V(3,10) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10*9*8*7!}{7!} = 10 * 9 * 8 = 720$ způsoby

Permutace

Permutaci používáme, pokud chceme sestavit uspořádanou *n-tici* z celkem n prvků, přičemž se v ní vyskytuje každý prvek právě jedenkrát. V podstatě můžeme o permutaci říci, že jde o obměnu pořadí.

Permutace se značí $P(n)$ nebo taky P_n. Jak jsme si již řekli, permutace je speciálním případem variace, kde $k = n$. Jinými slovy permutace z n prvků je každá *n-členná* variace z těchto prvků, tedy $P(n) = V(n,n)$. Můžeme si proto vzorec pro výpočet permutace odvodit ze vzorce pro výpočet variace. Pak:

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Aby mohla tato rovnost platit, definuje se $0! = 1$.

Příklad 1.2: Čtyři lidé chtějí vytvořit řadu. Kolika různými způsoby se mohou vedle sebe postavit?

Řešení:

$n = 4$ potom $P(4) = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$ způsoby

Kombinace

Bavíme-li se o kombinacích, nezáleží nám na pořadí vybraných prvků jako u variací. Např. nezáleží, v jakém pořadí vylosujeme čísla z osudí, v jakém pořadí budou stát lidé ve frontě, kdo bude zastávat jakou pracovní pozici, jakou kartu vytáhnu z balíčku dříve, atd.

Platí, že *k-členná* kombinace z n prvků je neuspořádaná *k-tice* sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše jedenkrát. Kombinace se značí $K(k,n)$ nebo taky $K_k(n)$.

Obecně platí vztah mezi kombinací a variací takový, že $V(k,n) = k! * K(k,n)$. Z tohoto tvrzení si můžeme odvodit vztah pro výpočet počtu všech *k-členných* kombinací z n prvků takto:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! * K(k,n)$$

$$K(k,n) = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

Příklad 1.3: Kolik existuje ve Sportce možných kombinací pro 1. výhru?

Řešení:
To znamená, že musíme uhádnout všech 6 tažených čísel ze 49.
$n = 49;\ k = 6$ potom $K(6,49) = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6!43!} = 13\,983\,816$ kombinací

Kombinační číslo

Kombinační číslo nám slouží ke stručnějšímu zápisu kombinací. Označuje tedy počet *k-členných* kombinací z n prvků. Zapisuje se takto $\binom{n}{k}$ a platí pro něj $\binom{n}{k} = K(k,n)$. Tento symbol se čte jako „*n nad k*“. Pro kombinační čísla platí:

$$\binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{0}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

1.2 Variace, permutace a kombinace s opakováním

Variace, permutace a kombinace s opakováním se liší od variací, permutací a kombinací bez opakování tím, že se vybrané prvky mohou opakovat. Ostatní vlastnosti zůstávají stejné. To znamená, že u variací a permutací na pořadí vybraných prvků záleží, zatímco u kombinací nezáleží na pořadí, v jakém prvky vybíráme. Permutace s opakováním i permutace bez opakování určují pořadí všech zadaných prvků.

Variace s opakováním

Variace s opakováním jsou takové variace, ve kterých se mohou prvky libovolně opakovat. Záleží na pořadí, protože se pořád jedná o variace.

Platí, že *k-členná* variace s opakováním z n prvků je uspořádaná *k-tice* sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše *k-krát*.

Prvky můžeme v těchto případech chápat jako jakési skupiny, druhy nebo možnosti, ze kterých můžeme opakovaně vybírat. Tedy n představuje např. počet různých písmen, číslic, barev, vlastností, atd. Proto může být $k > n$.

Variace s opakováním se značí $V'(k, n)$ nebo taky $V'_k(n)$ a vypočítá se pomocí vzorce:

$$V'(k, n) = n^k$$

Příklad 1.4: Kolik trojciferných čísel můžeme sestavit ze dvou čísel?

Řešení:

$n = 2;\ k = 3$ potom $V'(3,2) = 2^3 = 8$ čísel

Permutace s opakováním

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná *k-tice* sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje alespoň jedenkrát.

Číslo n udává počet různých prvků ve skupině, druhů nebo možností, ze kterých můžeme opakovaně vybírat. Např. počet různých písmen, číslic, barev, vlastností, atd. Číslo k udává počet všech prvků, ze kterých vybíráme. Platí $k = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n$ a k_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ značí počet prvků v *j-té* skupině, s *j-tou* možností, vlastností, barvou, atd.

Permutace s opakováním se značí $P'(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ a vypočítá se pomocí vzorce:

$$P'(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n)!}{k_1! * k_2! * k_3! * \dots * k_n!}$$

Příklad 1.5: Kolika způsoby je možné srovnat do řady 1 žlutou, 2 modré a 3 červené kuličky?

Řešení:

$n = 3;\ k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ k_3 = 3;\ k = 6$

$P'(1,2,3) = \frac{(1+2+3)!}{1!*2!*3!} = \frac{6!}{1!*2!*3!} = \frac{6*5*4*3!}{1!*2!*3!} = 60$ způsoby

Kombinace s opakováním

Platí, že *k-členná* kombinace s opakováním vzniklá z n prvků je neuspořádaná *k-tice* sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše *k-krát*.

Kombinace s opakováním se značí $K'(k, n)$ a vypočítá se pomocí vzorce:

$$K'(k, n) = \binom{n + k - 1}{k}$$

Příklad 1.6: Kolika způsoby lze rozdělit 10 výher mezi 5 soutěžících?

Řešení:

$n = 5;\ k = 10$

$K'(10,5) = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = \frac{14!}{10!*(14-10)!} = \frac{14*13*12*11*10!}{10!*4*3*2!} = 1001$ způsoby

Informace k první kapitole byly čerpány z materiálů $[1, 2, 10]$, kde se můžete dozvědět i další doplňující informace a podrobnější vysvětlení.

2 Teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti je odvětvím matematiky, které je používáno v mnoha oborech, např. v ekonomii, medicíně, sociologii, pedagogice, chemii, biologii atd. Teorie pravděpodobnosti zkoumá takové náhodné jevy, které se mohou několikrát opakovat při stejném souboru podmínek. Tyto náhodné jevy nazýváme hromadné. Budeme-li náhodné jevy opakovat a sledovat v dlouhodobějším měřítku, můžeme zjistit, že na první pohled náhodné jevy nejsou zase až tak náhodné. Díky dlouhodobějšímu pozorování jsme schopni dojít k závěru, že se náhodné jevy řídí zákony pravděpodobnosti (stochastickými zákony). Ty nám sice nestanoví, že za daného souboru podmínek náhodný jev nastane právě v daný okamžik, ale umožní nám předpovědět, s jakou šancí (pravděpodobností) můžeme nastoupení tohoto jevu očekávat při určitém pokusu (realizaci). Např. při hraní rulety existuje pravděpodobnost, že určité číslo, třeba 0 padne právě jednou z každých 47 pokusů.

V praxi ovšem „není pokus jako pokus“, a proto ho rozdělujeme na dva typy. Pokusy musíme rozlišovat na pokus deterministický (prostě jen pokus) a náhodný pokus. Pro lepší přehled a uvědomění hlavních rozdílů si tyto dva termíny stručně a přehledně vymezíme a uvedeme si k nim příklady.

Deterministický pokus (pokus)

Pokusem máme na mysli uskutečnění určitého pevně daného souboru podmínek, např. v chemii smícháním vždy stejného množství látek dostaneme vždy stejnou sloučeninu, upuštěná kniha vždy padá k zemi, voda vždy vaří za normálního tlaku při 100 ^{0}C, atd. Je tedy patrné, že jde o pokusy, u kterých se při stejných podmínkách dostaví vždy stejný výsledek.

Náhodný pokus

Náhodným pokusem oproti tomu myslíme uskutečnění určitého pevně daného souboru podmínek, který končí nastoupením vždy jednoho výsledku ze všech možných výsledků tohoto pokusu. Například při hodu klasickou šestistěnnou kostkou padne vždy jedno číslo od

1 do 6, při hodu mincí padne panna nebo orel, při ruletě padne jedno číslo od 0 do 36, z balíčku karet vytáhneme právě srdcovou dámu, atd. Praktický význam však pro nás mají pokusy typu: narodí se chlapec nebo děvče, výrobek je dobrý nebo špatný, lék pacientovi pomůže, přihorší nebo nemá vliv, atd.

Vždy tedy existuje určitá množina možných výsledků pro každý náhodný pokus a po uskutečnění náhodného pokusu jeden z nich náhodně nastane. Tato množina může být buď konečná, nebo nekonečná pro dané podmínky. Výsledek závisí jak na souboru podmínek, tak i na náhodě. Proto se v teorii pravděpodobnosti pracuje s výsledky náhodných pokusů.

3 Jev

Jev nebo také náhodný jev je jedním ze základních pojmů v teorii pravděpodobnosti. Jak jsme si již v předchozí kapitole řekli, teorie pravděpodobnosti pracuje s výsledky náhodných pokusů a náhodné pokusy končí nastoupením jednoho výsledku z množiny všech možných výsledků příslušného pokusu.

Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu budeme značit Ω (omega), konkrétní výsledek z této množiny budeme značit ω a platí pro něj $\omega \in \Omega$.

Ω může být konečná nebo nekonečná spočetná nebo nespočetná. Pokud by Ω byla nespočetná, nemůžeme v následující teorii pracovat se všemi jejími podmnožinami (jevy), ale jen s těmi, které tvoří tzv. rozumný systém. Rozumný systém bude pro nás každý takový, který bude uzavřený k doplňku a spočetnému sjednocení. Tento systém budeme nazývat jevové pole a prvky patřící do tohoto systému budeme označovat jako náhodné jevy.

Jevové pole je tedy neprázdný systém podmnožin náhodných jevů množiny Ω uzavřený k doplňku a spočetnému sjednocení. Znamená to vlastně, že doplněk množiny z jevového pole musí také patřit do jevového pole a konečné nebo nekonečné sjednocení posloupnosti množin z jevového pole musí být také obsaženo v jevovém poli. Jevové pole budeme značit $\mathcal{A}$ a výše uvedené podmínky pro něj si můžeme zapsat takto:

1. doplněk $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
2. sjednocení $A_n \in \mathcal{A},\ n = 1,2,\dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Představme si, že máme jevové pole definované na $\Omega \neq \emptyset$. Potom pro náhodné jevy z tohoto jevového pole platí tyto vlastnosti:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ a $\Omega \in \mathcal{A}$
2. sjednocení konečné nebo nekonečné posloupnosti náhodných jevů patří do jevového pole
   $A_j \in \mathcal{A},\ j = 1,2,\dots,n \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$; $A_n \in \mathcal{A},\ n = 1,2,\dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
3. průnik konečné nebo nekonečné posloupnosti náhodných jevů patří do jevového pole
   $A_j \in \mathcal{A},\ j = 1,2,\dots,n \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$; $A_n \in \mathcal{A},\ n = 1,2,\dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

4. rozdíl náhodných jevů také patří do jevového pole $A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \backslash B) \in \mathcal{A}$

Budeme předpokládat, že výsledky náhodného pokusu jsou vzájemně neslučitelné (to znamená, že žádné dva nemohou nastat současně) a že nastane vždy jeden výsledek. Nemá smysl pracovat s prázdnou množinou Ω, proto předpokládáme, že $\Omega \neq \emptyset$. Také pokud by byla Ω jednoprvková, jednalo by se o pokus deterministický, a tudíž budeme brát tuto možnost jako speciální případ náhodného pokusu. Z toho nám vyplývá, že Ω musí být alespoň dvouprvková.

Když už teď známe výše uvedené pojmy a jejich značení, můžeme si definovat jev jako každou množinu A patřící do množiny Ω, tedy $A \subset \Omega$. Jednoprvkové podmnožiny budeme nazývat elementární jevy. Jevy budeme značit velkými písmeny ze začátku abecedy $(A, B, C, \ldots)$.

V nadcházející teorii si budeme uvádět konkrétní příklady pro lepší uvědomění si nových pojmů. Pokud budeme pracovat s hrací kostkou, dále jen kostka, budeme tím myslet klasickou šestistěnnou hrací kostku s čísly od 1 do 6.

Při náhodném pokusu mohou nastat dva různé typy výsledků pro jev A a to buď, že jev A nastal nebo nenastal. Říkáme, že jev A nastal, pokud při uskutečnění náhodného pokusu nastal takový výsledek ω, který patří do množiny A neboli $\omega \in A$. Takovýto výsledek ω nazýváme výsledek příznivý jevu A. Naproti tomu řekneme, že jev A nenastal, jestliže $\omega \notin A$.

Máme zde také dvě extrémní situace a to, že jev A je jistý nebo nemožný. O jistém jevu hovoříme tehdy, když za daného souboru podmínek tento jev nastane vždy. Jedná se o množinu všech možných výsledků Ω (např. jev, že na kostce padne vždy jen číslo od 1 do 6). Druhá extrémní situace je tehdy, jestliže za daného souboru podmínek jev nenastane nikdy (např. jev, že na kostce padne číslo 7). Tomuto jevu říkáme jev nemožný.

Můžeme tedy říci, že náhodný jev je vždy jeden z možných výsledků náhodného pokusu, který po realizaci náhodného pokusu buď nastane, nebo ne. Výsledek náhodného pokusu nemůžeme ovlivnit, je určen náhodou. Náhodu chápeme jako souhrn událostí a dějů, které nemůžeme nijak vysvětlit a určit. Např. co padne při hodu kostkou, pokazí se stroj za určité období, vyhraju v loterii, atd.

3.1 Operace s jevy

Jevy jsme si definovali jako množiny, a proto s nimi jako s množinami můžeme i pracovat. Za každou množinovou operací si uvedeme konkrétní příklad s kostkou pro znázornění a snadnější pochopení.

Příklad 3.1: Množina všech možných výsledků pro náš případ je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jev A_1, padne sudé číslo, tedy $A_1 = \{2, 4, 6\}$, a jev A_2, padne číslo menší nebo rovno 3, tedy $A_2 = \{1, 2, 3\}$.

Sjednocení jevů – sjednocení jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ je jev, při němž nastane alespoň jeden z jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$. Značíme $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ nebo $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Sjednocení může obsahovat i nekonečný počet jevů $A_1, A_2, \ldots$ a potom značíme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. V našem příkladu by bylo sjednocení jevů A_1, A_2 jev, že na kostce padne jakékoliv číslo kromě 5, zapíšeme jako $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Průnik jevů – průnik jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ je jev, při němž nastanou současně všechny jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$. Značíme $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ nebo $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Průnik může obsahovat i nekonečný počet jevů $A_1, A_2, \ldots$ a potom značíme $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. V našem příkladu by byl průnikem jevů A_1, A_2 jev, že na kostce padne právě číslo 2, zapíšeme jako $A_1 \cap A_2 = \{2\}$.

Jev *A* implikuje jev *B* (jev A má za následek jev B, jev B je důsledkem jevu A) – pokud při každém výskytu jevu A nastává i jev B neboli pokud každý výsledek příznivý jevu A je také příznivý jevu B. Značíme $A \subset B$. Např. jev A, padne číslo 2 nebo 4, $A = \{2, 4\}$, a jev B, padne sudé číslo, $B = \{2, 4, 6\}$.

Jev opačný k jevu *A* (doplněk, komplement jevu A) – je jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A. Značíme $\bar{A}$ nebo A^c a platí $A^c = \Omega \backslash A$. Sjednocení opačných jevů je jev jistý a průnik opačných jevů je jev nemožný, protože jevy opačné jsou neslučitelné.

Např. pokud bude jev A, padne číslo 1 nebo 2, $A = \{1, 2\}$, potom jev opačný A^c je, že padne číslo větší než 2, $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$.

Rozdíl jevů $\boldsymbol{A, B}$ – je jev, který nastane právě tehdy, když nastane jev A a zároveň nenastane jev B. Značíme $A–B$ nebo $A\backslash B$ a platí $A\backslash B\ = A \cap B^c$. Z úvodního příkladu vidíme, že pokud $A_1 = A$ a $A_2 = B$, potom $A\backslash B\ = \{4, 6\}$.

Jevy $\boldsymbol{A, B}$ jsou si rovny – pokud jevy A a B nastanou vždy jen současně a nikdy jindy, tedy $A \subset B$ a současně $B \subset A$. Značíme $A = B$. Je zřejmé, že množiny musí být stejné.

Jevy $\boldsymbol{A, B}$ jsou neslučitelné (disjunktní) – jestliže nemohou nastat současně, vzájemně se vylučují. Značíme $A \cap B = \emptyset$. Průnik neslučitelných jevů je jev nemožný. Např. pokud bude jev A, padne sudé číslo, $A = \{2, 4, 6\}$, a jev B, padne liché číslo, $B = \{1, 3, 5\}$.

Systém jevů se nazývá neslučitelný (disjunktní) – pokud pro libovolné jevy $A_i \neq A_j$ platí, že $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Jevy $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ resp. $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots}$ $(A_j \neq \emptyset, \forall j = 1, 2, \dots, n\ resp. \forall j = 1, 2, \dots)$ **tvoří rozklad jevu $\boldsymbol{B}$** – jestliže jsou tyto jevy neslučitelné a zároveň sjednocení těchto jevů je rovno jevu B, tedy $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = B$ resp. $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = B$. Např. je-li jev $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{4\}$ a $A_3 = \{6\}$ a jev $B = \{2, 4, 6\}$.

Jevy $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ resp. $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots}$ tvoří úplnou skupinu – jestliže tyto jevy tvoří rozklad jistého jevu Ω. Např. v našem konkrétním případě s kostkou to bude tehdy, pokud budeme mít 6 jevů typu $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, \dots, A_6 = \{6\}$.

Jak je z výše uvedených pojmů a operací vidět, jevy jsou to samé co množiny, a proto pro ně platí i stejná tvrzení. Tento fakt je pro nás velmi důležitý a využijeme ho v další teorii. Nám se především budou hodit tyto následující tvrzení:

1. de Morganova pravidla: $(\bigcup_j A_j)^c = \bigcap_j A_j^c$, $(\bigcap_j A_j)^c = \bigcup_j A_j^c$
2. $A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)\backslash(A \cap C)$
3. $(\bigcup_j A_j) \cap B = \bigcup_j (A_j \cap B)$

4 Pravděpodobnost náhodného jevu

Pravděpodobnost neboli šance je vlastně hodnota, která nám udává určitou jistotu nebo nejistotu nastoupení náhodného jevu. Pravděpodobnostní hodnotu nabývají náhodné jevy. Pravděpodobností se zabývá a zkoumá ji teorie pravděpodobnosti. Značíme ji P z anglického slova probability.

4.1 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Axiomatická definice pravděpodobnosti spočívá v tom, že je definovaná na základě axiomů. To jsou tvrzení, která se předem pokládají za pravdivé a nemusí se tím pádem dokazovat.

Pravděpodobnost budeme definovat na jevovém poli $\mathcal{A}$ náhodných jevů, které je definováno na neprázdné množině Ω. Tedy pravděpodobnost $P(A)$ náhodného jevu A nazveme každou reálnou funkci $P(\ )$ definovanou na $\mathcal{A}$, která splňuje následující tři axiomy:

1. $P(\Omega) = 1$ pravděpodobnost jistého jevu (Ω) je rovno jedné
2. $P(A) \geq 0$ pravděpodobnost náhodného jevu A je nezáporné číslo
3. Pravděpodobnost sjednocení libovolné posloupnosti $A_n \in \mathcal{A},\ n = 1,2,\dots$ vzájemně neslučitelných (disjunktních) jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností.

   $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

   Obecně lze říci, že jde vlastně o sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů. Pokud bychom totiž měli dva neslučitelné náhodné jevy, byla by jejich pravděpodobnost, že nastane jeden nebo druhý, rovna součtu jejich pravděpodobností.

Zjednodušeně můžeme tedy o pravděpodobnosti uvažovat jako o funkci $P(\ )$, která každému náhodnému jevu A přiradí konkrétní číslo $P(A)$.

Už tedy víme, že pravděpodobnost $P(\quad)$ musí být definovaná na jevovém poli $\mathcal{A}$ a to zase musí být definováno na množině všech možných výsledků Ω. Uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ budeme proto nazývat pravděpodobnostní prostor.

4.2 Klasická definice pravděpodobnosti

Předpokladem klasické definice pravděpodobnosti je konečný počet náhodných jevů v pokusu, které mají stejnou šanci nastat. Máme tedy náhodný pokus, který má konečný počet možných výsledků a ty mohou nastoupit se stejnou pravděpodobností. Např. při náhodném pokusu hodu kostkou máme šest náhodných jevů (padne číslo od 1 do 6), které mohou nastat se stejnou možností $\frac{1}{6}$.

Podmínka stejné šance je velmi důležitá, ale nemáme ji jak objektivně posoudit. Např. nepoznáme, jestli kostka není nějak upravená, jestli nejsou karty nějak označeny, atd. Z tohoto důvodu musíme rozlišovat jednotlivé výsledky náhodného pokusu. Např. při hodu třemi kostkami musíme rozlišovat, na kterých kostkách padla jaká čísla. Je totiž rozdíl, jestli padne $2, 2, 6$ nebo třeba $2, 6, 2$, i když na první pohled padly jen dvě 2 a jedna 6. Rozlišujeme zde pořadí, a proto si musíme kostky nějak označit, např. je očíslovat.

Máme náhodný pokus a v něm sledujeme náhodný jev A. Obecně se klasická pravděpodobnost definuje jako podíl počtu m výsledků příznivých náhodnému jevu A a počtu n všech možných výsledků náhodného pokusu.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Nejtypičtějším příkladem pro klasickou pravděpodobnost je výběr bez vracení. Z celkového počtu prvků N (např. výrobků, čísel, karet, kuliček, atd.) vybereme náhodně n prvků, které nevracíme. Přitom v celkovém počtu prvků N je určitý počet prvků M s nějakou vlastností (např. vadné výrobky, sudá čísla, čtyři karty s esy, bílé kuličky, atd.). Zkoumá se zde, jaká je pravděpodobnost náhodného jevu A, že mezi n vybranými prvky je právě m prvků s určitou vlastností (např. jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými *výrobky jsou 3* *vadné, čísly jsou 2 sudá, kartami jsou všechna esa, kuličkami je 10 bílých,* atd.). Takovou pravděpodobnost vypočítáme pomocí vzorce:

$$P(A) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$\binom{M}{m}$ je počet možností výběru m prvků s určitou vlastností z jejich celkového počtu M.

$\binom{N-M}{n-m}$ je počet možností výběru $n-m$ prvků bez této vlastnosti z celkového počtu prvků $N-M$ bez této vlastnosti.

$\binom{N}{n}$ je počet možností výběru n vybraných prvků z celkového počtu N všech prvků.

Díky této úvaze můžeme řešit řadu příkladů, jako jsou např. pravděpodobnost výhry ve Sportce, v loterii, výběru osoby ze skupiny, výběru karety z balíčku, výběru lístku v tombole, výběru kuliček z osudí, výběru výrobků ze série, atd.

4.3 Neklasická definice pravděpodobnosti

Neklasická a klasická definice pravděpodobnosti se od sebe liší jedním zásadním rozdílem a ten je, že neklasická pravděpodobnost je vhodná pro náhodné jevy, které nemají stejnou pravděpodobnost nastat. To znamená např. pro náhodné pokusy typu hod upravenou hrací kostkou, výběr karty z označeného balíčku, výběr kuličky z osudí různě těžkých kuliček, atd. Jedná se vlastně o podvod, protože nastoupení jevu je ovlivněno a můžeme ho tak lépe předpovídat. Jinak jsou předpoklady pro neklasickou definici pravděpodobnosti takřka stejné jako u klasické.

Máme konečnou množinu všech možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ a na ní jevové pole $\mathcal{A}$ obsahující všechny podmnožiny množiny Ω. Také víme, že pravděpodobnosti nastoupení jednotlivých výsledků $\omega_1, \dots, \omega_n$ se rovnají číslům $p_1, \dots, p_n$ a jejich součet je roven 1, tj. $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Potom je neklasická pravděpodobnost definovaná na jevovém poli $\mathcal{A}$ jako funkce $P(\quad)$ určená vztahy:

$$P(\{\omega_j\}) = p_j \quad kde\ j = 1, \dots, n \qquad P(A) = \sum_{j:\omega_j \in A} P(\{\omega_j\}) = \sum_{j:\omega_j \in A} p_j \quad pro\ \forall A \in \mathcal{A}$$

4.4 Definice pravděpodobnosti v případě, že Ω je nekonečná spočetná

Jedná se o případy, kdy opakujeme náhodný pokus tak dlouho, dokud nenastane jeden určitý náhodný jev (výsledek), který chceme. Např. vytahujeme a vracíme karty z balíčku tak dlouho, dokud nevytáhneme srdcovou dámu; házíme současně 10 kostkami tak dlouho, dokud nepadne na všech 6, atd. Podstatné je, že náhodné jevy mají stejnou pravděpodobnost nastat.

Máme tedy množinu všech možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ a na ní jevové pole $\mathcal{A}$ obsahující všechny podmnožiny množiny Ω. Také víme, že pravděpodobnosti nastoupení jednotlivých výsledků $\omega_1, \omega_2, \ldots$ se rovnají číslům $p_1, p_2, \ldots$ a jejich součet je roven 1, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. V *n-tém* pokusu nastal chtěný jev a platí, že pravděpodobnost nastoupení tohoto jevu v *n-tém* pokusu je větší rovno 0, tedy $p_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Potom pravděpodobnost v případě, že Ω je nekonečná spočetná, definujeme na jevovém poli $\mathcal{A}$ jako funkci $P(\ \ )$ určenou vztahy:

$$P(\{\omega_n\}) = p_n \quad kde\ n \in \mathbb{N} \qquad\qquad P(A) = \sum_{n:\omega_n \in A} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n:\omega_n \in A} p_n \quad pro\ \forall A \in \mathcal{A}$$

4.5 Geometrická definice pravděpodobnosti

Geometrickou pravděpodobnost používáme všude tam, kde je nekonečně mnoho možných výsledků. Jinými slovy, množina všech možných výsledků Ω náhodného pokusu je nekonečná.

Standardní definice geometrické pravděpodobnosti je pro naše potřeby zbytečně složitá. Uvedeme si proto zjednodušenou verzi, kterou budeme využívat v této sbírce.

Množinu Ω budeme brát jako podmnožinu všech reálných čísel na *n-tou*, tedy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kde $n = 1, 2, 3$. V těchto případech totiž umíme míru Ω, značeno $\mu(\Omega)$, určit jako délku v $\mathbb{R}^1$, obsah plochy v $\mathbb{R}^2$ a objem v $\mathbb{R}^3$. Je patrné, že $\mu(\Omega)$ patří do intervalu $0 < \mu(\Omega) < \infty$ (délka, obsah ani plocha nemůžou vyjít záporně).

Abychom mohli vyjádřit geometrickou pravděpodobnost, musíme mít opět jevové pole $\mathcal{A}$. Potom geometrickou pravděpodobnost definujeme na $\mathcal{A}$ jako funkci $P(\quad)$ danou vztahem:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \qquad kde\ A \in \mathcal{A}$$

$\mu(A)$ je míra (délka, obsah, objem) náhodného jevu A.

Pomocí geometrické pravděpodobnosti jsme schopni řešit řadu zajímavých příkladů jako je pravděpodobnost setkání dvou *osob, aut, letadel* v určitém časovém rozmezí apod.

4.6 Podmíněná pravděpodobnost

Pojem podmíněné pravděpodobnosti zavádíme pro situace, kdy počítáme pravděpodobnost náhodného jevu A za daného souboru podmínek a k tomuto souboru podmínek přibude ještě jedna nová podmínka, která nás informuje o nastoupení náhodného jevu B. Jinými slovy, nastoupení jevu A je ovlivněno jevem B a tím i jeho pravděpodobnost. Jev B patří do jevového pole $\mathcal{A}$, tedy $B \in \mathcal{A}$, a jeho pravděpodobnost nesmí být rovna 0, takže $P(B) > 0$. Za tohoto předpokladu pak podmíněnou pravděpodobnost definujeme na jevovém poli $\mathcal{A}$ pomocí předpisu:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad kde\ A \in \mathcal{A}$$

Značíme ji $P(A|B)$ a říkáme, že pravděpodobnost jevu A je podmíněná jevem B nebo podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B.

Např. máme skupinu 30 osob, mezi kterými je 25 osob nemocných a mezi nemocnými je 10 kuřáků. Náhodně jsme vybrali osobu, ta je nemocná a máme zjistit, jaká je pravděpodobnost, že je to kuřák. Tento model můžeme aplikovat na spoustu variant.

K výpočtu podmíněné pravděpodobnosti nám budou sloužit i následující věty.

Věta o násobení pravděpodobností

Věta o násobení pravděpodobností nám popisuje postup výpočtu pravděpodobnosti průniku náhodných jevů A a B (jejich společného nastoupení) a vypadá následovně:

1. pokud je $P(B) > 0$, potom platí $P(A \cap B) = P(B) * P(A|B)$

   pokud je $P(A) > 0$, potom platí $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$

   - je patrné, že průnik dvou náhodných jevů je vždy roven součinu nepodmíněné pravděpodobnosti jednoho jevu a podmíněné pravděpodobnosti druhého jevu vzhledem k prvému
2. pokud je $P\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) > 0$, můžeme větu o násobení pravděpodobností rozšířit pro $A_1, A_2, \ldots, A_n$ náhodných jevů a potom platí:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = P(A_1) * \ P(A_2|A_1) * \ P(A_3|A_1 \cap A_2) * \ldots * P\left(A_n \middle| \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right)$$

Větu o násobení pravděpodobností využíváme, když řešíme například tyto typy příkladů: jaká je pravděpodobnost, že střelec střílející na cíl ho zasáhne až při 5. pokusu; taháme z balíčku karty a chceme vědět, jaká je pravděpodobnost, že srdcovou dámu vytáhneme až v 8. pokusu; máme 5 kuliček různých barev v osudí, vytáhneme postupně 3 kuličky, které nevracíme, a chceme zjistit pravděpodobnost, že první vytažená kulička byla červená, druhá zelená a třetí modrá; atd.

Věta o úplné pravděpodobnosti

Větu o úplné pravděpodobnosti používáme v takových případech, kdy nastoupení náhodného jevu A je spojeno s nastoupením právě jednoho z konečné nebo nekonečné posloupnosti náhodných jevů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Tyto jevy nazýváme hypotézy a jsou neslučitelné. Známe jak jejich kladné pravděpodobnosti (nejsou rovny 0), tak i pravděpodobnost jevu A podmíněnou těmito jevy. Také víme, že pravděpodobnost sjednocení hypotéz je rovna 1, tzn. $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = 1$. Potom si můžeme vzorec pro úplnou pravděpodobnost definovat takto:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_n) * P(A|B_n) \qquad kde\ A \in \mathcal{A}$$

Větu o úplné pravděpodobnosti využíváme, když řešíme například tyto typy příkladů: dva stroje vyrábí stejné spotřebiče a dávají je do společné bedny, první stroj vyrobí 70% spotřebičů a z toho je 10% vadných a druhý stroj vyrobí 30% spotřebičů a z toho je 5% vadných, a nás zajímá, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je vadný; v novém automobilu se vyskytuje skrytá vada s pravděpodobností $0{,}2$, takový automobil se porouchá s pravděpodobností $0{,}6$, automobil bez skryté vady se porouchá s pravděpodobností $0{,}05$, a nás zajímá, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný automobil se porouchá; atd.

Bayesova věta

Pomocí Bayesovy věty jsme schopni po nastoupení náhodného jevu A vypočítat pravděpodobnosti hypotéz $B_1, B_2, \dots, B_n$. Jinak řečeno, dokážeme spočítat pravděpodobnosti všech možných příčin sledovaného jevu A a příčinu nejpravděpodobnější pak pokládat za příčinu skutečnou.

Pro určení Bayesova vzorce platí ty samé předpoklady jako pro úplnou pravděpodobnost. Tedy náhodné jevy $B_1, B_2, \dots, B_n$ jsou konečnou nebo nekonečnou posloupností. Známe jejich pravděpodobnosti i pravděpodobnost jevu A podmíněnou těmito jevy. Jsou neslučitelné a $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = 1$. Navíc pravděpodobnost náhodného jevu A musí být různá od 0, $P(A) > 0$.

Bayesův vzorec potom vyjádříme pro $\forall j \in n$ následovně:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) * P(A|B_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) * P(A|B_j)} \qquad kde\ A \in \mathcal{A}$$

Při zamyšlení se nad vzorcem vidíme, že se skládá z obou předchozích vět. V čitateli máme větu o násobení pravděpodobností a ve jmenovateli větu o úplné pravděpodobnosti.

Pro znázornění užití Bayesovy věty použijeme příklady uvedené u úplné pravděpodobnosti: u příkladu se stroji by nás teď třeba zajímalo, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný vadný spotřebič vyrobil první stroj; u příkladu s automobily by nás teď třeba zajímala pravděpodobnost, že porouchaný automobil má skrytou vadu; atd.

5 Vlastnosti pravděpodobnosti

Máme dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. $P(\emptyset) = 0$
2. pro neslučitelné náhodné jevy $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ platí $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $P(A) \leq 1$ pro $\forall A \in \mathcal{A}$
5. jestliže náhodný jev A implikuje náhodný jev B $(A \subset B)$, potom platí $P(A) \leq P(B)$
6. jestliže $A \subset B$, potom platí $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
7. pro jakékoliv náhodné jevy A, B platí $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
8. pro jakékoliv náhodné jevy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
9. pro jakékoliv náhodné jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P\left(A_i \cap A_j\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$
Např. pro tři náhodné jevy $(n = 3)$ by to vypadalo následovně:
$P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
10. pro tuto libovolnou posloupnost náhodných jevů $A_n \subset A_{n+1}$, kde $n = 1,2, \dots$ platí
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$
Např. pro tři náhodné jevy $(n = 3)$ by to vypadalo následovně: náhodný jev A_1 by byl obsažen v náhodném jevu A_2 a ten by byl zase obsažen v náhodném jevu A_3.
11. pro tuto libovolnou posloupnost náhodných jevů $A_n \supset A_{n+1}$, kde $n = 1,2, \dots$ platí
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$
Např. pro tři náhodné jevy $(n = 3)$ by to vypadalo následovně: náhodný jev A_3 by byl obsažen v náhodném jevu A_2 a ten by byl zase obsažen v náhodném jevu A_1.
12. pro libovolnou posloupnost náhodných jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

6 Závislost a nezávislost náhodných jevů

Závislost a nezávislost náhodných jevů nám charakterizuje, jestli nastoupení jednoho jevu má nebo nemá vliv na pravděpodobnost nastoupení jiného jevu.

Závislost náhodných jevů

Náhodné jevy jsou závislé, jestliže pravděpodobnost nastoupení jednoho jevu je ovlivněna nastoupením jiného jevu. Závislost náhodných jevů charakterizujeme pomocí podmíněné pravděpodobnosti.

To znamená, jestliže jsou náhodné jevy A a B závislé, potom je pravděpodobnost nastoupení jevu A podmíněná jevem B jiná než nepodmíněná pravděpodobnost jevu A a opačně pravděpodobnost nastoupení jevu B podmíněná jevem A je jiná než nepodmíněná pravděpodobnost jevu B.

$$P(A|B) \neq P(A) \qquad a\ opačně \qquad P(B|A) \neq P(B)$$

Ačkoli jsou podmíněné pravděpodobnosti jiné než nepodmíněné, z pohledu příčinnosti bývá obvykle jeden z jevů ovlivňován druhým a nikoli opačně. Pomocí teorie pravděpodobnosti jsem schopni odhalit závislost mezi náhodnými jevy. Nedokážeme však určit, který jev je příčinou a který následkem. To musíme určit logicky z podstaty jevů, což v některých případech není možné, jelikož jsou jevy vzájemně propojeny.

Nezávislost náhodných jevů

Nezávislost náhodných jevů je přímým opakem závislosti. Náhodné jevy jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost nastoupení jednoho jevu není ovlivněna nastoupením jiného jevu.

Máme-li dva nezávislé náhodné jevy, potom platí, že podmíněná pravděpodobnost těchto jevů musí být stejná jako nepodmíněná. To znamená, jestliže jsou náhodné jevy A a B nezávislé, potom je pravděpodobnost nastoupení jevu A podmíněná jevem B stejná jako nepodmíněná pravděpodobnost jevu A a opačně pravděpodobnost nastoupení jevu B podmíněná jevem A je stejná jako nepodmíněná pravděpodobnost jevu B.

$$P(A|B) = P(A) \qquad kde\ P(A) > 0 \qquad a\ opačně \qquad P(B|A) = P(B) \qquad kde\ P(B) > 0$$

Vidíme, že v prvním případě nastoupení jevu B nezměnilo pravděpodobnost nastoupení jevu A a říkáme, že jev A je na jevu B nezávislý, a ve druhém případě nastoupení jevu A nezměnilo pravděpodobnost nastoupení jevu B a říkáme, že jev B je na jevu A nezávislý. Pokud toto platí současně, nazýváme náhodné jevy A a B vzájemně nezávislé nebo jen nezávislé.

Použijeme-li větu o násobení pravděpodobností u podmíněné pravděpodobnosti pro nezávislé náhodné jevy A a B, dostaneme vzorec, pomocí kterého budeme zjišťovat nezávislost náhodných jevů a ten je:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) = P(B) * P(A|B) = P(A) * P(B)$$

Náhodné jevy A a B jsou tedy nezávislé právě tehdy, pokud platí:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Tento vzorec můžeme rozšířit i pro konečnou $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nebo nekonečnou $\{A_1, A_2, \dots\}$ posloupnost nezávislých náhodných jevů. Náhodné jevy z libovolné posloupnosti se nazývají nezávislé, jestliže pro jakoukoliv vybranou skupinu náhodných jevů z této posloupnosti platí, že pravděpodobnost jejich průniku je rovna součinu jejich pravděpodobností. Tedy:

$$P\left(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}\right) = P\left(A_{j_1}\right) * \dots * P\left(A_{j_k}\right) \qquad pro\ \forall k \geq 2; j \in n\ \ nebo\ \ j \in \infty$$

Je zřejmé, že pokud máme nějakou posloupnost nezávislých náhodných jevů, tak potom každá její podposloupnost (množina jevů z ní vybraná) obsahuje jen nezávislé náhodné jevy. Nahradíme-li rovněž náhodné jevy z takové podposloupnosti jejich doplňky, dostaneme opět podposloupnost jen s nezávislými náhodnými jevy.

Vlastnosti nezávislosti náhodných jevů

1. pokud jsou náhodné jevy A a B nezávislé, jsou nezávislé i dvojice jevů A, B^c resp. A^c, B resp. A^c, B^c
2. pro libovolný náhodný jev A platí, že dvojice Ω, A je nezávislá a $\emptyset, A$ je nezávislá
3. neslučitelné náhodné jevy A a B jsou nezávislé právě, když $P(A) * P(B) = 0$
4. neslučitelné náhodné jevy jsou nezávislé právě tehdy, když mají všechny nulové pravděpodobnosti
5. jestliže $P(B) \in (0,1)$, pak jsou náhodné jevy A a B nezávislé právě tehdy, když $P(A|B) = P(A|B^c)$
6. pro posloupnost nezávislých náhodných jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - P(A_j)\right)$$

Nezávislá opakování pokusu - Bernoulliovo schéma

Pokud opakujeme nezávisle na sobě pokusy, jejichž výsledkem je buď úspěch s pravděpodobností $p \in (0,1)$, anebo neúspěch s pravděpodobností $q = 1 - p$, dostaneme tzv. Bernoulliovo schéma, kde se pravděpodobnost k úspěchů v n nezávislých pokusech vypočítá jako $P(A) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$. Bernoulliovo schéma je tedy $\binom{n}{k}$ posloupností, kde je k úspěchů a $n - k$ neúspěchů. Každá takováto posloupnost se vyskytuje s pravděpodobností $p^k * q^{n-k}$.

Pomocí Bernoulliova schématu můžeme počítat například tyto typy příkladů: nezávisle na sobě házíme kostkou a máme zjistit pravděpodobnost, že z 20 hodů padne šestka právě třikrát; nebo student spočítá příklad s pravděpodobností $0{,}7$ a máme zjistit, s jakou pravděpodobností spočítá v testu s deseti příklady aspoň osm z nich.

Informace ke druhé až šesté kapitole byly čerpány z materiálů [3-9], kde se můžete dozvědět i další doplňující informace a podrobnější vysvětlení.

Příkladová část

7 Příklady a jejich řešení

V této kapitole si ukážeme příklady a jejich řešení na náhodný jev a jeho pravděpodobnost. Příklady jsem se snažil řadit tak, jak jsme se postupně seznamovali s teorií a novými pojmy. Samozřejmě také od jednodušších příkladů ke složitějším, abychom se snáze naučili pracovat s těmito pojmy a mohli co nejvíce vidět a uvědomit si rozsah využití nově nabitých znalostí. Bohužel ne každý příklad se dal přesně zařadit vzhledem k úzké provázanosti kapitol, ale doufám, že po důkladném nastudování teoretické části nyní sami hned poznáte, k čemu se daný příklad vztahuje. Ve snaze co nejvíce zpřehlednit postup a řešení příkladů, začíná každý příklad na nové stránce. Pokud je výsledek zaokrouhlen, je tomu tak na čtyři desetinná místa. Zadání příkladů jsem buď sám vymyslel, nebo použil ze zdrojů [11-14].

Příklad 7.1: Mějme náhodný pokus:

a) hod kostkou,

b) vytažení karty z balíčku karet,

c) výběr osoby ze skupiny dvaceti mužů i žen od 20 do 40 let,

d) padnutí čísla na ruletě,

e) hod mincí.

Určete množinu všech možných výsledků Ω. Ke každému náhodnému pokusu vymyslete aspoň dva náhodné jevy.

Řešení:

a) hod kostkou

Pokud házíme kostkou, může nám padnout jedno číslo z těchto: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Čísel je šest, jsou pro nás množinou všech možných výsledků Ω a zapíšeme ji takto: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pokud jde o náhodné jevy, můžeme mít např. náhodný jev A, padne číslo větší než čtyři, tedy $A = \{5; 6\}$, nebo náhodný jev B, padne liché číslo, tedy $B = \{1; 3; 5\}$.

b) vytažení karty z balíčku karet

V balíčku karet máme čtyři druhy hracích znaků a to srdce, káry, piky a kříže. Každý znak má 13 karet od dvojky po eso. Každou kartu si označíme počátečním prvním písmenem znaku a číslem nebo symbolem karty, takže např. srdcovou dvojku si označíme jako $S2$ a kárové eso jako KE. Protože káry a kříže mají stejné počáteční písmeno, budeme značit kříže R. Dohromady máme 52 karet a to je množinou všech možných výsledků Ω, tedy $\Omega = \{S2; \dots; SE; K2; \dots; KE; P2; \dots; PE; R2; \dots; RE\}$.

Pokud jde o náhodné jevy, můžeme mít např. náhodný jev A, vytáhneme srdcovou kartu, tedy $A = \{S2; \dots; SE\}$, nebo náhodný jev B, vytáhneme esovou kartu, tedy $B = \{SE; KE; PE; RE\}$.

c) výběr osoby ze skupiny deseti mužů a deseti žen od 20 do 40 let

Osoby si očíslujeme vzestupně podle věku a navíc si muže označíme M a ženy Z. Ve skupině je 20 osob a to je množina všech možných výsledků Ω. Zapíšeme si ji následovně: $\Omega = \{M1; \dots; M10; Z1; \dots; Z10\}$.

Pokud jde o náhodné jevy, můžeme mít např. náhodný jev A, ze skupiny vybereme ženu, tedy $A = \{Z1; \dots; Z10\}$, nebo náhodný jev B, vybereme ženu mladší třiceti let (víme, že těch je ve skupině pět), a proto $B = \{Z1; \dots; Z5\}$.

d) padnutí čísla na ruletě

Na ruletě máme čísla od 0 do 46 a označíme si je stejnými čísly. Dohromady to je 47 čísel a ty jsou množinou všech možných výsledků Ω, kterou můžeme zapsat následovně: $\Omega = \{0; 1; 2; 3; \dots; 43; 44; 45; 46\}$.

Pokud jde o náhodné jevy, můžeme mít např. náhodný jev A, padne sudé číslo, tedy $A = \{2; 4; 6; 8; \dots; 40; 42; 44; 46\}$, nebo náhodný jev B, padne číslo dělitelné třemi, tedy $B = \{3; 6; 9; 12; \dots; 36; 39; 42; 45\}$.

e) hod mincí

Mince má dvě strany a to pannu a orla. Tyto dvě možnosti jsou množinou všech možných výsledků Ω, proto $\Omega = \{panna; orel\}$.

Pokud jde o náhodné jevy, můžeme mít např. náhodný jev A, padne orel, tedy $A = \{orel\}$, nebo náhodný jev B, padne panna, tedy $B = \{panna\}$.

Příklad 7.2: Mějme náhodný pokus hod dvěma mincemi. Určete množinu všech možných výsledků Ω a náhodný jev A, že ze 3 hodů padl orel na první minci právě třikrát.

Řešení:

Každá mince má dvě strany a to pannu a orla. Při jednom hodu dvěma mincemi mohou nastat čtyři možnosti: $panna, orel$; $panna, panna$; $orel, panna$; $orel, orel$. Protože házíme třikrát, bude množina všech možných výsledků Ω jejich kartézský součin, tedy: $\Omega =$

$= \{(P,O); (P,P); (O,P); (O,O)\}x\{(P,O); (P,P); (O,P); (O,O)\}x\{(P,O); (P,P); (O,P); (O,O)\}$

Náhodný jev A, že na první minci padl orel ze 3 hodů právě třikrát, může nastat v těchto případech:

a) na druhé minci padl vždy orel - $(O,O); (O,O); (O,O)$
b) na druhé minci padla vždy panna - $(O,P); (O,P); (O,P)$
c) na druhé minci padl orel v jednom z tří hodů příznivých jevu A
   $(O,O); (O,P); (O,P)$
   $(O,P); (O,O); (O,P)$
   $(O,P); (O,P); (O,O)$
d) na druhé minci padla panna v jednom z tří hodů příznivých jevu A
   $(O,P); (O,O); (O,O)$
   $(O,O); (O,P); (O,O)$
   $(O,O); (O,O); (O,P)$

Všech těchto osm možností tvoří jev A, tedy:

$$A = \left\{ \begin{matrix} [(O,O);\ (O,O);\ (O,O)]; [(O,P);\ (O,P);\ (O,P)]; [(O,O);\ (O,P);\ (O,P)]; \\ [(O,P);\ (O,O);\ (O,P)]; [(O,P);\ (O,P);\ (O,O)]; [(O,P);\ (O,O);\ (O,O)]; \\ [(O,O);\ (O,P);\ (O,O)]; [(O,O);\ (O,O);\ (O,P)] \end{matrix} \right\}$$

Příklad 7.3: Házíme dvěma kostkami. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že:

a) padne na dvou kostkách součet 6,

b) padne na dvou kostkách součet menší než 7,

c) padne-li na 1. kostce dvojka, padne součet větší než 6,

d) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.

Řešení:

Musíme rozlišovat, na jaké kostce která hodnota padla, proto si je označíme třeba jako 1. kostka a 2. kostka. Využijeme zde klasickou pravděpodobnost, kde m bude počet možností pro daný součet a n bude počet všech možných výsledků při hodu dvěma hracími kostkami. To je součin $6 * 6 = 36$, protože na každé kostce může padnout 6 možných hodnot.

a) padne na dvou kostkách součet 6

Označíme si A náhodný jev, že na kostkách padne součet 6, a názorně si zobrazíme, ve kterých případech může nastat.

kostka	součet 6				
1.	1	2	3	4	5
2.	5	4	3	2	1
	celkem 5 možností				

Nyní už můžeme použít vzorec pro klasickou pravděpodobnost, kde m je počet možností součtu 6, tedy $m = 5$, a pravděpodobnost vypočítat.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36} = 0{,}13\overline{8}$$

Pravděpodobnost, že padne na dvou kostkách součet 6, je rovna $0{,}13\overline{8}$.

b) padne na dvou kostkách součet menší než 7

Označíme si B náhodný jev, že na kostkách padne součet menší než 7, a názorně si zobrazíme, ve kterých případech může nastat.

kostka	součet 6						5					4				3			2
1.	1	2	3	4	5		1	2	3	4		1	2	3		1	2		1
2.	5	4	3	2	1		4	3	2	1		3	2	1		2	1		1
	celkem 15 možností																		

Nyní už můžeme použít vzorec pro klasickou pravděpodobnost, kde m je počet možností součtu menšího než 7, tedy $m = 15$, a pravděpodobnost vypočítat.

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{15}{36} = 0{,}41\overline{6}$$

Pravděpodobnost, že padne na dvou kostkách součet menší než 7, je rovna $0{,}41\overline{6}$.

c) padne-li na 1. kostce dvojka, padne součet větší než 6

Označíme si C náhodný jev, že padne součet větší než 6, když na 1. kostce padla dvojka. Celou situaci si názorně zobrazíme.

kostka	na 1. kostce padla 2						
1.	2	2	2	2		2	2
2.	1	2	3	4		5	6

Nyní už můžeme použít vzorec pro klasickou pravděpodobnost, kde m je počet možností součtu většího než 6, tedy $m = 2$, a počet všech možností součtů, když na 1. kostce padla dvojka, je $n = 6$. Tedy:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Pravděpodobnost, že padne součet větší než 6, když na 1. kostce padne dvojka, je $0,\overline{3}$.

Nebo to můžeme řešit také přes podmíněnou pravděpodobnost následovně:
Označme si E náhodný jev, že na 1. kostce padne dvojka, a F náhodný jev, že padne součet větší než 6. Potom hledanou pravděpodobnost vypočítáme jako:

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$P(F \cap E)$ je rovna $\frac{2}{36}$, protože za podmínky, že na 1. kostce padla 2, může být součet větší než 6 jen ve 2 možnostech ze všech 36 možných. $P(E)$ je rovno $\frac{6}{36}$, protože na 1. kostce může padnout 2 právě v 6 možnostech ze všech 36 možných.

d) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8
Označíme si D náhodný jev, že součet je větší než 8, když na 1. kostce padlo sudé číslo. Celou situaci si názorně zobrazíme.

kostky	1. kostka padla 2							1. kostka padla 4							1. kostka padla 6					
1.	2	2	2	2	2	2		4	4	4	4	4	4		6	6	6	6	6	6
2.	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
	dohromady 18 možností, co může padnout																			

Součet větší než 8 může nastat ale pouze v těchto případech:

kostky							
1.	4	4		6	6	6	6
2.	5	6		3	4	5	6
	dohromady 6 možností						

Nyní už můžeme použít vzorec pro klasickou pravděpodobnost, kde m je počet možností součtu většího než 8, tedy $m = 6$, a počet všech možností součtů, když na 1. kostce padne sudé číslo, je $n = 18$. Tedy:

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Pravděpodobnost, že padne součet větší než 8, když na 1. kostce padne sudé číslo, se rovná $0,\overline{3}$.

Nebo to můžeme řešit také přes podmíněnou pravděpodobnost následovně:
Označme si G náhodný jev, že na 1. kostce padlo sudé číslo, a H náhodný jev, že padne součet větší než 8. Potom hledanou pravděpodobnost vypočítáme jako:

$$P(H|G) = \frac{P(H \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$P(H \cap G)$ je rovno $\frac{6}{36}$, protože za podmínky, že na 1. kostce padlo sudé číslo, může být součet větší než 8 jen v 6 možnostech ze všech 36 možných. $P(G)$ je rovno $\frac{18}{36}$, protože na 1. kostce může padnout sudé číslo právě z poloviny všech 36 možných možností.

Příklad 7.4: Házíme současně dvěma hracími kostkami a sčítáme padnuté hodnoty. Který ze součtů 7 nebo 8 je pravděpodobnější?

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že na kostkách padnul součet 7, a B náhodný jev, že na kostkách padnul součet 8. Musíme rozlišovat padlé hodnoty na hracích kostkách, takže si kostky označíme třeba jako červená a modrá. Nyní si názorně graficky zobrazíme, v jakých případech může nastat součet 7 a součet 8 na hracích kostkách.

kostka	součet 7					
modrá	1	2	3	4	5	6
červená	6	5	4	3	2	1
	celkem 6 možností					

kostka	součet 8				
modrá	2	3	4	5	6
červená	6	5	4	3	2
	celkem 5 možností				

V této chvíli už vidíme, že součet 7 může padnout ve více případech než součet 8, takže bude logicky pravděpodobnější. Ještě si spočítáme pravděpodobnosti náhodných jevů A a B. K tomu využijeme klasickou pravděpodobnost, kde m bude počet možností pro daný součet a n bude počet všech možných výsledků při hodu dvěma hracími kostkami. To je součin $6 * 6 = 36$, protože na každé kostce může padnout 6 možných hodnot. Teď už jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \qquad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36} = 0{,}13\overline{8}$$

Vidíme, že pravděpodobnější je součet 7.

Příklad 7.5: Kruhový terč má 3 pásma. Pravděpodobnost zásahu prvního pásma je 0,2, druhého 0,23 a třetího 0,15. Jaká je pravděpodobnost minutí cíle?

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že trefíme cíl. Pravděpodobnost, že vůbec zasáhneme terč, je součtem pravděpodobností zásahu jednotlivých pásem, $P(A) = 0{,}2 + 0{,}23 + 0{,}15 = 0{,}58$. Pravděpodobnost minutí cíle je potom vlastně doplňkem k jevu A, tedy $P(A^c)$.

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$$

Pravděpodobnost minutí cíle je 0,42.

Příklad 7.6: Studenti se ve škole učí tři cizí jazyky a to angličtinu, němčinu a francouzštinu. Každý student ze třídy chodí do některého jazyku. Anglický jazyk navštěvuje 18 studentů, německý 19 a francouzský 16 studentů. Do anglického i německého jazyku chodí 12 studentů, do anglického i francouzského 9 a do německého i francouzského jazyku chodí 8 studentů. Všechny tři jazyky se učí současně 5 studentů. Kolik studentů je ve třídě? Poté určete pravděpodobnost, že:

a) náhodě vybraný student se učí anglicky,

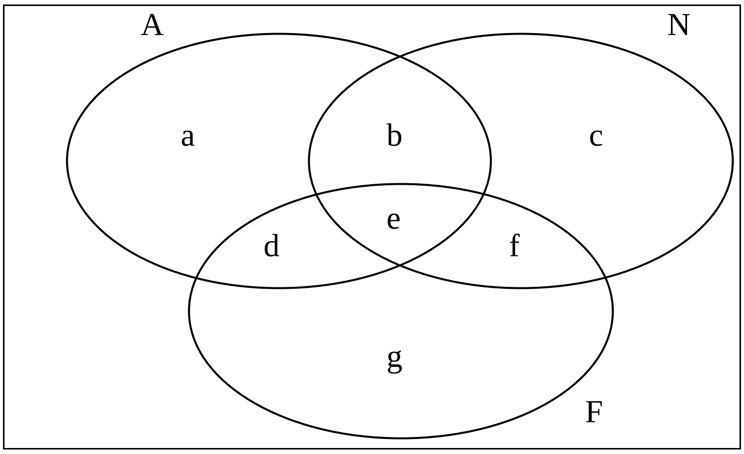
b) náhodě vybraný student se učí pouze anglicky,

c) náhodě vybraný student se učí anglicky a německy,

d) náhodě vybraný student se učí pouze anglicky a německy.

Řešení:

Označme si jev A, že student navštěvuje anglický jazyk, jev N, že student navštěvuje německý jazyk, a jev F, že student navštěvuje francouzský jazyk. Také si označme jev P, počet studentů chodících do třídy. Nejprve si zadání můžeme graficky znázornit:



Víme, že všechny tři jazyky se učí současně 5 studentů, to znamená, že $e = 5$.

Do anglického i německého jazyku chodí 12 studentů, tedy $b + e = 12$, a proto $b = 7$.

Do anglického i francouzského jazyku chodí 9 studentů, tedy $d + e = 9$, a proto $d = 4$.

Do německého i francouzského jazyku chodí 8 studentů, tedy $e + f = 8$, a proto $f = 3$.

Anglický jazyk navštěvuje 18 studentů, tedy $A = a + b + d + e = 18$, a proto $a = 2$.

Německý jazyk navštěvuje 19 studentů, tedy $N = b + c + e + f = 19$, a proto $c = 4$.

Francouzský jazyk navštěvuje 16 studentů, tedy $F = d + e + f + g = 16$, a proto $g = 4$.

Počet studentů chodících do třídy vypočítáme takto:

$P = a + b + c + d + e + f + g = 2 + 7 + 4 + 4 + 5 + 3 + 4 = 29$

Nebo také $P = (A \cup N \cup F) - (A \cap N) - (A \cap F) - (N \cap F) + (A \cap N \cap F) =$
$= (18 + 19 + 16) - (b + e) - (d + e) - (e + f) + e = 53 - 12 - 9 - 8 + 5 = 29.$

Do třídy chodí 29 studentů.

a) náhodě vybraný student se učí anglicky

Označme si B náhodný jev, že vybraný student se učí anglicky. Víme, že anglicky se učí 18 studentů ze všech 29. Použijeme klasickou pravděpodobnost, kde m bude počet studentů učících se anglicky a n bude počet všech studentů chodících do třídy.

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{18}{29} \cong 0{,}6207$$

Pravděpodobnost, že náhodě vybraný student se učí anglicky, se rovná 0,6207.

b) náhodě vybraný student se učí pouze anglicky

Označme si C náhodný jev, že vybraný student se učí pouze anglicky. Pouze anglicky se učí $a = 2$ studentů. Použijeme klasickou pravděpodobnost, kde m bude počet studentů učících se pouze anglicky a n bude počet všech studentů chodících do třídy.

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{2}{29} \cong 0{,}069$$

Pravděpodobnost, že náhodě vybraný student se učí pouze anglicky, se rovná 0,069.

c) náhodě vybraný student se učí anglicky a německy

Označme si D náhodný jev, že vybraný student se učí anglicky a německy. Anglicky a německy se učí $a + b + c + d + e + f = 25$ studentů. Použijeme klasickou pravděpodobnost, kde m bude počet studentů učících se anglicky a německy a n bude počet všech studentů chodících do třídy.

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{25}{29} \cong 0{,}8621$$

Pravděpodobnost, že náhodě vybraný student se učí anglicky a německy, se rovná $0{,}8621$.

d) náhodě vybraný student se učí pouze anglicky a německy

Označme si E náhodný jev, že vybraný student se učí pouze anglicky a německy. Pouze anglicky a německy se učí $a + b + c = 13$ studentů. Použijeme klasickou pravděpodobnost, kde m bude počet studentů učících se pouze anglicky a německy a n bude počet všech studentů chodících do třídy.

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{13}{29} \cong 0{,}4483$$

Pravděpodobnost, že náhodě vybraný student se učí pouze anglicky a německy, se rovná $0{,}4483$.

Příklad 7.7: Na osmi stejných kartičkách jsou napsána po řadě čísla $2, 4, 6, 7, 8, 11, 12$ a 13. Náhodně vezmeme dvě kartičky. Určete pravděpodobnost, že zlomek utvořený z těchto dvou čísel lze krátit.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že zlomek vytvořený ze dvou náhodně vytažených čísel lze krátit. Máme zadáno 8 čísel, z toho je 5 čísel, která jdou mezi sebou krátit, a to $2, 4, 6, 8, 12$. Kdyby se totiž kdekoliv ve zlomku objevily čísla $7, 11, 13$, nemůžeme je s ničím krátit. Využijeme zde klasickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet variací vytažení 2 čísel z 5, které jdou mezi sebou krátit, tedy $V(2,5)$, a n je počet všech variací vytažení 2 čísel ze všech 8 čísel, tedy $V(2,8)$. Variace zde používáme proto, že nám záleží na pořadí. Je totiž rozdíl mezi zlomkem například $\frac{2}{4}$ a $\frac{4}{2}$. Nyní už můžeme dosadit do vzorce a počítat.

$$P(A) = \frac{V(2,5)}{V(2,8)} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!}}{\frac{8!}{(8-2)!}} = \frac{5}{14} \cong 0,3571$$

Pravděpodobnost, že zlomek utvořený z těchto dvou čísel lze krátit, se rovná $0,3571$.

Příklad 7.8: Z deseti výrobků jsou dva vadné. Náhodně vybereme dva výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky je vadný žádný, jeden, dva?

Řešení:

Ze zadání víme, že máme 10 výrobků, z toho 2 vadné a 8 bez vady. Využijeme zde klasickou pravděpodobnost a kombinační číslo.

a) žádný vadný

Označme si A náhodný jev, že vybraný výrobek není vadný. Znamená to tedy, že jsme museli náhodně vybrat 0 výrobků ze 2 vadných a současně 2 výrobky z 8 bez vady. Vyjádřeno kombinačním číslem $\binom{2}{0}$ a současně $\binom{8}{2}$. To je pro nás také m. Počet všech možných způsobů náhodného vytažení 2 výrobků ze všech 10 výrobků je pro nás n, tedy $\binom{10}{2}$. Nyní můžeme dosadit do vzorce a vypočítat.

$$P(A) = \frac{\binom{2}{0} * \binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1! * \frac{8!}{2! * (8-2)!}}{\frac{10!}{2! * (10-2)!}} = \frac{\frac{8!}{2! * 6!}}{\frac{10!}{2! * 8!}} = \frac{28}{45} = 0{,}6\overline{2}$$

Pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky není žádný vadný, se rovná $0{,}6\overline{2}$.

b) jeden vadný

Označme si B náhodný jev, že jeden vybraný výrobek je vadný a druhý vadný není. Museli jsme náhodně vybrat 1 výrobek ze 2 vadných a současně 1 výrobek z 8 bez vady. Vyjádřeno kombinačním číslem $\binom{2}{1}$ a současně $\binom{8}{1}$ a to je pro nás m. Počet všech možných způsobů náhodného vytažení 2 výrobků ze všech 10 výrobků si označíme n, tedy $\binom{10}{2}$. Nyní dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1} * \binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{2! * 8!}{7!}}{\frac{10!}{2! * 8!}} = \frac{16}{45} = 0{,}3\overline{5}$$

Pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky je jeden vadný, se rovná $0{,}3\overline{5}$.

c) dva vadné

Označme si C náhodný jev, že oba vybrané výrobky jsou vadné. Museli jsme náhodně vybrat 2 výrobky ze 2 vadných a současně 0 výrobků z 8 bez vady. Vyjádřeno kombinačním číslem $\binom{2}{2}$ a současně $\binom{8}{0}$ a to je pro nás m. Počet všech možných způsobů náhodného vytažení 2 výrobků ze všech 10 výrobků je n, tedy $\binom{10}{2}$. Opět už jen dosadíme do vzorce a počítáme.

$$P(C) = \frac{\binom{2}{2} * \binom{8}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1! * 1!}{\frac{10!}{2! * 8!}} = \frac{1}{45} = 0{,}0\overline{2}$$

Pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky jsou dva vadné, se rovná $0{,}0\overline{2}$.

Příklad 7.9: V zásilce je 250 výrobků, mezi kterými je 30 vadných. Vytáhneme 15 výrobků, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Určete pravděpodobnost, že mezi 15 vybranými výrobky bude 10 dobrých. Jak se změní tato pravděpodobnost, jestliže výrobky vracíme zpět?

Řešení:

Víme, že ze všech 250 výrobků je 30 vadných, takže 220 výrobků je dobrých. Náhodným jevem A si označíme jev, že mezi 15 vybranými výrobky je 10 dobrých. Máme určit pravděpodobnost, že mezi 15 náhodně vybranými výrobky z 250 bude právě 10 dobrých, takže musíme vybrat z 220 dobrých výrobků 10 a současně z 30 vadných výrobků 5. Pro výpočet použijeme klasickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m bude výběr 10 výrobků z 220 dobrých a současně výběr 5 vadných výrobků z 30, tedy $\binom{220}{10} * \binom{30}{5}$. Počet všech možných výběrů 15 výrobků ze všech 250 bude n, tedy $\binom{250}{15}$. Nyní už je dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = \frac{\binom{220}{10} * \binom{30}{5}}{\binom{250}{15}} = \frac{\frac{220!}{10! * (220-10)!} * \frac{30!}{5! * (30-5)!}}{\frac{250!}{15! * (250-15)!}} \cong 0{,}0183$$

Pravděpodobnost, že mezi 15 vybranými výrobky bude 10 dobrých, je rovna $0{,}0183$.

Pokud budeme výrobky vracet zpět, musíme pracovat s kombinací s opakováním. Tedy m bude $K'(10{,}220) = \binom{220+10-1}{10} = \binom{229}{10}$ a současně $K'(5{,}30) = \binom{30+5-1}{5} = \binom{34}{5}$ a n bude $K'(15{,}250) = \binom{250+15-1}{15} = \binom{264}{15}$. Označme si B náhodný jev, že mezi 15 vybranými výrobky je 10 dobrých, přičemž výrobky vracíme zpět. Pravděpodobnost náhodného jevu B se pak vypočítá jako klasická pravděpodobnost. Tedy:

$$P(B) = \frac{\binom{229}{10} * \binom{34}{5}}{\binom{264}{15}} = \frac{\frac{229!}{10! * (229-10)!} * \frac{34!}{5! * (34-5)!}}{\frac{264!}{15! * (264-15)!}} \cong 0{,}0232$$

Pravděpodobnost, že mezi 15 vybranými výrobky bude 10 dobrých, přičemž výrobky vracíme zpět, je rovna $0{,}0232$. Pravděpodobnost se nám tedy zvýší.

Příklad 7.10: Ve dvou urnách jsou koule, které se od sebe liší pouze barvou. V první urně je 5 bílých koulí, 11 černých a 8 zelených. V druhé urně je 10 bílých, 8 černých a 6 zelených koulí. Z obou uren se náhodně táhne po jedné kouli. Jaká je pravděpodobnost, že obě koule jsou stejné barvy?

Řešení:
Označme si A náhodný jev, že obě náhodně vytažené koule budou stejné barvy. Nejprve si zadání názorně zobrazíme.

	bílé	černé	zelené	
1. urna	5	11	8	dohromady 24 koulí
2. urna	10	8	6	dohromady 24 koulí

Koule mají být stejné barvy, takže buď mohou být obě vytažené koule bílé, černé, anebo zelené. Celková pravděpodobnost tedy bude součtem pravděpodobností těchto variant. Pro výpočet použijeme klasickou pravděpodobnost. Počítáme pravděpodobnost, že z 1. i 2. urny jsme vytáhli pouze bílou kouli nebo pouze černou nebo pouze zelenou. Pro bílou kouli to bude u 1. urny vytažení 1 bílé z 5, 0 černých z 11 a 0 zelených z 8. Vybírali jsme 1 kouli ze všech 24. Současně u 2. urny jsme museli vytáhnout také 1 bílou z 10, 0 černých z 8 a 0 zelených z 6. Opět jsme vybírali 1 kouli ze všech 24. Pro každou barvu bude postup stejný a výpočet bude vypadat následovně:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} * \binom{11}{0} * \binom{8}{0}}{\binom{24}{1}} * \frac{\binom{10}{1} * \binom{8}{0} * \binom{6}{0}}{\binom{24}{1}} + \frac{\binom{5}{0} * \binom{11}{1} * \binom{8}{0}}{\binom{24}{1}} * \frac{\binom{10}{0} * \binom{8}{1} * \binom{6}{0}}{\binom{24}{1}} +$$

$$+ \frac{\binom{5}{0} * \binom{11}{0} * \binom{8}{1}}{\binom{24}{1}} * \frac{\binom{10}{0} * \binom{8}{0} * \binom{6}{1}}{\binom{24}{1}} = \frac{5}{24} * \frac{10}{24} + \frac{11}{24} * \frac{8}{24} + \frac{8}{24} * \frac{6}{24} \cong 0{,}3229$$

Pravděpodobnost, že obě koule jsou stejné barvy, je rovna 0,3229.

Příklad 7.11: Mějme pět vstupenek po jedné koruně, tři vstupenky po třech korunách, dvě vstupenky po pěti korunách a pět vstupenek po deseti korunách. Vyberme náhodně čtyři vstupenky. Určete pravděpodobnost, že:

a) aspoň tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu,

b) právě tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu,

c) všechny čtyři vstupenky stojí dohromady patnáct korun.

Řešení:

Využijeme zde klasickou pravděpodobnost. Nejprve si však zadání graficky znázorníme:

cena	1 Kč	3 Kč	5 Kč	10 Kč	
počet	5	3	2	5	celkem 15

a) aspoň tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu

Označme si A náhodný jev, že aspoň 3 vstupenky mají stejnou hodnotu. Pravděpodobnost vypočítáme tak, že spočítáme pravděpodobnost všech možností, které mohou nastat, a sečteme je.

cena	počet vstupenek = 4										
1Kč - 5ks	3	3	3	4	1	0	0	1	0	0	0
3Kč - 3ks	1	0	0	0	3	3	3	0	1	0	0
5Kč - 2ks	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
10Kč - 5ks	0	0	1	0	0	0	1	3	3	3	4

Výpočet vypadá následovně:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3} * \binom{3}{1}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{3} * \binom{2}{1}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{3} * \binom{5}{1}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{1} * \binom{3}{3}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{3}{3} * \binom{2}{1}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{3}{3} * \binom{5}{1}}{\binom{15}{4}} +$$

$$+ \frac{\binom{5}{1} * \binom{5}{3}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{3}{1} * \binom{5}{3}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{2}{1} * \binom{5}{3}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} =$$

$$= \frac{30 + 20 + 50 + 5 + 5 + 2 + 5 + 50 + 30 + 20 + 5}{1365} = \frac{222}{1365} \cong 0{,}1626$$

Pravděpodobnost, že aspoň tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu, je 0,1626.

b) právě tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu

Označme si B náhodný jev, že právě tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu. Už víme, jaká je pravděpodobnost, že aspoň tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu. Nyní nám stačí od této pravděpodobnosti odečíst pravděpodobnosti, kdy všechny čtyři vstupenky mají stejnou hodnotu (to je v případě, kdy všechny čtyři vstupenky stojí buď 1 Kč, nebo 10 Kč). Zůstane nám tak pravděpodobnost, kterou hledáme. Tedy:

$$P(B) = P(A) - 2 * \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} = \frac{222}{1365} - \frac{2 * 5}{1365} = \frac{212}{1365} \cong 0{,}1553$$

Pravděpodobnost, že právě tři z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu, je $0{,}1553$.

c) všechny čtyři vstupenky stojí dohromady patnáct korun

Označme si C náhodný jev, že všechny 4 vstupenky stojí dohromady 15 Kč. Nejprve si znázorníme do tabulky všechny možnosti pro libovolný počet vstupenek, které budou stát dohromady 15 Kč. Ty jsou následující:

cena	počet vstupenek						
1Kč - 5ks	0	2	5	4	1	2	5
3Kč - 3ks	0	1	0	2	3	1	0
5Kč - 2ks	1	0	0	1	1	2	2
10Kč - 5ks	1	1	1	0	0	0	0
počet ks	2	4	6	7	5	5	7

Z tabulky vidíme, že situace, kdy budou všechny 4 vstupenky stát dohromady 15 Kč, je jen v jednom případě a to, když vybereme 2 vstupenky po 1 Kč z 5, 1 vstupenku po 3 Kč ze 3, 1 vstupenku po 10 Kč z 5 a současně žádnou vstupenku po 5 Kč ze 2. Celkem vybíráme 4 vstupenky z 15. Využijeme klasické pravděpodobnosti a vypočítáme.

$$P(C) = \frac{\binom{5}{2} * \binom{3}{1} * \binom{2}{0} * \binom{5}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{5!}{2! * 3!} * \frac{3!}{1! * 2!} * 1! * \frac{5!}{1! * 4!}}{\frac{10!}{4! * 6!}} = \frac{5}{7} \cong 0{,}7143$$

Pravděpodobnost, že všechny tři vstupenky stojí dohromady sedm korun, je $0{,}7143$.

Příklad 7.12: Máme 4 krabice. V první jsou 3 bílé a 2 černé koule, ve druhé jsou 2 bílé a 2 černé koule, ve třetí je 1 bílá a 4 černé koule, ve čtvrté 5 bílých a 1 černá koule. Náhodně vybereme jednu krabici a vytáhneme 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že kulička je bílá?

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že vybraná kulička je bílá. Nejprve si zadání názorně zobrazíme do tabulky:

koule	1. krabice	2. krabice	3. krabice	4. krabice
bílé	3	2	1	5
černé	2	2	4	1
celkem	5	4	5	6

Pravděpodobnost náhodného výběru krabice je $p = \frac{1}{4}$, protože jsou 4 krabice a nijak se neliší. Využijeme klasickou pravděpodobnost. Z každé krabice budeme vybírat jen jednu kouli a to bílou. Pravděpodobnost výběru bílé koule z 1. krabice je zlomek, kde v čitateli je $\binom{3}{1} * \binom{2}{0}$ a ve jmenovateli $\binom{5}{1}$, protože vybíráme 1 bílou ze 3 a současně žádnou černou ze 2. Celkem pak vybíráme 1 kouli z 5. Obdobně budeme pokračovat i u dalších krabic. Součet pravděpodobností těchto výběrů vynásobený $p = \frac{1}{4}$ bude hledaná pravděpodobnost a vypočítá se následovně:

$$P(A) = \frac{1}{4} * \left[\frac{\binom{3}{1} * \binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{2}{1} * \binom{2}{0}}{\binom{4}{1}} + \frac{\binom{1}{1} * \binom{4}{0}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{5}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{6}{1}}\right] = \frac{1}{4} * \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{6}\right] = 0{,}5\overline{3}$$

Pravděpodobnost, že z náhodně vybrané krabice vytáhneme 1 bílou kuličku, je rovna $0{,}5\overline{3}$.

Příklad 7.13: Do výtahu v sedmipodlažním domě nastoupili v 1. podlaží tři lidé. Každý z nich se stejnou pravděpodobností může vystoupit v libovolném podlaží počínaje druhým. Najděte pravděpodobnost následujících jevů:

a) A - všichni cestující vystoupí ve čtvrtém podlaží,

b) B - všichni cestující vystoupí současně,

c) C - aspoň dva cestující vystoupí v různých podlažích.

Řešení:

Nejdříve si graficky znázorníme zadání:

podlaží	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

a) náhodný jev A - všichni cestující vystoupí ve čtvrtém podlaží

Nezáleží, jestli by museli vystoupit ve čtvrtém, druhém nebo pátém podlaží, ale podstatné je to, že všichni musí vystoupit současně v jednom konkrétním podlaží ze všech šesti možných podlaží. Tedy p_1 si označíme pravděpodobnost, že první cestující vystoupí ve čtvrtém podlaží, a je rovna $\frac{1}{6}$. Obdobně $p_2 = \frac{1}{6}$ a $p_3 = \frac{1}{6}$. Pravděpodobnost $P(A)$ se pak vypočítá jako součin těchto pravděpodobností, protože cestující musí vystoupit současně. Tedy:

$$P(A) = p_1 * p_2 * p_3 = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \cong 0{,}0046$$

Pravděpodobnost, že všichni cestující vystoupí ve čtvrtém podlaží, je rovna $0{,}0046$.

b) náhodný jev B - všichni cestující vystoupí současně

Všichni cestující musí vystoupit současně, ale mohou to udělat v kterémkoliv ze šesti možných podlaží. Stačí nám, když předchozí pravděpodobnost vynásobíme 6, protože to značí 6 možných pater výstupu. Takže:

$$P(B) = 6 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}02\overline{7}$$

Pravděpodobnost, že všichni cestující vystoupí současně, je rovna $0{,}02\overline{7}$.

c) náhodný jev C - aspoň dva cestující vystoupí v různých podlažích

Abychom nemuseli počítat všechny možné varianty, využijeme vlastnosti pravděpodobnosti a $P(C)$ vypočítáme jako $P(C) = 1 - P(C^c)$, kde $P(C^c)$ bude pravděpodobnost, že všichni vystoupí současně v kterémkoliv podlaží (tedy vlastně $P(C^c) = P(B)$).

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} = 0{,}97\overline{2}$$

Pravděpodobnost, že aspoň dva cestující vystoupí v různých podlažích, je rovna $0{,}97\overline{2}$.

Příklad 7.14: Tři střelci střílí na terč. Terč zasáhnou s pravděpodobností: 0,2; 0,4; 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že terč zasáhnou:

a) všichni,

b) právě dva,

c) nejvýše jeden,

d) aspoň jeden.

Řešení:

Nejprve si určíme a označíme náhodné jevy. Náhodnými jevy v tomto příkladu pro nás budou zásahy terče střelci. Tedy náhodný jev A bude, že terč zasáhne první střelec, náhodný jev B bude, že terč zasáhne druhý střelec, a náhodný jev C bude, že terč zasáhne třetí střelec. První střelec zasáhne terč s pravděpodobností 0,2, tedy $P(A) = 0{,}2$, druhý s pravděpodobností 0,4, tedy $P(B) = 0{,}4$, a třetí s pravděpodobností 0,5, tedy $P(C) = 0{,}5$.

a) všichni střelci musí zasáhnout terč

Označme si D náhodný jev, že všichni střelci zasáhnou terč. Taková pravděpodobnost se vypočítá jako součin pravděpodobností zásahu terče všemi střelci, protože střelci musí zasáhnout terč současně. Tedy:

$$P(D) = P(A) * P(B) * P(C) = 0{,}2 * 0{,}4 * 0{,}5 = 0{,}04$$

Pravděpodobnost, že terč zasáhnou všichni střelci, je 0,04.

b) právě dva

Označme si E náhodný jev, že právě dva střelci zasáhnou terč. Uvědomme si, že terč musí zasáhnout dva střelci, ale nezáleží, kteří to budou. Tedy buď střelci A, B se trefí a střelec C se netrefí, nebo A, C se trefí a B se netrefí, nebo B, C se trefí a A se netrefí. To, že se střelec netrefí, je vlastně jevem opačným (doplňkem) k jevu, že se trefí. Značí se A^c a jeho pravděpodobnost se vypočítá $P(A^c) = 1 - P(A)$. Potom bude $P(A^c) = 0{,}8$, $P(B^c) = 0{,}6$ a $P(C^c) = 0{,}5$. Celková pravděpodobnost je součtem pravděpodobností všech možných variant zásahu terče střelci, která vyhovují zadání.

$$P(E) = P(A) * P(B) * P(C^c) + P(A) * P(B^c) * P(C) + P(A^c) * P(B) * P(C) =$$
$$= 0{,}2 * 0{,}4 * 0{,}5 + 0{,}2 * 0{,}6 * 0{,}5 + 0{,}8 * 0{,}4 * 0{,}5 = 0{,}26$$

Pravděpodobnost, že terč zasáhnou dva střelci, je 0,26.

c) nejvýše jeden

Označme si F náhodný jev, že nejvýše jeden střelec zasáhne terč. Buď se trefí pouze první, druhý nebo třetí střelec, anebo ani jeden. Opět se taková pravděpodobnost vypočítá jako součet pravděpodobností všech možných variant zásahu terče střelci, která vyhovují zadání. Tedy:

$$P(F) = P(A) * P(B^c) * P(C^c) + P(A^c) * P(B) * P(C^c) + P(A^c) * P(B^c) * P(C) +$$
$$+P(A^c) * P(B^c) * P(C^c) =$$
$$= 0{,}2 * 0{,}6 * 0{,}5 + 0{,}8 * 0{,}4 * 0{,}5 + 0{,}8 * 0{,}6 * 0{,}5 + 0{,}8 * 0{,}6 * 0{,}5 = 0{,}7$$

Pravděpodobnost, že terč zasáhne nejvýše jeden střelec, je 0,7.

d) aspoň jeden

Označme si G náhodný jev, že aspoň jeden střelec zasáhne terč. Terč tedy trefí buď první, druhý nebo třetí střelec, nebo libovolní dva střelci, anebo všichni tři. Takovou pravděpodobnost můžeme vypočítat analogicky jako doposud, takže jako součet pravděpodobností všech možností, která vyhovují zadání. Nebo si uvědomíme, že tato pravděpodobnost se vypočítá vlastně jako součet pravděpodobností všech možných variant zásahu terče střelci kromě varianty, že se ani jeden střelec netrefí. Takováto úvaha nám umožní vypočítat naši pravděpodobnost jako rozdíl pravděpodobností jistého jevu (jedná se totiž o pravděpodobnost všech variant zásahu terče střelci) a právě zmíněné varianty, kdy se ani jeden střelec netrefí do terče. Tedy:

$$P(G) = 1 - P(A^c) * P(B^c) * P(C^c) = 1 - 0{,}8 * 0{,}6 * 0{,}5 = 0{,}76$$

Pravděpodobnost, že terč zasáhne aspoň jeden střelec, je 0,76.

Příklad 7.15: V urně jsou dvě koule, bílá a černá. Provádí se výběr po jedné kouli do té doby, než se vytáhne černá koule, přičemž kdykoliv se vytáhne bílá koule, vrátí se a do urny se přidají ještě dvě bílé koule. Určete pravděpodobnost, že se při prvních padesáti tazích černá koule nevytáhne.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že v prvních padesáti tazích jsme ani jednou nevybrali černou kouli. Výběry budeme v prvních padesáti tazích provádět vlastně tak, že v každém tahu vždycky vybereme pouze jednu kouli ze všech bílých. Tedy:

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{2}{1}} * \frac{\binom{3}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{4}{1}} * \frac{\binom{5}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{7}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{8}{1}} * \frac{\binom{9}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{10}{1}} * \dots * \frac{\binom{97}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{98}{1}} * \frac{\binom{99}{1} * \binom{1}{0}}{\binom{100}{1}} =$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{5}{6} * \frac{7}{8} * \frac{9}{10} * \dots * \frac{97}{98} * \frac{99}{100}$$

Každý člen pravděpodobnosti si můžeme označit jako p_k, kde $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 49, 50$. Vidíme, že každý nadcházející člen p_{k+1} se změní oproti předcházejícímu členu p_k tak, že se hodnota v čitateli i jmenovateli zvýší o 2. Při zamyšlení se nad touto řadou si můžeme vyjádřit vzorec pro výpočet libovolného členu p_k jako $p_k = \frac{2k-1}{2k}$. Po dosazení $k = 1, 2, \dots, 50$ do jmenovatele $2k - 1$ dostaneme posloupnost lichých čísel a do čitatele $2k$ dostaneme posloupnost sudých čísel. Pravděpodobnost $P(A)$ si pak můžeme vyjádřit a vypočítat následovně:

$$P(A) = \prod_{k=1}^{50} p_k = \prod_{k=1}^{50} \frac{2k - 1}{2k} \cong 0{,}0796$$

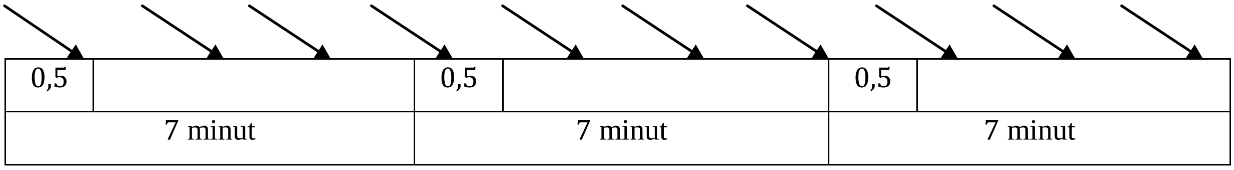
Doporučuji počítat v Microsoft Office Excel nebo nějakém matematickém programu.

Pravděpodobnost, že se při prvních padesáti tazích černá koule nevytáhne, se rovná 0,0796.

Příklad 7.16: Na zastávku místní dopravy přijíždí každých 7 minut nějaký autobus a zdrží se 0,5 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že přijdeme a zastihneme autobus na zastávce?

Řešení:

Nejprve si zadání graficky znázorníme:



Šipky znázorňují naše náhodné příchody na zastávku, na autobus nečekáme. 0,5 je doba čekání autobusu a každých 7 minut přijíždí na zastávku autobus. Z grafu je patrné, že se jedná o geometrickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde μ je doba. Náhodným jevem A si označíme zastihnutí autobusu na zastávce. Protože autobus na zastávce můžeme zastihnout jen během jeho 0,5 minutového čekání, je $\mu(A) = 0{,}5$. Ω je potom doba, po kterou mohu kdykoliv na zastávku přijít a to je 7 minut, protože po 7 minutách se situace opakuje. Proto $\mu(\Omega) = 7$. Nyní už jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{0{,}5}{7} \cong 0{,}0714$$

Pravděpodobnost, že přijdeme a zastihneme autobus na zastávce, je rovna 0,0714.

Příklad 7.17: Tyč délky 10 m je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4 m?

Řešení:

Nejprve si zadání graficky znázorníme:

4 metry				2 metry		4 metry			
				zde lámu					

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Z obrázku vidíme, že se bude jednat o geometrickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde μ je délka. A si označíme náhodný jev, že menší část je delší než 4 metry. Vidíme, že tyč může být jak zprava, tak zleva dlouhá přes 4 metry. Zlomit ji tedy můžeme jen v rozmezí 2 metrů uprostřed. Proto $\mu(A) = 2$. Délka tyče bude Ω, protože ji můžeme rozlomit kdekoliv v její délce. Takže $\mu(\Omega) = 10$. Teď už nám jen stačí dosadit do vzorce a vypočítat.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4 m, se rovná 0,2.

Příklad 7.18: Pacient se léčí doma a od 7 do 20 hodiny je možné jej kontrolovat. Vycházky má od 13 do 15 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 7. a 20. hodinou bude doma k zastižení?

Řešení:

Nejprve si zadání graficky znázorníme:

						vycházky					
						2 hodiny					

7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Z obrázku je patrné, že se bude jednat o geometrickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde μ je doba. A si označíme náhodný jev, že pacient je doma k zastižení. Doma k zastižení musí být od 7 do 13 a od 15 do 20 hodin, protože od 13 do 15 hodin má vycházky. Dohromady tedy musí být k zastižení 11 hodin. Proto $\mu(A) = 11$. Kontrolovat ho však můžeme od 7 do 20 hodin, což pro nás bude Ω. Proto $\mu(\Omega) = 13$. Nyní jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{11}{13} \cong 0{,}8462$$

Pravděpodobnost, že mezi 7. a 20. hodinou bude pacient doma k zastižení, se rovná 0,8462.

Příklad 7.19: Hodiny, které nebyly ve stanovenou dobu nataženy, se po určitém čase zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 6. a 9. hodinou? Jak se změní tato pravděpodobnost, když se velká ručička zastaví mezi 35. a 45. minutou?

Řešení:
Nejprve si zadání graficky znázorníme:

Z obrázků vidíme, že se bude jednat o geometrickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde μ bude délka, protože velká ručička obíhá po obvodu a má se zastavit v určitém délkovém rozmezí. Velká ručička se může zastavit kdekoliv na ciferníku, proto bude pro nás ciferník Ω.

V prvním případě se má velká ručička zastavit mezi 6. a 9. hodinou, proto nám stačí rozdělit si ciferník na hodiny. Na ciferníku je samozřejmě 12 hodin, proto $\mu(\Omega) = 12$. A si označíme náhodný jev, že se velká ručička zastaví mezi 6. a 9. hodinou, takže $\mu(A) = 3$. Nyní už jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

Pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 6. a 9. hodinou, je rovna 0,25.

Ve druhém případě se má velká ručička zastavit mezi 35. a 45. minutou, proto si musíme rozdělit ciferník na minuty. Na ciferníku je samozřejmě 60 minut, proto $\mu(\Omega) = 60$. B si označíme náhodný jev, že se velká ručička zastaví mezi 35. a 45. minutou, takže $\mu(B) = 10$. Nyní už jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$$

Pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 35. a 45. minutou, je rovna $0{,}1\overline{6}$.

Příklad 7.20: Autobus přijíždí na zastávku každé 4 minuty, tramvaj každých 6 minut. Určete pravděpodobnost, že se cestující dočká:

a) autobusu před tramvají,

b) autobusu nebo tramvaje v průběhu 2 minut.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že se cestující dočká autobusu před tramvají, a B náhodný jev, že se cestující dočká autobusu nebo tramvaje v průběhu 2 minut. Ω si označíme dobu, po kterou cestující může čekat na dopravní prostředky. Teď si zadání přehledně graficky vyjádříme:

<table>
<tr><td colspan="6">12 minut</td><td>$\mu(\Omega)$</td></tr>
<tr><td>2 minuty</td><td>2 minuty</td><td>2 minuty</td><td>2 minuty</td><td>2 minuty</td><td>2 minuty</td><td></td></tr>
<tr><td>zde</td><td>zde</td><td></td><td>zde</td><td></td><td></td><td>A</td></tr>
<tr><td></td><td>zde</td><td>zde</td><td>zde</td><td></td><td>zde</td><td>B</td></tr>
<tr><td colspan="6">A, T A T A A, T</td><td>příjezdy</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 minuty</td><td colspan="2">4 minuty</td><td colspan="2">4 minuty</td><td>příjezdy autobusu</td></tr>
<tr><td colspan="3">6 minut</td><td colspan="3">6 minut</td><td>příjezdy tramvaje</td></tr>
</table>

Z tabulky vidíme, že příjezdy autobusu i tramvaje se opakují po 12 minutách, proto bude $\mu(\Omega) = 12$. Je patrné, že se bude opět jednat o geometrickou pravděpodobnost, kde μ je doba. Také v tabulce vidíme, že se cestující může dočkat autobusu před tramvají během 6 minut, proto $\mu(A) = 6$, a autobusu nebo tramvaje v průběhu 2 minut během 8 minut, proto zase $\mu(B) = 8$. Nyní už můžeme dosadit do vzorce a vypočítat hledanou pravděpodobnost.

a) příjezd autobusu před tramvají

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Pravděpodobnost, že se cestující dočká autobusu před tramvají, je rovna $0{,}5$.

b) příjezd autobusu nebo tramvaje v průběhu 2 minut

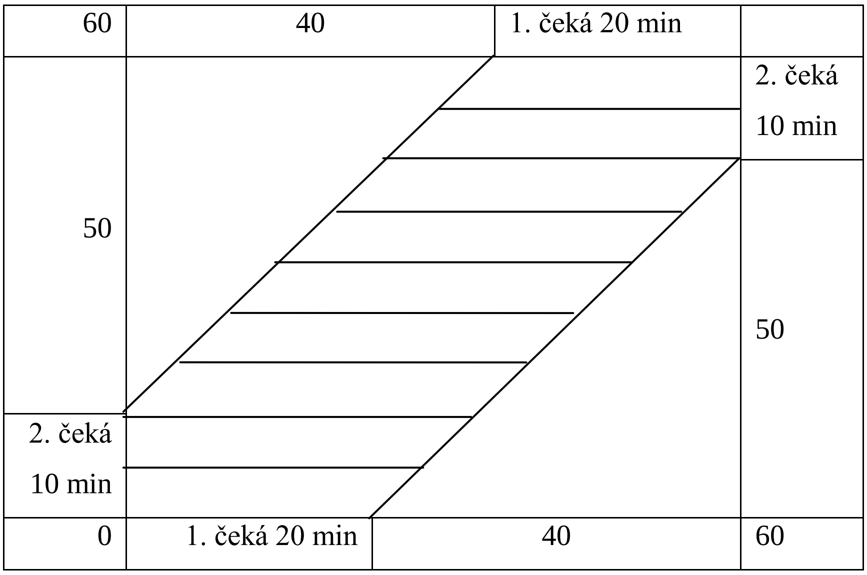
$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

Pravděpodobnost, že se cestující dočká autobusu nebo tramvaje v průběhu 2 minut, je rovna $0,\overline{6}$.

Příklad 7.21: Dva lidé se dohodli, že se setkají na stanoveném místě mezi 18:00 a 19:00. První čeká 20 minut a druhý čeká 10 minut. Určete pravděpodobnost toho, že se setkají, je-li příchod obou kdykoliv ve stanoveném čase stejně možný.

Řešení:

Zadání si můžeme takto graficky znázornit:



Z tabulky vidíme, že se bude jednat o geometrickou pravděpodobnost $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde μ je obsah plochy. A si tedy označíme náhodný jev, že se dva lidé ve stanoveném čase setkají. Mohou se setkat pouze ve vyšrafované ploše, proto pro nás bude tato plocha $\mu(A)$ a vypočítáme ji jako $\mu(A) = 60^2 - 50 * 40$. Ω je doba, po kterou mohou oba přicházet na místo setkání, a proto $\mu(\Omega) = 60^2$, jelikož každý z nich má 60 minut. Nyní už jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2 - 50 * 40}{60^2} = 0,\overline{4}$$

Pravděpodobnost, že se dva lidé setkají na stanoveném místě mezi 18:00 a 19:00, je $0,\overline{4}$.

Příklad 7.22: V zásilce je 90 % standardních výrobků, mezi nimiž je 60 % výrobků mimořádné kvality. Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z celé zásilky je mimořádně kvalitní.

Řešení:
Máme 90 % standardních výrobků, mezi nimiž je 60 % výrobků mimořádné kvality. Označme si S náhodný jev, že vybraný výrobek je standardní, a M náhodný jev, že vybraný výrobek je mimořádné kvality. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude standardní, je pak $P(S) = 0{,}9$ a pravděpodobnost, že vybraný standardní výrobek bude mimořádné kvality, je $P(M|S) = 0{,}6$. Použijeme větu o násobení pravděpodobností, protože náhodně vybraný výrobek musí být mimořádné kvality a to je jen tehdy, pokud je i zároveň standardní. Tedy:

$$P(M \cap S) = P(S) * P(M|S) = 0{,}9 * 0{,}6 = 0{,}54$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z celé zásilky je mimořádné kvality, je $0{,}54$.

Příklad 7.23: Z celkové produkce závodu jsou 4 % zmetků a z dobrých je 75 % standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní. Jaká bude pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je 1. jakosti, když víme, že ze standardních je 1. jakosti 40 % a 2. jakosti 60 %?

Řešení:

Máme 4 % zmetků, a tedy 96 % dobrých, z dobrých je 75 % standardních. Označme si D náhodný jev, že vybraný výrobek je dobrý, a S náhodný jev, že vybraný výrobek je standardní. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude dobrý, je $P(D) = 0{,}96$ a pravděpodobnost, že vybraný výrobek z dobrých bude standardní, je $P(S|D) = 0{,}75$. Použijeme větu o násobení pravděpodobností, protože náhodně vybraný výrobek musí být standardní a to je jen tehdy, když je i zároveň dobrý. Výpočet vypadá následovně:

$$P(S \cap D) = P(D) * P(S|D) = 0{,}96 * 0{,}75 = 0{,}72$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní, se rovná 0,72.

Nyní zjistíme pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je 1. jakosti. Označme si J náhodný jev, že vybraný výrobek je 1. jakosti. Víme, že ze standardních je 1. jakosti 40 %. Pravděpodobnost, že vybraný výrobek ze standardních je 1. jakosti, je $P\big(J\big|(S \cap D)\big) = 0{,}4$. Použijeme větu o násobení pravděpodobností, protože náhodně vybraný výrobek musí být 1. jakosti a to je jen tehdy, když je i zároveň standardní. Výpočet vypadá následovně:

$$P\big(J \cap (S \cap D)\big) = P(S \cap D) * P\big(J\big|(S \cap D)\big) = 0{,}72 * 0{,}4 = 0{,}288$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je 1. jakosti, se rovná 0,288.

Příklad 7.24: Tři závody vyrábí žárovky. První 45 % celkové produkce, druhý 40 % a třetí 15 %. Z produkce prvního závodu je standardních 70 %, druhého 80 % a třetího 81 %. Určete pravděpodobnost, že si zákazník koupí standardní žárovku.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že žárovka je z 1. závodu, B z 2. závodu a C z 3. závodu a S je náhodný jev, že koupená žárovka je standardní.

První závod vyrábí 45 % celkové produkce a z toho je standardních 70 % žárovek. Pravděpodobnost, že si zákazník koupí žárovku z 1. závodu, je $P(A) = 0{,}45$ a pravděpodobnost, že koupená žárovka bude standardní, je $P(S|A) = 0{,}70$.

Druhý závod vyrábí 40 % celkové produkce a z toho je standardních 80 % žárovek. Pravděpodobnost, že si zákazník koupí žárovku z 2. závodu, je $P(B) = 0{,}40$ a pravděpodobnost, že koupená žárovka bude standardní, je $P(S|B) = 0{,}80$.

Třetí závod vyrábí 15 % celkové produkce a z toho je standardních 81 % žárovek. Pravděpodobnost, že si zákazník koupí žárovku z 3. závodu, je $P(C) = 0{,}15$ a pravděpodobnost, že koupená žárovka bude standardní, je $P(S|C) = 0{,}81$.

Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti, protože nás zajímá pravděpodobnost koupení standardní žárovky od jakéhokoliv závodu. Výpočet pak vypadá následovně:

$$P(S) = P(A) * P(S|A) + P(B) * P(S|B) + P(C) * P(S|C) =$$
$$= 0{,}45 * 0{,}70 + 0{,}40 * 0{,}80 + 0{,}15 * 0{,}81 = 0{,}7565$$

Pravděpodobnost, že si zákazník koupí standardní žárovku, je rovna $0{,}7565$.

Příklad 7.25: Měli jsme zakázku u dvou výrobců na stejné misky zabalené do krabiček. Dodavatel A nám zaslal 200 krabiček, přičemž v 10 jsou rozbité misky, a dodavatel B nám zaslal 150 krabiček, přičemž ve 20 jsou rozbité misky.

a) Určete pravděpodobnost, že v náhodně vybrané krabičce ze všech zaslaných krabiček je rozbitá miska.

b) Jaká bude tato pravděpodobnost, pokud nejprve určíme náhodně zásilku a až poté z ní vytáhneme náhodně krabičku s rozbitou miskou?

Řešení:

Dodavatel A nám zaslal 200 krabiček a dodavatel B 150 krabiček, takže dohromady máme 350 krabiček. Označme si A náhodný jev, že vybraná krabička pochází od dodavatele A, a B náhodný jev, že vybraná krabička pochází od dodavatele B. Také si označíme R náhodný jev, že v krabičce je rozbitá miska.

Pravděpodobnost, že náhodně vybraná krabička je od dodavatele A, je potom $P(A) = \frac{200}{350}$ a pravděpodobnost, že je miska v krabičce rozbitá a je od dodavatele A, je $P(R|A) = \frac{10}{200}$, protože z 200 zaslaných krabiček jsou právě v 10 rozbité misky.

Pravděpodobnost, že náhodně vybraná krabička je od dodavatele B, je potom $P(B) = \frac{150}{350}$ a pravděpodobnost, že je miska v krabičce rozbitá a je od dodavatele B, je $P(R|B) = \frac{20}{150}$, protože ze 150 zaslaných krabiček jsou právě ve 20 rozbité misky.

a) Určete pravděpodobnost, že v náhodně vybrané krabičce ze všech zaslaných krabiček je rozbitá miska.

   Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti, protože chceme znát pravděpodobnost, že v náhodně vybrané krabičce ze všech zaslaných krabiček je rozbitá miska. Tedy:

$$P(R) = P(A) * P(R|A) + P(B) * P(R|B) = \frac{200}{350} * \frac{10}{200} + \frac{150}{350} * \frac{20}{150} \cong 0{,}0857$$

   Pravděpodobnost, že v náhodně vybrané krabičce ze všech zaslaných krabiček je rozbitá miska, se rovná 0,0857.

Nebo si můžeme uvědomit, že ze všech 350 krabiček je jen 30 s rozbitou miskou, a protože nám nezáleží, od koho krabička s rozbitou miskou pochází, můžeme potom pravděpodobnost, že v náhodně vybrané krabičce ze všech zaslaných krabiček je rozbitá miska, vypočítat jako $P(R) = \frac{30}{350} = 0{,}0857$.

b) Jaká bude tato pravděpodobnost, pokud nejprve určíme náhodně zásilku a až poté z ní vytáhneme náhodně krabičku s rozbitou miskou?

Označme si V jev náhodného výběru zásilky, a protože máme dva dodavatele, pravděpodobnost náhodného výběru zásilky od dodavatele A je stejná jako pravděpodobnost náhodného výběru zásilky od dodavatele B, takže to zapíšeme jako $P(V_A) = P(V_B) = \frac{1}{2}$. Zajímá nás pouze pravděpodobnost vytažení rozbité misky od obou dodavatelů, proto použijeme větu o úplné pravděpodobnosti takto:

$$P(R) = P(V_A) * P(R|A) + P(V_B) * P(R|B) = \frac{1}{2} * \frac{10}{200} + \frac{1}{2} * \frac{20}{150} = 0{,}091\overline{6}$$

Pravděpodobnost, kdy nejprve určíme náhodně zásilku a až poté z ní vytáhneme náhodně krabičku s rozbitou miskou, se rovná $0{,}091\overline{6}$.

Příklad 7.26: V distribuci mají elektronky vyrobené ve dvou závodech. 60 je z prvního a 40 z druhého závodu. Z každých 100 elektronek vyrobených 1. závodem je 90 odpovídajících normě, ze 100 elektronek vyrobených 2. závodem odpovídá normě 80. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka bude odpovídat normě.

Řešení:

Použijeme zde větu o úplné pravděpodobnosti, protože nás zajímá, jaká bude pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka ze všech elektronek bude odpovídat normě. Víme, že v distribuci je 60 elektronek z 1. a 40 z 2. závodu, takže dohromady jich je 100. Označme si A náhodný jev, že vybraná elektronka pochází z 1. závodu, a B náhodný jev, že vybraná elektronka pochází z 2. závodu. Potom pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka, ať už odpovídá normě nebo ne, ze všech elektronek bude z 1. závodu, se rovná $P(A) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$. Pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka ze všech elektronek bude z 2. závodu, se rovná $P(B) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$. Náhodný jev, že elektronka odpovídá normě, si označíme N. Víme, že 1. závod vyrábí ze 100 elektronek 90, které odpovídají normě, takže pravděpodobnost, že elektronka z 1. závodu odpovídá normě, se rovná $P(N|A) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$. Obdobně 2. závod vyrábí ze 100 elektronek 80, které odpovídají normě, takže pravděpodobnost, že elektronka z 2. závodu odpovídá normě, se rovná $P(N|B) = \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$. Nyní už jen dosadíme do vzorce pro úplnou pravděpodobnost a vypočítáme.

$$P(N) = P(A) * P(N|A) + P(B) * P(N|B) = \frac{6}{10} * \frac{9}{10} + \frac{4}{10} * \frac{8}{10} = 0{,}86$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka bude odpovídat normě, se rovná 0,86.

Příklad 7.27: Spojovacím kanálem A (resp. B) je přenášen signál s pravděpodobností $0{,}84$ (resp. $0{,}16$). Vzhledem k poruchám přenosu se $1/6$ signálů A detekuje jako B. Obdobně se $1/8$ signálů B detekuje jako A. Určete pravděpodobnost, že:

a) signál bude na výstupu detekován jako A,

b) signál, který byl na výstupu detekován jako A, byl skutečně odeslán jako A.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že signál je přenášen kanálem A, a víme, že $P(A) = 0{,}84$. Také si označíme B náhodný jev, že signál je přenášen kanálem B, a víme, že $P(B) = 0{,}16$. Dále víme, že $1/6$ signálů A se detekuje špatně jako B, tudíž $5/6$ signálů A se detekuje správně jako A. Obdobně $1/8$ signálů B se detekuje špatně jako A, tudíž $7/8$ signálů B se detekuje správně jako B.

a) signál bude na výstupu detekován jako A

   Označme si D_A náhodný jev, že signál je na výstupu detekován jako A. Je nám jedno, jestli byl signál detekován správně nebo špatně, hlavně, že byl detekován jako A. Proto zde využijeme větu o úplné pravděpodobnosti, protože nás zajímá pravděpodobnost přijetí signálu A z obou kanálů. Vzorec pro výpočet a samotný výpočet pak bude vypadat následovně:

$$P(D_A) = P(A) * P(D_A|A) + P(B) * P(D_A|B) = 0{,}84 * \frac{5}{6} + 0{,}16 * \frac{1}{8} = 0{,}72$$

   Pravděpodobnost, že signál bude na výstupu detekován jako A, se rovná $0{,}72$.

b) signál, který byl na výstupu detekován jako A, byl skutečně odeslán jako A

   Nyní nás zajímá pravděpodobnost jen správně přijatého signálu A vyslaného z kanálu A ze všech přijatých signálů A (tedy i špatně detekovaných signálů B jako A). Proto zde využijeme Bayesovu větu, kde v čitateli budeme mít pravděpodobnost jen správně přijatého signál A vyslaného z kanálu A a ve jmenovateli budeme mít pravděpodobnost všech přijatých signálů A z obou kanálů. Tedy:

$$P(A|D_A) = \frac{P(A) * P(D_A|A)}{P(D_A)} = \frac{P(A) * P(D_A|A)}{P(A) * P(D_A|A) + P(B) * P(D_B|B)} =$$

$$= \frac{0{,}84 * \frac{5}{6}}{0{,}84 * \frac{5}{6} + 0{,}16 * \frac{1}{8}} = 0{,}97\overline{2}$$

Pravděpodobnost, že signál, který byl na výstupu detekován jako A, byl skutečně odeslán jako A, se rovná $0{,}97\overline{2}$.

Příklad 7.28: Prodejce banánů zásobují tři pěstitelé. Pěstitel A dodává prodejci 50 % zboží, přičemž ze 100 banánů je 85 první jakosti. Pěstitel B dodává prodejci 30 % zboží, přičemž ze 100 banánů je 65 první jakosti. Pěstitel C dodává prodejci 20 % zboží, přičemž ze 100 banánů je 40 první jakosti.

a) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán je první jakosti.

b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán první jakosti je od pěstitele A.

c) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán první jakosti je od pěstitele B.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že vybraný banán pochází od pěstitele A, B náhodný jev, že vybraný banán pochází od pěstitele B, a C náhodný jev, že vybraný banán pochází od pěstitele C. Označme si také J náhodný jev, že banán je první jakosti.

Pěstitel A dodává prodejci 50 % zboží, takže pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán je od něj, se rovná $P(A) = 0,5$ a pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán od něj je první jakosti, se rovná $P(J|A) = \frac{85}{100}$, protože ze 100 jeho banánů je 85 první jakosti.

Pěstitel B dodává prodejci 30 % zboží, takže pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán je od něj, se rovná $P(B) = 0,3$ a pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán od něj je první jakosti, se rovná $P(J|B) = \frac{65}{100}$, protože ze 100 jeho banánů je 65 první jakosti.

Pěstitel C dodává prodejci 20 % zboží, takže pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán je od něj, se rovná $P(C) = 0,2$ a pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán od něj je první jakosti, se rovná $P(J|C) = \frac{40}{100}$, protože ze 100 jeho banánů je 40 první jakosti.

a) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán je první jakosti.

   Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti, protože nás zajímá, jaká bude pravděpodobnost, že náhodně vytažený banán ze všech banánů od všech prodejců je první jakosti. Tedy:

$$P(J) = P(A) * P(J|A) + P(B) * P(J|B) + P(C) * P(J|C) =$$
$$= 0,5 * \frac{85}{100} + 0,3 * \frac{65}{100} + 0,2 * \frac{40}{100} = 0,7$$

   Pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán je první jakosti, se rovná 0,7.

b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán první jakosti je od pěstitele A.

Použijeme zde Bayesovu větu, protože jsme náhodně vybrali banán první jakosti a zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že je zrovna od pěstitele A (není od pěstitele B ani C). V čitateli tedy budeme mít pravděpodobnost vytažení banánu první jakosti od pěstitele A a ve jmenovateli budeme mít pravděpodobnost vytažení banánu první jakosti od všech pěstitelů. Výpočet pravděpodobnosti pak vypadá následovně:

$$P(A|J) = \frac{P(A) * P(J|A)}{P(A) * P(J|A) + P(B) * P(J|B) + P(C) * P(J|C)} =$$
$$= \frac{0{,}5 * \frac{85}{100}}{0{,}5 * \frac{85}{100} + 0{,}3 * \frac{65}{100} + 0{,}2 * \frac{40}{100}} \cong 0{,}6071$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán první jakosti je od pěstitele A, je $0{,}6071$.

c) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán první jakosti je od pěstitele B.

Postupujeme úplně stejně jako u b) pouze s tím rozdílem, že nás teď zajímá pěstitel B. Protože postupujeme analogicky, uvedeme si už přímo výpočet. Tedy:

$$P(B|J) = \frac{P(B) * P(J|B)}{P(A) * P(J|A) + P(B) * P(J|B) + P(C) * P(J|C)} =$$
$$= \frac{0{,}3 * \frac{65}{100}}{0{,}5 * \frac{85}{100} + 0{,}3 * \frac{65}{100} + 0{,}2 * \frac{40}{100}} \cong 0{,}2786$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný banán první jakosti je od pěstitele B, se rovná $0{,}2786$.

Příklad 7.29: Tři radioamatéři si postavili vysílače jednoduchého signálu a mají jeden společný přijímač. Pravděpodobnosti vyslání jednoduchého signálu z vysílačů jednotlivých radioamatérů jsou 0,9; 0,5; 0,3. Přijímač pípl pouze dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že signály vyšly z vysílače prvního a třetího radioamatéra?

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že signál vyšel z vysílače od prvního radioamatéra, B od druhého a C od třetího. Víme, že signál vyjde z vysílače od prvního radioamatéra s pravděpodobností 0,9, tedy $P(A) = 0{,}9$. Obdobně od druhého s pravděpodobností 0,5, tedy $P(B) = 0{,}5$, a od třetího s pravděpodobností 0,3, tedy $P(C) = 0{,}3$. Označme si D náhodný jev, že přijaté signály byly vyslány z vysílače od prvního a třetího radioamatéra. Chceme znát pravděpodobnost přijetí signálu vyslaného z vysílače od prvního a třetího radioamatéra, když víme, že byly přijaty právě dva signály. Přičemž signál měl být vyslán všemi třemi vysílači. Proto zde použijeme Bayesův vzorec, kde v čitateli budeme mít pravděpodobnost, že signál vyslal pouze první a třetí vysílač, a ve jmenovateli budeme mít pravděpodobnost, že signál vždy nevyslal jen jeden z vysílačů, protože víme, že do přijímače přišly právě dva signály. Tuto pravděpodobnost zapíšeme a vypočítáme následovně:

$$P(D) = \frac{P(A) * P(B^c) * P(C)}{P(A) * P(B^c) * P(C) + P(A^c) * P(B) * P(C) + P(A) * P(B) * P(C^c)} =$$

$$= \frac{0{,}9 * 0{,}5 * 0{,}3}{0{,}9 * 0{,}5 * 0{,}3 + 0{,}1 * 0{,}5 * 0{,}3 + 0{,}9 * 0{,}5 * 0{,}7} \cong 0{,}2903$$

Pravděpodobnost, že přijaté signály vyšly z vysílače od prvního a třetího radioamatéra, je rovna 0,2903.

Příklad 7.30: V dílně pracuje 10 dělníků, kteří za směnu vyrobí stejný počet výrobků. Skupina A pěti dělníků vyrobí 96 % standardních výrobků, skupina B tří dělníků 90 % a skupina C dvou dělníků jen 85 % standardních výrobků. Všechny výrobky jsou uložené ve skladu. Náhodně jsme vybrali jeden výrobek a zjistili, že je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobila skupina A pěti dělníků?

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že vybraný výrobek vyrobila skupina A 5 dělníků, B náhodný jev, že vybraný výrobek vyrobila skupina B 3 dělníků, a C náhodný jev, že vybraný výrobek vyrobila skupina C 2 dělníků. Celkem v dílně pracuje tedy 10 dělníků. Označme si také S náhodný jev, že vybraný výrobek je standardní.

Pravděpodobnost, že vybraný výrobek vyrobila skupina A, je $P(A) = \frac{5}{10}$. Tato skupina vyrobí 96 % standardních výrobků, takže pravděpodobnost, že vybraný standardní výrobek je od této skupiny, se rovná $P(S|A) = 0{,}96$.

Pravděpodobnost, že vybraný výrobek vyrobila skupina B, je $P(B) = \frac{3}{10}$. Tato skupina vyrobí 90 % standardních výrobků, takže pravděpodobnost, že vybraný standardní výrobek je od této skupiny, se rovná $P(S|B) = 0{,}9$.

Pravděpodobnost, že vybraný výrobek vyrobila skupina C, je $P(C) = \frac{2}{10}$. Tato skupina vyrobí 85 % standardních výrobků, takže pravděpodobnost, že vybraný standardní výrobek je od této skupiny, se rovná $P(S|C) = 0{,}85$.

Použijeme zde Bayesovu větu, protože jsme náhodně vybrali jeden výrobek a zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že je zrovna od skupiny A, přičemž ho mohla vyrobit kterákoliv skupina. V čitateli tedy máme pravděpodobnost, že vybraný výrobek vyrobila skupina A, a ve jmenovateli máme součet pravděpodobností, že vybraný výrobek vyrobila kterákoliv skupina.

$$P(A|S) = \frac{P(A) * P(S|A)}{P(A) * P(S|A) + P(B) * P(S|B) + P(C) * P(S|C)} =$$

$$= \frac{\frac{5}{10} * 0{,}96}{\frac{5}{10} * 0{,}96 + \frac{3}{10} * 0{,}9 + \frac{2}{10} * 0{,}85} \cong 0{,}5217$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek vyrobila skupina A pěti dělníků, je $0{,}5217$.

Příklad 7.31: Ve třídě je 37 % chlapců a 63 % dívek. Nadváhu má 6 % chlapců a 2 % dívek. Náhodně vybraný žák má nadváhu. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

Řešení:

Označme si C náhodný jev, že vybraný žák je chlapec, D náhodný jev, že vybraný žák je dívka, a N náhodný jev, že vybraný žák má nadváhu.

Ve třídě je 37 % chlapců a nadváhu má 6 % z nich. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný žák je chlapec, je $P(C) = 0{,}37$ a pravděpodobnost, že vybraný chlapec má nadváhu, je $P(N|C) = 0{,}06$.

Ve třídě je 63 % dívek a nadváhu má 2 % z nich. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný žák je dívka, je $P(D) = 0{,}63$ a pravděpodobnost, že vybraná dívka má nadváhu, potom je $P(N|D) = 0{,}02$.

Užijeme Bayesovu větu, protože chceme znát pravděpodobnost výběru dívky s nadváhou, přičemž vybíráme z chlapců i dívek. V čitateli pak budeme mít pravděpodobnost, že vybraný žák je dívka s nadváhou a ve jmenovateli nám k této pravděpodobnosti přibude pravděpodobnost, že to mohl být i chlapec s nadváhou. Tedy:

$$P(D|N) = \frac{P(D) * P(N|D)}{P(D) * P(N|D) + P(C) * P(N|C)} = \frac{0{,}63 * 0{,}02}{0{,}63 * 0{,}02 + 0{,}37 * 0{,}06} \cong 0{,}3621$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný žák s nadváhou je dívka, se rovná $0{,}3621$.

Příklad 7.32: Podíl padělaných obrazů ve sbírce je 20 %. Náhodně vybereme ze sbírky jeden obraz. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 70 %. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 10 %. Určete:

a) pravděpodobnost, že vybraný obraz je originál, když byl znalcem označen za originál,

b) pravděpodobnost, že vybraný obraz je originál, když byl znalcem označen za padělek,

c) pravděpodobnost, že vybraný obraz je padělek, když byl znalcem označen za originál,

d) pravděpodobnost, že vybraný obraz je padělaný, když byl znalcem označen za padělek.

Řešení:

U takovýchto typů příkladů je nejdůležitější správně si všechno v klidu označit a vypsat, ať se nám nestane, že nepozorností někde zaměníme označení nebo prohodíme čísla. Označme si O náhodný jev, že vybraný obraz je originál (resp. padělek O^c), Z náhodný jev, že znalec posoudí obraz jako originál, a S náhodný jev, že znalec posoudí obraz jako padělek.

Padělaných obrazů je ve sbírce 20 %, proto pravděpodobnost, že obraz je padělek, je $P(O^c) = 0{,}2$, resp. originálních obrazů je ve sbírce 80 %, a proto $P(O) = 0{,}8$.

Falešný obraz pozná znalec s pravděpodobností 70 %, takže $P(S|O^c) = 0{,}7$, resp. znalec falešný obraz nepozná s pravděpodobností 30 %, proto $P(Z|O^c) = 0{,}3$.

Originál znalec mylně posoudí s pravděpodobností 10 % a tedy $P(S|O) = 0{,}1$, resp. originál znalec správně posoudí s pravděpodobností 90 %, takže $P(Z|O) = 0{,}9$.

Ve všech řešeních budeme používat Bayesovu větu.

a) pravděpodobnost, že vybraný obraz je originál, když byl znalcem označen za originál

   V čitateli bude $P(O)$ a $P(Z|O)$ podle otázky a ve jmenovateli k tomu do součtu přibude $P(O^c)$ a $P(Z|O^c)$, protože znalec mohl označit padělek za originál.

$$P(O|Z) = \frac{P(O) * P(Z|O)}{P(O) * P(Z|O) + P(O^c) * P(Z|O^c)} = \frac{0{,}8 * 0{,}9}{0{,}8 * 0{,}9 + 0{,}2 * 0{,}3} \cong 0{,}9231$$

   Pravděpodobnost, že vybraný obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál, je rovna 0,9231.

b) pravděpodobnost, že vybraný obraz je originál, když byl znalcem označen za padělek
V čitateli bude $P(O)$ a $P(S|O)$ podle otázky a ve jmenovateli k tomu do součtu přibude $P(O^c)$ a $P(S|O^c)$, protože znalec mohl označit padělek správně.

$$P(O|S) = \frac{P(O) * P(S|O)}{P(O) * P(S|O) + P(O^c) * P(S|O^c)} = \frac{0{,}8 * 0{,}1}{0{,}8 * 0{,}1 + 0{,}2 * 0{,}7} = 0{,}\overline{36}$$

Pravděpodobnost, že vybraný obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za padělek, je rovna $0{,}\overline{36}$.

c) pravděpodobnost, že vybraný obraz je padělek, když byl znalcem označen za originál
V čitateli bude $P(O^c)$ a $P(Z|O^c)$ podle otázky a ve jmenovateli k tomu do součtu přibude $P(O)$ a $P(Z|O)$, protože znalec mohl označit originál správně.

$$P(O^c|Z) = \frac{P(O^c) * P(Z|O^c)}{P(O^c) * P(Z|O^c) + P(O) * P(Z|O)} = \frac{0{,}2 * 0{,}3}{0{,}2 * 0{,}3 + 0{,}8 * 0{,}9} \cong 0{,}0769$$

Pravděpodobnost, že vybraný obraz je padělek, jestliže byl znalcem označen za originál, je rovna 0,0769.

d) pravděpodobnost, že vybraný obraz je padělaný, když byl znalcem označen za padělek
V čitateli bude $P(O^c)$ a $P(S|O^c)$ podle otázky a ve jmenovateli k tomu do součtu přibude $P(O)$ a $P(S|O)$, protože znalec mohl označit originál za padělek.

$$P(O^c|S) = \frac{P(O^c) * P(S|O^c)}{P(O^c) * P(S|O^c) + P(O) * P(S|O)} = \frac{0{,}2 * 0{,}7}{0{,}2 * 0{,}7 + 0{,}8 * 0{,}1} = 0{,}\overline{63}$$

Pravděpodobnost, že vybraný obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek, je rovna $0{,}\overline{63}$.

Příklad 7.33: Kolik je nutno vzít čísel z množiny přirozených čísel (čísla se mohou opakovat), abychom s pravděpodobností alespoň 0,9 mohli tvrdit, že je mezi nimi alespoň jedno sudé číslo?

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že mezi vybranými čísly je alespoň jedno sudé číslo, a B náhodný jev, že mezi vybranými čísly jsou všechna lichá. Označme si pravděpodobnost, se kterou chceme tvrdit, že jsme vytáhli aspoň jedno sudé číslo, jako $p_1 \geq 0{,}9$. V množině přirozených čísel je stejné množství sudých i lichých čísel a navíc je vytahujeme náhodně, takže pravděpodobnost vytažení sudého čísla je 0,5. Označíme si ji jako $p_2 = 0{,}5$. Potřebný počet vytažených čísel si označíme n. Při výpočtu vycházíme z úvahy, že pravděpodobnost vytažení aspoň jednoho sudého čísla je rovna rozdílu jistého jevu a pravděpodobnosti vytažení jen lichých čísel, přičemž tento rozdíl musí být větší nebo roven 0,9. A nyní už můžeme počítat.

$P(A) = 1 - P(B) \geq 0{,}9$

$1 - 0{,}5^n \geq 0{,}9$

$0{,}1 \geq 0{,}5^n$ rovnici zlogaritmujeme, abychom mohli použít vlastnosti logaritmů

$ln\, 0{,}1 \geq ln\, 0{,}5^n$

$ln\, 0{,}1 \geq n * ln\, 0{,}5$

$n \geq \frac{ln\, 0{,}1}{ln\, 0{,}5}$

$n \geq 3{,}3219 \cong 4$

Abychom s pravděpodobností alespoň 0,9 mohli tvrdit, že mezi vytaženými čísli je alespoň jedno sudé číslo, musíme vytáhnout 4 čísla.

Příklad 7.34: V rodině je n dětí. Pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}515$. Určete počet dětí tak, aby mezi nimi byl aspoň jeden chlapec s pravděpodobností alespoň $0{,}99$.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že mezi vybranými dětmi je alespoň jeden chlapec, a B náhodný jev, že mezi vybranými dětmi jsou všechny dívky. Označme si pravděpodobnost, se kterou chceme tvrdit, že v rodině je aspoň jeden chlapec, jako $p_1 \geq 0{,}99$. Pravděpodobnost narození chlapce si označíme jako $p_2 = 0{,}515$. Potřebný počet dětí si označíme n. Při výpočtu vycházíme z úvahy, že pravděpodobnost výskytu aspoň jednoho chlapce v rodině je rovna rozdílu jistého jevu a pravděpodobnosti výskytu jen děvčat, přičemž tento rozdíl musí být větší nebo roven 0,99. A nyní už můžeme počítat.

$P(A) = 1 - P(B) \geq 0{,}99$

$1 - (1 - 0{,}515)^n \geq 0{,}99$

$1 - 0{,}485^n \geq 0{,}99$

$0{,}01 \geq 0{,}485^n$ rovnici zlogaritmujeme kvůli použití vlastností logaritmů

$ln\, 0{,}01 \geq ln\, 0{,}485^n$

$ln\, 0{,}01 \geq n * ln\, 0{,}485$

$$n \geq \frac{ln\, 0{,}01}{ln\, 0{,}485}$$

$n \geq 6{,}3642 \cong 7$

Aby mezi dětmi v rodině byl aspoň jeden chlapec s pravděpodobností alespoň $0{,}99$, musí být v rodině 7 dětí.

Příklad 7.35: Výrobní linka je složena ze 100 stejných částí, které na sobě nezávisle pracují. Každá tato část se může porouchat s pravděpodobností 0,025. Jaká je pravděpodobnost, že se výrobní linka porouchá kvůli aspoň jedné porouchané části?

Řešení:
Označme si A náhodný jev, že se výrobní linka porouchá kvůli aspoň jedné porouchané části. Ze zadání víme, že jednotlivé části pracují nezávisle na sobě. Můžeme zde proto využít Bernoulliovo schéma, kde se pravděpodobnost k úspěchů v n pokusech vypočítá jako $P(A) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$, kde p je pravděpodobnost úspěchu a q pravděpodobnost neúspěchu. Místo toho, abychom počítali pravděpodobnost pro každý možný počet poruch (museli bychom počítat pravděpodobnosti pro případ jedné poruchy až všech sto poruch), využijeme vlastnosti pravděpodobnosti $P(A) = 1 - P(A^c)$, kde $P(A)$ bude pravděpodobnost, že se výrobní linka porouchá kvůli aspoň jedné porouchané části, a $P(A^c)$ bude pravděpodobnost, že se ani jedna část neporouchá. Tímto si výpočet velmi zjednodušíme. Takže v našem případě bude $n = 100$, protože máme 100 částí, a $k = 0$, protože se ani jedna část neporouchá. Pravděpodobnost, že se libovolná část porouchá je $p = 0{,}025$, a že se neporouchá je $q = 1 - p = 0{,}975$. Vše již známe a můžeme dosadit do vzorce.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \binom{100}{0} * 0{,}025^0 * 0{,}975^{100-0} \cong 0{,}9205$$

Pravděpodobnost, že se výrobní linka porouchá kvůli aspoň jedné porouchané části, je 0,9205.

Příklad 7.36: V populaci se vyskytují $4\,\%$ homosexuálně zaměřených jedinců. Jaká je pravděpodobnost, že ve studijní skupině, ve které je 20 členů, bude alespoň jeden takto zaměřený jedinec?

Řešení:

Náhodným jevem A si označíme to, že ve studijní skupině 20 členů bude alespoň jeden takto zaměřený jedinec. Jelikož jsou ve skupině členové nezávisle na sobě, můžeme zde využít opět Bernoulliovo schéma. A zase místo toho, abychom počítali pravděpodobnosti, že ve skupině je 1 nebo 2 nebo až všech 20 takto zaměřených jedinců (výslednou pravděpodobnost bychom dostali součtem všech těchto pravděpodobností), využijeme vlastnosti pravděpodobnosti $P(A) = 1 - P(A^c)$, kde $P(A^c)$ bude pravděpodobnost, že ve studijní skupině 20 členů ani jeden takto zaměřený jedinec není. Tímto si výpočet velmi zjednodušíme. V našem případě bude $n = 20$, protože máme 20 členů, a $k = 0$, protože se ani jeden homosexuál ve skupině nevyskytuje. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec je homosexuál, je $p = 0{,}04$, a že není homosexuál, je $q = 1 - p = 0{,}96$. Nyní už můžeme dosadit do vzorce a počítat.

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \binom{20}{0} * 0{,}04^0 * 0{,}96^{20-0} \cong 0{,}558$$

Pravděpodobnost, že ve studijní skupině, ve které je 20 členů, bude alespoň jeden homosexuálně zaměřený jedinec, se rovná $0{,}558$.

Příklad 7.37: Sérii 100 ks výrobků je třeba zkontrolovat náhodným výběrem. Celá je považována za špatnou, je-li aspoň jeden z pěti vybraných výrobků vadný. Vypočtěte pravděpodobnost, že série je špatná, víme-li, že obsahuje 5 % vadných výrobků.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že série je špatná. Víme, že v sérii 100 ks výrobků je 5 % vadných a pravděpodobnost výběru vadného výrobku je $p = 0{,}05$. Jelikož vybíráme výrobky nezávisle na sobě, můžeme zde využít také Bernoulliovo schéma. Abychom si výpočet usnadnili, spočítáme pravděpodobnost opačného jevu A^c, že jsme nevybrali ani jeden vadný výrobek. V našem příkladu tudíž bude $n = 5$, protože vybíráme 5 výrobků, a $k = 0$, protože ani jeden nesmí být vadný. Pravděpodobnost výběru výrobku bez vady je potom $q = 1 - p = 0{,}95$. Teď už jen dosadíme do vzorce a vypočítáme.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k} = 1 - \binom{5}{0} * 0{,}05^0 * 0{,}95^{5-0} \cong 0{,}2262$$

Pravděpodobnost, že série je špatná, se rovná $0{,}2262$.

Příklad 7.38: Sportovní střelec zasáhne cíl při každém výstřelu s pravděpodobností 0,8. Vypočtěte pravděpodobnost, že při 5 výstřelech budou v cíli:

a) právě 2 zásahy,

b) nejvýše 1 zásah,

c) alespoň 2 zásahy.

Řešení:

Protože střelec zasahuje cíl nezávisle na každém výstřelu, můžeme zde využít Bernoulliovo schéma, kde se pravděpodobnost k úspěchů v n pokusech vypočítá pomocí tohoto vzorce $\binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$, kde p je pravděpodobnost úspěchu a q pravděpodobnost neúspěchu. V našem případě bude k počet zásahů v cíli a n bude počet výstřelů, tedy $n = 5$. Pravděpodobnost zásahu cíle je $p = 0{,}8$ a pravděpodobnost minutí cíle je $q = 1 - p = 0{,}2$. Nyní můžeme přejít k samotným výpočtům jednotlivých otázek.

a) právě 2 zásahy

Označme si A náhodný jev, že střelec zasáhne cíl právě 2 zásahy, takže $k = 2$. Nyní už můžeme dosadit a vypočítat.

$$P(A) = \binom{5}{2} * 0{,}8^2 * 0{,}2^{5-2} = 0{,}0512$$

Pravděpodobnost, že při 5 výstřelech budou v cíli právě 2 zásahy, je rovna $0{,}0512$.

b) nejvýše 1 zásah

Označme si B náhodný jev, že střelec zasáhne cíl nejvýše jednou, takže $k = 1$, nebo ani jednou, tedy $k = 0$. Dosadíme a vypočítáme.

$$P(B) = \binom{5}{1} * 0{,}8^1 * 0{,}2^{5-1} + \binom{5}{0} * 0{,}8^0 * 0{,}2^{5-0} = 0{,}00672$$

Pravděpodobnost, že při 5 výstřelech bude v cíli nejvýše jeden zásah, je $0{,}00672$.

c) alespoň 2 zásahy

Označme si C náhodný jev, že střelec zasáhne cíl alespoň 2 zásahy. Teď buď můžeme spočítat součet pro dva nebo tři nebo čtyři nebo pět zásahů cíle podobně jako u b), anebo můžeme spočítat pravděpodobnost opačného jevu, že zasáhneme cíl nejvýše jednou (jednou nebo ani jednou jako je to u b), takže vlastně $P(C^c) = P(B)$).

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}00672 = 0{,}99328$$

Pravděpodobnost, že při 5 výstřelech budou v cíli aspoň 2 zásahy, je rovna $0{,}99328$.

Příklad 7.39: Písemná zkouška z matematiky obsahuje 5 příkladů. Pravděpodobnost spočítání jednoho příkladu je 0,8. Určete, jaká je pravděpodobnost, že student uspěje, stačí-li, aby spočítal aspoň 3 příklady.

Řešení:

Označme si A náhodný jev, že student spočítá aspoň 3 příklady. Ze zadání je zřejmé, že student počítá příklady nezávisle na sobě. Můžeme zde proto využít Bernoulliovo schéma, kde se pravděpodobnost k spočtených příkladů z n příkladů vypočítá jako $P(A) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$, kde p je pravděpodobnost spočítání jednoho příkladu a q pravděpodobnost jeho nespočítání. Tedy aby student uspěl, musí spočítat tři, $k = 3$, nebo čtyři, $k = 4$, nebo pět, $k = 5$, příkladů. Zkouška obsahuje 5 příkladů, proto bude $n = 5$. Pravděpodobnost spočítání jednoho příkladu je $p = 0{,}8$ a pravděpodobnost jeho nespočítání je $q = 1 - p = 0{,}2$. Nyní můžeme dosadit do vzorce a vypočítat.

$$P(A) = \binom{5}{3} * 0{,}8^3 * 0{,}2^{5-3} + \binom{5}{4} * 0{,}8^4 * 0{,}2^{5-4} + \binom{5}{5} * 0{,}8^5 * 0{,}2^{5-5} = 0{,}94208$$

Pravděpodobnost, že student uspěje u písemné zkoušky z matematiky, je rovna 0,94208.

Závěr

Při vypracovávání této bakalářské práce jsem se snažil probírané téma co nejvíce vysvětlit a popsat tak, aby byl text srozumitelný širokému okruhu čtenářů, kteří nemají předchozí zkušenosti a znalosti s tímto tématem. Proto jsem také uváděl za novými termíny a pojmy konkrétní příklady, aby bylo patrné, co se pod nimi skrývá.

Příklady v teoretické části jsem se snažil volit jednoduché, základní až triviální, aby čtenáři bylo na první pohled jasné, o co se jedná a jak a k čemu se co používá. V praktické části jsem pak přecházel od jednodušších příkladů ke složitějším, abych obsáhl co nejširší záběr využití nově nabitých teoretických poznatků. Vždy jsem se však snažil uvádět takové příklady, aby si je čtenář mohl dát do souvislosti s praktickým využitím v běžném životě.

Mým cílem totiž bylo osvětlit základní znalosti náhodného jevu a s tím souvisejících pravděpodobností a ukázat následné jednoduché využití v běžném životě. Podle mého názoru by to totiž mohlo podnítit zájem nejen o dané téma, ale i témata navazující na tyto základy. Z běžného života si můžeme uvést například Sportku, poker nebo jinou hazardní hru, kde by člověka už jen z podstaty problému zajímala pravděpodobnost výhry a tím i jeho úspěchu, ale bez předchozích poznatků by si jen tak rady nevěděl. A i pravděpodobnost vybrání vadného výrobku ze série výrobků nebo pravděpodobnost vybrání výrobku s určitou vlastností od určitého výrobce ze všech výrobků od všech výrobců se pro něj jeví zajímavá, rád by si ji vypočítal, zjistil, ale neví jak. Proto jsem se snažil čtenáři touto prací poskytnout návod jak postupovat, pracovat a dopátrat se výsledku.

Doufám, že se mi můj cíl podařil, čtenáři bude má práce nápomocna a poskytne mu veškeré informace, postupy a rady, které bude potřebovat k cestě za správným výsledkem a odpověďmi na jeho otázky.

Závěrem bych chtěl říci, že překlepy, a to zejména v kalkulačce, se někdy dělají, ani nevíme jak, a tak než začnete věšet hlavu a zoufat, raději si nejprve ještě jednou vše zkontrolujte a přepočítejte. Pokud postupujete správně, tak i správný výsledek přece musí někde být. Hodně štěstí a přesné počty.

Seznam použité literatury

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*, 4. vydání. Praha: Prometheus, 2006.

[2] Kubešová, N., Cibulková, E.: *Matematika - přehled středoškolského učiva*, 1. vydání. Třebíč: Nakladatelství Petra Velanová, 2006.

[3] Kunderová, P.: *Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004.

[4] Hebák, P., Kahounová, J.: *Počet pravděpodobnosti v příkladech*, 5. vydání. Praha: INFORMATORIUM, 2005.

[5] Budíková, M., Mikoláš, Š., Osecký, P.: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika - sbírka příkladů*, 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2007.

[6] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, 3. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2002.

[7] Bílková, D., Budinský, P., Vohánka, V.: *Pravděpodobnost a statistika*. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2009.

[8] Cihlář, J., Pelikán, Š.: *Pravděpodobnost - cvičení*, 1. vydání. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta v Ústí nad Labem, 1984.

[9] Budíková, M., Králová, M., Maroš, B.: *Průvodce základními statistickými metodami*, 1. vydání. Praha: Grada, 2010.

Internetové zdroje:

[10] *Kombinatorika* [online] dostupné z: http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/ [citováno dne: 12. 11. 2011]

[11] *Neřešené příklady (Statistika I.* [online] dostupné z: http://homel.vsb.cz/~lit40/STA1/Priklady_Martina.pdf [citováno dne: 18. 11. 2011]

[12] *Příklady z teorie pravděpodobnosti* [online] dostupné z: http://www.kmt.zcu.cz/person/Kohout/info_soubory/exam1.htm [citováno dne: 25. 11. 2011]

[13] *Pravděpodobnost a statistika/Pravděpodobnost jevů/Příklady* [online] dostupné z: http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/index.htm [citováno dne: 2. 12. 2011]

[14] *Příklady* [online] dostupné z: http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~schim9am/priklady06.pdf [citováno dne: 7. 12. 2011]