Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

UŽITÍ INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ V BADATELSKY ORIENTOVANÉ VÝUCE PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY

Mgr. Jiří Kopecký

Disertační práce

Školitel: prof. RNDr. Tomáš Mrkvička, Ph.D.
Studijní obor: Teorie vzdělávání v matematice

Kutná Hora 2023

ABSTRAKT

Tato disertační práce se zaměřuje na integraci simulací náhodných množin do výuky pravděpodobnosti a statistiky na gymnáziích s využitím badatelského přístupu. Cílem je zjistit, zda takové začlenění může přispět ke změně vnímání těchto předmětů mezi gymnaziálními studenty. Výzkumná otázka zní: „Jak využití simulací náhodných množin v badatelsky orientované výuce ovlivňuje vnímání a postoje studentů gymnázia k předmětům pravděpodobnost a statistika?"

Studie zahrnovala analýzu odpovědí 52 respondentů z kontrolní a experimentální skupiny, kteří vyplnili dotazníky sémantického diferenciálu. Ze 110 provedených t-testů vyplynulo, že existují statisticky významné rozdíly v odpovědích obou skupin. Žáci experimentální skupiny vnímali ve svém sémantickém prostoru pravděpodobnost jako rychlejší a pestřejší a statistiku jako užitečnější.

V rámci didaktické rekonstrukce obsahu pro středoškolskou úroveň byly stanoveny výukové cíle v třech úrovních propracovanosti. Výsledky ukázaly, že více než polovina žáků gymnázia byla schopna vytvořit simulace náhodných množin se shluky nebo pravidelné množiny a odhalit a odstranit nejčastější chyby.

Výzkum poukazuje na to, že začlenění simulací náhodných množin do výuky může být efektivním nástrojem pro zlepšení porozumění a zvýšení zájmu o pravděpodobnost a statistiku. Tato metoda navíc podporuje rozvoj digitálních kompetencí a programovacích dovedností, které jsou stále důležitější v současném vzdělávacím prostředí. Práce také ukazuje, že simulace náhodných množin mohou napomoci studentům gymnázia k lepšímu porozumění základních konceptů statistiky a pravděpodobnosti, což je důležité v kontextu jejich rostoucího významu v moderním světě.

Klíčová slova:
badatelsky orientovaná výuka, simulace bodových procesů, MCMC, sémantický diferenciál, statistické myšlení

ABSTRACT

This dissertation focuses on the integration of random set simulations into the teaching of probability and statistics in high schools using an inquiry-based approach. The aim is to determine whether such integration can contribute to changing the perception of these subjects among high school students. The research question is: "How does the use of random set simulations in research-oriented teaching affect the perceptions and attitudes of grammar school students towards the subjects of probability and statistics?"
The study involved an analysis of the responses of 52 respondents from the control and experimental groups who completed semantic differential questionnaires. The 110 t-tests conducted showed that there were statistically significant differences in the responses of the two groups in the perceptions within the semantic space of students for probability as faster and more varied and for statistics as more useful.
In the didactic reconstruction of the content for the secondary level, learning objectives were set at three levels of sophistication. The results showed that more than half of the high school students were able to create simulations of random sets with clusters or regular sets and to detect and eliminate the most common errors.
Research suggests that incorporating random set simulations into the classroom can be an effective tool for improving understanding and increasing interest in probability and statistics. Moreover, this method supports the development of digital competences and programming skills, which are increasingly important in today's educational environment. The work also shows that random set simulations can help high school students to better understand the basic concepts of statistics and probability, which is important in the context of their growing importance in the modern world.

Keywords:
inquiry-based science education, point process simulation, MCMC, semantic differential, statistical thinking

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svoji disertační práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47 b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své disertační práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

v Kutné Hoře 15.1.2024

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Tomášovi Mrkvičkovi, Ph.D. za vedení a motivaci během studia.

Také děkuji všem, kteří nějak pomohli ke vzniku této práce a věnovali mi svůj cenný čas.

Obsah

1. ÚVOD

Pravděpodobnost a statistika je pro mnohé poměrně nedostižným a abstraktním oborem. Jelikož jsem ho vnímal do momentu setkání se s tématem simulací náhodných množin podobně, vyvstala otázka, která je hlavní motivací této práce, zda by mohly nějak pomoci pozitivně změnit vnímání předmětů pravděpodobnost a statistika také u někoho jiného. Při hledání cest jak toho dosáhnout se badatelsky orientovaná výuka ukázala jako jedna z ověřených aktivizujících metod vyučování, která rozvíjí rozmanité kompetence žáků a umožňuje nastavovat individuální obtížnost. Právě proto bude výsledný konstrukt uplatňovat její prvky při propojování zkoumaného s reálným světem.

Vzhledem k aktuálně nabíhající revizi RVP mohou simulace náhodných množin na gymnáziu nabízet variantu k zužitkování a rozvoji digitálních kompetencí v matematice a dovedností nabytých v novém předmětu Informatika, který na druhém stupni základní školy již zahrnuje z velké části právě programování v blokových prostředích.

Didaktickou rekonstrukci simulací náhodných množin pro žáky gymnázia volím ve své práci i proto, že se snaží oprostit výuku od formalismu ve smyslu pouhého „výběru správného vzorce“ a následného mechanického řešení problému.

Budu hledat odpověď na otázku, jak ovlivňuje využití simulací náhodných množin v badatelsky orientované výuce vnímání a postoje gymnazistů k předmětu pravděpodobnost a statistika. Abych ji mohl zodpovědět, pokusím se didakticky rekonstruovat vzdělávací obsah tradičně určený jen pro úzký okruh oborů vysokých škol do výuky pro úroveň střední školy a formuluji konkrétní cíle ve vzdělávacím obsahu simulací náhodných množin.

Struktura práce

Práce je logicky rozdělena na dvě části teoretickou a empirickou. Teoretická část zahrnuje čtyři kapitoly, které po řadě vymezují teoretický rámec pro použité pojmy badatelsky orientované výuky, statistického myšlení a využití technologií ve vyučování, které jsou postupně zasazeny do společného kontextu výuky matematiky na různých stupních škol. BOV poskytuje teoretický rámec pro pedagogický výzkum, který se snaží pochopit, jak se studenti učí matematické pojmy prostřednictvím řešení problémů, kritického myšlení a jak jejich učení smysluplně a poutavě podporovat. Výběr vhodného obsahu do badatelské výuky v matematice pro vyšší stupně, kde matematika není pouze nástrojem jiného oboru, ale cílem nového poznání, je dlouhodobým předmětem výzkumu. Podobnost popsaných modelů statistického myšlení a procesů badatelského vyučování naznačuje potenciál stochastiky pro didaktické ztvárnění kurikula v duchu BOV.

Empirická část popisuje výzkum, jehož cílem je poskytnout komplexní pohled na to, jak začlenění simulací náhodných množin do výuky na gymnáziu ovlivňuje vnímání a postoj studentů k pravděpodobnosti a statistice. Tento cíl s sebou nese problém didaktické rekonstrukce tématu simulace bodových procesů a jeho zařazení do výuky na úroveň střední školy. Zvolený konstrukční výzkum se opírá zejména o provedený polostrukturovaný rozhovor se žákem 9. třídy, a dva dílčí pokusy o zasazení téma simulace náhodných množin na gymnáziu. v prvním případě jsou po provedení analýzy žákovských prací a poznatků ze zúčastněného pozorování navrženy konkrétní výukové bloky prezentované zjednodušenou formou, která stručně vyjadřuje utříděnou strukturu základní části zkoumaného vzdělávacího obsahu využitelnou přímo ve výuce. Tento odvozený konstrukt slouží jako podklad druhého experimentu, který se snaží zjistit možné dopady na postoje žáků k předmětům pravděpodobnost a statistika metodou sémantického diferenciálu.

2. BADATELSKY ORIENTOVANÁ VÝUKA

Badatelsky orientovaná výuka (BOV) je výuka inspirovaná *bádáním* (anglicky *inquiry*) a badatelskými postupy. Odkazuje na různé způsoby, kterými vědci zkoumají okolní svět a navrhují vysvětlení na základě faktů odvozených ze své práce. Podporuje konstruktivistický styl výuky, nutí žáky pokládat otázky, vyhledávat a třídit informace, formulovat hypotézy, plánovat postup jejich ověření, vyhodnocovat výsledky a formulovat závěry.

Vývoj pojmu *bádání* v pedagogické a psychologické literatuře lze shrnout do tří hlavních oblastí. První oblast se týká historie pojmu a jeho vývoje. Klíčovou roli v rozvoji pojmu "inquiry" (bádání) v pedagogicko-psychologickém kontextu hrálo několik významných osobností. Značný vliv na vývoj BOV měla už práce Johna Dewey, jeho myšlenky o experimentálním učení a vzdělávání založeném na zkoumání a otázkách, byly základem pro další rozvoj této pedagogické metody. k dalšímu rozvoji pojmu ve vědě přispěly i významné osobnosti Jean Piaget, Lev Vygotsky, a Jerome Bruner. Jejich pojetí konstruktivismu mělo značný dopad na způsoby, jakými bylo BOV aplikováno v praxi. Přestože se všichni tito velcí myslitelé zabývali procesy bádání, nevyužívali tento termín programově. Výjimkou je Matthew Lipman, který hovoří o *bádání* jako o důležité kolektivní činnosti žáků a učitelů, kteří společně bádají a hledají pravdu, s cílem rozvíjet kritické myšlení (Lipman 1976).

Druhá oblast se soustředí na rozvoj pojmu *inquiry* v anglicky psané literatuře od 60. let 20. století. Za průkopníka tohoto termínu v pedagogickém kontextu je často považován Joseph Schwab (Schwab a Brandwein 1962; Schwab 1969). Schwab volal po rozdělení bádání do tří rozdílných úrovní a jeho vymezení *bádání* zahrnuje procesy jako formulace problémů, experimentování, posuzování alternativ a formování argumentů, což odráží definice pozdějších autorů.

Třetí oblast se zaměřuje na aplikaci a význam *bádání* ve vzdělávání, zejména v přírodních vědách. Tento přístup je označován jako „Inquiry-Based Science Education". Podrobně ve své práci tento koncept zkoumali Edelson et al. (1999). Tito autoři zdůrazňují přínosy BOV, včetně rozvoje schopností hledat a objevovat, speciálních dovedností pro zkoumání a lepšího porozumění vědeckým konceptům. Na druhé straně upozorňují na obtíže spojené s implementací BOV, jako jsou motivace studentů a jejich dovednosti. Význam *bádání* byl také zdůrazněn v národních standardech (National Research Council (U.S.) 1996) i výstupech evropských vzdělávacích institucí (Osborne a Dillon 2008).

V českém prostředí se termín zpočátku neujal. Jeden z prvních výskytů překladu termínu „inquiry teaching“ se objevuje v překladovém anglicko-českém pedagogickém slovníku (Mareš a Gavora 1999) jako „vyučování bádáním, objevováním“. Než se termín badatelsky orientovaná výuka uchytil i v české literatuře, používaly se spíše termíny částečně zachycující to, co se odehrává při bádání. Jejich přehled nabízí Samková et al. (2015): „učení řešením úloh a problémů, teorie didaktických situací, realistické matematické vzdělávání, matematické modelování, uchopování situací, tvoření úloh (problem posing), projektové metody, podnětná výuková prostředí a budování schématu a konstruktivistické přístupy k vyučování“.

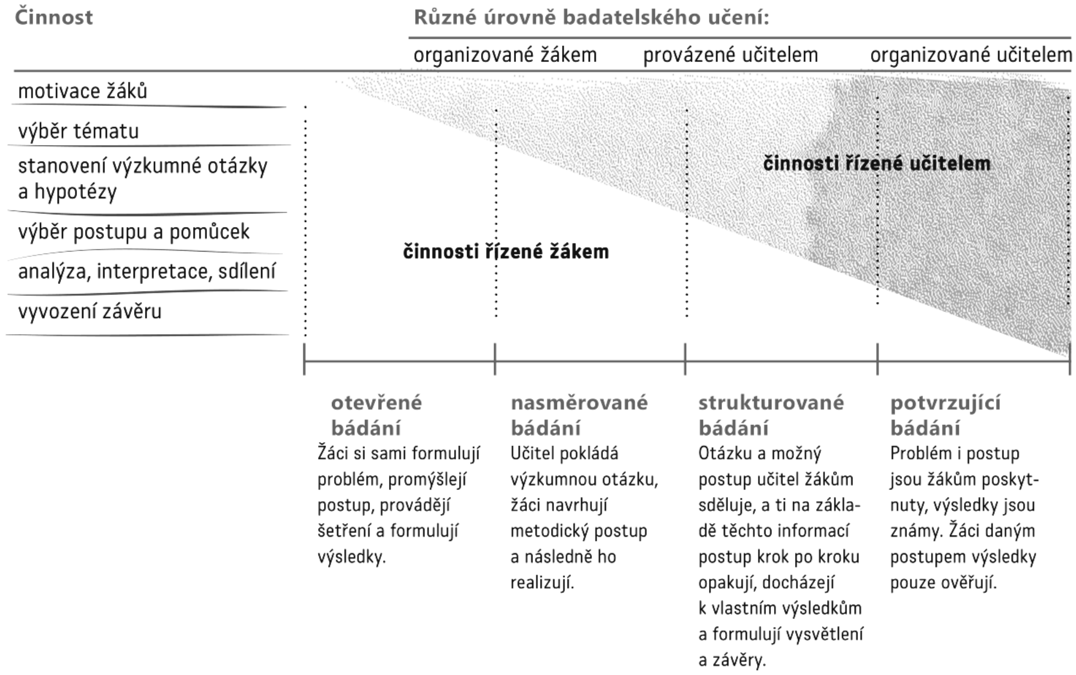
Samotné *učení objevováním* je tedy základem mnoha pedagogických směrů a nevylučuje žádné metody. Dostál (2015) se je snaží rozdělit do dvou skupin a nachází dvě roviny: tzv. aktivizující metody (heuristické metody, řešení problémů) a komplexní výukové metody (kritické myšlení, projektová výuka, učení v životních situacích atd.).

Vymezení pojmu *bádání* není jednoduché a v literatuře lze najít mnohem více či méně odlišných definic. Bádání ve smyslu BOV je proces, který zahrnuje mnohostranné činnosti žáků, jež rozvíjí jejich znalosti, dovednosti i další klíčové kompetence a pochopení toho, jak vědci studují přírodu a okolní svět. Bádání je zároveň vyučovací strategií i modelem pro pedagogické postupy (Bybee 2004). Pro Deweyho je bádání základem pro objevování nového a učení objeveného. Výčet činností žáků, které bádání zahrnuje, lze najít např. v národních standardech Spojených států pro přírodovědné vzdělávání (National science education standards) z roku 1996 (National Research Council 1996): pozorování; kladení otázek; zkoumání knižních pramenů i dalších zdrojů ke zjištění, co je již známo; plánování výzkumu, srovnání výsledků experimentu se zjištěnými fakty, používání nástrojů pro sběr, analýzu a interpretaci dat; navrhování odpovědí, vysvětlení a předpovědí; sdělování závěrů.

Z těchto standardů vycházely mezinárodní projekty, prostřednictvím, kterých se tento pedagogický směr objevil i v Evropě, potažmo v českém prostředí. Novější verze National science education standards (National Research Council 2000) rozlišuje bádání podle míry zapojení žáků na plné a částečné. Další studie si všímají, že některé aspekty bádání jsou pro žáky snadnější než jiné, a snaží se popsat více různých úrovní bádání. Definovat tyto úrovně se pokouší např. Edelson et al. (1999), Colburn (2000), Martin-Hansen (2002), Buck et al. (2008) i další autoři více či méně rozmanitým způsobem.

Asi nejčastěji užívané rozdělení, které uvádí Banchi a Bell (2008), vymezuje čtyři úrovně bádání podle rozložení badatelských aktivit mezi žáky a učitele na potvrzující, strukturované, směrované a otevřené bádání (Votápková et al. 2013). Potvrzující bádání je na nejnižší z těchto čtyř úrovní a je nejjednodušší. Žáci dostanou většinu informací od učitele a jejich úkolem je pouze ověřit předem dané závěry. I tato úroveň ale může dobře rozvíjet pozorovací, experimentální a analytické dovednosti potřebné pro další badatelské úlohy podobně jako strukturované bádání, při kterém se žáci navíc podle daného postupu snaží získat vlastní výsledky. Při tzv. nasměrovaném bádání učitel stále ještě pokládá výzkumnou otázku a předává důležité informace, ale jeho role se více upozaďuje, stává se více pouhým průvodcem a rádcem.

Na nejvyšší úrovni je otevřené bádání. Je nejnáročnější z kognitivního hlediska a od žáků vyžaduje dostatek zkušeností stejně jako od učitele. Výzkumnou otázku formulují sami žáci, stanovují hypotézy, navrhují postup a metodiku, realizují experiment a formulují závěry. Přehledné znázornění všech čtyř úrovní podle míry zapojení žáků a učitele v badatelském procesu reprezentuje obrázek 1.



Obrázek 1: Znázornění čtyř úrovní bádání v závislosti na řízení činností žákem a učitelem (Votápková et al. 2013).

Vyhodnocením a propojením modelů svých předchůdců rozvinuli Priestley et al. (1998) matici s šesti úrovněmi (původní osmiúrovňová se ukázala nepraktická). z jejich matice vychází Fradd et al. (2001) a modifikuje ji do podoby, která zřetelněji nastiňuje hranice při přesunu směrem k otevřenému bádání na škále od nuly do pěti. Český překlad zmíněné tabulky nabízí Samková et al. (2015, str. 98).

Škálu, kterou uvádí ve své matici Fradd et al. (2001), se snaží graficky znázornit obrázek 2. Skóre na škále roste s tím, jak učitel přenáší kroky badatelského výzkumu na žáka. Hranice ve skutečnosti nejsou pevně vytyčeny, jednotlivé části se prolínají, mohou se lišit v pořadí a dá se přihlédnout k míře dopomoci učitele nutné pro dosažení cíle.

Dostál (2015) nachází v literatuře dva odlišné pohledy na BOV. První směr podle něj „inklinuje k vyjadřování podstaty badatelsky orientované výuky v řešení problémů a k jejímu výraznějšímu překryvu s problémovou výukou“. Sem zahrnuje např. publikace Petr (2010), Papáček (2010) a Votápková et al. (2013). Druhým směrem je skupina autorů, kteří nahlíží na BOV nejen jako na pouhé řešení problémů (tzn. analýza problémů, vyhledávání informací, formulace hypotéz, jejich testování a následné potvrzení nebo vyvrácení), ale jako na komplexní pojetí výuky přesahující tento rámec. Sem řadí např. práce Artigue a Blomhøj (2013), Spronken-Smith et al. (2007), Samková (2011), National Research Council (2000) a Nezvalová (2010).

V tom hlavním se překrývají:

> *„Bádání je cílevědomý proces formulování problémů, kritického experimentování, posuzování alternativ, plánování, zkoumání a ověřování, vyvozování závěrů, vyhledávání informací, vytváření modelů studovaných dějů, rozpravy s ostatními a formování koherentních argumentů".*
>
> (Linn et al. 2004, str. 15).

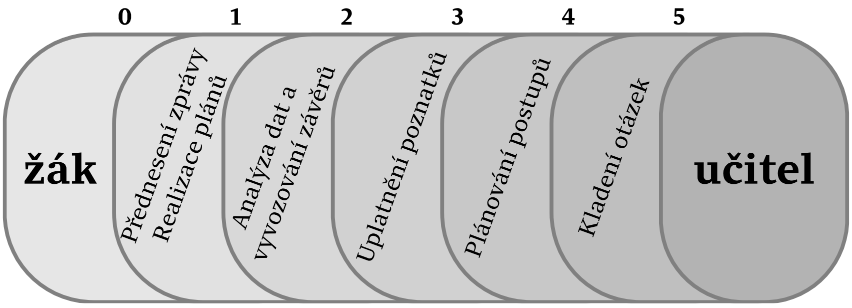
Přestože badatelský přístup má řadu potenciálních výhod, včetně rozvoje kritického myšlení, řešení problémů a spolupráce, existuje také řada rizik BOV, které je důležité zvážit. Nejčastěji je kritizována za svou náročnost na čas a zdroje, což klade velké nároky na učitele (Hattie 2008), kteří musí být dobře přepraveni profesně a navíc vybaveni potřebnými znalostmi a dovednostmi. v oblasti výzkumu. Učitelé uvádí nedostatek připravených zdrojů připravenosti a podpory, která by jim umožnila efektivně implementovat badatelské metody ve třídě pro učitele (Bílek a Králíček 2007). Škoda a Doulík (2009) upozorňují na nutnost snížit rozsah učebního obsahu v přírodovědných předmětech vyšších stupních, kterou sebou nese časová náročnost nejen badatelského přístupu.

Dalším kritickým bodem je fakt, že BOV nemusí být vhodná pro všechny žáky, zejména pro ty, kteří mají potíže se samostatným učením, s řešením problémů nebo s porozuměním abstraktním konceptům (Black a Wiliam 1998). Významné korelace mezi rozdílnými typy vnitřní motivace studentů a projevy BOV byly pozorovány i v českém prostředí (Škoda et al. 2015). Komplikací pro učitele ale i při měření efektivity BOV mohou být obtíže spojené s objektivním hodnocením úspěchu žáků při tomto vzdělávacím přístupu (Bransford et al. 2000).

Mezi limity při zavádění BOV do škol zařazuje Stuchlíková (2010) mimo požadavky na práci učitele a výuku schopnosti žáků: stanovovat priority, vlastní formulace při vytváření hypotéz a závěrů na základě důkazů, výsledků měření a dalších zjištění. Výuka klade požadavky na sytém i organizaci, které učitel vytváří, komunikuje, řídí, moderuje. Při řešení i dalších dílčích problémů zároveň ověřuje správnost žáky formulovaných vysvětlení. Abell et al. (2006) označuje za kruciální moment funkčního zavádění BOV právě proces přizpůsobování učitele tématu, situaci a třídě.

> *„Proces bádání se vyvíjí jako souhra známého a neznámého v situacích, kdy se jednotlivec nebo skupina jednotlivců potýkají s nějakou výzvou."*
>
> (Samková et al. 2015, str. 101)

Teoretický rámec pro termín BOV v kontextu evropském respektive českém tak, jak jej chápe tato práce a jak byl popsán výše, v některých ohledech dále vymezují Samková et al. (2015) a Artigue a Blomhøj (2013). Anglická terminologie není vždy shodná s českou. Dokonce ani terminologie BOVM není vždy shodná s terminologií BOV v jiných předmětech. v této práci se objevují termíny ve shodě s uvedeným vymezením podle Samková et al. (2015). Jejich teoretický model badatelských aktivit je na obrázku 3. Čáry představují cesty vedoucí od vstupní situace k výstupní, fialové body křižovatky, na kterých se žák rozhoduje o pokračování cesty. Pokud se setká na křižovatce s neznámými nebo pro něj příliš obtížnými věcmi, musí se vrátit a jít jinou cestou. Pokud existuje ve schématu cesta od vstupu k výstupu, která jde pouze přes zelené křižovatky, má žák šanci dobrat se řešení. Schéma slabého žáka (uprostřed) obsahuje také izolované zelené body, které sice žák zná, ale nepoužije je při řešení. Schéma zobrazuje celkem výstižně pohled na BOV jako na komplexní situaci s mnoha proměnnými faktory.



Obrázek 2: Žák během BOV postupně přebírá aktivitu a zodpovědnost za důležitá rozhodnutí v procesu bádání. Vlastní znázornění škály přesunu směrem k otevřenému bádání podle Fradd (et al. 2001).

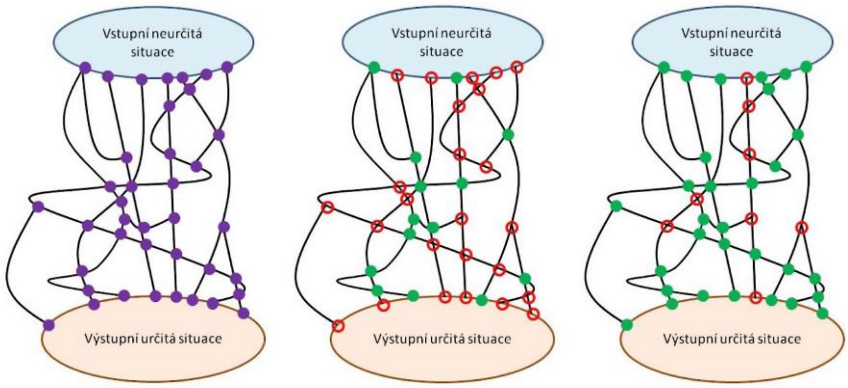
2.1. Badatelsky orientovaná výuka matematiky

Přestože BOV a teoretické rámce korespondující s BOVM mají v Evropě i u nás dlouhou tradici, česká pedagogika a didaktika začíná poznávat pojem BOVM a definovat až v posledních deseti letech. v zahraničích publikacích byly už dříve některé matematické úlohy a související specifické metody v duchu BOV zpracovávány v rámci skupiny přírodovědných předmětů (inquiry based science education – IBSE). První české publikace související s BOV vyčleňující z této skupiny samostatně právě matematiku byly aplikační výstupy z přeshraničních projektů. Až poté se o vyjasnění pojmu BOVM zasloužily především práce Samková (2011), Artigue a Baptist (2012), Artigue a Blomhøj (2013), Dorier a Maass (2014), Samková (2014), Roubíček (2014), Tichá a Hošpesová (2014) a zejména Samková et al. (2015).

Kromě základních myšlenek BOV zmíněných výše jsou charakteristiky BOVM v poslední zmiňované práci spojovány zejména s metodami učením úloh a problémů, vyznačujícími se otevřenými úlohami; teorií didaktických situací, jež předpokládají vytváření vlastních strategií žáků; realistickým matematickým vzděláváním, které se snaží o samostatné objevování matematiky a pochopení jejího významu v každodenním životě; matematickým modelováním, které se zaměřuje na konceptualizaci poznatků během bádání; projektovou výukou;

tvořením úloh (problém posing) a konstruktivistickými přístupy včetně tzv. Hejného matematiky.

Podstatnou myšlenkou z výchozího teoretického rámce pro uplatnění BOVM na vyšších stupních škol při použití informačních technologií je, že základem pro objevování nového je bádání. Toto bádání je využito pro učení objeveného, nejlépe opět bádáním. v praxi to znamená, že můžeme při uvádění nových matematických konceptů ve výuce nejdřív využít počítač k objevování různých variací modelů, jejich vlastností, pozorování při změně parametrů apod. Během bádání si můžou žáci vytvořit spontánně vlastní slovník a rozeznat a pojmenovat vztahy, které jsou pro ně důležité pro zasazení nových informací do stávající struktury vědění Až potom může přijít na řadu potřebná teorie a přesná terminologie.



Obrázek 3: Teoretický model procesu bádání – obecný nákres (vlevo), slabý žák (uprostřed), talentovaný žák (vpravo). (Samková et al. 2015)

Při výběru témat pro bádání v oblasti statistiky a pravděpodobnosti je, stejně jako v didaktice statistiky obecně, potřeba se snažit o to, aby žáci pracovali se skutečnými daty. Ideálně takovými, která se jich týkají a jsou jim blízká. Kvaszová (2011) uvádí mezi příklady pro projekty nebo seminární práce např. témata z oblasti kultury, osobní data, sportovní zájmy, používání technologií, kapesné a jeho využití, průzkumy v nižších třídách. Příklady problémů z běžného světa se snaží vybírat i internetový projekt Tříaktová matematika Dana Meyerse (Meyer 2022), který může sloužit jako jednoduchý volně dostupný zdroj aktivit charakteristických pro BOVM. Je to sbírka aktuálně čítající více než 80 materiálů připravených do výuky, které lze snadnou formou použít ve třech krocích podle jednotného schématu. v prvním kroku je navozen s využitím krátkého videa nebo obrázků problém, který vyzývá ke kladení otázek. Ve druhém kroku je prostor pro jejich řešení a jsou poskytnuty případné doplňující potřebné informace a na konec je odhalen výsledek a správné řešení. Forma výuky tak přímo odpovídá modelu E-U-R konstruktivistického přístupu k učení.

Větší motivaci pro zpracování přináší též data, která žáci sami nasbírají. Nemusí se přitom jednat jen o tradiční statistiky. Zajímavým příkladem jsou třeba data z nějaké hry, která mohou pomoci při tvorbě vítězné strategie. Např. lze nechat žáky zahrát ve dvojicích klasickou hru lodě a potom pomocí elektronického dotazníku sebrat dohromady od všech žáků souřadnice všech políček, na která lodě umísťovali. z četností jednotlivých pozic mohou v dalším kole zvýšit pravděpodobnost zásahu, pokud soupeř stejnou statistiku nemá, nebo v opačném případě vytvářet nové hypotézy, jak asi soupeř se znalostí těchto dat naloží.

Badatelsky orientované vyučování je směrem, který podporuje kritické myšlení, kreativitu a schopnost žáků řešit problémy. Jeho metody jsou v různých aktivizujících formách částečně užívány i bez označení BOV. Přesto povědomí českých učitelů o něm v posledních letech pomalu roste i s nadějí zvýšit zájem o přírodovědné obory. Koncept BOV je teoreticky jednoduchý, ale jeho implementace v praxi je velkou výzvou přinášející řadu náročných problémů pro zkušené žáky i učitele, obzvláště pak v matematice. Bádání ale umožňuje žákům aktivně se zabývat matematickými pojmy a principy způsobem, který je pro ně smysluplný a relevantní k jejich zkušenostem, což vede k hlubšímu pochopení a učení, potažmo jejich radosti z předmětu.

3. SIMULACE NÁHODNÝCH MNOŽIN

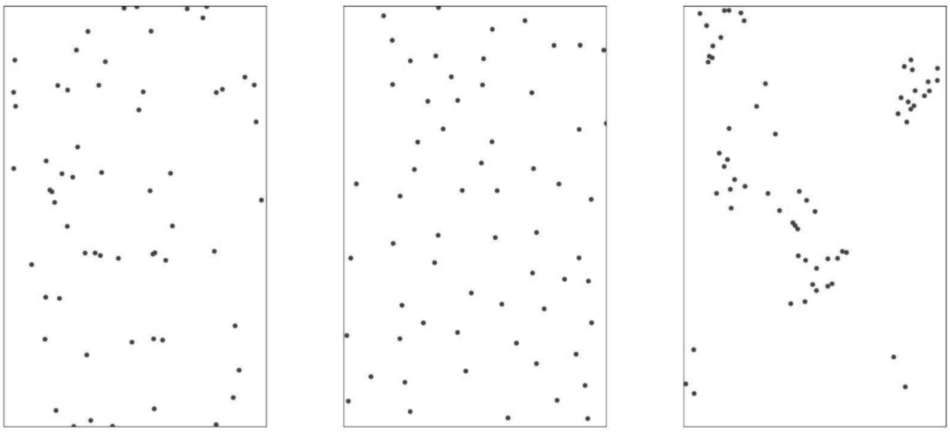
Simulace a analýza náhodných množin je komplexní a interdisciplinární pole, které se opírá o pokročilé matematické modelování, statistiku a počítačové simulace k pochopení a předpovídání chování náhodných systémů v různých oblastech. Ve své práci (Kopecký a Mrkvička 2016) jsem se zaměřil na studium tohoto moderního oboru statistiky a pravděpodobnosti, kterým je analýza a simulace bodových procesů. Tento obor zaznamenal díky dostupnosti výpočetní techniky v posledních desetiletích velký rozvoj (Illian et al. 2008). Mimo matematiky nachází uplatnění v oblastech biologie a medicíny, meteorologie, geografie, astronomie, lesnictví a dalších.

Statistika bodových procesů se snaží analyzovat geometrické struktury množin, které byly vytvořeny objekty náhodně rozmístěnými v jedno-, dvou- či trojrozměrném prostoru. Například pozice stromů v lese, vodoměrek na hladině rybníka nebo galaxií ve vesmíru. Tyto objekty přirozeným způsobem reprezentuje pomocí bodů a případně i kót. Body popisují umístění objektů a kóty poskytují přídavné informace jako velikost, typ, tvar apod.

Vizuální prozkoumání mnohdy nabízí rychlou kvalitativní charakterizaci typu množiny a může naznačovat i korelace společně s kótami nebo vlivy různých struktur mezi sebou. Obrázek 4 ukazuje příklady tří množin, u kterých lze celkem intuitivně odhadnout, o jaký typ se jedná. Pro přesnější kvantifikaci, standardizaci a jemnější rozlišení mezi typy prostorového chování je později potřeba sáhnout po vhodných metodách statistiky, které poskytují mnohem podrobnější informace o daných strukturách, než lze rozeznat pouhým okem.

Statistika náhodných množin čelí různým typům korelací ve zkoumané množině bodů. Relativní vzdálenosti mezi body korelují stejně dobře jako počty bodů v přilehlých oblastech. k tomu mohou být charakteristiky objektů (reprezentovaných body) dále prostorově vázány. Proto se statistická analýza velmi snaží o odhalení a popis těchto korelací. Použitím příslušných statistických metod můžeme náhodné množiny popsat z různých aspektů. Nejjednodušším z nich je intenzita, tj. střední počet objektů na jednotku obsahu či objemu.

Můžeme si všimnout podobnosti s výběrovým průměrem x z klasické statistiky. Složitější charakteristiky typické pro statistiku bodových procesů popisují korelace mezi body vzhledem k jejich vzdálenostem. Např. vzdálenosti nejbližších bodů nebo počet sousedních bodů do určité vzdálenosti.



Obrázek 4: Tři různé množiny bodů – vlevo náhodná, uprostřed pravidelná, vpravo se shluky.

Analýza náhodných množin tedy poskytuje informace o procesech, které stojí za jejich výslednou podobou, stejně jako o geometrických vlastnostech struktury reprezentované pomocí bodů. Statistika bodových procesů nám pomáhá při modelování těchto struktur a nalezení odpovídajících parametrů těchto modelů, které mohou být použity při klasifikaci a určení strukturálních změn v množinách závisle na čase nebo fyzikálních vlastnostech.

Bodový proces je stochastický model nesouměrných množin bodů. *Množina bodů* v nějaké oblasti představuje konkrétní vzorek nebo realizaci bodového procesu. v textu jsou někdy v podobném smyslu užívány podle kontextu termíny „množina“, „konfigurace“, „realizace“ nebo „model“. Simulace náhodných množin bodů je v práci chápána jako vytváření algoritmů, které budou produkovat množiny bodů popsané daným procesem. Někdy pro tuto simulaci množin užívám i výraz simulace procesu. Zejména při zobrazení (tzn. v popisech obrázků) takto vzniklých množin budu pro zjednodušení užívat slova simulace pro daný konkrétní výsledek celého procesu simulace.

Bodový proces označíme N. Budeme tím myslet náhodnou množinu bodů, tj. množinu všech bodů x_1, x_2, … procesu. Jinými slovy

$$N = \{x_i\} \text{ nebo } N = \{x_1, x_2, \dots\};$$

$x \in N$ znamená, že bod x patří do množiny N. Množina N může být konečná, nebo nekonečná. Pokud je konečná, celkový počet bodů může být deterministický, nebo náhodný. Dále označme $N(B)$ celkový počet bodů náhodné veličiny procesu N pro omezenou množinu B.

Nejjednodušším a zároveň nejdůležitějším nekonečným bodovým procesem je homogenní Poissonův proces. Tvoří základní kámen pro výstavbu mnoha komplikovanějších modelů.

3.1. Binomický bodový proces

Binomický proces můžeme považovat za speciální případ Poissonova procesu a je nejjednodušším příkladem prostorového bodového procesu. Binomický proces se skládá z n bodů, které jsou náhodně rozptýleny v množině W. Výraz „náhodně" zde znamená, že body $x\_1, \dots, x_n$ jsou rovnoměrně a nezávisle rozmístěny ve W. Předpokládejme, že množina W je omezená. Její obsah budeme značit $v(W)$, kde neutrální symbol v může znamenat také objem v kontextu trojrozměrných prostorových modelů.

Představme si nejdříve jeden jediný bod náhodně umístěný v prostoru. To je velmi jednoduchý příklad triviální jednobodové množiny, která nemá praktické využití. Spojením několika takových bodů vznikne binomický bodový proces. Jeho intenzitu můžeme odhadnout jako

$$\lambda = \frac{n}{v(W)}.$$

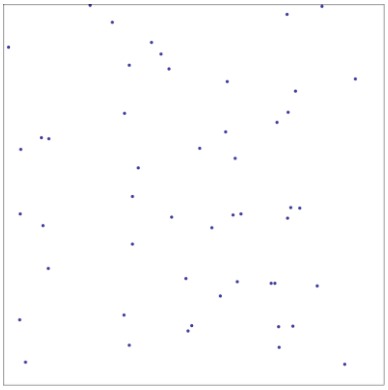
Důležitou metodou statistiky bodových procesů je simulace. Často je nezbytná pro dospění k určitým závěrům. Simulace binomického procesu je nenáročným příkladem a úvodem k obecným principům. Jednoduše jde o nezávislé umístění náhodných bodů v požadované oblasti.

Simulace jednoho náhodného bodu s rovnoměrným rozdělením v jednotkovém okně není komplikovaná. Pokud $\{u_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením na $\langle 0,1 \rangle$, pak body

$$x_i = (u_{2\mathrm{i}-1}, u_{2\mathrm{i}}) \text{ pro } i = 1, 2, \dots$$

tvoří posloupnost nezávislých náhodných bodů s rovnoměrným rozdělením v jednotkovém okně. Obecně řečeno, jestliže uvažujeme d-dimenzionální prostor, generuje se posloupnost náhodných bodů s rovnoměrným rozdělením v d-dimenzionální krychli $\langle 0,1 \rangle^d$ stejným mechanismem, tedy

$$x_i = (u_{(i-1)d+1}, \dots, u_{id}) \text{ pro } i = 1, 2, \dots$$



Obrázek 5: Simulace 50 bodů náhodně rozmístěných v jednotkovém okně.

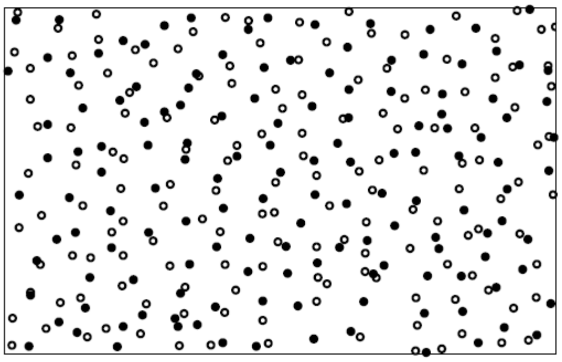
3.2. Hard-core procesy

Hard-core bodové procesy vytvářejí specifické *pravidelné množiny*, ve kterých se nevyskytují žádné dva body vzdálené od sebe dále, než je daná minimální vzdálenost r_0. Popisují modely reprezentující umístění středů nepřekrývajících se objektů, obvykle kružnic nebo koulí s poloměrem $R \leq \frac{r_0}{2}$. Dvěma hlavními typy hard-core procesů jsou procesy vytvořené operací ředění a procesy vytvořené interakcí pevných objektů.

V procesech vytvořených operací ředění mohou být odstraněny body, které jsou příliš blízko k ostatním, nebo eliminovat body v clusterech tak, že vznikne samostatný model izolovaných bodů. Modely vytvořené interakcí pevných objektů reprezentují objekty, které jsou pevné a nemůžou se vzájemně prolínat. Takže pokud jsou náhodně rozmístěny v prostoru, nemohou být k sobě blíž, než připouští jejich velikost. Takové objekty se mohou vyskytovat buď současně od samého začátku nebo se objevovat v průběhu času.

Hard-core procesy jsou definovány omezením blízkosti a interakcí, což vede k vytváření jedinečných strukturálních vzorů v různých fyzikálních, biologických a sociálních systémech. Například, v ekologii může být rozložení rostlin v určitých ekosystémech ovlivněno hard-core procesy, kde rostliny jsou rozmístěny tak, aby minimalizovaly konkurenci o zdroje, jako je světlo a živiny. v sociálních vědách lze podobné procesy pozorovat v určitých vzorcích lidského osídlení, kde lidé mohou preferovat určitou míru soukromí a prostor, což vede k vytváření rozptýlených komunit s většími vzdálenostmi mezi domovy.

Zajímavým příkladem hard-core procesů v biologických systémech může být rozmístění amakrinních buněk potkana na obrázku 6. Amakrinní buňky v sítnici potkana, stejně jako u ostatních savců, hrají zásadní roli v zpracování vizuálních informací. Tyto buňky se nacházejí v sítnici a jsou součástí vnitřního zpracovávacího obvodu, který moduluje signály mezi fotoreceptory, bipolárními buňkami a gangliovými buňkami.



Obrázek 6: Údaje amakrinních buněk (neurony nacházející se na sítnici oka) potkana (Diggle et al. 2006). 152 aktivovaných buněk (●) a 142 v klidu (○).

3.3. Cluster procesy

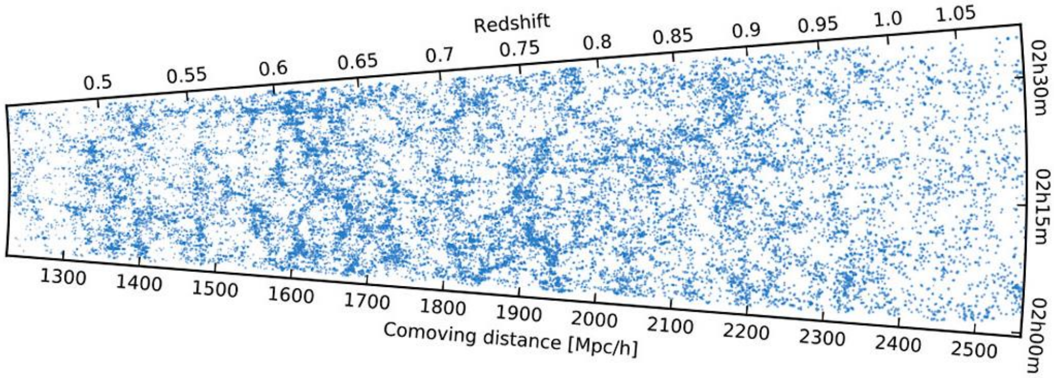
Cluster procesy se vyznačují výrazným shlukováním bodů namísto toho, aby byly rozmístěny rovnoměrně v prostoru. Rozložení a velikost shluků v cluster procesech se může výrazně lišit. Některé procesy mohou generovat malé shluky s několika málo objekty, zatímco jiné mohou vytvářet velké a husté shluky. Tato rozmanitost je způsobena jak vnitřními dynamikami procesu, tak vnějšími vlivy. Kromě toho jsou důležitými charakteristikami pro analýzu a modelování těchto procesů, tvar a intenzita shluků, která je dána jejich hustotou a rozložením v prostoru. Intenzita λ v cílové distribuci základního cluster procesu je určena několika faktory:

- Základní intenzita mateřských bodů: v mnoha cluster procesech, jako je například Poissonův cluster proces, se jednotlivé clustery tvoří kolem náhodně rozmístěných mateřských bodů. Základní intenzita λ mateřských bodů pak určuje, jak často se v dané oblasti objevují tyto centrální body.
- Průměrný počet bodů v clusterech: Vedle základní intenzity mateřských bodů je důležitým faktorem také průměrný počet bodů v každém clusteru. Tento počet může být konstantní nebo proměnný a je závislý na specifickém charakteru cluster procesu.
- Rozložení bodů uvnitř clusterů: Charakteristika rozložení bodů uvnitř jednotlivých clusterů také ovlivňuje celkovou intenzitu. Toto rozložení může být uniformní, nebo může vykazovat různé stupně koncentrace bodů blíže k mateřskému bodu.
- Rozsah a hustota clusteringu: Rozsah, ve kterém se body v clusterech rozprostírají, a celková hustota bodů v těchto clusterech rovněž přispívají k celkové intenzitě λ cluster procesu.

Podobně jako u jiných typu náhodných množin mohou intenzitu ovlivnit i specifické vlastnosti prostoru, ve kterém se cluster proces odehrává. Například v nehomogenních prostředích může intenzita λ kolísat v závislosti na různých lokálních charakteristikách. Kombinací těchto faktorů a je klíčová pro pochopení a modelování prostorové struktury bodového procesu.

Cluster procesy mají široké spektrum aplikací. Příkladů se nachází např. ve vesmíru, kde galaxie tvoří skupiny nebo shluky. Tyto galaxie jsou gravitačně vázány a pohybují se společně skrz vesmír. Viditelné struktury lze vidět např. na snímcích vesmíru z Evropské jižní observatoře na obrázku 7. Dalším příkladem cluster procesů v našem každodenním životě je chování hejna ptáků. Ptáci ve hejnu se pohybují současně, přičemž každý jednotlivec sleduje pohyby svých sousedů, aby udržel soudržnost a synchronizaci celého hejna.

V sociálních vědách lze pozorovat clusterování v chování lidí. Například lidé se často shlukují do komunit nebo skupin s podobnými zájmy, názory nebo chováním. Tento typ sociálního clusterování ovlivňuje různé aspekty lidského života, včetně politiky, kultury a ekonomiky. v oblasti technologie můžeme pozorovat clusterování v počítačových sítích, kde servery pracují společně, aby poskytly vyšší výkon, lepší dostupnost a odolnost proti chybám.



Obrázek 7: Mapa výseku vesmíru ukazuje polohy mnoha tisíc galaxií, které byly změřeny v rámci průzkumu VIPERS pomocí Velmi velkého dalekohledu Evropsé jižní observatoře. Pozorovatel na Zemi je vlevo a galaxie směrem doprava jsou zobrazeny v dřívějších obdobích historie vesmíru. Zřetelně je vidět složitá struktura velkorozměrové sítě vesmíru (ESO 2013).

Simulace náhodných množin a jejich následná analýza nabízí jiný úhel pohledu než tradiční přístup výuky pravděpodobnosti a statistiky. Ukázalo se, že v individuálních případech může sloužit jako předmět studia s vysokou mírou vnitřní motivace.

Díky grafické reprezentaci a intuitivnímu využití různých typů rozdělení pravděpodobnosti (rovnoměrné, binomické, normální a Poissonovo) matematického softwaru si student už v počáteční fázi buduje vlastní přístup k uchopení těchto pojmů a díky modelování abstrahuje souvislosti tohoto aparátu do reálného světa, přitom bez zdlouhavého počítání.

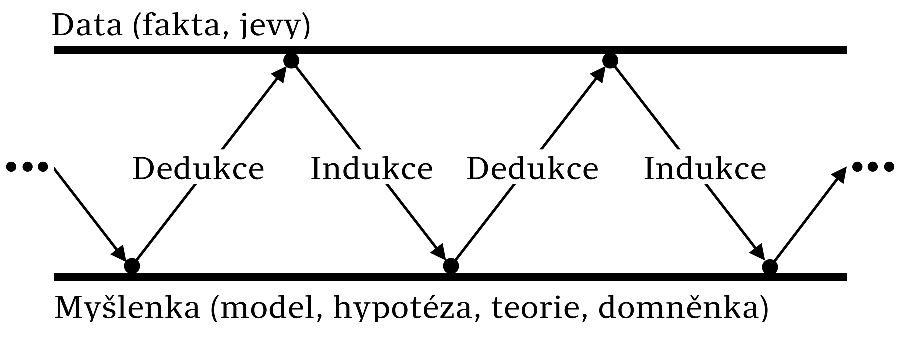
Problematika bodových procesů není v pedagogických studijních programech vysokých škol běžně obsažena. s ohledem na její krátkou historii oproti klasickým oborům matematiky se jí zatím věnuje ve světě pouze omezený okruh vědců, převážně aplikovaných věd. Řešení základních problémů analýzy a simulace náhodných procesů přitom dokáže některé žáky velmi zaujmout a na jiných typech českých vysokých škol jsou metody MCMC součástí studijního programu (např. Dřímal et al. 2006 nebo Krejsa 2012). Možnost matematizace a automatizace jednoduchých principů pozorovatelných v okolním světě pomáhá zvyšovat vnitřní motivaci a hravou formou může velmi rychle prohloubit porozumění statistickým a pravděpodobnostním konceptům.

4. STATISTICKÉ MYŠLENÍ

Termín statistické myšlení je chápán a používán jako zkratka pro pravděpodobnostní a matematicko-statistické myšlení. Objasnit procesy, které se podílejí na jeho fungování a jsou s ním spojené, se v uplynulých letech snažilo mnoho autorů. Statistické myšlení je obecně chápáno jako soubor myšlenkových aktivit, které zpracovávají informace v nedeterministickém prostředí, tzn., že ne všechny jevy mají svou příčinu a některé z nich lze přisuzovat náhodě.

Ve schématu na obrázku 8 je statistické myšlení podle Box et al. (1978) znázorněno jako zpětnovazební smyčka, ve které se od zpracovaných dat ke konkrétnímu řešení přechází střídáním induktivního a deduktivního postupu. Pokud není výchozí hypotéza během cyklu plně potvrzena, dojde k její úpravě a smyčka se opakuje.

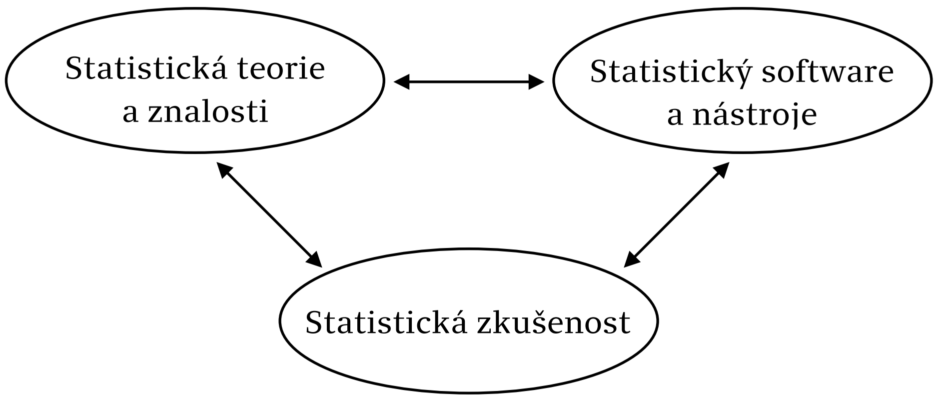
Na schéma by se dalo dívat i jinak. z pohledu BOVM můžeme v tomto modelu totiž identifikovat jednotlivé fáze procesu bádání. Jednotlivé kroky vyjádřené šipkami mohou odpovídat hranám mezi jednotlivými uzly grafů, které vytvořily (Samková et al. 2015) na obrázku 3. Jejich model obsahuje podobné zpětnovazební smyčky různých typů, např. vracení se v případě příliš obtížné situace nebo naopak hledání různých cest ke stejnému výsledku.



Obrázek 8: Proces statistického učení (Box et al. 1978).

Podle Moorea (1990) vychází statistické myšlení z uvědomění si variability dějů jako základní vlastnosti, které má být zpracování dat podřízeno tak, aby se mohla co nejvýrazněji projevit. Podobně vnímá zásadní roli variability Snee (1990) a rozděluje statistické myšlení do třech úrovní - strategická, řídící a provozní. Přičemž podstatou strategické úrovně, která by měla při učení dominovat, jsou tyto tři základní principy: 1) variabilita je obsažena ve všech procesech 2) každá práce je řetězcem vzájemně propojených procesů 3) snižování variability zvyšuje kvalitu.

S nástupem počítačů a jejich rozšířením do běžné praxe se začaly objevovat také nové možnosti jejich využití. Biehler (1993) analyzoval v té době revoluční softwarové nástroje použitelné pro výuku statistiky od 2. stupně ZŠ a ilustroval jejich integraci do vyučovacího procesu. Velký vliv výpočetní techniky, která může oproti tradičním metodám v učebním procesu nabídnout různorodější zkušenosti s manipulací dat a jejich reprezentací, znázornil do jednoduchého schématu na obrázku 9:



Obrázek 9: Sféry statistiky podle Biehlera (1993).

Schéma se skládá ze tří sfér statistiky, které se vzájemně ovlivňují. Naznačuje, že didaktická rekonstrukce matematické teorie může díky technologiím vést ke komplexnějšímu chápání. v další části se zaměřím na dva hlavní proudy, které mají obecnou platnost a jsou podrobeny největšímu výzkumu. Oba modely se v některých základních prvcích překrývají, avšak liší se v přístupu popisu.

Statistické myšlení v technologickém prostředí skrze videonahrávky analyzovali Ben-Zvi a Friedlander (1997), rozhovory se studenty a učiteli, pozorování a dotazníkové šetření. Během tříletého experimentu implementace nového kurikula zahrnujícího různé formy aktivit a projektů. Jejich model statistického myšlení sestává ze čtyř stupňů (fází), kterými člověk během učebního procesu prochází:

Fáze 0: nekritické myšlení

Studenti jsou zaujati technickými možnostmi a nekriticky je zkoušejí. U připravených nástrojů k pracovním listům mají tendence posuzovat data spíše na základě povrchních vlastností (tvar, barva, symetričnost atd.) než na jejich statistickém významu. Nekriticky přijímají počáteční nastavení softwaru a nejsou schopni vyhodnotit důležité informace.

Fáze 1: smysluplné užití reprezentace

V první fázi jsou žáci schopni používat statistické metody se správným odůvodněním. Umí vybrat vhodnou grafickou reprezentaci, modifikovat ji a transformovat (změnou měřítka, pořadí apod.). Propojení mezi analýzou dat s jejich získáváním a interpretací však není dostatečně rozvinuto a numerické metody mohou být ignorovány.

Fáze 2: smysluplná práce s různou reprezentací: rozvoj metakognitivních schopností

Žáci jsou nuceni hlouběji pátrat po významu a interpretaci používaných metod k úspěšným výsledkům. Rozhodují o vhodné reprezentaci dat, navrhují výzkumné otázky, jsou schopni data organizovat a reorganizovat (měnit počet kategorií, navrhovat frekvenční tabulky, seskupovat data, analyzovat dílčí data), se zdůvodněním používají různé grafické a numerické metody.

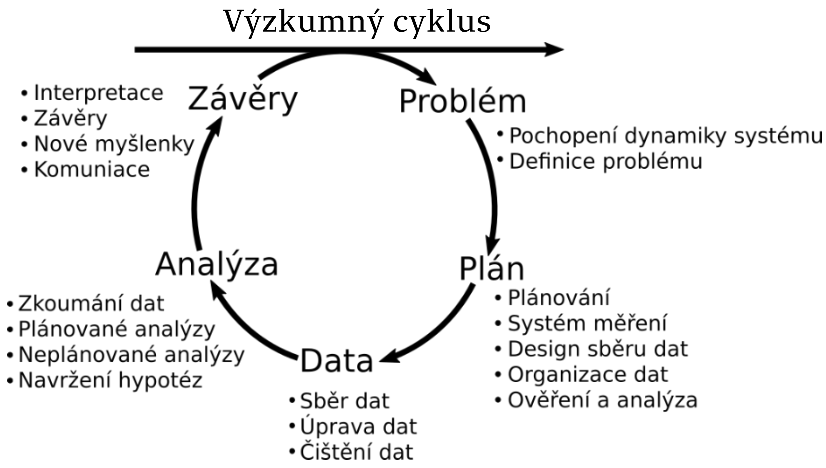
Fáze 3: kreativní myšlení

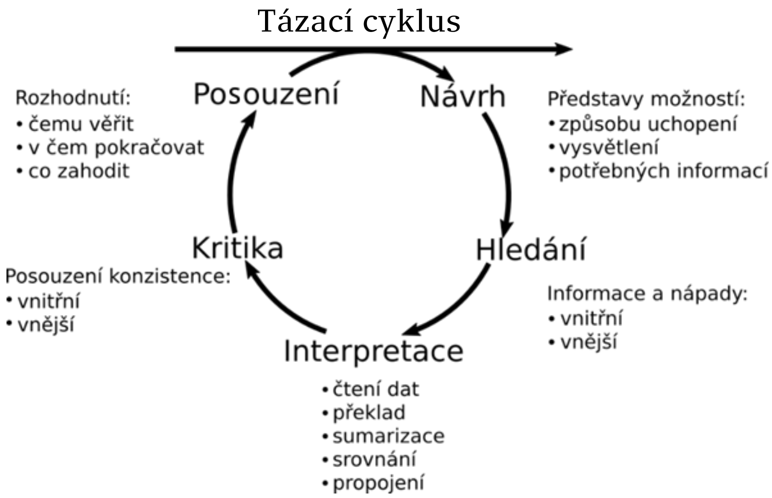
Někteří studenti jsou schopni k vyjádření svých myšlenek navrhovat netradiční metody či inovativní grafické reprezentace s využitím počítače či bez něj. Tento typ chování nebyl během výzkumu zcela obvyklý. Autoři jej popisují na konkrétním příkladu badatelsky orientovaného projektu založeného na reálných datech s lokálním významem, nabízejících pro žáky řadu otevřených výzkumných otázek.

Wild a Pfannkuch (1999) se pokusili popsat procesy v myšlení spojené s vyřešením statistických problémů v širším kontextu od definice problému až po jeho závěr. Jejich práce vychází z tradiční literatury zabývající se řešením problémů (Pólya a Conway 1957; Schoenfeld 1992) a bádacího cyklu PPDAC – Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusion – problém, záměr, data, analýza, závěr (MacKay a Oldford 1994). Podobný výzkumný cyklus uplatňují také Artigue et al. (2012) při popisu badatelsky orientované výuky.

Rozvinutím zmíněných obecnějších rámců myšlení a schémat řešení problémů dospěli (Wild a Pfannkuch 1999) ke čtyřdimenzionálnímu modelu statistického myšlení. Na rozdíl od schéma Ben Zvi a Friedlande (1997) jejich model předpokládá, že všechny čtyři komponenty probíhají zároveň, naopak ale neobsahuje kreativitu. Dvě z dimenzí tohoto rámce nazývají výzkumný (investigativní) cyklus a tázací (interogativní) cyklus. Schéma obou cyklů s vlastním překladem znázorňuje obrázek 10. Lze v něm identifikovat jednotlivé fáze bádání z pedagogického pohledu. Ty části, které jsou zde nad rámec obvyklých definic BOVM, lze tedy zařadit k sytému badatelsky orientované výuky pravděpodobnosti a statistiky a je dobré se na ně při výuce zaměřit. Zdůrazněme, že se dimenze prolínají v čase, takže tázací cyklus může probíhat na několika úrovních výzkumného cyklu najednou. Stejně tak jsou navzájem propojeny s dalšími dvěma dimenzemi, které Wild a Pfannkuch (1999) nazývají: typy statistického myšlení a dispozice.

V dimenzi typů statistického myšlení vymezují kromě obecných typů myšlení právě typy nezbytné pro statistické myšlení. Mezi obecné typy myšlení řadí strategické myšlení (plánování, předjímání problému, uvědomění si existujících omezení), hledání vysvětlení a modelování (konstrukce a její následná aplikace), užití dostupných technik (obdobné případy z minulosti, rozeznání a užití archetypů, užití nástrojů používaných k řešení). Jako typy myšlení nezbytné pro statistické myšlení uvádí rozpoznání potřeby dat, transnumerace (změna reprezentace ke snazšímu uchopení (nalezení „míry" reálného systému, nalezení reprezentace dat, propojení dat), uvažování ve statistických modelech, uvažování o variabilitě (všímavost a přisuzování, měření a modelování pro potřeby předvídání, vysvětlení, kontroly, vyjadřování, investigativní strategie) a integrace statistických informací, znalostí a představ do kontextu.





Obrázek 10: Dvě ze čtyř-dimenzí modelu statistického myšlení podle Wilda a Pfannkuchové (1999). Tázací a výzkumný cyklus, oba probíhají najednou i na několika úrovních.

Poslední dimenzí, která vstupuje do modelu statistického myšlení, jsou žákovy dispozice – skepticismus, imaginace, všímavost a zvídavost, otevřenost, tendence k hledání hlubšího významu, logické přisuzování, angažovanost a vytrvalost. Stejně jako tyto dispozice ovlivňují celý proces statistického myšlení na jeho nejzákladnější úrovni, tak jsou i samy ovlivňovány. Vzhledem k tvárné povaze inteligence tedy mohou být uvedené dispozice posilovány vhodnými procesy zahrnující ostatní dimenze, a je proto dobré se zaměřit při badatelsky orientované výuky pravděpodobnosti a statistiky na *statistické* části všech dimenzí.

V tomto modelu může hrát počítač na mnoha úrovních. Významnou roli může hrát během výzkumného cyklu téměř ve fázích, nejčastěji pochopení dynamiky systému a definice problému, plánování, sběru dat, jejich organizaci, úpravě dat a jejich čištění, zkoumání a analýze i interpretace. Stejně jako je prolínají dimenze modelu, objevuje se počítač na několika úrovních najednou a záleží na učiteli a jeho digitální gramotnosti.

Jednotlivé fáze jsou v uvedeném článku podrobněji popsány, součástí je i popis příkladů dobré praxe, využívaných technik a otázek podporujících a podněcujících statistické myšlení. Práce Wilda a Pfannkuchové je tak přínosnou empirickou studií. Avšak zcela opomíjí roli počítače, který statistické myšlení dnešních studentů i profesionálů ovlivňuje ve značné míře (Chance et al., 2007; Snee, 1999; Ben-Zvi a Friedlande, 1997).

Za zmínku stojí také fakt, že se ukazuje jako výhodné, pokud se studenti začínají s určitými formami průpravy ke statistice setkávat co nejdříve (Wild et al. 2011). Vedlejším přínosem takové výuky jsou mladším žákům přímočařejší a uspokojivější odpovědi na zajímavé problémy reálného světa.

5. TECHNOLOGIE VE VYUČOVÁNÍ

Éra 21. století je často považována za éru technologií. Technologie se staly nedílnou součástí našich životů – výrazně nám usnadňují práci, snižují její časovou náročnost a přinášejí dříve nepředstavitelné možnosti. Vliv technologií lze pocítit ve všech možných oblastech, z nichž jednou je i vzdělávání. Podle poznatků u nás i ve světě mohou technologie podporovat učení, zejména žákovu aktivitu. Výuka se pro něj stává interaktivnější a díky technice přináší nové zajímavé oblasti, které byly dříve jen těžko uchopitelné.

Tato kapitola vybírá a shrnuje poznatky z dostupné literatury, které definují teoretický rámec zkoumané oblasti. Jde postupně do hloubky od obecného využití technologií ve výuce bez ohledu na vyučovaný předmět, přes využití v matematice až ke konkrétním aplikacím v pravděpodobnosti a statistice.

První podkapitola popisující využití technologií ve škole bez ohledu na vyučovaný předmět je navíc obohacena o části obsahující vlastní pozorování některých chyb kolegů i vlastních a tipy, jak se s nimi vyrovnat. Samostatná část je pak věnována krátké případové studii gymnázia, jež patřilo mezi první školy v České republice, které začalo hromadně používat tablety ve výuce s představou, že tyto v budoucnu nahradí papírové sešity a učebnice.

Další podkapitoly zužují zkoumaný prostor na použití techniky v matematice, ve které nachází své výjimečné uplatnění díky specifičnosti tohoto předmětu. Počítač nabízí žákům bezpečný prostor pro učení a bádání a přináší zcela nové typy úkolů. Navíc s vybaveností žáků mobilními telefony a rozvojem aplikací na ně se rozrůstá pole možností jak technologii využít. Aplikace typu PhotoMath přináší žákům revoluční možnosti jako pomůcka při samostudiu a pohodlná kalkulačka zapsaných rovnic, která dovoluje soustředit se na vyšší cíle slovních úloh.

Poslední část se zaměřuje přímo na pravděpodobnost a statistiku. Konkrétně pak na počítačové simulace, které v těchto oblastech dovolují řešit ojedinělé typy příkladů a skýtají mimořádné možnosti.

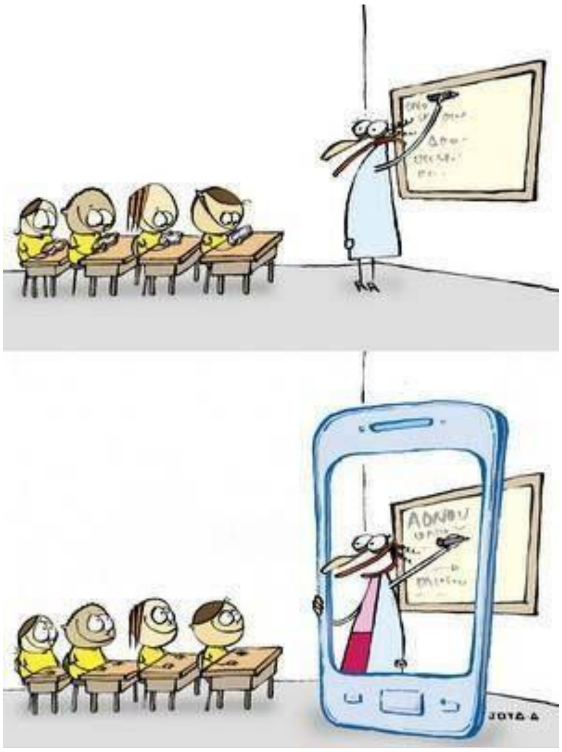
5.1. Využití počítačů bez ohledu na předmět

Funkce technologií v oblasti vzdělávání je několikanásobná: jsou zahrnuty jako součást učebních osnov, jako výukové systémy zprostředkující informace a instrukce, jako prostředek pro pomoc při výuce a také jako nástroj pro zlepšení celého procesu učení. Systémy s využitím analýzy učení a prediktivního modelování dokážou samy monitorovat učební proces studentů, inteligentně mu přizpůsobovat vzdělávací prostředí, identifikovat studenty s rizikem selhání nebo vysokou mírou opuštění kurzu a poskytovat jim speciální podporu. Technologie mohou sehrát klíčovou roli při změně vzdělávání z pasivního a reaktivního na interaktivní a proaktivní (Cheung et al. 2021).

Předávání znalostí je díky nim snadnější, pohodlnější, názornější a efektivnější. Naše mysl, podporována moderními technologiemi, má nyní tendenci pracovat rychleji, ať už se jedná o jakoukoli část života včetně vzdělávání. Už všechny stupně škol se do jisté míry musí spoléhat na inovace, které zjednodušují a usnadňují život, a nevyhnutelně jsou na nich závislé. Pandemická situace navíc tuto transformaci velmi urychlila. Mezi nejčastější prostředky ovlivňující, jak jsou technologie ve vzdělávání využívány uvádí Hamidi et al. (2011), Raja a Nagasubramani (2018) připojení k internetu a nepřetržité připojení, používání projektorů a vizualizací a digitální výuková prostředí.

V průběhu desetiletí význam internetu mnohonásobně vzrostl a také jeho role v moderním vzdělávání je nezpochybnitelná. Internet je dnes přítomný téměř ve všem, co používáme. Od televize přes herní konzole až po naše telefony – internet je doslova všude. I přes možnost podvodů a nevýhod pomáhá studentům při učení a úspěchu ve studiu. Používání internetu umožňuje žákům přistupovat k široké škále informací, využívat pohodlné nástroje a zdroje, spolupracovat, komunikovat a studovat vlastním tempem.

Podobně vizuální obrazy přitáhnou ve srovnání se slovy vždy větší pozornost. Používání projektorů a vizuálních materiálů při učení je u nás již běžnou formou použití techniky. Na používání prezentací a projekcí spoléhají instituce po celém světě ve snaze, aby byla výuka interaktivní a zajímavá nebo přinejmenším efektivní. Využití projektorů a interaktivních tabulí ve školách, stejně jako pouhé převedení informací na displeje vlastních telefonu, může zvýšit úroveň interakce žáků a zvýšit jejich motivaci. Jak si všímá Papáček (2010), generace z je vázána na digitální prostředí více než generace Y a preferuje i při vzdělávání počítač před knihami. Nadlehčeně to ztvárňuje obrázek 11. k přidání interaktivních prvků, typu otázek s automatickým vyhodnocením apod., lze využít mnoho různých efektivních nástrojů. Jako příklad lze zmínit třeba jednoduchou aplikaci Cube Nets na obrázku 12, ve které má žák v jednotlivých případech podle obrázku rozhodnout, zda se jedná o krychlovou síť či nikoliv. Jeho odpověď je automaticky vyhodnocena a potvrzení nebo vyvrácení je podpořeno úhlednou animací, při které se daná síť složí. v podstatě se jedná o obyčejný kvíz typu ano/ne, takže když si ho spustí každý na svém zařízení, jedná se o efektivní způsob, jak donutit všechny žáky přemýšlet nad tvarem krychlových sítí. Svou hravou formou a grafickým zpracováním skutečně dokáže žáky zaujmout a osvědčeně nachází uplatnění při výuce na všech stupních.



Obrázek 11: Anekdota kolující po internetu. Původní zdroj se nepodařilo dohledat.

Digitální technologie pronikají do vzdělávacího sektoru však stále více a více. Výsledkem tohoto prolínání je v některých případech dokonce nepřetržité spojení se studenty, různá fóra, která jsou k dispozici pro různé druhy úkolů nebo pomoci a přibývá aplikací, které si kladou za cíl pomáhat studentům v rozvoji a učení. Současně roste nabídka online kurzů sebevzdělávání a certifikace. Online programy s využitím různých aplikací a internetu nabízejí i špičkové instituce univerzity a jiné instituce. Tento koncept se bude pravděpodobně i nadále rozšiřovat, protože se mu dostává větší podpory a širšího povědomí. Online studium je vyhledávanou formou studia po celém světě obzvláště mezi studenty, kteří pracují a hledají flexibilní studijní programy.

Obrázek 12: Cube Nets (NCTM, 2020), hra rozvíjející prostorovou představivost s animacemi skládání krychlové sítě.

Mezi hlavní faktory ovlivňující integraci technologií ve vzdělávání zahrnují Sak et al. (2007), Walterová et al. (2004) a Neumajer (2007):

- informační politiku státu ve školství,
- začlenění technologií v rámci kurikula,
- počítačovou vybavenost škol a jejich internetové připojení,
- digitální kompetence učitelů,
- jejich postoje k počítačovým technologiím,
- dostupnost kvalitního softwaru použitelného ve výuce.

O obrovské výzvě, které čelí učitelé v dnešní společnosti v důsledku rychlého rozvoje znalostí, hovoří Matthews (2009). Moderní technologie kladou na učitele nároky, aby se je naučili využívat ve své výuce. z toho plyne, že tyto nové technologie zvyšují potřeby učitelů v oblasti jejich odborné přípravy.

Loyd a Gressard (1986), Tondeur et al. (2012) a Muilenburg a Berge (2001) tvrdí, že klíčovým faktorem úspěšného zavádění ICT do výuky jsou postoje učitelů k počítačům. Poukazují na skutečnost, že učitelé nemají vždy pozitivní postoj k počítačům a jejich špatný postoj může vést k neúspěchu projektů založených na práci s počítačem. Další nejčastěji uváděné překážky jsou:

- nedostatek času,
- nedostatečný přístup,
- nedostatek zdrojů,
- nedostatek odborných znalostí a
- nedostatek podpory.

Nezanedbatelnou komplikací je spolehlivost techniky (Butler a Sellbom 2002; Chizmar a Williams 2001). Do spolehlivosti zahrnují poruchy hardwaru, nekompatibilní software mezi domovem a školou, špatné nebo pomalé připojení k internetu a zastaralý software, který je k dispozici většinou ve škole, zatímco studenti a učitelé mají doma aktuálnější software.

Technologie však mají v kontextu vzdělávání jasný potenciál zvýšit přístup ke vzdělávání a zlepšit jeho relevanci a úroveň. Dori a Belcher (2005) popisují dopad technologií na vzdělávání a porozumění učitelů i studentů jako významný, je-li podpořen přístupy aktivního, kolaborativního, kooperativního a tvořivého učení a formativním hodnocením.

Při aktivním učení nástroje ICT pomáhají při výpočtu a analýze informací získaných při šetřeních, digitalizaci výsledků a výstupů žákovských prací a jejich snadné sdílení. Na rozdíl od učení založeného na memorování nebo učení nazpaměť podporují technologie zapojení žáků, protože žáci si sami vybírají, co se budou učit, a svým tempem pracují na problémech reálných životních situací.

Podobně při kolaborativním a kooperativním učení podporují interakci a spolupráci mezi žáky a učiteli bez ohledu na vzdálenost, která je mezi nimi. Poskytuje také studentům možnost pracovat s lidmi z různých kultur a spolupracovat ve skupinách, čímž pomáhá zlepšit jejich komunikační dovednosti i rozšiřovat jejich globální povědomí. Výzkumníci zjistili, že používání informačních a komunikačních technologií obvykle vede k větší spolupráci mezi žáky v rámci školy i mimo ni a existuje interaktivnější vztah mezi žáky a učiteli (Grégoire et al. 1996). Podle Panitze (1996) je spolupráce filozofií interakce a osobního životního stylu, kdy jsou jednotlivci zodpovědní za své činy, včetně učení, a respektují schopnosti a přínos svých vrstevníků.

V rámci tvořivého učení nachází technika využití zejména při manipulaci s existujícími informacemi a vytváření vlastních znalostí za účelem vytvoření hmatatelného produktu nebo daného účelu výuky. Responzivní výuka, resp. Formativní přístup, je přístup k učení zaměřený na studenty, který sbírá i poskytuje užitečnou zpětnou vazbu(William a Leahyová 2016), což lze snadno realizovat prostřednictvím různých interaktivních prvků. Technologie obecně umožňují studentům objevovat a učit se prostřednictvím nových způsobů výuky a učení, které jsou podporovány konstruktivistickými teoriemi učení, místo toho, aby si studenti pouze dělali poznámky a memorovali fakta.

Přínosy technologií lze tedy pozorovat na mnoha úrovních výukového procesu a jejich potenciál na zlepšení výuky a učení je nezpochybnitelný. Technologický pokrok, přinášející digitální kamery, projektory, software pro trénování mysli, počítače, prezentace, nástroje pro 3D vizualizaci, konferenční hovory apod. změnil školu a stal se pro učitele skvělým zdrojem, který pomáhá studentům snadněji chápat daný koncept. Nemělo by však jít o pouhé zatraktivnění výuky vizuálními efekty. Hodiny lze snadno udělat interaktivnější a přinášet nové úkoly a zajímavé oblasti.

V globalizovaném světě se studenti mohou virtuálně potkávat se svými protějšky prostřednictvím videokonference, aniž by museli opustit třídu. Některé platformy, jako například eTwinning, slouží k tomu, aby se studenti mohli učit cizí jazyky i odborné předměty propojením se třídami z jiné země spoluprací na projektech a sdílením nápadů. Současně se dnes stalo velmi důležitou součástí vzdělávacího systému online distanční vzdělávání. Několik zahraničních univerzit dokonce zahájilo studijní kurzy, do kterých se může student přihlásit, zcela online(García-Morales et al. 2021).

Mezi negativními dopady bývá nejčastěji uváděna zhoršující se dovednost psaní, stále častější případy podvádění a nežádoucí vlivy na soustředění žáků (Strom 2021). Digitální komunikace je méně závislá na pokročilých dovednostech v psané komunikaci, jejichž rozvoj může být, v důsledku nadměrného používání online chatování a zkratek, omezen. Digitální technologie mění způsob, jakým žijeme a komunikujeme, pamatujeme si a socializujeme se. Mohou vést k menší hloubce zpracování informací a podporovat jen povrchní porozumění (Carr 2011).

Technologické vymoženosti, jako jsou grafické kalkulačky, špičkové hodinky, minikamery a podobná zařízení, se navíc staly skvělým zdrojem podvádění při zkouškách. Pro studenty je snazší zadávat vzorce a poznámky na grafických kalkulačkách, přičemž je menší pravděpodobnost, že budou přistiženi. Pomocí aplikace v telefonu stačí namířit objektiv fotoaparátu na zadaný příklad a okamžitě se objeví jeho krokované řešení.

Komunikace prostřednictvím textových zpráv se stala zcela běžnou. Pro mnohé se stala akceptovanou normou i během dalších činností. Studenti si hrají se svým mobilním telefonem ve dne v noci. Neustálé připojení k online světu má za následek nesoustředěnost a nedostatek koncentrace při studiu a do jisté míry i při sportu a mimoškolních aktivitách.

Vliv technologií na vzdělávání má pozitivní i negativní dopady zároveň. Přináší zcela nové možnosti, mohou být prostředkem motivace, pomáhat efektivně využívat drahocenný čas, rozvíjet digitální kompetence žáků, které mohou uplatnit v budoucích zaměstnáních, a v neposlední řadě třeba šetřit papír pro tisk a kopírování. Stejné technologie však mohou negativně ovlivňovat pozornost a schopnost myslet (Spitzer 2014; Ra et al. 2018) nebo přinášet pocit osamělosti (OECD 2015) a horší známky (Carter et al. 2017). Pro učitele může být zvládnutí práce s technikou velmi náročné z pohledu dovedností i časově. Pořízení a instalace jsou většinou finančně nákladné, vyžadují odbornou instalaci a při nadměrném používání s sebou může nést i riziko zdravotních problémů. Záleží hlavně na učiteli, ale i na samotných žácích, do jaké míry dokáží vytěžit kladné stránky moderní techniky v dobrém světle a vyvarovat se jejím nástrahám.

Praktické poznatky k použití počítačů bez ohledu na předmět výuky

V této podkapitole jsou popsány některé v praxi pozorované fenomény, které mohou potkat učitele adaptujícího počítače, tablety a mobily do své výuky. Pozornost je věnována studentům, kteří jsou s prací rychle hotovi, problémům s jazykovými mutacemi a vysvětlení pojmu gamifikace. Na závěr jsou zmíněny dvě jednoduché metody, jedna řešící problém s nedostatkem počítačů a druhá pro přechod mezi aktivitami, např. od cvičení (kvízu, hry…) na mobilu k papíru a tužce.

Z pozorování kolegů, kteří se pokoušeli využít ve vyučování výpočetní techniku s větším či menším úspěchem, se jako častá chyba jeví nedostatek zajímavé práce pro rychlejší studenty. Žáci jsou totiž obvykle na různé úrovni nejen z odborného hlediska probírané látky a schopnosti řešit daný problém, ale liší se také jejich klíčové kompetence týkající se práce s počítačem.

To může snadno způsobit neobvyklý nárůst času navíc potřebného k dokončení úkolu, se kterým je potřeba počítat. Pokud je žák hotov, počítač mu nabízí mnoho lákadel, kam upřít svou pozornost – dnes nejčastěji sociální sítě, sledování videí či hraní nežádoucích her. Takové chování nejen nevyužívá jeho potenciál, ale zároveň může rušit a svádět k nečinnosti i spolužáky, kteří ještě pracují.

Zahrnutí úkolů pro tyto „rychlíky" do materiálu přípravy na hodinu je základní metodou, která pomáhá udržet aktivitu třídy žádaným směrem po celou dobu. I to je jedním z důvodů, proč je těžké vytvořit soubor kvalitních materiálů, které by fungovaly pro ostatní učitele jako kompletní kostra pro sestavení a jako stručná příprava vyučovacích hodin, které trvají 45 min a mají charakter individuální práce.

Takové přípravy hodin totiž vedle vlastního obsahu musí obsahovat také úkoly navíc, které nejsou pouze vyšší obtížností stejného problému, ale v ideálním případě přináší úplně nové téma a dříve nabyté kompetence jsou jen propustkou k novému bádání.

Jednodušší variantou je možnost nějaké hry vybrané učitelem. Na internetu lze snadno vyhledat mnoho her, které lze spustit v prohlížeči. Mohou to být velmi propracované výukové hry, kvízy, logické hlavolamy, aplety, trenažéry, hry pro více hráčů a mnoho dalších. I výběr, resp. hledání, vhodných her může být však při přípravě časově poměrně náročná záležitost. Zdůrazněme, že při použití vyhledávače je nezbytné vyhledávat klíčová slova také v angličtině, protože nabídka aplikací lokalizovaných do českého prostředí je velmi omezená.

Za zmínku stojí třeba univerzální závody motorek nebo závody na koních, kde při kliknutí na správnou odpověď z nabízených možností přidáte plyn, a tak získáváte náskok před soupeři, kteří mohou být virtuální nebo reální. Lze si vybrat z variant her s jednoduchými příklady od sčítání a odčítání, přes porovnávání čísel, odhady, zlomky, procenta, desetinná čísla, mocniny, určování průměru, soustavy souřadnic, dosazování do vzorce, jednoduché rovnice až po logaritmické rovnice a mnoho dalších.

Pokračovat lze až ke hrám, ve kterých hráč tankové bitvy musí vypočítat hodnotu určitého integrálu k zásahu soupeře. Přestože se jedná v podstatě o drilovací záležitosti, žáky tato forma většinou baví a dává větší smysl než zmíněné typy prokrastinace.

S angličtinou ve hrách a kvízech žáci obvykle nemají problém a mohou to vnímat jako pozitivní přidanou hodnotu hodiny. Stejně tak používání programů a aplikací CAS a DGS v angličtině je žáky povětšinou vnímáno pozitivně nebo neutrálně (Binterová a Šulista 2013). Zadání úkolů v angličtině je zároveň základní a nejjednodušší způsob integrace výuky předmětu a výuky cizího jazyka (CLIL). Ukazuje se, že při těchto metodách se žáci naučí mnoho zajímavých slovíček a frází, které nesouvisí přímo s matematikou (Beritová et al. 2012). Navíc mohou vždy využívat internetové slovníky a překladače. Je vhodné si však všímat, pokud někdo využívá přímo překlad stránek, který není většinou vůbec vhodný. Snadno může dojít ke ztracení smyslu v překladu, které ale jeho používáním při pohybu po webu, úkolech, cvičeních nebo hrách může vést do slepé ulice.

Další směr, ve kterém počítač pomáhá s aktivizaci žáků ve výuce při individuální i skupinové práci a který je u nás ve vzdělávání stále ještě v počátcích, je gamifikace. Gamifikace je způsob ozvláštnění učení (obecně pokus o vylepšení systémů, služeb, organizací a činností) s cílem vytvořit podobné zážitky, jaké zažíváme při hraní her, a motivovat a zaujmout tak uživatele (Hamari 2007). Toho se obvykle dosahuje aplikací prvků herního designu a herních principů (dynamiky a mechaniky) v neherním kontextu. Mezi nejčastěji zkoumané elementy patří body, levely/úrovně, odznaky, žebříčky, odměny, ukazatele průběhu, příběhové linie a zpětná vazba. Benefity gamifikace ve výuce a přehled literatury nabízí např. (Kiesler et al. 2011) nebo Nah et al. (2014). Virtuální prostředí je pro žáky přirozené a dovoluje mnoha způsoby prohlubovat zážitky spojené s výukou.

Osatuyi et al. (2018) vytvořili taxonomii vzdělávacích herních prvků založenou na osmi širokých kategoriích a 26 jedinečných herních prvcích. Autoři spojili jednotlivé herní prvky s pozitivními a negativními vzdělávacími výsledky. Gamifikace přitahuje pozornost v kontextu vzdělávání a odborné přípravy i mimo školní prostředí, protože nabízí řadu výhod spojených s výsledky učení. Např. společnost Microsoft vydala hru Ribbon Hero 2 jako doplněk ke svému kancelářskému balíku Office, který má pomoci naučit lidi efektivně jej používat. Tento projekt byl společností Microsoft označen za jeden z nejoblíbenějších projektů, které kdy její divize Office Labs vydala. Newyorský odbor školství s finanční podporou MacArthurovy nadace a Nadace Billa a Melindy Gatesových zřídil školu s názvem *Quest to Learn Center RD* založenou na učení hrou, která se snaží učinit vzdělávání pro moderní děti poutavější a relevantnější. Příkladem využití technik gamifikace v online vzdělávání může být také Khan Academy, na které žáci získávají dovednostní body a mnoho druhů odznaků. Pro některé žáky může sloužit jako motivace k plnění dalších cvičení i to, že si mohou za získané body a odznaky vylepšovat svého avatara.

Všechny školy nejsou stejně technicky vybaveny. Uveďme tedy ještě tip pro učitele, pokud nemá k dispozici počítač pro každého žáka, ale jen pro polovinu. *Rallye dvojic* je jednoduchá metoda pro práci dvou žáků u jednoho počítače. Žáci mají rozděleny role na řidiče a navigátora. Řidič má na starosti ovládání myši a klávesnice, zatímco navigátor mu dává pokyny. Je možné tyto role vystřídat v půlce nebo i vícekrát vždy po vypršení časového limitu. k tomu lze vybrat např. některou z nastavitelných časomír, které mohou být celkem zábavnou formou odpočítávání času při skupinové práci.

Obzvláště začínajícím učitelům mohou někdy činit problémy přechody mezi různými aktivitami žáků. Při změně činností, např. od individuální ke skupinové práci nebo ukončení práce s telefony a společný začátek práce s knihou, dochází k časovým prodlevám, neřízenému chaosu a namáhavému a zbytečnému opakování instrukcí. Přitom přesun mezi aktivitami, stejně jako ostatní opakující se činnosti během výuky, jejichž organizace zvyšuje efektivitu, se dá s žáky úspěšně cvičit. Linsin (2015) nabízí pět jednoduchých kroků, jak takové situaci předcházet. Zde je ukázka jeho metody ve třídě na příkladu ukončení aktivity s mobilním zařízením a začátkem nové činnosti:

1. Dát signál, že budu mluvit (zvonek nebo cokoliv jiného).
   Příklad: „Můžete mi věnovat pozornost?"

2. Použít „Za chvíli".
   Příklad: Za chvíli se přesuneme zpět do sešitu.

3. Říct pokyny, co nejjednoduseji a stručně, v jakém pořadí a co udělat k přípravě na další aktivitu.
   Příklad: „Až řeknu ‚deme na to,' vypnete mobilní telefon a dáte ho do tašky. Pak si vezmete tužku a sešit. Vymyslete a napište příklady… Je to jasné?"
   Poznámka: místo „deme na to" lze použít jiné signály: „Go", zvonek, „až tlesknu" atd.

4. Použít signál „Deme na to".
5. Pozorovat.

Na závěr však pro jistotu poznamenejme, že není cílem, aby technologie byly nasazeny v každé hodině. Tradiční metody, které hrají v dnešním školství nezastupitelnou a neotřesitelnou roli, s tím nepočítají. Stejně neprozíravé by také bylo vnímat technologie jen jako oživení výuky nebo její zpestření. Takové cíle mají jen krátkodobý efekt na nejnižších úrovních. Mnohem větší potenciál skýtá počítač např. jako prostředek a nástroj pro bádání.

Tablety a mobilní zařízení místo počítače – krátká případová studie

Ve shodě s většinou studií zabývajících se užitím technologií ve výuce Suleymanova (2021) potvrzuje, že postoj učitelů se jeví jako jeden z nejdůležitějších aspektů při integraci tabletů do výuky. Navíc upozorňuje na fakt, že v průběhu školního roku sledovaném v její studii docházelo k poklesu pozitivních postojů učitelů k *novým tabletům* nebo dokonce úplné stagnaci k negativním. Vývoj modelu adaptace tabletů měl na začátku podobný charakter a dnes tablety nevyužívá téměř nikdo z učitelů. Využívání vlastních mobilních zařízení, tzv. *bring your own device/technology* (BYOD/BYOT), se zlepšilo od návratu po prvních covidových opatřeních. Na Gymnáziu Jiřího Ortena v Kutné Hoře byly nasazeny tablety do výuky v jedné celé třídě od září 2012. Za finančního přispění sponzorů dostal každý ze 30 žáků primy od školy na celé své studium k užívání svůj iPad, který si mohli nosit mezi nosit svobodně domů (GJO 2013). Jedná se o prestižní školu Středočeského kraje, která dlouhodobě vyniká vysokou vybaveností výpočetní techniky a má i učitele, kteří chtějí techniku využívat a nebojí se nových výzev, které s sebou přináší. Přestože se někteří učitelé usilovně snažili hledat využití tabletů ve svých hodinách, velmi brzy se ukázalo, že není možné efektivně s ním pracovat tak často, aby mělo pro žáky smysl tablet do školy nosit každý den, ani kdyby se podobně snažili všichni kolegové. Takže z myšlenky, že místo učebnic budou žáci do školy nosit pouze jeden tablet, vznikla situace, kdy žáci nosili do školy všechny učebnice, a ještě k tomu tablet v pouzdře, které mu na váze neubírá. Elektronické učebnice se neosvědčily.

Tablety měli žáci u sebe i do dalších let. Druhý rok bylo novým primánům sponzorsky přispěno na nákup iPadů půlka částky. Třetí rok si mohli noví žáci víceletého gymnázia vybrat, zda si na vlastní náklady pořídí iPad nebo libovolný tablet s operačním systémem Android či Windows vybavený wi-fi (několika žákům bylo sponzorsky přispěno). Po třech letech experiment skončil a další ročníky už nebyly tablety vybaveny. Nebylo to potřeba. Ukázalo se, že už všichni noví žáci jdou do školy vybaveni chytrým telefonem. Přidaná hodnota tabletu vzhledem k jeho velikosti a váze není v této situaci zapotřebí. I této ve škole se tedy uchytil princip BYOD (bring your own device). z tohoto faktu a skutečnosti, že webové standardy jako jedna z mála dostupných cest zaručují zpětnou kompatibilitu, vyplývá z autorových zkušeností na nově zaváděné interaktivní materiály pro žáky tak, aby bylo dlouhodobě sníženo riziko technických problémů na minimum, velmi jednoduché požadavek: aplikace musí fungovat i v prohlížeči na chytrém telefonu. To je jediná podmínka, kterou většinou není těžké splnit. Samozřejmě pokud učitel zná lépe vybavení ve třídě a spolupracuje dlouhodobě, může zkoušet i různé nativní aplikace, zde však musí mít variantu pro operační systémy iOS i Android.

Protože žáci znají prostředí svého telefonu (cesty k nástrojům a nastavením, přístup k vytvářeným souborům a jejich sdílení, umí vkládat speciální znaky, mají uloženy přístupové údaje k používaným aplikacím apod.) a mohou si tam ukládat informace i dlouhodobě, může být BYOD efektivním didaktickým nástrojem, zdrojem informací nebo formativní zpětné vazby (Siani 2018). Naopak na mnoho činností je praktičtější používat papír a tužku. Takže si žáci ve většině předmětů dál vedou tradiční sešit a používají prověřené učebnice. I poměrně krátké trvání pilotního projektu na popisované škole přineslo mnoho užitečných zkušeností. Učitelé, kteří byli díky těmto tabletovým třídám motivováni do využívání aplikací na tabletech, byli seznámení s prostředími typu Socrative, Padlet, Nearpod, Mentimeter, Khan Academy apod., která přenesli i do modelu BYOD. Navíc snadnější byla i jejich pozdější adaptace na nově vzniklá prostředí i zavedení školního systému Moodle.

Je velmi důležité mít plán pro případ, kdy někdo z žáků zařízení mít nebude nebo třeba s vybitou baterií. Stačí třeba i jedno nebo dvě inventární zařízení k zapůjčení např. přímo ve třídě, v sekretariátu školy či u správce sítě. v případě, že nemá, nebo u sebe nesmí mít, vlastní zařízení více žáků, mohou být vhodnou variantou tabletové skříně nebo kufříky. To znamená, že je tablety vybavená některá z učeben školy. Ve speciální skříni (nebo mobilním kufru) je nabíjecí stanice pro potřebný počet žáků (případně jeho polovina). Na pokyn může učitel nechat žákům tablety rozdat a vrátit podle potřeby. Výhodou takové učebny může být i možnost pořízení a jednodušší správy placených aplikací.

Příklady dobré praxe s takovou tabletovou učebnou, pro jejíž financování musela vynaložit mnoho vlastního úsilí, občas systému navzdory, nabízí Doležalová (2019) nejen při výuce finanční gramotnosti. Tablety hojně využívá k individualizaci výuky, motivaci žáků a propojení výuky s reálným životem. Vyzdvihuje možnost skutečně interaktivní tabule, kterou může ze svého zařízení upravit kdokoliv, usnadnění sebehodnocení žáků a zpřehlednění jejich domácí práce. Stejně tak jejím žákům stačí i vlastní mobilní telefon nebo tablet. Ve výuce využívá rozmanitý digitální obsah od mobilních matematických her, přes digitální nástěnky, které tvoří sami žáci, systémy DGS a CAS, finanční webové kalkulačky a mnoho dalšího až k tvořivým úkolům jako vyfotit nějaký objekt a vyznačit jeho osu nebo osy.

5.2. Technologie ve výuce matematiky

Ohlédnutí do historie i současnosti teorie vzdělávání v matematice s důrazem na empirické výzkumy nabízí např. Vondrová et al. (2015).

v souvislosti s užitím technologií autorky uvádějí několik možných třídění výzkumů v této oblasti:

- podle typu použité technologie:
- programy (dynamická geometrie, CAS)
- média (pc, notebooky, tablety, interaktivní tabule, ...)
- internet
- kalkulačky
- podle účelu:
- rozvoj matematických poznatků
- sumativní či formativní hodnocení žáků
- změna kurikula
- vzdělávání učitelů
- podle obsahu:
- matematické modelování
- důkazy a argumentace
- algebra a zobecňování
- statistické uvažování
- a další

Současně upozorňují na fakt, jak se znalost možností, výhod a nebezpečí zařazování ICT do vyučování stává stále důležitější součástí učitelových kompetencí.

Podrobnější historické informace z domácího prostředí lze nalézt třeba u Mikulčáka (2007). Ten například už v souvislosti se zaváděním transparentů a filmových smyček do výuky matematiky v 60. letech 20. století zdůrazňuje, že o zefektivnění výuky matematiky nerozhoduje kvantita a kvalita používaných pomůcek, ale účelnost a účinnost jejich využití metodickou prací učitele.

Vyčerpávající explorativní výzkum o vlivu technologií ve vyučování matematice u nás provedla Robová (2012). Stejně jako další autoři, např. Clark-Wilson et al. (2014), dospěla k závěru, že záleží především na způsobu použití technologií než na jejich konkrétním typu a že hlavní roli při jejich integraci do hodin matematiky hraje učitel, jeho didaktické schopnosti a ICT kompetence. Příznivé spojení těchto faktorů dokáže výuku zefektivnit měřitelným způsobem a pozitivně ovlivnit celý její průběh. Výhod technologií si Robová mimo jiné všímá při nasazení konstruktivistických metod, jež bývají časově náročné. To znamená, že pomáhají řešit problém, který je badatelsky orientované výuce tak často vytýkán.

Jedním z nejpoužívanějších matematických programů je GeoGebra. Bezplatný matematický softwarový systém s otevřeným zdrojovým kódem, který používají výzkumní pracovníci, pedagogové a studenti po celém světě. Používá se především k vytváření geometrických diagramů a manipulaci s nimi a k řešení matematických úloh. Je to výkonný nástroj pro vizualizaci a zkoumání matematických konceptů a lze jej použít v široké škále oborů, včetně geometrie, algebry, kalkulu a fyziky. Výzkumní pracovníci v matematice, vzdělávání a dalších oborech mohou GeoGebru používat k vytváření a analýze diagramů, modelování a řešení matematických problémů a k vývoji vzdělávacích zdrojů pro studenty. Mezi konkrétní příklady využití GeoGebry při badatelské činnosti uvádí Pech et al. (2015) např. zkoumání cykloidy, průniku roviny s kuželosečkou nebo množiny bodů, kterou tvoří průsečíky výšek trojúhelníka při pohybu jednoho vrcholu po přímce rovnoběžné s protější stranou a výslednou množinou je parabola.

Podobnou bezplatnou online grafickou kalkulačkou, kterou hojně využívají studenti, pedagogové a výzkumníci, je Desmos. Tato kalkulačka užitečná zejména pro vykreslování grafů funkcí a rovnic a pro výpočty zahrnující algebraické výrazy. Má uživatelsky přívětivé rozhraní a řadu funkcí, které usnadňují jeho používání a zkoumání matematických pojmů, a proto může být ve zmíněných případech někdy lepší volbou. Kaňková a Kopecký (2016) použili tuto platformu pro prezentaci řešení žáků úlohy z kombinatoriky. Možnost vyjádřit se elektronickou formou je pro žáky přístupným zdrojem aktivity, někdy může být sama motivací, přitom jednoduchým způsobem zpracovatelná pro učitele skrze mnoho aplikací včetně většiny těch, které se naučili používat od začátku pandemie. Takto posbírané materiály pak mohou posloužit např. jako podklad ke zdůvodnění matematického postupu a k obhajobě vlastního postupu před třídou. Formulace strategií a hypotéz umožňuje aktivní ovládnutí matematických nástrojů a přispívá ke zdokonalení grafického projevu a k přesnému vyjadřování. Navíc prezentace postupů, které došly k výsledku různými způsoby, dává ostatním prostor pro vyhodnocování správnosti výsledků, jejich ověřování a vyvracování hypotéz. Zajímavým momentem u prvního použití grafických prostředí poskytujících volnou plochu je u některých žáků fáze čmárání, se kterou je dobré počítat a nechat ji dvě tři minuty volný průběh. Žáci se pak snadno uklidní a jsou schopni pracovat. Podobný efekt byl pozorován ve vícero třídách při prvním použití tzv. semaforu (metoda, při které má každý žák k vyjádření zpětné vazby tři kelímky – zelený, oranžový a červený) během zavádění formativního hodnocení do výuky na gymnáziu, kdy žáci z kelímků začaly stavět komínky, dělat čepičky a uši nebo koš na trefování pingpongovým míčkem (Kapitánová a Kopecký 2021).

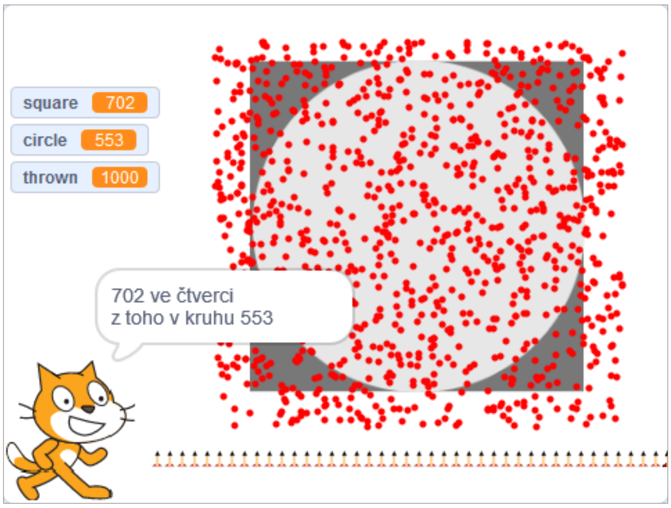
Během coronavirového uzavření škol se zlepšila digitální gramotnost žáků i učitelů a využití našlo mnoho aplikací. Mezi další aplikace u nás běžně používané v matematice na druhém stupni a střední škole v době odevzdání práce lze zařadit např. Khan Academy, umimematiku.cz, Realisticky.cz, opicimatika.cz, TechAmbition.cz nebo také YouTube a Moodle. Zvláštní postavení však zaujímá aplikace PhotoMath, která přináší do výuky matematiky nástroj, jenž může zásadním způsobem ovlivnit její dosavadní pojetí (Zain et al. 2023; Webel a Otten 2015). Je to mobilní aplikace pro studenty zdarma na všech platformách. Stačí zamířit výřez fotoaparátu telefonu na libovolně zadaný příklad (rovnici, výraz, vzorec, výpočet…), aplikace ho okamžitě, správně vyřeší a ke každému kroku výpočtu přidá vysvětlující komentář. Tato schopnost výrazně usnadňuje žákům proces učení se matematice a poskytuje jim oporu při řešení obtížných matematických úkolů a dokáže zvýšit angažovanost žáků (Igcasama et al. 2020; Zain et al. 2023).

V současné době patří aplikace PhotoMath mezi nejpoužívanější nástroje pro studium matematiky mezi českými žáky a studenty od druhého stupně základní školy (Válek et al. 2023; Hruška 2023). Jeho popularita se výrazně zvýšila během pandemie Covid-19, kdy mnoho žáků využívalo pohodlného řešení matematických úkolů během distanční výuky. Tento nárůst popularity však způsobil také zvýšený tlak na učitele. v mnoha případech se totiž ukázalo, že vyučující o existenci aplikace buďto nevěděli, nebo byli konfrontováni s nepříjemným rozčarováním, když se dozvěděli, že někteří jejich žáci využívali aplikaci k neoprávněnému zjednodušení svých školních povinností. Aplikace PhotoMath se tak často stala něčím, co učitelé vnímali s obavami, nebo dokonce s pocitem zloby. Na některých školách dokonce došlo k tomu, že je aplikace PhotoMath zakázána (Hruška 2023).

Pro učitele matematiky to představuje výzvu i příležitost. Místo toho, aby se pokoušeli bránit používání aplikace, mohou ji využít jako nástroj pro podporu výuky. Mohou ukázat svým žákům všechny výhody, které jim PhotoMath přináší, a zdůraznit smysluplnost matematických dovedností, které se jim snaží předat. U autora této práce vedl tento přístup k poměrně zásadnímu přehodnocení vlastní pedagogické filozofie učitele matematiky, cílů učení a smyslu učiva, potažmo jeho obsahu. Učitel může např. začít přemýšlet o výraznějším posunu od čistého řešení rovnic k řešení slovních úloh, které vyžadují jejich formulaci. Místo trávení času úpravami různých speciálních případů rovnic může více klást větší důraz na dovednost porozumění textu a matematizace problému do podoby rovnice, kterou pak může snadno vyřešit pomocí rychlé fotografie. PhotoMath může být cenným nástrojem pro rychlé vyřešení rovnic, ale stále zůstává na žákovi schopnost interpretovat a aplikovat výsledky na původní zadání.

Kromě toho se aplikace PhotoMath osvědčila jako užitečný zdroj pro samostudium a řešení matematických obtíží. Žáci ji mohou využít k překonání problémů, se kterými se setkávají při domácím studiu nebo ve škole, když se ocitnou ve slepé uličce. Pomáhá jim získávat jistotu a sebedůvěru při řešení matematických problémů, což může pozitivně ovlivnit jejich celkový přístup k matematice. Celkově lze tedy říci, že aplikace PhotoMath má významný vliv na výuku matematiky a může podnítit změny v pedagogických přístupech učitelů. Její schopnost zobrazit a vysvětlit kroky k řešení matematických úloh, stejně jako podpora samostudia, ji činí mnohem více než pouhým nástrojem pro opisování. Hledání způsobů, jak mohou být podobné aplikace efektivně využívány ve výuce matematiky nebo jak mohou pomáhat žákům při samostatném učení matematiky, aby jim usnadnily řešení obtížných úloh, by mohlo být námětem k dalšímu bádání.

Přímo v matematice zatím není většinou využíván Scratch, ale se změnou RVP na tzv. *novou informatiku* by to mělo být pro učitele matematiky jednodušší. Programování přináší do matematiky nové problémy, některé ukazuje např. Vaníček (2013). Další možné využití se nabízí ve využití simulací, jako příklad na obrázku 13, na kterém je ve Scratch zpracované řešení úlohy pro výpočet pí. Pokud učitel žáky s metodou odhadu pomocí simulace vůbec seznamuje, většinou nabízí jen hotové řešení, protože běžně užívanými systémy DGS a CAS není jednoduše řešitelné. Klíčový zdrojový kód tohoto příkladu ukazuje obrázek 17. Řešení stejného problému zpracované v Excelu jde vidět pro porovnání na obrázku 16. Úloha není v GeoGebře nebo Excelu pro žáky řešitelná tak jednoduše a úsporně jako ve Scratchi.



Obrázek 13: Odhad čísla π házením šipek na terč ve Scratch.

5.3. Technologie ve vyučování pravděpodobnosti a statistiky

Rozvoj informačních technologií znamenal zásadní zlom v celém oboru statistiky a pravděpodobnosti. v každodenním životě jsme obklopeni jejich aplikacemi. Školství však dokáže na tuto situaci jen velmi pomalu reagovat. Stále jsou někde studentům doporučovány učebnice, které předkládají čtenáři složité abstraktní modely a vzorce, ale současně opomíjejí možnosti využití počítače k rutinním činnostem potřebným pro jejich pochopení. v extrémních případech takové učebnice nezřídka doporučují hledání hodnot rozdělení pravděpodobnosti ve statistických tabulkách a tvorbu grafů a histogramů pomocí tužky a pravítka.

Přitom možnosti využití výpočetní techniky ve vyučování pravděpodobnosti a statistiky jsou velmi rozsáhlé. U nás se jim věnuje např. Řezánková (1998). Jmenuje tři oblasti, jež ovlivňují výuku statistiky prostřednictvím internetu, kterými jsou:

- informační a výpočetní zdroje,
- rozvoj nových výukových metod,
- prostředky na podporu výzkumu.

S rozvojem a širší dostupností technologií stále přibývá možných rolí, které mohou technologie ve vyučování pravděpodobnosti a statistiky zastávat. Komplexnější přehled pro učitele středních a vysokých škol těchto rolí provedli Chance et al. (2007). Typy nástrojů, které pomáhají zkvalitnit výuku statistiky, rozdělují do následujících kategorií:

- balíky statistického software
- výukový software
- pracovní listy
- aplety a jednoúčelové aplikace
- grafické kalkulátory
- multimediální materiály
- archivy dat.

Samotný výběr apletů a software při jejich nasazení do výuky je jedním z nejdůležitějších a nejtěžších rozhodnutí učitele. Mezi kritéria výběru většinou patří jejich dostupnost, přiměřenost, intuitivnost, účelnost a bezproblémový chod (DePaolo 2010). Co znamená pojem interaktivní grafika ve statistice, její vývoj a posuzování se snažil uspořádat (Theus 2009). Upozorňuje na rozdíl mezi interaktivní a dynamickou grafikou. Interaktivní grafika se podle něj vyznačuje přímou manipulací s daty (výběr podmnožin, podmíněný výběr, modifikace parametrů grafů), výběrem dat, podporou zvýrazňování a řazení. Pouhá dynamická změna parametru grafu (animace) je podle něj už zastaralá. Také upozorňuje u interaktivních prvků na formalizmus, který hrozí s jejich používáním stejně jako s používáním vzorců.

Ve výuce statistiky a pravděpodobnosti jsou nejčastěji využívány tabulkové procesory (MS Excel apod.), speciální statistický software (RStudio, SAS, JASP), všemožné webové kalkulačky, simulátory (hody mincí a kostkami) nebo obecněji použitelné programy počítačové algebry (Matlab, Mathematica). Jedním z dostupných formátů, který podporuje tvorbu interaktivní grafiky v duchu uvedené definice je i Computable Document Format (Kopecký, 2014). Tato platforma využívá silné nástroje software Wolfram Mathematica k publikaci učebních materiálů, které lze přečíst volně šiřitelným software CDF Player (http://www.wolfram.com/cdf-player). Nicméně je nutné pro jeho fungování nainstalovat do počítače softwarové doplňky. Praxe ukazuje, že zvolené prostředí musí být nejen co nejjednodušší, intuitivní a pokud možno známé. Nemělo by ani vyžadovat instalaci speciálního software, ani formou doplňků, dříve tak hojně používaných, avšak málo z nich dnes podporovaných. Minimalizovat riziko, technických problémů při využití ICT ve výuce může učitel tím, když bude využívat pouze aplikace fungující v libovolném prohlížeči na mobilním telefonu. Jinak mohou učitele snadno zaskočit technické problémy, jako se o ně např. podělila ve své práci Jahodová Berková (2017) při zkoušení nové platformy Maple T.A., což je LMS systém pro procvičování, zkoušení a hodnocení studentů. Během experimentu toho žákům ale mnoho nefungovalo. Měli kupř. problémy se zobrazováním odpovědí, pokud použili editor rovnic. Takže při testování počítačového systému nakonec paralelně zapisovali výsledky i na papír. Navíc měli problémy s českými znaky a chybějící podporou a dokumentací. z vlastních zkušeností a mapování omezeného okolí zdrojů, avšak bez podepření daty, se ukazuje, že drtivá většina studentů přicházejících na vysoké školy nemá z nižších stupňů zkušenost samostatné práce se systémy dynamické geometrie nebo počítačové algebry, smysluplné používání funkcí v Excelu patří spíše k nadstandartním dovednostem českých maturantů.

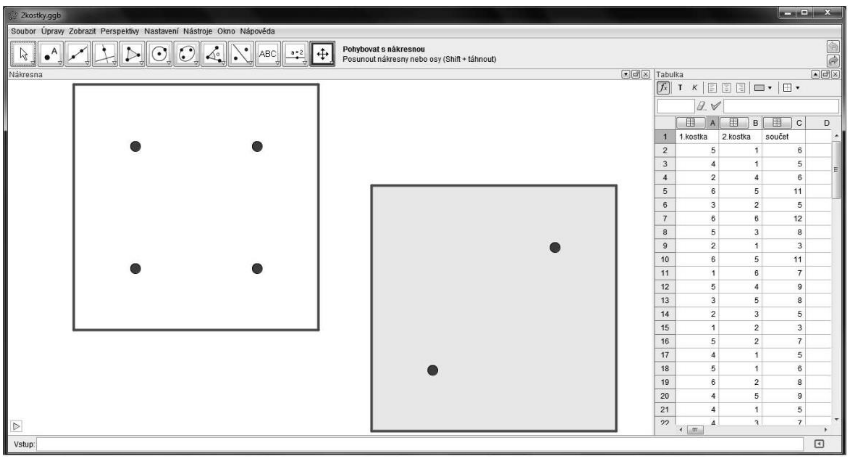
5.4. Počítačové simulace

S rozvojem a dostupností techniky se významně mění i charakter a možnosti statistiky jako oboru. k maximálnímu využití jeho potenciálu je však zapotřebí měnit i kurikulum statistiky jako vyučovacího předmětu. Chance et al. (2007) upozorňují na změny ve vyučovaném obsahu i formátu výuky jako takové a zmiňují příklady efektivního využití ICT nástrojů jako automatizace výpočtů, důraz na analýzu dat, vizualizaci abstraktních konceptů, řešení problémů reálného světa a jejich simulace.

Tak jako otevřely dveře novým metodám statistiky právě počítačové simulace, osvědčují se i ve výuce. Přesněji se jejich přínos snažili ověřit Jaakkola a Nurmi (2008). Rozdělili 66 žáků základní školy podle výsledků v pre-testu do tří rovnocenných skupin, u kterých byla poté část výuky fyziky vedena třemi různými přístupy: počítačové simulace, laboratorní cvičení a kombinace simulace-laboratoř. Jejich výsledky ukazují, že kombinace vyučování simulacemi a pomocí laboratorních cvičení dosahovala statisticky významných rozdílů při plnění cílů výuky než oba přístupy samostatně a také nejefektivněji podporuje konceptuální porozumění. Zatímco mezi simulacemi samotnými a laboratorním cvičením nebyly zjištěny žádné statistické rozdíly.

Příklad úspěšné integrace simulací do kurzu úvodu do statistiky nabízí Chance a Rossman (2006). Autoři používají k přiblížení teorie pravděpodobnosti, pochopení pojmu rozdělení pravděpodobnosti a srovnávacích testů kombinaci maker statistického software MiniTab a speciálně navržených apletů s odkazy na ně. Mezi doporučení pro jejich implementaci řadí také důraz na propojení hmatatelných simulací s těmi počítačovými, aby nevznikal pro studenty dojem "černé skříňky". Takové riziko hrozí právě při využívání apletů a pracovních listů, ve kterých jsou simulace předem připraveny a žákům neservírovány po stisku tlačítka.

Výukou stochastiky na ZŠ se zabývala Hájková (2015). V souvislosti s badatelským přístupem uvádí dobré zkušenosti se zasazením počítačových simulací do výuky matematiky na ZŠ a na následujícím obrázku (který byl použit s jejím laskavým svolením) demonstruje využití programu GeoGebra jako simulátoru hodu dvěma kostkami.



Obrázek 4: Ukázka simulace hodu dvěma kostkami v GeoGebře (Hájková, 2015).

V tomto jednoduchém příkladu žáci do tabulkového procesoru nechají počítač vygenerovat řádově tisíce pseudonáhodných čísel, která simulují výsledky náhodného jevu hodu dvěma kostkami. Hodnoty lze také sčítat a dále s nimi pracovat.

V odborných publikacích lze najít nespočet dalších příkladů, kdy si autoři pochvalují využití simulačních metod ve výuce (Jamie 2002; Chaput et al. 2011). Většinou se však jedná o nasazení v rámci vysokoškolských kurzů, které studentům předkládají buď předem připravené aplety, nebo vyžadují znalosti matematického software a pokročilé programovací dovednosti (Chance a Rossman, 2006).

Mezi zásadní kompetence při výuce pravděpodobnosti patří mimo jiné zkušenost žáků s pozorováním náhodných jevů a správná interpretace vyplývajících závěrů. Pro tyto účely se ve školské matematice nejčastěji používají experimenty, které souvisí s jednoduchými případy hazardních her, výběr prvků a jeho reálného života.

Některé z nich lze ve škole realizovat snadno, nejčastěji jsou to hody mincí nebo kostkou. Na některé problémy takového vyučování pravděpodobnosti a nedostatky, které mohou vzniknout špatným pochopením pojmů, upozorňuje například Štěpánková (2012).

Reálné experimenty mohou žáky aktivizovat, ale často probíhají s malým počtem opakování, což může mít za následek výrazné odchylky od teoretických vlastností náhodných jevů. Tento problém odpadá při využití výpočetní techniky, která nám umožňuje vykonávat řádově miliony opakování, a tím lépe demonstrovat daný náhodný jev.

Význam počtu opakování při určení relativních četností zasazuje do výuky Fehér (2015) s využitím simulací hodů mincí a kostek vytvořených v GeoGebře. Poukazuje na problémy se špatným pochopením vlastností náhodných jevů kvůli odchylkám při nedostatečném počtu opakování a vypočítává závislost pravděpodobnosti relativní odchylky na počtu opakování. Tak např. k určení pravděpodobnosti $p = 0{,}5$ padnutí hlavy na minci s relativní odchylkou menší než 1 % a určitostí 95 % je zapotřebí aspoň 9604 hodů.

Jako příklady nabádající k prozkoumávání relativních četnosti těchto náhodných jevů na počítači nabízí právě mince a kostky. Vyzdvihuje výhody počítačových simulací při pozorování rozdělení pravděpodobnosti, i když je přímý výpočet náročný, časově příliš zdlouhavý, nebo od žáků vyžaduje neznámé teoretické vědomosti. Nicméně žáci se nachází pouze v roli pasivního pozorovatele ve většině fází bádání podle Linn et al. (2004) uvedených ve druhé kapitole. Nepředpokládá se jejich dovednost samostatně vytvořit tyto simulátory, není na to v časové dotaci prostor. Žáci jsou tedy omezeni na hodnoty vybrané učitelem, chybí jim přímý prožitek z vlastní simulace a nemohou prozkoumávat charakteristiky jevů, které je zaujmou a sami si je vyberou.

5.5. Metoda Monte Carlo

Monte Carlo je třída algoritmů řešících matematické úlohy pomocí modelování náhodných veličin, simulace velkého množství experimentů založených na těchto modelech a odhadu jejich charakteristik statistickými metodami. Na počítači lze snadno vytvářet algoritmy používající generátory pseudonáhodných čísel k simulaci systémů a zkoumání jejich vlastností. Tyto postupy nachází široké uplatnění v mnoha stochastických metodách a použití v oblastech fyziky, chemii, výpočetní technice, medicíně a dalších.

Možnou podtřídu Monte Carlo algoritmů tvoří tzv. Markovovy řetězce. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) jsou procesy, jejichž stacionární rozdělení se rovná cílovému rozdělení. Zřetězením jednotlivých kroků, které berou v úvahu „zpětnou vazbu", lze simulovat pravděpodobnostní rozdělení, která nejde snadno generovat. Pro potřeby této práce není rozlišování obou termínů zásadní.

Za předchůdce metody je někdy považována tzv. Buffonova jehla, úloha z roku 1777, kterou vymyslel francouzský matematik Georges Louis Lecrerc de Buffon. Při této úloze lze pomocí experimentu, který spočívá v opakovaném házení jehly na kus papíru s rovnoběžnými linkami určit přibližnou hodnotu π z pravděpodobnosti, že jehla dopadne na některou z linek.

První skutečné využití metody Monte Carlo je připisováno Johnu von Neumannovi a Stanislavu Ulamovi, kteří při vývoji atomové bomby zkoumali chování neutronů při průchodu látkami. Když potřebovali určit procento neutronů, kterým se podařilo uniknout z nádrže vody, simulovali srážky neutronů s atomy vodíku pomocí rulety rozdělené na sto políček (odtud název podle města v Monaku, známého jako centrum hazardních her). Von Neumann a Ulam věděli, že k pohlcení neutronu dochází průměrně v jednom ze sta případů. Jediné ze všech políček jejich rulety tedy představovalo srážku, při které došlo k pohlcení neutronu, v ostatních případech neutron pokračoval ve svém pohybu.

Pomalu, ale stále a postupně roste počet oborů vysokých škol, které do svých studijních plánů zařazují i použití metod Monte Carlo. Jsou to téměř všechno školy technického zaměření (Dřímal et al. 2006; Virius 2010; Krejsa 2012 a další) a téma nejčastěji vede k řešení vícerozměrných určitých integrálů. Zastoupení na pedagogických oborech a potažmo zasazení do výuky pravděpodobnosti na nižších stupních je pouze okrajové a spíše výjimečné.

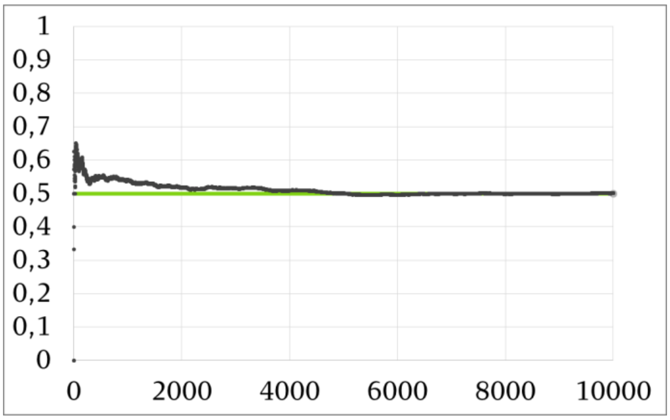
Pro potřeby pedagogického výzkumu lze při využití metody Monte Carlo rozlišit fáze, které takový postup obvykle zahrnuje, jak je navrhuje Plocki (2007) a lze v nich opět identifikovat fáze procesu bádání během BOV:

- konstrukce teoretického simulačního modelu
- určení způsobu, kterým bude tento model pomocí generátoru pseudonáhodných čísel realizován
- identifikace parametru (charakteristiky), který chceme odhadnout
- sběr a zpracování statistických údajů vhodnými nástroji
- určení hodnot parametru (charakteristiky) ze získaných údajů
- interpretační fáze

O využití metody Monte Carlo se studenty pedagogické fakulty a žáků gymnázia při vyučování pravděpodobnosti se pokusila např. Pócsová (2014). Poukazuje na problémy žáků ve fázi realizace výpočtů a dedukce, přesto popisuje při zařazení daných problémů rozvoj stochastických kompetencí, jako jsou schopnost překládat praktické problémy do jazyka matematiky, navrhování simulací, sběr a organizace statistických údajů a formulace úsudků typických pro stochastiku.

Využití programování při výuce pravděpodobnosti pomocí simulace metodou Monte Carlo na střední škole uvádí Štěpánková (2012). Vybrané příklady z výsledků simulací porovnávají pravděpodobnosti první nenulové cifry náhodných čísel na intervalu $(0, 1)$ s první nenulovou cifrou podílu dvou takto vybraných čísel. Simulace v této studii jsou žáky vytvářeny v prostředí BlueJ (jazyk Java). Podle zkušeností autora této disertační práce ale nejsou obdobná profesionální

programovací prostředí průměrnými žáky dostatečně přístupná a akceptovatelná.
Řešení problémů metodou Monte Carlo v tabulkovém kalkulátoru MS Excel u studentů vysokých škol zkoumal Gubo (2015). Jako příklady uvádí testování generátoru pseudonáhodných čísel funkce „Náhčíslo“ (angl. Rand) v Excelu, poměr počtu padnutí jedné strany mince k počtu všech hodů (viz obrázek 14), Brownův pohyb, odhad Ludolfova čísla a odhad jednorozměrného a dvojrozměrného určitého integrálu. Všechny použité obrázky v této práci jsou vlastní reprodukcí problémů, není-li uvedeno jinak.
Princip metod MCMC při práci v tabulkovém procesoru spočívá v generování náhodných čísel do jedno-či vícerozměrné tabulky. Čísla na každém řádku tabulky většinou představují změnu stavu modelu v daném kroku Markovova řetězce. z tabulky se potom dopočítávají konkrétní hodnoty stavů. Na rozdíl od prostředí s programátorským přístupem, které využívají různé druhy opakování (cykly) a proměnné. Výsledek lze i snáze krokovat a animovat.



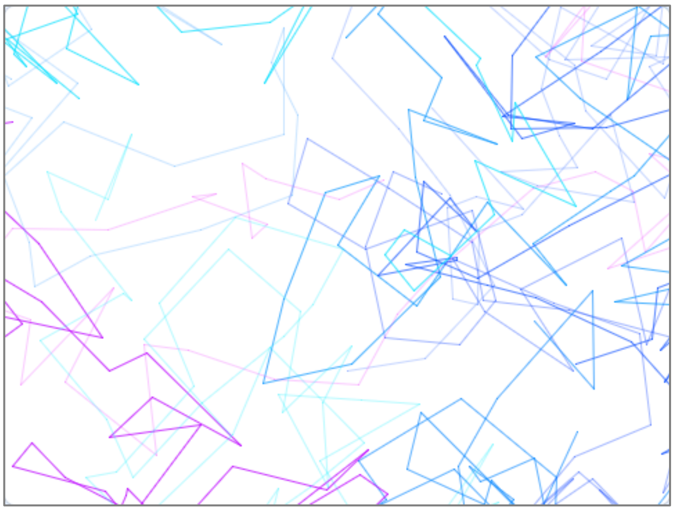
Obrázek 14: Pravděpodobnostní modely náhodných veličin mohou dosáhnout svého ekvilibria až po mnoha tisících krocích. Hodnoty po prvních stovkách opakování jsou nezřídka velmi zkreslené jako při této sérii hodu mincí v MS Excel.

Simulace Brownova pohybu není úlohou na odhad nějaké hodnoty, ale může sloužit k lepšímu přiblížení principu tohoto fyzikálního děje a jeho vizualizaci. Obrázek 15 představuje řešení ve Scratchi inspirované úlohou ze zmíněného příspěvku (Gubo 2015). Na rozdíl od modelu

v tabulkovém procesoru je mnohem snazší přidávat nebo ubírat počet částic a měnit ladící parametry modelu. Práci ve Scratchi toto velmi usnadňuje koncept *klonování*. Stačí nadefinovat vlastnosti jednoho objektu a ten lze spustit v mnoha *klonech* (instance daného objektu), které se chovají autonomně.
V tabulkovém procesoru není pro žáky jednoduché vytvořit např. sto tisíc řádků pro nějaký odhad nebo provádět opakovaně přepočet listu a výsledky automaticky ukládat. Přesto má např. i úloha na odhad Ludolfova čísla řešená v Excelu na obrázku 16 své opodstatnění. Ukazuje žákům jiný způsob využití počítače, zajímavou aplikaci matematických dovedností a má cenu jim ji předložit.

Ke generování pseudonáhodných čísel v Excelu lze využít přímo k tomu určený nástroj, který lze najít v nabídce postupně programu na kartě: Data > Analýza > Analýza dat > Generátor pseudonáhodných čísel. v něm lze vytvářet sady náhodných čísel s vybraným rozdělením (v nabídce je rovnoměrné, normální, Bernoulliho, binomické Poissonovo, diskrétní) a měnit jeho parametry. Nástroj pak do vybrané oblasti vloží hodnoty až na 32 tisíc řádků.
Pří řešení v tabulkovém procesoru je u náhodných souřadnic bodů výhodnější zůstat na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. s tím souvisí trochu odlišný přístup k úloze, než při zpracování ve Scratchi (viz obrázek 13), kde je kruh celý, a ne jeho čtvrtina. Na obrázku 13 je navíc vidět přístup, kdy pozorovací okno simulace přesahuje hranice zkoumané oblasti, a data z tohoto přesahu jsou zahozena.

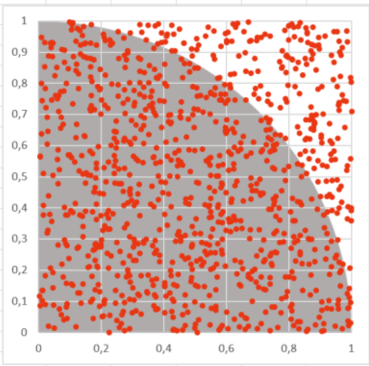
To je jedna ze základních technik zlepšení nezávislosti modelů (Illian et al. 2008). Simulované modely totiž mohou velmi často trpět různými okrajovými efekty, při kterých je hustota bodů při okrajích okna nepatrně vyšší nebo nižší než v jeho vnitřku. Obecně vhodný je tento přístup i k odstraněním problémů s krajními hodnotami generátorů a s limitními přechody. Realizace tohoto přístupu v tabulkovém prostředí vyžaduje komplikovanější výpočty a může být nabídnuta spíše jako rozšiřující varianta pro rychlejší žáky.



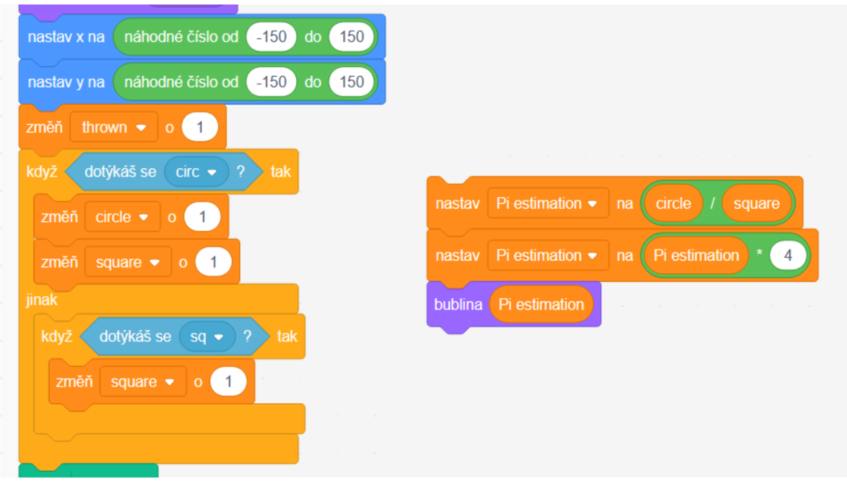
Obrázek 15: Simulace Brownova pohybu ve Scratchi. Deset částic a jejich padesát náhodných kroků.

Využitím Scratch se otevírají zajímavé aplikace matematiky pro bádání mnohem mladším žákům než doposud. Obrázek 17 ukazuje klíčová místa v programu ve Scratchi, který řeší úlohu odhadu hodnoty π metodou MCMC. Díky blokům pro *vnímání* („dotýkáš se…“), které prostředí Scratch obsahuje, zde odpadá matematika analytické geometrie a simulace je možná i na druhém stupni základní školy.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	vzdálenost	v kruhu			
2	0,30563	0,62462	0,69538	1		v kruhu	796
3	0,64579	0,6096	0,88806	1		celkem	1001
4	0,19904	0,37676	0,4261	1			
5	0,56662	0,13785	0,58315	1		odhad Pi	3,18082
6	0,99642	0,03206	0,99693	1		odchylka	-0,03923
7	0,94703	0,24025	0,97703	1		relativní odch	0,01249
8	0,83088	0,01386	0,83099	1			
9	0,65366	0,42347	0,77885	1			
10	0,63054	0,67626	0,92462	1			
11	0,96217	0,90149	1,31851	0			
12	0,65081	0,20618	0,68269	1			
13	0,23576	0,93097	0,96036	1			
14	0,31719	0,44591	0,54722	1			
15	0,37896	0,92822	1,0026	0			
16	0,94198	0,81234	1,24388	0			
17	0,71086	0,94815	1,18503	0			
18	0,37606	0,82024	0,90234	1			
19	0,73962	0,24781	0,78003	1			
20	0,34118	0,71637	0,79347	1			
21	0,60083	0,06728	0,60458	1			



Obrázek 16: Odhad čísla π v Excelu metodou MCMC „házením na terč“.



Obrázek 17: Fragmenty zdrojového kódu ve Scratchi při odhadu hodnoty π pomocí simulace. Vlevo virtuální hod šipkou, který lze snadno opakovat. Na velikosti čtverce nezáleží. Vpravo aproximace ze získaných hodnot.

6. CÍL VÝZKUMU, VÝZKUMNÁ OTÁZKA

6.1. Cíl práce

Hlavním cílem práce je prozkoumat, zda by začlenění simulací náhodných množin do výuky badatelským přístupem mohlo nějakým způsobem přispět ke změně vnímání předmětu *pravděpodobnost* a *statistika* u žáků gymnázia.

6.2. Výzkumná otázka

- Jak ovlivňuje využití simulací náhodných množin v badatelsky orientované výuce vnímání a postoje gymnazistů k předmětu pravděpodobnost a statistika?

Jelikož se jedná o vzdělávací obsah tradičně určený jen pro úzký okruh oborů vysokých škol, je nezbytnou součástí výzkumu problém didaktické rekonstrukce tématu simulace bodových procesů a jeho zasazení do výuky pro úroveň střední školy. Tento problém generuje sekundární výzkumnou otázku:

- Jaké konkrétní cíle mají být stanoveny ve vzdělávacím obsahu simulací náhodných množin uzpůsobeném pro gymnázium?

7. METODOLOGIE

Vzhledem k povaze cíle a výzkumným otázkám byl výzkum veden smíšeným přístupem a probíhal v několika fázích. Kvantitativnímu hodnocení vlivu simulací náhodných množin na vnímání a postoje žáků gymnázia k předmětu pravděpodobnost a statistika musela předcházet kvalitativní didaktická rekonstrukce daného vzdělávacího obsahu.

7.1. Design výzkumu

Jelikož výzkum a jeho produkty mají být zároveň prakticky aplikovány ve výuce, byl za hlavní výzkumnou metodu zvolen konstrukční výzkum (Reeves 2006; Trna 2011), angl. *design-based research*, *design research* nebo *educational design research*. Konstrukční přístup zaujímá v moderním didaktickém výzkumu svou významnou roli především tehdy, pokud je cílem výzkumu nejen objevování nových poznatků, ale i vývoj nových konkrétních postupů nebo nástrojů použitelných v praxi přírodovědného vzdělávání (Trna 2011; Ellederová 2017). Trna a Trnová (2014) ověřili v praxi efektivitu modelu konstrukčního výzkumu upravenou pro komponenty BOVM. Vycházejí přitom z teoretického modelu (Reeves 2006), který tuto výzkumnou metodu charakterizuje jako cyklus čtyř fází - analýza praktických problémů výzkumníky a praktiky, vývoj řešení s teoretickým rámcem, hodnocení a testování řešení v praxi a dokumentace a reflexe k produkci konstrukčních principů. v souladu s Reevsovým schématem jsou etapy konstrukčního výzkumu této práce uvedeny níže. Dodejme ještě, že existuje více možností českého překladu termínu *design-based research*, ekvivalent *konstrukční výzkum* a názvy pojmenování jednotlivých etap tato práce přebírá podle Trny (2011):

Etapa 1: Analýza praktických problémů výzkumníky a praktiky

Cílem výzkumu je najít možné vlivy simulací náhodných množin přístupem BOV na postoje žáků gymnázia k předmětu pravděpodobnost a statistika. Problémem na počátku výzkumu ale byla úplná absence samotných materiálů a cílů vzdělávacího obsahu tématu simulace náhodných množin pro žáky na střední škole. Proto byla jako první fázi výzkumu zvolen jako dílčí cíl didaktické rekonstrukce vhodných konceptů vzdělávacího obsahu oboru simulace a analýzy náhodných množin pro úroveň střední školy. Řešení by mělo zahrnovat:

- Stanovení cílů, metod a formulace nosných myšlenek pro přípravu BOV transformovaného kurikula.
- Didaktická redukce vhodných vzdělávacích obsahů a jejich didaktická transformace s ohledem na možnosti a potřeby žáků, požadavky definované v kurikulárních dokumentech a ostatní činitele ovlivňující vzdělávací proces.

Uvedený cíl s sebou nese podotázky, na které se práce pokouší odpovědět:

- Do jaké úrovně jsou žáci gymnázia schopni vytvářet jednoduché modely prostorových bodových procesů? Jakých výsledků dosáhnou během tří vyučovacích hodin?
- Jaké dovednosti a znalosti žáků jsou nutné pro zasazení tématu simulace náhodných množin nezbytné a které z nich budou žáci schopni spontánně aplikovat?
- Jaké strategie řešení problémů se mohou v průběhu výuky objevit?
- Jaké nové role mohou hrát informační technologie v badatelsky orientované výuce pravděpodobnosti a statistiky?
- Jakých chyb se žáci budou dopouštět?
- Které části vybraného modelu statistického myšlení taková výuka ovlivňuje? Jak je rozvíjí? Které jsou zcela opomíjeny? Ve kterých se prolíná s klasickým přístupem?

Etapa 2: Vývoj řešení s teoretickým rámcem

Teoretický rámec řešení problému tvoří didaktická rekonstrukce (Knecht 2007). Přístup k rekonstrukci vychází z poznatků o badatelsky orientované výuce, využití technologií ve výuce matematiky a statistickém myšlení. Didaktická rekonstrukce vzdělávacího obsahu simulací náhodných množin proběhla v několika zpětnovazebních smyčkách a při samotném vývoji řešení problémů bylo využito několika metod. Mezi ně patří didaktická analýza materiálů a poznatků získaných při studiu náhodných množin (Kopecký 2012) a odhadu parametrů cluster procesů Bayesovou metodou (Kopecký a Mrkvička

2016), vymýšlení interaktivních pomůcek (Kopecký 2014), úloh a jednoduchých postupů. Další postupy zahrnovaly opakované modelování rozličných náhodných množin v různých prostředích DGS, CAS a programovacích jazycích a diskuze s experty na náhodné procesy o vhodných poznatcích a modelech použitelných ve výuce.

Předvýzkum zahrnoval zejména strukturovaný rozhovor se žákem deváté třídy, zúčastněné pozorování v hodinách informatiky žáků 2. ročníků gymnázia a analýzu jejich prací. Vývoj řešení je detailněji popsán v následující samostatné podkapitole. Řešení by mělo zahrnovat konkrétní cíle zjednodušeného vzdělávacího obsahu. Pro jejich prezentaci je využita klíčová struktura výukové metody Ambiciózní žáci (Ginnis 2017). Ta byla vybrána, protože umožňuje sdílet v přehledné formě výukové cíle diferenciovaně podle individuálních schopností žáků a přitom jim poskytuje možnost volby.

Etapa 3: Hodnocení a testování řešení v praxi

Hlavním nástrojem pro měření vlivu navrženého vzdělávacího obsahu byla zvolena metoda sémantického diferenciálu. Ten zahrnuje dotazník, jehož každá otázka obsahuje hodnocení na stupnici pro různé páry slov, například "Příroda: užitečný – zbytečný", "Příroda: pomalý – rychlý" atd. Ke zjištění, zda existují statisticky významné rozdíly mezi odpověďmi kontrolní a testované skupiny pro některé kombinace slov, bude provedena statistická analýza odpovědí žáků obou skupin formou dvouvýběrového t-testu pro nezávislé vzorky, který je vhodný pro porovnání dvou skupin. Pro každou kombinaci slov bude tedy proveden t-test s vyhodnocením, zda jsou rozdíly mezi skupinami statisticky významné.

Výzkum byl realizován ve dvou specifických třídách: v prvním ročníku čtyřletého gymnázia a v kvintě osmiletého gymnázia Jiřího Ortena v Kutné Hoře, a to v průběhu roku 202. Výběr výzkumného vzorku byl ovlivněn mojí rolí učitele informatiky a zahrnoval ty třídy, kde jsem vyučoval. Každá třída byla rozdělena na dvě skupiny – kontrolní a experimentální – přičemž každá skupina byla vedená různým vyučujícím.

V experimentální skupině studenti absolvovali základní kurz programování v jazyce Scratch, po němž následovaly dva speciálně navržené výukové bloky zaměřené na simulaci náhodných množin. Tento obsah byl vyvinut na základě předešlých výzkumných zjištění.

Vhodnost a efektivita daného kurikula byla průběžně ověřována různou formou. Mezi hlavní prostředky patří zmíněný strukturovaný rozhovor s žákem deváté třídy a analýzu produktů žáků vytvořených v hodinách věnovaných tématu náhodných množin na stejné škole ve druhé fázi. Jednotlivé metody, prostředky a konkrétní ukázky práce žáků jsou uvedeny dále.

Po ukončení výukových bloků obě skupiny studentů – jak experimentální, tak kontrolní – vyplnily dotazník sémantického diferenciálu. Cílem bylo zhodnotit a porovnat jejich postoje a vnímání pravděpodobnosti a statistiky v kontextu zavedeného výukového programu. Závěrečný dotazník byl připraven prostřednictvím modulu *Dotazování* LMS Moodle příslušného kurzu. Ten dovoluje odpovědi respondentů snadno sbírat a exportovat pro převod do trojrozměrné matice odpovědí, ve které je skóre hodnocení pro všech jedenáct dvojic slov u všech deseti slov pro každého žáka. Výsledky jsou zpracovány v software Wolfram Mathematica, některé z grafických výstupů jsou upraveny v MS Excel.

Vypočtené hodnoty nelze brát dogmaticky a přisuzovat jim přehnaný význam, můžeme je však chápat jako způsob měření vzdálenosti na mapě sémantického prostoru a s těmito čísly dál nakládat. Tato metodika umožňuje přímé porovnání vlivu výukových přístupů na vnímání a postoj studentů k předmětu, zatímco kontrolní skupina poskytuje referenční rámec pro hodnocení efektivnosti zavedených metod. Všichni účastníci byli s výzkumem dopředu seznámeni a s účastí souhlasili.

Etapa 4. Dokumentace a reflexe k produkci „konstrukčních principů"

Poslední fáze konstrukčního výzkumu se vrací k původnímu výzkumnému problému a snaží se zjistit, jaký vliv může mít simulace náhodných množin s využitím navrženého výukového obsahu na vnímání pravděpodobnosti a statistiky. Základem pro reflexi jsou data získaná ve třetí etapě a jejich uvedení do souvislostí. z dat získaných sémantickým diferenciálem jsou pro kontrolní i testovanou skupinu vypočítány průměry všech hodnot na škále vzdáleností pojmů pro všechny trojice slov (pojem a dvojice adjektiv). Rozdíl hodnot obou skupin je poté určen jako index změny. k porovnání, zda se výsledky

měření kontrolní skupiny nějak statisticky významně liší od výsledků měření testované skupiny, je na data z odpovědí žáků pro každou kombinaci slov použit dvouvýběrový t-test.
Diskutovány budou též poznatky z pozorování a analýzy výsledných prací žáků je ve finální části této kapitoly též prověřeno naplnění všech čtyř stupňů učebního procesu podle modelu statistického myšlení Ben-Zvi a Friedlander (1997) a zobecnění výsledků vyvíjených postupů a nástrojů.

7.2. Didaktická rekonstrukce

Poznatky o badatelsky orientované výuce, využití technologií ve výuce a statistickém myšlení uvedené v této práci poskytují teoretický rámec pro samotnou didaktickou transformaci. **Didaktická rekonstrukce** je termín označující teoretický přístup k problematice didaktického zprostředkování učiva žákům, který odkazuje na společné prvky konceptů didaktického didaktické analýzy a zjednodušení (Hering 1958), didaktické redukce (Hauptmeier et al. 1975), didaktické transformace (Möhlenbrock 1982) nebo didaktické rekonstrukce (Kattmann et al. 1997; Jelemenská et al. 2003). Didaktickou rekonstrukci lze chápat v širším významu nejen jako model didaktického zprostředkování vzdělávacích obsahů, který do procesu jejich zjednodušení zapojuje nejen zkracování odborných poznatků, ale také možnosti a potřeby žáků, požadavky kurikulárních dokumentů (Knecht 2007). z jednotlivých definic navrhuje model zprostředkování vzdělávacích obsahů, který je založen postupně na didaktické analýze, redukci, transformaci a rekonstrukci. Zároveň však jednotlivé fáze probíhají v cyklech, navzájem se ovlivňují a nelze je vždy striktně oddělovat. Proměnnými v tomto modelu jsou vědecké poznatky, vzdělávací obsahy, kurikulum a samotné učivo, které mohou být na daných vrstvách ovlivňovány vědci, didaktiky, učiteli i žáky. Tento model je východiskem pro proces didaktické rekonstrukce v tomto výzkumu.

Ve fázi didaktické analýzy a didaktické redukce tématu simulace náhodných množin dochází k výběru učiva teorie náhodných množin a jeho zjednodušení s ohledem na cílovou skupinu žáků středních škol. Jde především o výběr samotného vzdělávacího obsahu, odůvodnění jeho významu pro současnost i budoucnost žáků, jeho všeobecné platnosti a věcných souvislostí s vyučovaným předmětem. Hlavním cílem vzdělávacího obsahu vytvářeného kurikula je modelování situací reálného světa (simulace náhodných množin). z pohledu učiva a kompetencí vzdělávacích programů by měl vybraný vzdělávací obsah na základě práce s daty v různých interpretacích a v jejich analýze žákům nabídnout prostor probádat vlastním způsobem koncept průměru, rozdělení pravděpodobnosti, algoritmicky přistupovat k tabulce četností a výpočtu z daných hodnot, vytvářet vlastní definice těchto pojmů a uvádět jejich možné vlastnosti.

Ambiciózní žáci

Ambiciózní žáci je název metody, kterou uvádí Ginnis (2017). Tuto metodu jsem zvolil na základě dvou hlavních důvodů. Prvním důvodem je, že metoda se mi osvědčila v podpoře žáků ve snaze o zlepšení a postupném zvyšování úrovně dosažených výsledků. Tato podpora je realizována prostřednictvím diferenciace a adaptace výuky k různým stylům učení. Druhým důvodem je, že metoda nabízí pevnou strukturu, díky které bude výsledný konstrukt dobře ilustrován a prezentován srozumitelně a přehledně. Zaměřuje se na stanovení tří úrovní cílů učení, přičemž minimální cíl je nutný pro základní prvky předmětu a je očekáváno, že ho dosáhnou všichni žáci. Další dvě úrovně jsou navrženy tak, aby žáky vyzvaly k dosažení vyšších výsledků. Učitel pak nabízí žákům různé učební, důkazní a smyčkové aktivity pro každou z těchto tří úrovní, aby mohli dosáhnout co nejvyšší úrovně úspěchu.

Tento přístup vyžaduje, aby učitel poskytl podporu žákům, kteří potřebují pomoc, a zajistil, že má dostatek informací o tom, co žáci umí a co potřebují zlepšit. Od žáků očekává, že budou pracovat nezávisle na učiteli. Pomoci jim k tomu má jasně daná struktura, která může mít podobu tabulky, myšlenkové mapy, víceúrovňového seznamu apod. shrnutí uvedených informací v přehledné podobě. Uvedené tabulky lze tedy bez dalších úprav využít přímo ve výuce, kdy žákům poskytují utříděný obraz jejich cesty dvěma výukovými bloky a mohou sloužit jako zdroj informací a rozcestník odkazů. Zároveň zkráceně sumarizují navrhované kurikulum a pojmenovávají konkrétní cíle, možné aktivity vedoucí k nim a způsoby, jak ověřit daný stupeň porozumění. Tento přístup podporuje žáky, aby se zlepšovali stoupáním po žebříčku dosažených výsledků, pomáhá v kladení vyšších cílů a umožňuje jim dosáhnout osobního maxima.

7.3. Metoda sémantického diferenciálu

Je poměrně známo (Hewstone a Stroebe 2006), že pokud jeden předmět nebo pojem hodnotí více jedinců, každý z nich ho vnímá trochu (někdy i velmi) jinak. Kromě společného kulturního významu (denotace) má každý pojem další, vedlejší významy (konotace), které charakterizují jednotlivé hodnotitele. Sémantický diferenciál (SD) je typ hodnotící škály určené k měření konotativního významu předmětů, událostí a pojmů. z konotací se odvozuje postoj k danému objektu, události nebo pojmu.

Teorie sémantického diferenciálu Charlese E. Osgooda byla aplikací jeho obecnějšího pokusu o měření sémantiky neboli významu slov, zejména přídavných jmen, a jejich referenčních pojmů (Osgood et al. 1975; 1957). Respondent je požádán, aby na škále mezi dvěma polárními přídavnými jmény (například: „přiměřený – nepřiměřený“, „dobrý – zlý“ nebo „vzácný – bezcenný“) zvolil, v jakém postavení se nachází. Sémantické diferenciály lze použít k měření názorů, postojů a hodnot na psychometricky kontrolované škále.

Metoda sémantického diferenciálu se jako jedna z mála psycho-sémantických metod (slovní asociace, testy nedokončených vět apod.) používaných v psychologii častěji objevuje i v pedagogickém výzkumu (Chráska 1995; Šerý a Binterová 2012; Klement et al. 2015). Ukázala se jako dostatečně spolehlivý nástroj pro různé účely výzkumu s validními výsledky. Je lehce adaptovatelná a informační technologie nabízí rychlý a nenáročný způsob, jak ji realizovat.

Vlastní sémantický diferenciál se skládá z určitého počtu škál, které mají obvykle sedm bodů. Každá škála se svým významem vztahuje k jednomu z faktorů. Koncové body škály označují vždy jeden pól daného faktoru (např. pro hodnocení příjemné – nepříjemné, pro potence snadné – obtížné a pro aktivitu rychlé – pomalé). Respondenti mají na škále určit, jak to vnímají. Ukázka takového dotazníku použitého v tomto výzkumu pro jeden vybraný pojem je na obrázku 18.

Sémantický diferenciál měří kognitivní a emocionální složku postojů (Výrost a Slaměník 1997), zejména faktor hodnocení.

Reliabilita sémantického diferenciálu je vysoká (0,87 - 0,91), validita je rovněž vysoká (0,87 - 0,91) (Svoboda 2010).

Nejprve je nutné vybrat pojmy, které chceme hodnotit. Kromě klíčových pojmů *pravděpodobnost* a *statistika* byla zvolena také související hesla *škola*, *algoritmus*, *internet* a *budoucnost*. k výběru byly přidány také referenční pojmy *příroda*, *já*, *život* a *láska*. Dalším krokem je pak výběr vhodných bipolárních přídavných jmen a volba počtu bodů stupnice mezi nimi. Základními dimenzemi sémantického prostoru Osgood určuje tři nejdůležitější faktory. Každý termín je tedy obvykle hodnocen s ohledem na tyto tři faktory:

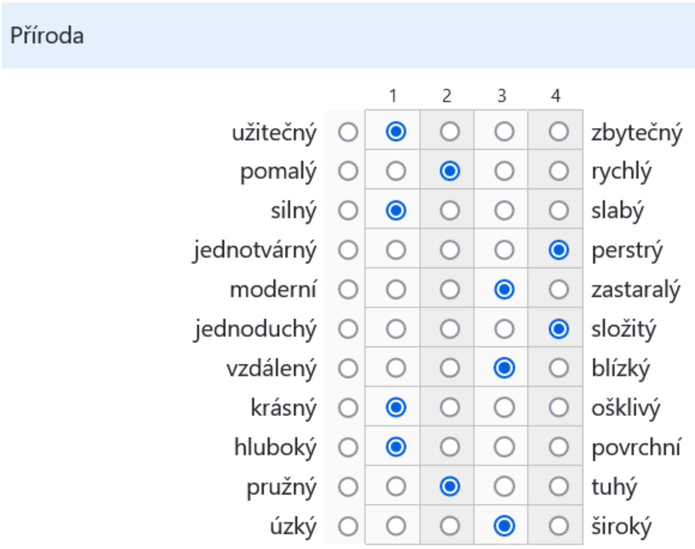
1. Faktor hodnocení
2. Faktor potence
3. Faktor aktivity

V původním sémantickém diferenciálu podle Osgooda zastupuje každý faktor stejný počet adjektiv. Podle jiných autorů však není vždy nutné vybírat všechny tři faktory. Někdy stačí použít jeden nebo dva v závislosti na hodnoceném pojmu. Výběr přídavných jmen by měl podle Ferjenčíka (2010) splňovat požadavky na reprezentativnost a relevanci. Reprezentativností se rozumí skutečnost, že vybrané adjektivum relativně jasně reprezentuje pouze jeden z dimenzí sémantického prostoru. Relevance znamená, že přídavné jméno by mělo souviset s hodnoceným pojmem ve smyslu hlediska obsahu. Osgood však naznačuje, že mohou být použita i relativně vzdálená přídavná jména vzhledem k tomu, že se jedná o projektivní metodu. v provedeném experimentu byly zvoleny takové dvojice adjektiv, které jsou v pedagogicko-psychologickém výzkumu běžně využívány. Pro možnost srovnávání jsou u všech pojmů použity stejné dvojice slov. Tabulka 1 uvádí jejich přehled i s rozdělením podle tří faktorů daných sémantickým diferenciálem.

Tabulka 1: Dvojice použitých adjektiv v dotazníku seménatického diferenciálu rozdělené podle tří základních faktorů této metody.

hodnocení	**potence**	**aktivita**
zbytečný užitečný	slabý silný	pomalý rychlý
ošklivý krásný	zastaralý moderní	jednotvárný pestrý
povrchní hluboký	vzdálený blízký	tuhý pružný
složitý jednoduchý	úzký široký	

Pro výběr hodnoty mezi bipolárními přídavnými jmény byla zvolena zúžená čtyřbodová stupnice. Aby se snížilo riziko stereotypního hodnocení, byly některé škály prezentovány tak, aby nebyly všechny pozitivní charakteristiky na jednom konci stupnice a všechny negativní vlastnosti na druhém konci. Toto obrácené pořadí u některých dvojic je vzato v úvahu při zpracování výsledků, kde jsou hodnoty pak převráceny okolo středu.



Příroda

		1	2	3	4	
užitečný	○	◉	○	○	○	zbytečný
pomalý	○	○	◉	○	○	rychlý
silný	○	◉	○	○	○	slabý
jednotvárný	○	○	○	○	◉	perstrý
moderní	○	○	○	◉	○	zastaralý
jednoduchý	○	○	○	○	◉	složitý
vzdálený	○	○	○	◉	○	blízký
krásný	○	◉	○	○	○	ošklivý
hluboký	○	◉	○	○	○	povrchní
pružný	○	○	◉	○	○	tuhý
úzký	○	○	○	◉	○	široký

Obrázek 18: Ukázka formuláře s položkami semantického diferenciálu použitého během výzkumu k vyhodnocení postojů pro pojem *Příroda*.

8. VÝSLEDKY

V této části disertační práce jsou prezentovány výsledky výzkumu v chronologickém sledu, jak jednotlivé fáze postupovaly. Iniciálně se výzkum zaměřil na didaktickou redukci tématu simulací náhodných množin na úroveň vhodnou pro středoškolské studenty. Proces didaktické transformace byl následně rozvinut prostřednictvím polostrukturovaného rozhovoru a zúčastněného pozorování, doplněného analýzou prací žáků. Teprve po těchto krocích bylo možné kvantitativně vyhodnotit metodou sémantického diferenciálu, jak může začlenění simulací náhodných množin do výuky s badatelským přístupem ovlivnit vnímání předmětů pravděpodobnost a statistika.

8.1. Pilotní analýza a didaktická redukce

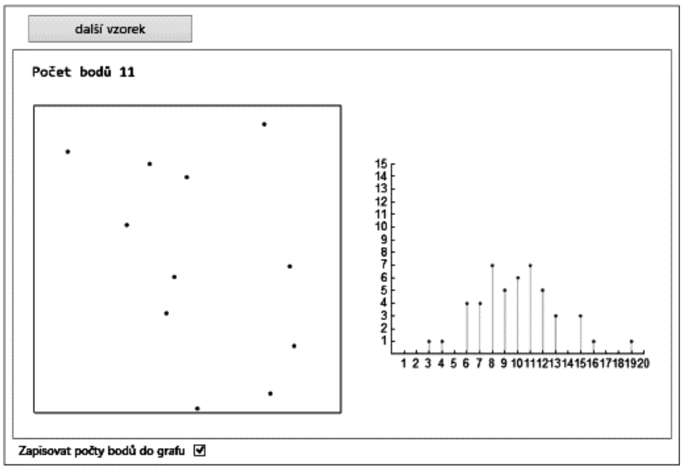
Simulace bodových procesů pomáhá lépe porozumět složitým systémům a procesům, které může být obtížné analyzovat jinými metodami. Stávají se stále více důležitými v mnoha oborech včetně biologie, telekomunikací, finančního trhu, meteorologie a dalších. Chápat, jak se náhodné procesy mohou vyvíjejí v čase a jaké jsou jejich vlastnosti, může být užitečné pro budoucnost, kdy budou žáci čelit problémům, jež vyžadují schopnost simulovat a modelovat náhodné procesy. Takovým problémům čelí v současnosti i oblasti umělé inteligence a strojového učení. Znalost simulace bodových procesů tedy může pomoci žákům lépe porozumět tomuto rostoucímu oboru a připravit se na budoucí příležitosti v této oblasti.

Z možného vzdělávacího obsahu byla pro účely výzkumu vybrána intenzita procesu, simulace homogenního binomického procesu, zjednodušené verze pravidelných množin a množin se shluky. Generátor pseudonáhodných čísel s binomickým rozdělením pravděpodobnosti je pro svou jednoduchou implementaci ve Scratch použitý i jako aproximace normálního rozdělení, což lze pro dostatečně velký počet nezávislých pokusů podle Moivreovy-Laplaceovy věty. Jak dále uvádí Knecht (2007), pro naplnění vzdělávacích cílů je nezbytné vynechání veškerých detailů, které jsou podřazené vzdělávacímu obsahu. Je potřeba vybrat případy, fenomény a situace, které by měly učinit žákům daného stupně strukturu obsahu zajímavou a přístupnou. Zároveň je žádoucí stanovit „nutné minimum vědění", má-li být vybraný koncept osvojen. Proto byl ve fázi didaktické redukce pro podrobnější stanovení očekávaných výstupů, jednotlivých metod vyučování a učiva pro dílčí jednotky badatelské výuky po první fázi vývoje realizován jednoduchý předvýzkum formou polostrukturovaného rozhovoru se žákem 9. ročníku ZŠ.

Během tohoto interview obdržel žák, budu mu říkat Zdeněk, postupně dva úkoly, které se oba skládaly ze série připravených otázek a podúloh, záměrně pokrývající širší spektrum vytipovaných oblastí tématu, mezi nimi zejména intenzitu procesu, rozlišování tří základních typů procesů, algoritmy simulující tři základní typy procesů, absolutní a relativní četnost a použití histogramů. Součástí byly dva připravené aplety ve formátu *cdf*, opakovaně generující různé realizace vybraných náhodných množin, které byly předmětem některých otázek. Odpovědi byly tazatelem viditelně a doslova přepisovány do formuláře s předepsanými otázkami tak, aby respondent mohl případně záznam zpřesnit. Zdeněk byl zcela průměrný žák, kterému se krátce po problematickém rozvodu rodičů zjevně zhoršil školní prospěch. To byl důvod, proč mě kontaktoval s žádostí o doučování matematiky a o přípravu na přijímací zkoušky na střední školu. Měli jsme dobrý vztah, tak měl motivaci vyhovět mi srozumitelně odpovídat a snaživě řešit zadané úlohy i přes značné množství a náročnost otázek. Nejprve uveďme obě úlohy včetně všech doplňujících otázek:

Úloha 1

Biologové monitorují rozlehlý smrkový les napadený škůdcem. Protože není v jejich silách zmapovat napadené stromy v celém lese, rozhodli se v něm náhodně vybrat menší plochy – pozorovací čtverce o straně 20 metrů – a z počtu napadaných stromů v nich odhadnout množství dřeva, které by šlo vytěžit, v celém lese. Následující aplet na obrázku 19 zobrazuje pozice zaznamenaných stromů v pozorovacích čtvercích. Prohlédněte si několik vzorků a pokuste se odpovědět na otázky níže.



Obrázek 19: Generátor náhodných množin s variabilním počtem bodů.

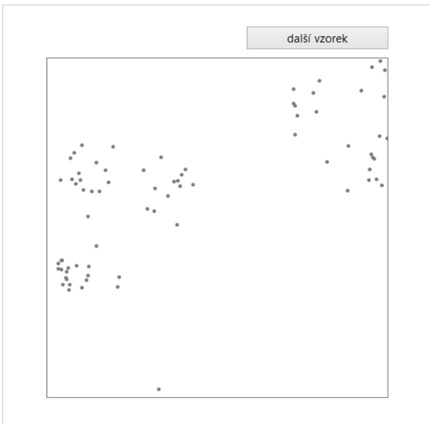
- Jakým způsobem chtějí biologové vypočítat množství napadeného dřeva v celém lese? Jaké jsou výhody a nevýhody takového postupu.
- Jakou metodu byste použili vy?
- Jaký je průměrný počet napadených stromů v pozorovacím okně?
- Jaká je pravděpodobnost, že bude v dalším vzorku právě sedm napadených stromů?
- Zatrhněte checkbox "zapisovat počty bodů do grafu" (umístěn v apletu pod prohlíženými vzorky) a nechte si zobrazit alespoň 40 dalších vzorků. Co přesně se děje při zapisování do grafu? Pojmenujte osy grafu.
- Z hodnot uvedených v grafu vypočítejte průměrný počet napadených stromů v pozorovacím okně. Můžete využít i kalkulačku nebo tabulkový procesor.
- Co dalšího lze z grafu vyčíst?
- Vypočítejte relativní četnosti jednotlivých hodnot. Jaká je pravděpodobnost, že bude v dalším vzorku právě sedm napadených stromů?
- Zkuste vymyslet a popsat algoritmus, který by simuloval (modeloval) podobné vzorky.

Úloha 2

Na vědecké pracoviště chodí velké množství vzorků, které se zpracovávají jako bodové procesy. Mezi všemi se dají vypozorovat jejich tři základní typy. Sledujte vybrané vzorky bodových procesů v apletu (obrázek 20 a 21).

- Rozdělte je do tří skupin, pojmenujte a definujte tyto skupiny na základě typických vlastností množin.
- Skupina A
- Skupina B
- Skupina C
- Pokuste se vymyslet a popsat algoritmy, kterými by se daly jednotlivé typy procesů simulovat pro další vědecké bádání.
- Navrhněte metody, které pomocí automatických výpočtů pomůžou při klasifikaci jednotlivých vzorků, jestliže budete znát konkrétní pozice bodů a vzdálenosti mezi nimi.

V úloze 1 měl nejprve na příkladu stromů smrkového lesa napadených škůdcem vymýšlet a objevovat statistické charakteristiky bodového procesu v pozorovacím okně a dobrat se svými slovy k definici hustoty bodového procesu v jednoduchém apletu, který po stisknutí tlačítka generuje realizace náhodných množin s danou hustotou $\lambda = 10$ (střední hodnota počtu bodů v pozorovacím okně).

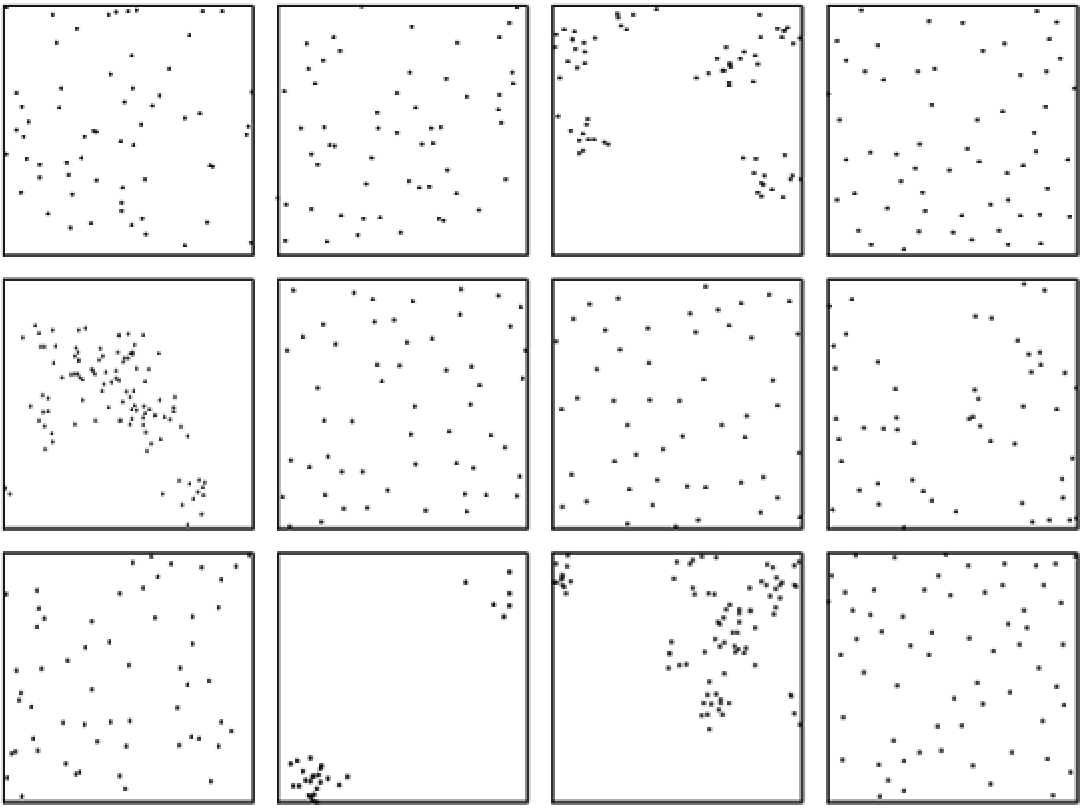


Obrázek 20: Generátor náhodných množin tří základních typů.

Tuto hodnotu například Zdeněk správně odhadl jako „průměrný počet napadených stromů v pozorovacím okně“ a intuitivně si zavedl statistiku pro počet bodů generovaných vzorků. Na otázku „jaká je pravděpodobnost, že v dalším vzorku bude právě sedm napadených stromů?“ nejdřív nedokázal odpovědět, až po předvedení principu na příkladu hodu mincí a kostky uvedl svůj odhad poměrem „3 ze 33“. v další fázi vedl rozhovor mimo jiné k seznámení se s histogramem, k jeho jednoduché manipulaci pomocí apletu a k vlastní interpretaci.

Poslední dotaz zněl, aby zkusil vymyslet a popsat algoritmus, který by simuloval podobné vzorky. Protože Zdeněk ve škole neabsolvoval žádný kurz programování, podle předpokladu nedokázal odpovědět a zeptal se, co je to algoritmus. Ani po stručném přiblížení problému a osvětlení otázky a termínu algoritmus však nebyl schopen úlohu vyřešit.

V úloze 2 podobný aplet generoval náhodně jeden ze tří základních typů náhodných množin (náhodná, pravidelná, se shluky) a Zdeněk měl za úkol rozlišit tyto tři skupiny a pojmenovat jejich typické vlastnosti. Nazval je v tomto pořadí skupinky (se shluky), rozprostření (pravidelná množina) a nepravidelný proces (náhodná množina). Roztřídění a pojmenování kategorií nepředstavovalo žádný problém, zato ani v tomto úkolu nebyl Zdeněk schopen vymyslet žádnou odpověď, jak simulovat tyto procesy na počítači pomocí algoritmu. Nicméně se zvídavě zajímal o takové řešení a hlavní principy algoritmů (náhodná volba souřadnic x a y, mateřské a dceřiné body clusteru, minimální vzdálenost od všech bodů, aby mohl být bod přijat apod.) se mu jevily srozumitelné.



Obrázek 21: Sekvence množin vygenerovaných apletem v úloze 2.

Předvýzkum ukázal, že základní myšlenky simulace náhodných množin jsou jednoduché a díky konkrétním realizacím velmi snadno pochopitelné i pro žáka deváté třídy. Což může podpořit motivaci, vydat se na cestu bádání o náhodných množinách. Zároveň se potvrdilo, že možnost a schopnost si náhodné množiny naprogramovat bude při bádání zcela zásadní. Jak je zmíněno v úvodní části kapitoly, tento předpoklad lze naplnit už na základní škole. Žákům druhého stupně nedělá problémy v jednoduchém prostředí pochopit a používat potřebné základní struktury, kterými jsou cykly, podmínky a proměnné (Blaho a Salanci 2011). z možných prostředí matematických aplikací a programů se jako nejsnazší pro nějakou implementaci náhodných množin (a také jako nejzábavnější) osvědčil Scratch, vyznačující se svým přívětivým uživatelským rozhraním, ve kterém může někomu skládání bloků při tvorbě procedur připomínat stavění z kostiček. Proto byl zvolen jako výchozí prostředí. Pro ucelenost dodejme, že při vytváření kurikula bylo experimentováno i s modelováním množin v programu GeoGebra, jenž kromě nákresny a algebraického okna nabízí i tabulkový procesor a pravděpodobnostní kalkulačku s vybranými rozděleními pravděpodobnosti. Simulace procesů v něm však nelze jednoduše automatizovat, a proto je v něm žáci nevytvářeli. Samotným hodinám pozorovaným během výzkumu musí předcházet několik hodin programování v rámci informatiky.

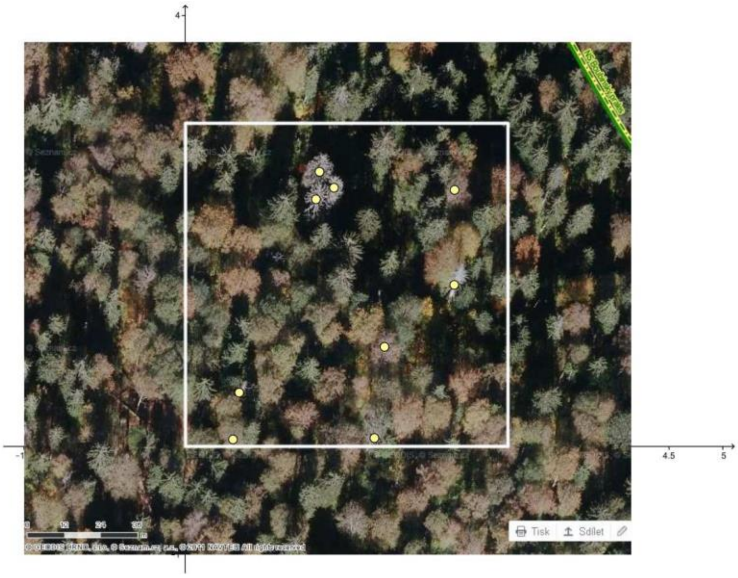
Za jeden z hlavních výukových cílů rozpracovaného kurikula po didaktické analýze a redukci vzdělávacích obsahů a vědeckých poznatků v oblasti simulací bodových procesů je, aby každý žák navrhnul a vytvořil vlastní sadu algoritmů. Učební proces by měl rozvíjet klíčové kompetence vzdělávací oblasti matematika podle RVP pro gymnaziální vzdělávání – zejména analyzování problému a vytváření plánu řešení, tvorba algoritmů, volba správného postupu řešení problémů a jejich vyhodnocení vzhledem k zadaným podmínkám, rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním a práci s modely, k poznávání mezí jejich použití a vědomí, že realita je složitější než její matematický model, rozvíjení dovednosti pracovat s různými reprezentacemi, rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti a v neposlední řadě osvojování základních pojmů statistiky a pravděpodobnosti. Badatelské pojetí pomáhá rozvíjet dlouhodobé a nadoborové cíle (např. pěstování kompetence k řešení problémů, komunikativní, pracovní kompetence směřující k posilování odpovědnosti za vlastní práci atd.).

S ohledem k uvedeným poznatkům byl vybrán pro další fázi výzkumu následující obsah sledovaných hodin. Po krátkém seznámení s pojmem *náhodná množina* a motivačním obrázkem označených stromů napadených v lese, bude úkolem žáků jednoduchá simulace náhodné množiny patnácti bodů do čtvercového okna, ve které stačí pro body volit náhodná čísla x a y pro jejich souřadnice. Ve společné diskusi by bylo dále vhodné rozvinout myšlenky pro přidání náhodného počtu bodů, především pak s jiným než rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti a následně svůj algoritmus patřičně upravit. Druhým sledovaným úkolem ve výzkumu bude simulace náhodné množiny bodů se shluky. Výsledky žákovských řešení budou shromážděny k analýze a následně didaktickou rekonstrukcí rozvinuty do výsledné formy vybraného vzdělávacího obsahu simulací náhodných množin a prezentovány přehlednou formou.

8.2. První studie

Další fáze výzkumu probíhala ve druhých ročnících gymnázia (dvě třídy čtyřletého gymnázia a jedna třída osmiletého) v rámci tří vyučovacích hodin ve druhém pololetí školního roku v roce 2016, ve kterých jsem učil informatiku celý rok. Časová dotace předmětu na dané škole jsou dvě hodiny týdně. Pozorovaných hodin se zúčastnilo celkem 38 žáků, těmto hodinám předcházelo v rámci běžného rozvrhu šest vyučovacích hodin základů programování v prostředí Scratch. Cílem *přípravného kurzu* bylo získání nutných technických dovedností a používání základních typů příkazů. Konkrétně byli žáci vedeni k orientaci v prostředí Scratch a jeho souřadnicového systému, popisu přesných postupů libovolných činností (vytváření algoritmů), používání podmínek a cyklů, pochopení a použití proměnných, klonování objektů a práci s generátorem pseudonáhodných čísel. Koncept výuky vycházel z vybraných pracovních listů podle Krejsa (2014).

Po osvojení zmíněných dovedností bylo stručně uvedeno téma náhodných množin. Motivací problému bylo rozmístění stromů napadených kůrovcem na obrázku 22 a simulace takové množiny.
Prvním úkolem bylo sestavit algoritmus pro opakované náhodné rozmístění a zakreslení 15 bodů (počet bodů ve sledovaném okně můžeme označit jako hustotu) do scény prostředí Scratch. Zadání nedělalo žákům žádné problémy. Všichni byli schopni přijít na přiřazení náhodných čísel x-ové a y-ové souřadnice bodu. Po vznesení dotazu v následné diskusi nad řešením na konstantní počet bodů v každém pozorovacím okně žáci došli k závěru, že taková situace by zřejmě neodpovídala skutečnosti a mohli bychom vycházet z rozpětí pozorovaných hustot a jejich průměru. Byli proto vyzváni k upravení svého algoritmu přidáním náhodného počtu bodů a návodnými otázkami v průběhu práce byli nuceni uvažovat i nad pravděpodobností možných počtů bodů.

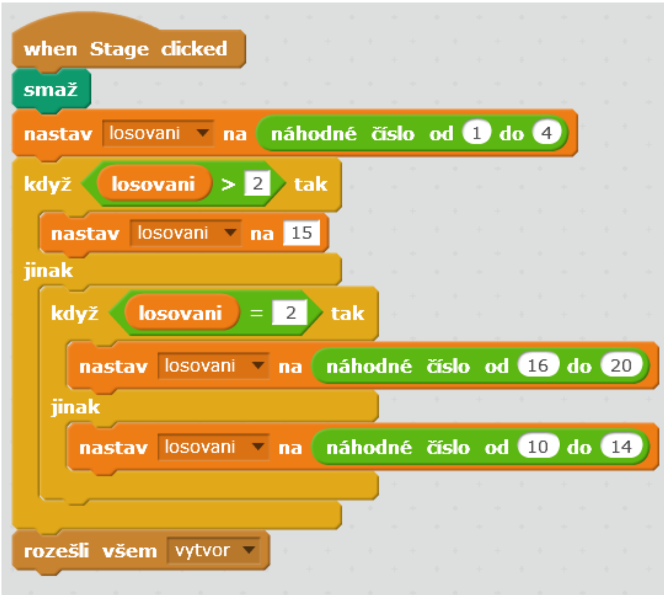


Obrázek 22: Demonstrace získání souřadnic sledovaných stromů v pozorovacím okně z mapových podkladů mapy.cz.

Většina žáků (32 účastníků ze 38) se nedopracovala k různým pravděpodobnostem krajních hodnot a průměrného počtu bodů. v každé skupině se však našli jeden až tři jednotlivci, kteří do algoritmu implementovali více či méně úspěšné pokusy tuto pravděpodobnost ovlivnit. Ukázku žákovského řešení s využitím větvení lze vidět na obrázku 23. Konkrétní řešení není příliš ideální, protože v polovině případů zvolí právě číslo 15 a v druhé polovině vybírá z hodnot od 10 do 20 (mimo 15) opět s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti.

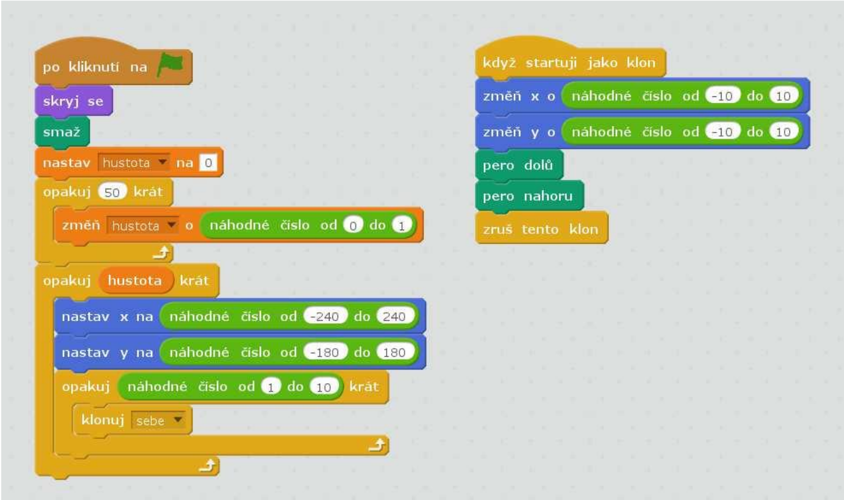
Při vyhodnocování algoritmů učitel promítal na plátno histogramy ze sta „losování“ podle daných řešení. v této fázi se projevila absence používání seznamu, který je ve Scratch k dispozici. v případě jeho znalosti by mohli žáci provést daný počet „losování“ sami a nechat si vytvořit histogram z exportovaného seznamu např. na webu pomocí WolframAlpha. Žáci byli schopni na základě výsledných histogramů vyhodnotit vhodnost svého řešení. v diskusi učitel užíval pojem rozdělení pravděpodobnosti, aniž by na to kladl důraz. Podle odpovědí na pokládané otázky žáci chápali jeho význam, sami tento termín ale ani jednou nepoužili.

Při závěrečné diskuzi nad řešením úkolu byl žákům představen jednoduchý algoritmus pro generování čísel s binomickým rozdělením pravděpodobnosti, který využívá součet náhodných hodnot čísel 0 nebo 1 jako při hodu mincí. Jeho implementaci se střední hodnotou v čísle 25 lze vidět na obrázku 24 pro proměnnou *hustota*. Ukázalo se, že samostatná tvorba tohoto algoritmu, a především analýza jeho výsledků v předchozích hodinách, by byla přínosnou přípravou. Algoritmus je triviální a není složité ho naprogramovat, ale žáci by se při jeho analýze seznámili s vhodným použitím a zpracováním struktury seznamu, a především by své výsledky mohli porovnat s teoretickými hodnotami binomického rozdělení a přesvědčit se tak o jeho použitelnosti.



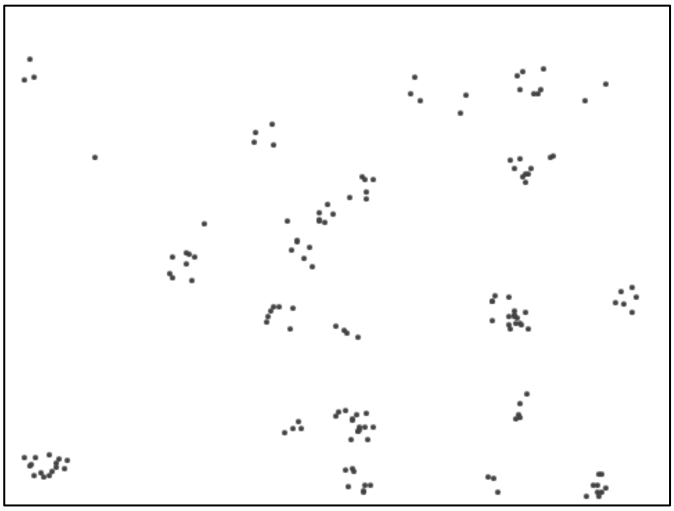
Obrázek 23: Žákovské řešení generátoru náhodného počtu bodů v rozmezí od 10 do 20 se zvýšenou pravděpodobností směrem ke středu intervalu.

Posledním úkolem během sledovaných hodin byla simulace náhodné množiny bodů se shluky (clustery), která by mohla představovat rozmístění stromů určitého druhu. Pro motivaci bylo mimo ukázkové řešení žákům předloženo několik obrázků množin bodů se shluky jako např. pozice galaxií na průřezu části vesmíru z teleskopu Evropské jižní observatoře, mapa kriminality v ČR, pozice ryb v přehradní nádrži zaznamenané lodním sonarem nebo výskyt lípy srdčité v inventarizačním čtverci. v po4dmínkách zadání byl dán průměrný počet clusterů, průměrný počet bodů v každém clusteru, nezávislost pozic jednotlivých shluků a jejich maximální rozměry.



Obrázek 24: Žákovské řešení algoritmu splňující podmínky modelu rozesetí semen okolo rostlin naprogramované v prostředí Scratch.

Během vlastního návrhu algoritmu žáci vytvořené procedury opakovaně spouštěli a pozorovali své výsledky, což je nezbytná součást hledání chyb a jejich ladění. Během krátké časové prodlevy přišli někteří žáci na princip postupovat jako v případě stromů, kde jsou semena nových rostlin rozeseta kolem mateřského stromu. Někdo z nich byl pak pověřen vysvětlit koncept svými slovy před třídou, aby se i slabší studenti měli od čeho odrazit správným směrem. Nakonec se úkol podařilo úspěšně splnit 12 žákům zcela samostatně a dalším 17 s nápovědou, aby využili *klonování* objektů ve Scratch k vytvoření dceřiných bodů. Zbylých 9 žáků potřebovalo výraznou individuální dopomoc učitele nebo někoho ze spolužáků. Ukázku vybraného výsledku lze vidět na obrázku 25. Programy jednotlivých žáků se různě lišily podle jejich schopností. Ve 25 případech z 29 funkčních řešení simulující nějaký typ shluků volili autoři pro přechod od mateřských rostlin k dceřiným příkazy pro klonování objektů jako na obrázku 24, jen čtyři žáci ukládali pozice rodičů do nově definovaných proměnných x a y. Celkem ve 13 z 29 funkčních řešení se jevilo na první pohled správné, jako na obrázku 25, jehož nedostatek vyjde zřetelně najevo při extrémně vyšším nastavení parametrů jako na obrázku 26.

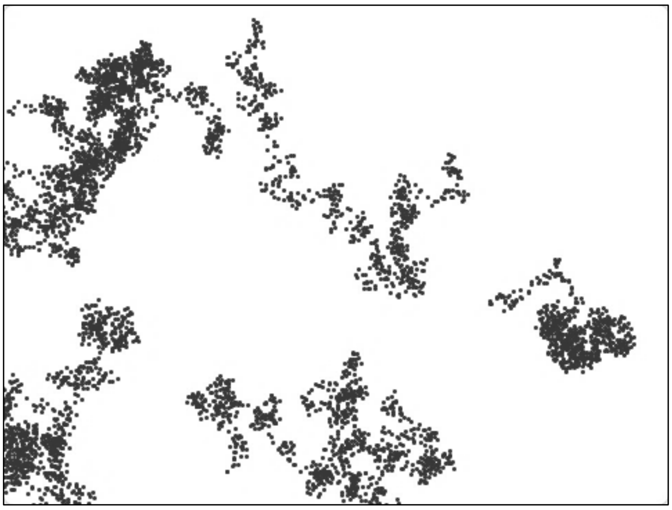


Obrázek 25: Realizace náhodné množiny bodů se shluky (žákovské řešení).

Tuto nejčastější chybu způsobuje postupné posouvání souřadnic bodu od předchozího bodu v clusteru, místo od bodu rodičovského. Při nižším počtu bodů v clusteru se chyba projevuje jeho častějším protažením do tvaru *hada*. Zvýšení počtu bodů v clusteru zřetelněji odhalí rozpor s očekávaným chováním modelu z rostlinné říše. Při stovkách bodů vznikne z každého shluku jasně rozpoznatelný nekonvexní útvary jako na obrázku 26. Jedná se vlastně o případ náhodné procházky, a i takové náhodné množiny může být zajímavé dále zkoumat a hledat jejich podobnost s jevy v reálném světě.
I řešení, kde jsou souřadnice dceřiných bodů rozmístěny náhodně okolo mateřského bodu horizontálně i vertikálně na daných intervalech s rovnoměrným rozdělením, se ale při výrazném navýšení počtu bodů v clusteru začne chovat jinak, než žáci očekávají. Ze shluků vzniknou vyplněné čtverce viditelné na obrázku 27. Tento model je však dostatečný předpokládaným dovednostem na této úrovni a otevírá cestu k požadovanému cíli.

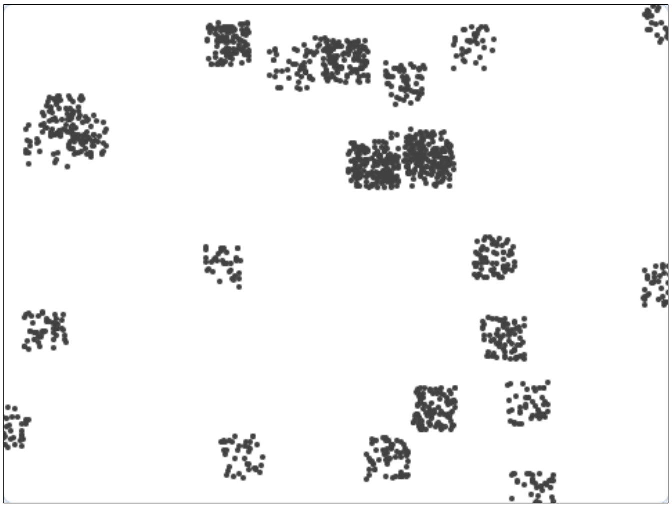
V další fázi navrhlo dohromady osm žáků upravit algoritmus generující shluky tak, aby se body v clusteru rozmístily kolem středu v kruhu. Nejjednodušší řešení s úhlem otočení a náhodnou vzdáleností kratší než zvolený poloměr však kromě změny tvaru na kruhový přinesou jen podobně nepřirozené okrajové efekty. z časových důvodů ale nebylo ve třídách téma náhodných množin již dále rozvíjeno. Před dalším krokem by v tomto místě by výzkum, resp. učitelovu snahu nahlédnou do hlavy žák, obohatila dokumentace toho, jestli a do jaké míry žáci podvědomě tuší charakteristiky variability kýženého procesu, jak by je pojmenovali, jak by popsali rozdíly ve výsledných množinách oproti dosavadním simulacím apod. Cvičení zároveň pomůže vytvořit vlastní slovník a utřídit si myšlenky.

Úpravou modelu se čtvercovými shluky pouhým nahrazením náhodného čísla výchozího nástroje za hodnoty z generátoru založeného na opakovaných hodech mincí nebo součtů na kostkách lze docílit rozptýlení clusterů. Při pokusu o jejich zvětšení ale dceřiné body utíkají od mateřského bodu ve směru kladných poloos, takže je potřeba jejich souřadnice posunout o střední hodnotu vybraného rozdělení.



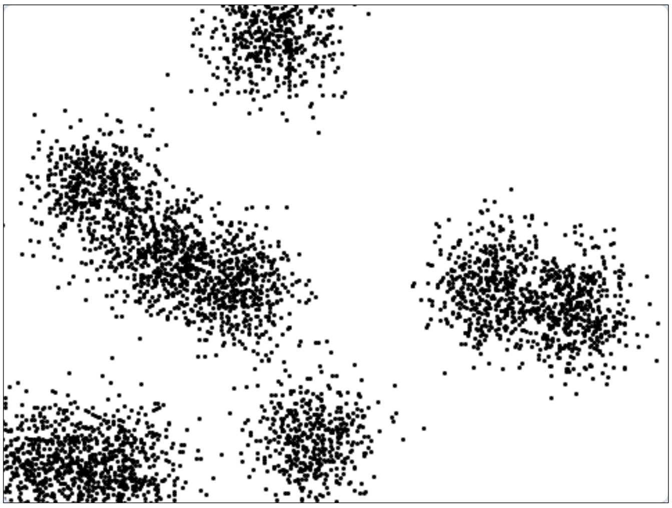
Obrázek 26: Model při zvýšení parametrů nevyhovuje myšlence semen rozesetých okolo mateřských rostlin.

S využitím stejného generátoru jako u náhodných množin v první úloze s binomickým procesem lze pro vyšší hodnoty parametrů ovlivňující rozměry shluků a počet bodů v nich generovat množiny jako na obrázku 28. Výsledek dvojitého využití generátoru náhodných čísel s binomickým rozdělením pravděpodobnosti se přibližuje Coxovu procesu. k interaktivní manipulaci tvaru pravděpodobnostních funkcí rozdělení pro porovnávání hodnot a seznámení s jejich dalšími typy lze využívat např. pravděpodobnostní kalkulačku v programu GeoGebra.



Obrázek 27: Zvýšení počtu bodů v clusteru ukáže chování modelu v rozporu s očekávaým výsledkem. Tvorba modelu najednou přináší problém, který vede k potřebě dalších typů rozdělení pravděpodobnosti.

Během tří pozorovaných hodin bylo všech 38 žáků z výzkumného vzorku žáků gymnázia schopna vytvářet a upravovat jednoduché modely bodových procesů v prostředí Scratch s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti počtu bodů v pozorovacím okně náhodné množiny, které podléhá jejich vlastnímu návrhu. Pouze pět žáků dokázalo do programu správně implementovat generátor pseudonáhodných čísel s binomickým rozdělením pravděpodobnosti založený na opakovaném hodu mincí a zobrazit data z opakovaných situací v histogramu. Algoritmus pro generování nějakého typu náhodných množin se shluky samostatně navrhlo 76 % žáků. Polovina z nich pak obsahovala jednu ze dvou očekávaných vlastností, která se při zvýšení hodnot parametrů procesu projeví v rozporu se zadáním. Po cestě přitom musí pracovat s frekvenční tabulkou počtu generovaných bodů na úrovni strojového zpracování a vnímají vliv vlastních úprav algoritmu simulace bodového procesu na výsledný tvar histogramu sledované veličiny.



Obrázek 28: Cluster proces ve Scratch s velkými clustery a vysokým počtem dceřinných bodů s využitím generátoru pseudonáhodných čísel s binomickým rozdělením pravděpodobnosti.

Navrhovaná rekonstrukce vzdělávacího obsahu simulace náhodných množin vychází z těchto uvedených úloh v kombinaci s vybranými otázkami k diskusi uvedenými v úlohách 1 a 2 v kapitole 8.1. Konkrétní detaily jsou uvedeny v dalším textu v rámci zpětné inovace i s navrhovanými změnami, které mohou rozvinout vybrané postupy a koncepty. Text se zároveň snaží o syntézu poznatků BOV na konkrétních příkladech vybraného vzdělávacího obsahu. Výsledný konstrukt je navíc pro přehlednost ilustrován do dvou tabulek (tabulky 4 a 5). Ty se snaží o znázornění kurikula dvou učebních bloků dané strukturou využívanou při metodě *Ambiciózní žáci* (Ginnis 2017). Ta nabízí tři úrovně dovednostních cílů umožňující diferenciaci výuky podle možností žáků.

Výhodou jednoduchých simulací bodových procesů v obou případech je pro žáky v prostředí Scratch přirozený přístup k chování algoritmů a okamžitá vizuální odezva už při prvních krůčcích bádání nad problémem. Pomáhá jim překonávat nutně vydávané úsilí a vytrvat v řešení. To následně vyžaduje zužitkovat dříve nabyté schopnosti z programování – práce s proměnou, seznamem, cykly a podmínkami – pro získání dat, která je nutné dále statisticky zpracovat a analyzovat.

Vzniklé chyby v aktuálním algoritmu pomáhá v práci žáka odhalovat měnící se vzhled výsledného obrazu nebo třeba doba realizace nové množiny, která závisí na efektivitě použitého postupu. Výzkum prokázal, že žáci gymnázia jsou schopni zužitkovat schopnost programování v jednoduchém prostředí k návrhu matematických algoritmů a simulaci náhodných množin. Transformace generátoru pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozdělením na jiné typy rozdělení je nutí uvažovat o základních principech pravděpodobnosti a intuitivně používat metody statistiky. Studentům nejsou předkládány žádné vzorce – těžiště učebního procesu leží v jejich samostatné kreativní práci, zatímco jim počítač poskytuje okamžitou zpětnou vazbu. Na druhou stranu to od nich vyžaduje abstraktní myšlení a tvůrčí činnost a pro mnohé to může být velmi náročné.

Ve snaze přiblížit se z pohledu BOV co nejblíže otevřenému bádání je třeba věnovat pozornost všem krokům badatelského cyklu, tzn. stanovení výzkumných otázek, postupu práce, sběru dat, analýze výsledků a formulaci závěrů. Přestože v prvních dvou fázích hraje v tomto případě určující roli učitel, je vhodné, aby všechny nápady na otázky stimulující žákovské bádání a hypotézy mohly zaznít alespoň při skupinové práci nebo brainstormingu. Tvorbu vlastní terminologie, formulaci otázek a hypotéz podpoří možnost opětovně generovat náhodné realizace jednotlivých příkladů a opakované porovnávání jejich vlastností. Proto je v rekonstruovaném vzdělávacím obsahu zařazena analýza náhodných množin. Výzkum ukázal, že rozlišit tři skupiny náhodných množin je s dostatečným množstvím příkladů generovaných interaktivním apletem poměrně snadno uchopitelný úkol.

Kladení otázek i formulování hypotézy vyžaduje velmi zkušené žáky a učitele, který je k tomu vede. Problém aplikovatelnosti vytvořených modelů na jevy reálného světa i jejich omezení může být sám motivací k řešení, obzvláště v prvním případě však výběr tématu a postupů patří spíše mezi činnosti řízené učitelem, konkrétně směřované k využití generátoru s opakovanými hody mincí s binomickým rozdělením pravděpodobnosti.

Tabulka 2: Příklad učebního bloku, který uvádí do simulací náhodných množin a jejich statistické analýzy.

Všichni musí zvládnout	**Všichni by měli zvládnout**	**Všichni by mohli zvládnout**
• Roztřídit náhodné bodové procesy podle hustoty a typu. • Vytvořit simulaci jednoduché náhodné množiny.	• Rozšířit program, aby ukládal počty bodů v opakovaných realizacích a určil průměr. • Z uložených hodnot vytvořit histogram.	• Simulovat náhodné množiny s četnostmi hustoty odpovídající Gaussově křivce.
Učební aktivita:	**Učební aktivita:**	**Učební aktivita:**
Hra na detektiva: Rozlišování množin z generátoru podle hustoty	Úprava algoritmu. Testování a ladění. Práce s nástrojem histogramu	Implementace generátoru s binomickým rozdělením s vhodnými parametry
Důkaz o učení:	**Důkaz o učení:**	**Důkaz o učení:**
Simulace náhodné množiny v jednotkovém okně s průměrnou hustotou libovolně zadané hodnoty	Histogram počtu bodů v opakovaných simulacích	Histogram počtu bodů v opakovaných simulacích zvonovitého tvaru
Lešení:		
Využít scénář kouzelné hůlky a hodu mincí z předchozích hodin		

Tabulka 3: Příklad druhého výukového bloku s vymýšlením algoritmů náhodných cluster procesů nebo pravidelných bodových procesů. Žáci si už na první úrovni volí jeden z obou typů, který budou simulovat.

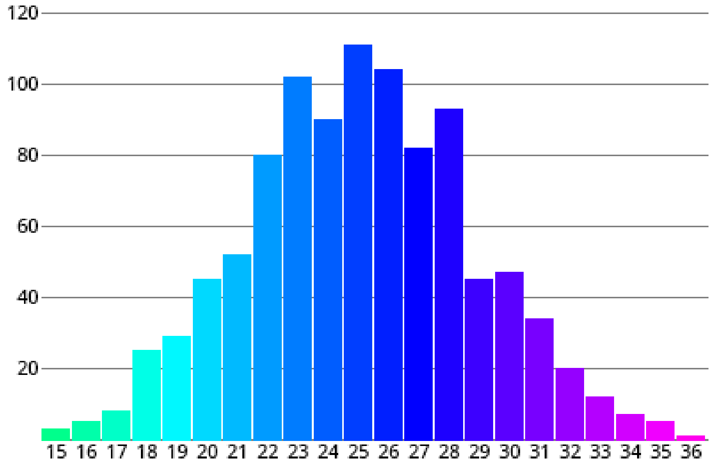
Všichni musí zvládnout	**Všichni by měli zvládnout**	**Všichni by mohli zvládnout**
• Roztřídit náhodné bodové procesy podle typu. • Vytvořit simulaci náhodné množiny se shluky nebo pravidelné množiny.	• Otestovat správnost a použitelnost svého řešení. • Odstranit popsané chyby.	• Simulovat vybrané množiny s přirozeným okrajem za využití generátoru s binomickým rozdělením pravděpodobnosti.
Učební aktivita:	**Učební aktivita:**	**Učební aktivita:**
Rozlišování množin z generátoru podle typu	Testování extrémních hodnot a debugging	Implementace generátoru s binomickým rozdělením s vhodnými parametry
Důkaz o učení:	**Důkaz o učení:**	**Důkaz o učení:**
Simulace náhodné množiny se shluky nebo pravidelné množiny zadaných číselných parametrů	Program bez nejčastějších známých chyb	Simulace s očekávanými vlastnostmi i při extrémních hodnotách parametrů
Lešení:		
Využít scénář kouzelné hůlky a hodu mincí z předchozích hodin		

Podobně jako při formulování otázek a hypotéz, z nichž vychází žákovské bádání, také plánování postupu, vyhodnocení výsledků a závěru by mělo být nějakým způsobem jednoznačně formulováno, aby je žáci mohli využít při reflexi. Závěrečná prezentace výzkumu před ostatními, důležité vyvrcholení badatelské hodiny, může snadno zabrat velké množství času. Potřebný čas se dá zredukovat dobře nastavenými kritérii hodnocení a prací ve skupinách podle vybraných problémů, příp. jejich řešení. v každém případě je potřeba vyhradit si čas na závěr a zorganizovat prezentaci výsledků tak, aby každý žák mohl říct alespoň dvě až pět vět, které si sám připraví, pokud má mít možnost rozvíjet maximum svých dovedností.

Důležitým rozšířením badatelského přístupu, který zde vstupuje do hry, je propojení s jinými předměty, např. biologií nebo zeměpisem, ve kterých mohou žáci v rámci projektů sbírat prostorová data k analýze, charakterizaci a následné simulaci množin pomocí nabytých dovedností. Badatelské pojetí výuky vybízí využít práci v týmech a podpořit metody vzájemného vrstevnického učení a nevyužití didaktických metod pro skupinovou práci lze považovat za slabinu pozorované výuky. Výběr tématu žákem je jedním z esenciálních prvků učení nejen badatelským přístupem, z tohoto ohledu lze navržené kurikulum alespoň trochu podpořit přidáním volby množiny v druhém kroku, tedy možnost vybrat si, zda bude žák (nebo dvojice) simulovat pravidelnou náhodnou množinu nebo tu se shluky, která byla součástí právě při tomto výzkumu.

Při sestavování algoritmů simulujících náhodné množiny hraje významnou roli použití generátoru s binomickým rozdělením. Jeho vytvoření a probádání s nástrojem produkujícím histogramy v předchozích hodinách je předpokladem k jejich snadnému znovupoužití během řešení. Dříve vytvořené algoritmy lze mezi projekty ve Scratch snadno kopírovat skrze nástroj *Batoh*. Očividný způsob zpětné vazby, který se dá dobře využít v analytických fázích bádání i závěrečné reflexi, představuje histogram hodnot z opakovaných simulací na obrázku 29.

Jeho opakované využívání ve vícero hodinách z něj dělá rychlý a užitečný statistický nástroj. Algoritmus výpočtu četností ze seznamu hodnot ale může být zajímavou výzvou pro rychlejší či zdatnější žáky, která vyžaduje vysokou úroveň abstraktního myšlení a programovacích dovedností. Při reorganizaci dat musí chápat význam jednotlivých reprezentací a metod. Tyto činnosti při návrhu programu tvořícího frekvenční tabulky ze seznamu libovolné délky zapojují jednoznačně části modelu statistického myšlení (Ben-Zvi a Friedlander 1997) popisované ve druhé třetí kapitole.



Obrázek 29: Histogram ve Scratch snadno použitelný ve vlastních projektech. Na obrázku jsou počty bodů v tisíci simulacích, které využívají hod mincí jako generátor náhodných čísel.

Navržené dva výukové bloky představují jen prozkoumanou a popsanou část potenciálu daného kurikula. Mezi další možnosti, kterými může pokračovat započaté bádání, ale které již nebyly realizovány, patří úprava klíčových funkcí algoritmů pro odpuzování bodů u pravidelných množin nebo pro rozmístění okolo centra clusteru daných pomocí různých typů rozdělení pravděpodobnosti. Druhou možností je směřovat ke zkoumání všech vzájemných vzdáleností mezi body, jejich četností a vyplývajících charakteristik variability. Takové zpracování dat a statistická analýza pomocí těchto charakteristik skýtá mnoho příležitostí k rozvoji statistického myšlení a vzniku nových konceptů.

Pro úplnost připomeňme, že navrhované zprostředkování vzdělávacích obsahů předpokládá vysoké nároky na žáky nejen v oblasti kompetencí spojených s badatelským přístupem, ale také dovednosti digitální gramotnosti a programování ve Scratch na mírně pokročilé úrovni. Na inovovaný seznam dovedností, které je vhodné, aby žáci měli ještě před zahájením samotné výukové jednotky, patří:

- Používat cykly, podmínky, proměnné, generátor pseudonáhodných čísel a matematické operátory.
- Vytvořit seznam (pole), zapisovat a mazat hodnoty v něm.
- Udělat součet hodnot v seznamu a zjistit jeho délku.
- Vytvořit nový seznam a zapisovat do něj tyto délky.
- Vytvořit histogram

Všech uvedených cílů lze ve Scratch snadno dosáhnout. Prostředí navíc dovoluje seznamy velmi snadno exportovat do formátu prostého textu. Pro tvorbu histogramu se dá využít projekt připravený přímo ve Scratch (Kopecký 2022), kam stačí data nahrát nebo dokonce zkopírovat nástroj do svého projektu nástrojem Batoh a odstranit rutinní manuální mezikrok. Ke zpracování dat lze samozřejmě použít jiný libovolný software, který může nabízet i další statistické charakteristiky. Užitečným průpravným cvičením může být vytvořit simulátor hodu mincí s ukládáním hodnot a jejich exportu. Stejně tak pro součet ok při hodu dvěma kostkami. z uložených dat lze velmi jednoduše získat tabulku četností a histogram s využitím zmíněného projektu připraveného ve Scratch.

Možnost na vlastní oči vidět a ovlivňovat, jak rozdělení pravděpodobnosti definované grafem funkce, který odpovídá tvaru histogramu počtu bodů v různých simulacích stejného bodového procesu a lze ho pozorovat ve vlivu na vzdálenost bodů od středu clusteru nebo minimální vzdálenost od ostatních bodů v případě pravidelných množin, je jednou nosných myšlenek vybrané části kurikula. Mezi další možné aplikace lze zařadit třeba simulace, které vznikají pohybem a interakcí jednotlivých bodů. Například odpuzováním bodů vznikají pravidelné množiny nebo lze vyzkoušet lze různé varianty algoritmů typu *predátor a kořist*, G*ame of life* a další.

8.3. Druhá studie

Na výsledky didaktické rekonstrukce tématu simulace náhodných množin mohla navázat realizace hlavní kvantitativní části výzkumu. v rámci předchozí fáze byly navrženy konkrétní výukové bloky, shrnuté do materiálu připraveného k použití ve výuce. Identifikovány v něm byly také klíčové programovací dovednosti potřebné k tomu, aby byli žáci schopni náhodné množiny efektivně simulovat a analyzovat. Nicméně, původní studie se jen částečně dotkla otázky praktické aplikace těchto didaktických nástrojů v reálném výukovém prostředí, což zanechalo prostor pro další zkoumání.

Výzkumná studie byla realizována v roce 2023 ve dvou vybraných třídách, konkrétně v prvním ročníku čtyřletého gymnázia a v kvintě osmiletého gymnázia. v každé třídě byly vytvořeny dvě patnáctičlenné skupiny – kontrolní a testovaná, dané rozvrhem a vedené různými vyučujícími. Výuka probíhala formou dvouhodinových bloků jednou týdně. v rámci testované skupiny byl realizován základní kurz programování ve Scratch, následovaný dvěma výukovými bloky zaměřenými na simulaci náhodných množin, vyvinutými v předchozí fázi výzkumu. Po absolvování výuky byl oběma skupinám předložen dotazník sémantického diferenciálu s cílem porovnat výsledky.

V testované skupině bylo nejprve odučeno šest bloků (týdnů) zaměřených na programování ve Scratch tak, aby byly naplněny kompetence identifikované v předchozí fázi výzkumu. Počátečních dovednosti a zkušenosti s programováním se mezi žáky značně lišily. Ve třídě prvního ročníku čtyřletého gymnázia z celkového počtu 15 žáků pouze tři uváděli předchozí zkušenosti s prací ve Scratch. v kvintě osmiletého gymnázia byly rozdíly stejně markantní. Na nižším gymnáziu měli žáci společnou část informatiky jen dvě hodiny v primě, zbývající roky mohli zásadně ovlivnit svou volbou. v sekundě měli možnost zvolit si v rámci informatiky zaměření buď na programování nebo na grafiku a v tercii a kvartě neměli někteří informatiku vůbec, protože si mohl místo ní zvolit výběrový předmět dramatická výchova. v testované skupině aktuálního výzkumu, která bylo tedy osm žáků, kteří prošli rozsáhlým kurzem programování ve Scratch, zatímco zbylých sedm mělo s tímto programovacím prostředím pouze minimální zkušenosti. Tyto zkušenosti byly nabývány převážně prostřednictvím úloh z bobříka informatiky, hodin kódu a podobných aktivit. Tato variabilita v počátečních dovednostech a znalostech programování měla významný dopad na průběh a výsledky výzkumu.

Zvláštní pozornost si zasluhuje případ jednoho výjimečného žáka, který projevoval excelentní schopnosti v programování ve Scratch již od primy, díky svému předchozímu zapojení do tvorby vlastních projektů. Další žák, rovněž s vynikajícími programovacími dovednostmi, rozvíjel výjimečné projekty ve svém volném čase, často využívaje generátor pseudonáhodných čísel dostupný ve Scratch. Nicméně tento žák nebyl součástí výzkumného během dotazníkového sběru dat sémantického diferenciálu. Oba zmínění studenti se účastnili skupiny zaměřené na programování v sekundě.

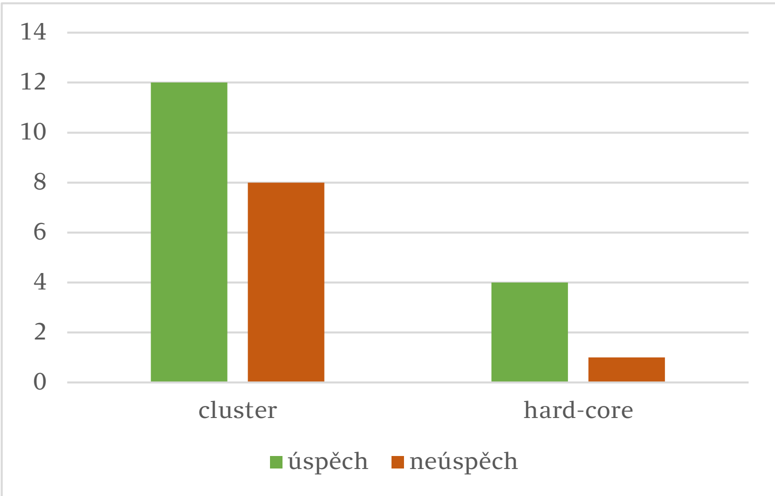
Po přípravném bloku programování proběhla hodina zaměřená na simulaci náhodné množiny, během které se žáci snažili ovlivnit rozdělení pravděpodobnosti počtu bodů v pozorovacím okně. Výsledky a řešení prezentovaná žáky byla srovnatelná s těmi předchozí fázemi výzkumu a nebudou opakovány.

Další lekce byla věnována simulaci náhodných množin se shluky a pravidelných množin. v plánu výuky nebyla z časových důvodů zahrnuta aktivita zaměřená na rozlišování tří typů náhodných množin a jejich pojmenování, jak bylo původně zamýšleno. Místo toho byli žáci rovnou seznámeni s těmito typy na obrázku 4, motivovaném dále obrázky s výřezem obrazu shluku galaxií z radioteleskopu Evropské jižní observatoře na obrázku 7 a s rozmístěním amakrinních buněk v oku potkana, viz obrázek 6, představujících pravidelný typ náhodné množiny. Následně byli vyzváni k výběru mezi náhodnou množinou se shluky a pravidelnou náhodnou množinou a pokusili se tyto množiny simulovat. Na závěr druhé lekce byl žákům rozdán dotazník sémantického diferenciálu.

8.3.1. Analýza žákovských řešení

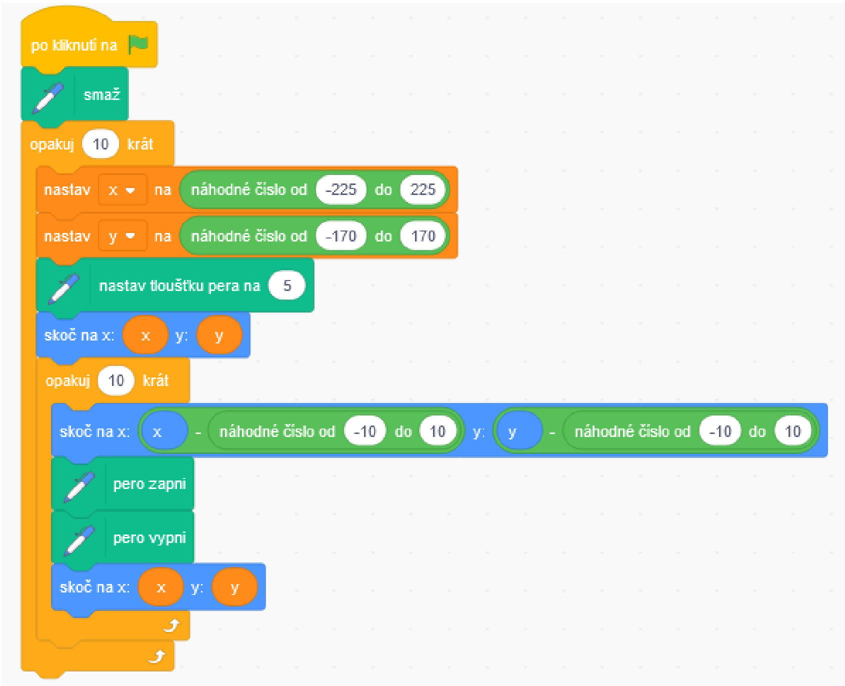
Součástí výzkumu byla analýza žákovských prací, která se snaží prohloubit pochopení toho, jak žáci témata zpracovávají a jaké metody při řešení uplatňují. Ve zkoumané skupině byl nejdříve realizován základní kurz programování v prostředí Scratch, jehož cíle byly dány požadavky formulovanými po prvním testování simulací v praxi. Úvod do programování následovaly dva specificky navržené výukové bloky zaměřené na simulaci náhodných množin uvedené v tabulkách Tabulka 2 a Tabulka 3. v rámci prvního bloku a simulací náhodných množin se shluky z druhého bloku byla řešení žáků srovnatelná s předchozím výzkumem a shodné výsledky proto zde nejsou podrobněji rozváděny.

Zásadním rozdílem bylo, že žáci měli možnost volby mezi simulací množin se shluky a pravidelných množin. z celkového počtu 25 žáků si 20 zvolilo simulaci množin se shluky, zatímco pět se rozhodlo pro pravidelnou množinu. Algoritmus simulující náhodné množiny splňující představu vybraného bodového procesu se podařilo sestavit 12 žákům s cluster procesy a čtyřem, kteří si vybrali simulaci hard-core procesu. Výsledky jsou znázorněny na obrázku 30.



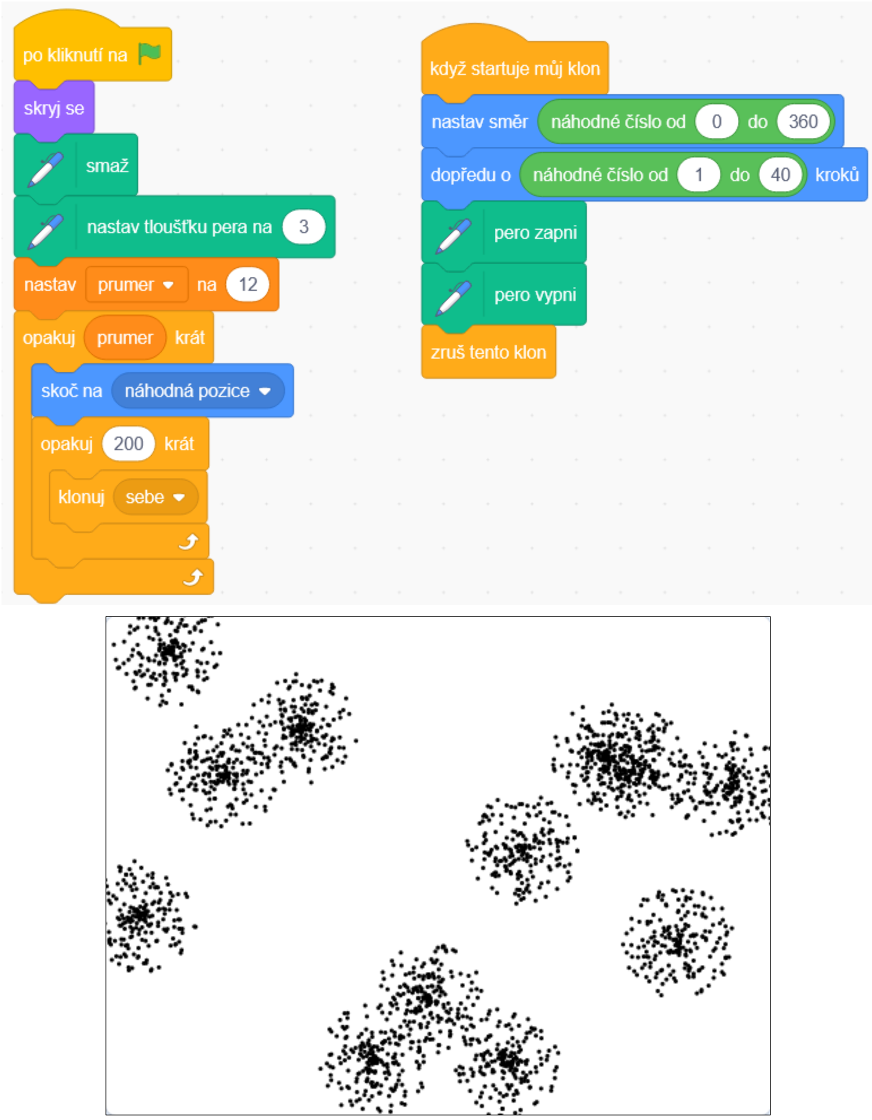
Obrázek 30: Srovnání počtu žáků, kteří si vybrali ve druhém bloku simulaci cluster procesu a hard-core procesu a úspěšnost jejich řešení.

Při řešení cluster procesů se objevovaly metody podobné těm z předchozích fází výzkumu. Nejčastějším přístupem bylo vytváření klonů mateřského bodu v centru clusteru, jak je demonstrováno na obrázku 24, kde je zobrazeno typické řešení algoritmu odpovídající modelu rozesetí semen. Patnáct žáků uplatnilo tuto metodu s využitím klonů, tři zvolili přístup s proměnnými jako na obrázku 31, které doprovází stejný efekt čtverců při zvýšení počtu bodů v clusteru. U dvou s nefunkčních řešení nebylo možné identifikovat metodu přesný problém. U šesti žáků se objevila chyba vedoucí k vytváření táhlých množin v podobě "hada", která byla také popsána dříve. U pěti žáků se objevilo řešení s využitím rotace postavy a náhodného poloměru vzdálenosti od centra clusteru jako na obrázku 31, které produkuje množiny bližší představě cluster procesu.



Obrázek 31: Žákovské řešení vedoucí také na čtverce s využitím proměnné pro souřadnice středu clusteru, místo vytváření klonů.

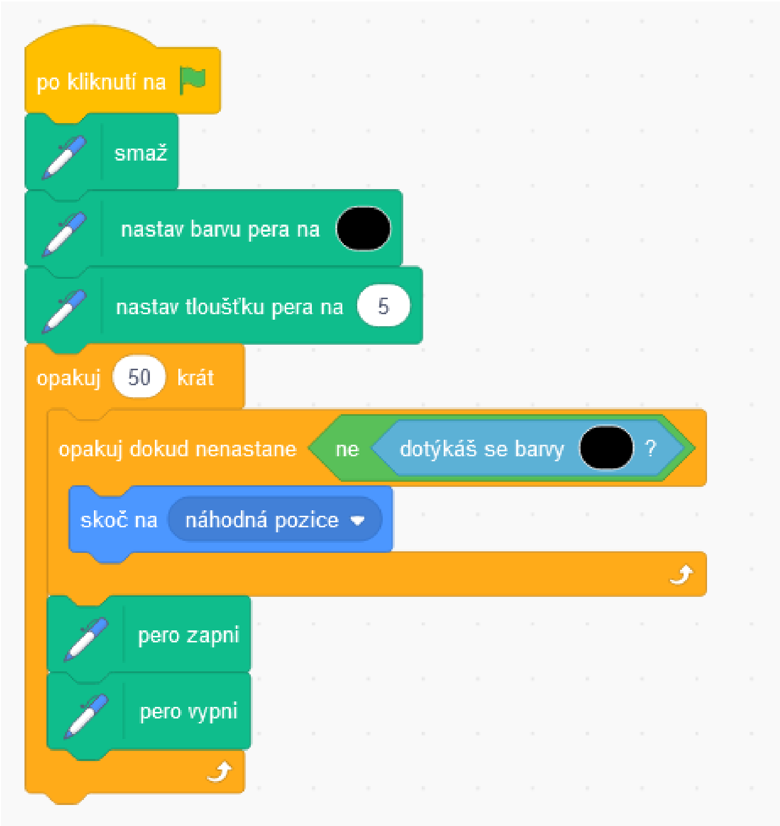
Významným novým prvkem byla simulace pravidelných množin, kterou si vybralo pouze pět žáků. Metody simulace pravidelných množin ve Scratch se lišily. Dva žáci aplikovali postup s využitím bloku "když dotýkáš se barvy", což úkol značně zjednodušilo. Tento přístup spočívá v tom, že jedna postava skáče na náhodná místa na plátně a vytvoří tečku jen tehdy, pokud není splněna podmínka tohoto bloku, jak je vidět na obrázku 33. Druhý přístup zahrnoval ukládání souřadnic x a y do dvou oddělených seznamů a kontrolu dodržení minimální vzdálenosti pro nové body vzhledem ke všem již existujícím bodům před jejich vytvořením. Tento postup nejlépe odpovídá markovským řetězcům, které jsou běžně využívány při simulaci hardcore procesů.

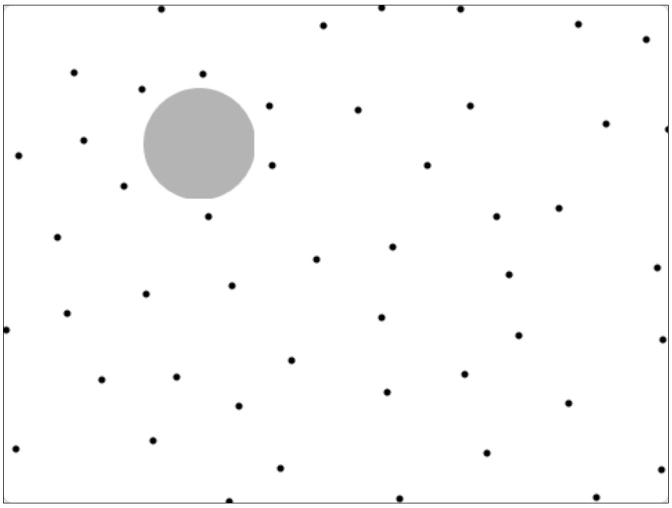


Obrázek 32: Žákovské řešení cluster procesu s využitím rotace postavy. Program a výsledek realizace.

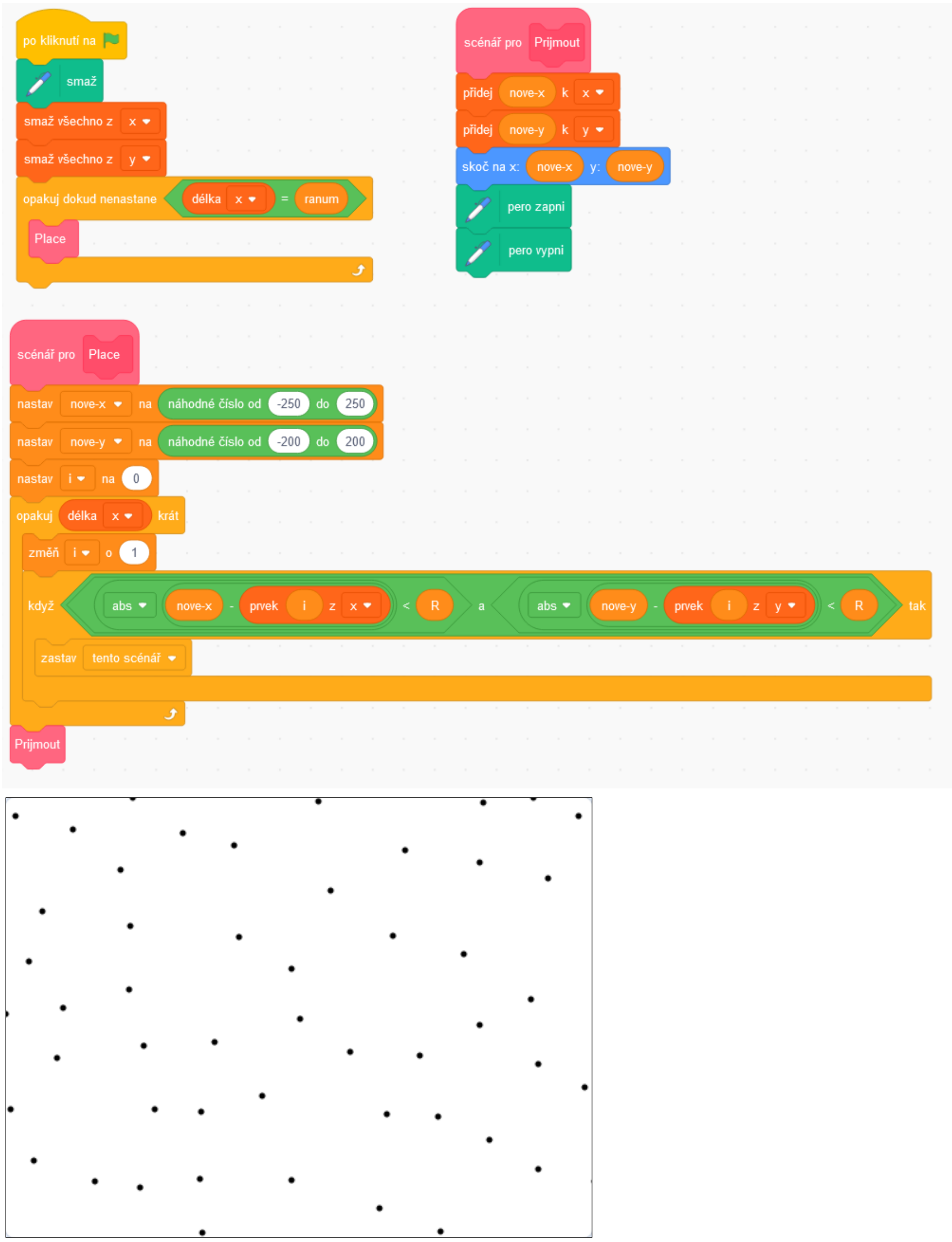
Příklad takovéto práce je možné vidět na obrázku 34. Tato metoda vyžaduje sofistikovanější práci s proměnnými a větší úroveň abstrakčního myšlení, avšak nabízí výhodu v tom, že není omezena počtem klonů. Grafický výstup je sice vizuálně identický, ale přístup k řešení se liší. Namísto vytváření "kulatého" jádra hardcore procesu, tato metoda generuje čtvercový tvar, protože pracuje s porovnáváním jednotlivých souřadnic x a y, na rozdíl od výpočtu vzdálenosti mezi body, který by byl možný pomocí Pythagorovy věty.

Z výsledků výzkumu vyplývá, že výuka s využitím simulací náhodných množin a badatelským přístupem podporuje u žáků kreativní myšlení a umožňuje jim hlouběji porozumět konceptům pravděpodobnosti a statistiky. Tato metodika navíc umožňuje studentům aplikovat teoretické znalosti na praktické příklady, což zvyšuje jejich motivaci a zájem o předmět. Analýza žákovských prací tak nabízí cenný vhled do procesu učení a umožňuje lepší porozumění tomu, jaké strategie a přístupy jsou pro žáky nejefektivnější.





Obrázek 33: Žákovské řešení pravidelné množiny s ponechanou zobrazenou postavou programu, jejíž kostým určuje poloměr. Oproti jiným programovacím jazykům je to toto řešení ve Scratch triviální.



Obrázek 34: Žákovské řešení pravidelné množiny přes seznamy x a y pro uchování souřadnic všech přijatých bodů.

8.3.2. Měření vlivu metodou sémantického diferenciálu

Z 60 žáků obou tříd bylo v den dotazníku přítomno v daných hodinách 28 žáků kontrolní skupiny a 25 žáků testované skupiny. z výsledků měření sémantickým diferenciálem byly odstraněny odpovědi jednoho respondenta z kontrolní skupiny, který zvolil u všech kombinací stejnou hodnotu na okraji škály. v datech se objevily rozdíly mezi odpověďmi obou skupin na několika místech, které budou podrobeny dalšímu bádání. Nejvýraznější rozdíly lze pozorovat mezi spojeními se slovy *statistika*, *pravděpodobnost* a *já*. Odchylky u menšího počtu bipolárních adjektiv jsou také u slov *algoritmus* a *život*.

Dvojice slov v některých sloupcích byly nejdříve prohozeny a výsledné hodnoty převráceny tak, aby vyšší hodnota na zvolené stupnici znamenala ve všech případech pozitivnější vnímání postoje u dané dvojice slov. Kompletní výsledky průměrných hodnot obou skupin pro všechny kombinace slov jsou uvedeny v přílohách 1 a 2. Rozdíly těchto hodnot jsou uvedeny v tabulce 4. Je zřejmě, že vnímání toho, zda má některé slovo z každé dvojice pozitivnější zabarvení, je z mnoha směrů relativní. Pro výslednou statistiku to však nehraje zásadní roli. Pro rychlé vizuální srovnání odpovědí u vybraných slov jsou zvoleny překrývající se spojnicové grafy průměrných hodnot pro všechny dvojice slov v obou skupinách.

Nejmenší rozdíly mezi hodnotami kontrolní a testované skupiny byly naměřeny u slov *internet* a *škola*. Pro většinu dvojic adjektiv jsou rozdíly u těchto slov jen v řádu setin, a proto se u nich grafy obou skupin prakticky překrývají, jak lze pozorovat na obrázku 35. To bylo proti očekávání, protože jako referenční slova byla zvolena *příroda*, *já*, *život* a *láska*. Přitom slova *já* a *život* patřila spíše k těm s opačnými výsledky. Toto zjištění by mohlo být podrobeno dalšímu zkoumání.

Mezi slova s největšími odchylkami hodnot rozdílů patří *pravděpodobnost*. k výrazným posunům dochází na škále od pomalého k rychlému, od jednotvárného k pestrému a od povrchního k hlubokému. Tento nález může odrážet zvýšený zájem a angažovanost studentů v této oblasti, což je klíčové pro efektivní vzdělávání v matematice a přírodních vědách. Nejvýznamnější posuny u slova *statistika* jsou od zbytečného k užitečném, od tuhého k pružnému a od vzdáleného k blízkému. Grafická znázornění hodnot obou kategorií je vidět na obrázku 36.

Podobně velké rozdíly, jsou patrné i u slova *algoritmus*. v sémantickém prostoru žáků testované skupiny se algoritmy jeví jako užitečnější, silnější a modernější. Tento výsledek může naznačovat, že studenti vnímali algoritmy jako modernější a relevantnější pro současný svět, což je důležité pro rozvoj dalších dovedností v oblasti. Pro kategorii *život* byl identifikován výrazný posun u dvojice slov slabý – silný, ale také zdaleka největší negativní rozdíl od rychlého směrem k pomalému.

Zajímavé je, že u několika slov, jako jsou *příroda*, *láska*, a *statistika*, byl největší posun zaznamenán u dvojice slov tuhý a pružný. Tento nález může odrážet obecnou změnu v tom, jak studenti vnímají flexibilitu a adaptabilitu v různých kontextech, což může mít důležité vliv na jejich vzdělávací strategie a rozvoj kritického myšlení. Podobně jednoznačný posun téměř u všech slov lze pozorovat na řezu dvojicí adjektiv jednotvárný – pestrý. k pozitivnímu posunu ve vnímání od jednotvárného k pestřejšímu došlo u všech slov kromě *internet* a *škola*. Tento nález je významný, protože ukazuje na obecný trend zvýšené rozmanitosti a pestrosti ve vnímání různých aspektů života a studia mezi studenty testované skupiny. Tato změna ve vnímání může podporovat kreativní myšlení, ochotu učit se novým věcem a otevřenost k novým zkušenostem, což jsou klíčové dovednosti pro úspěšné působení v dnešním rychle se měnícím světě.

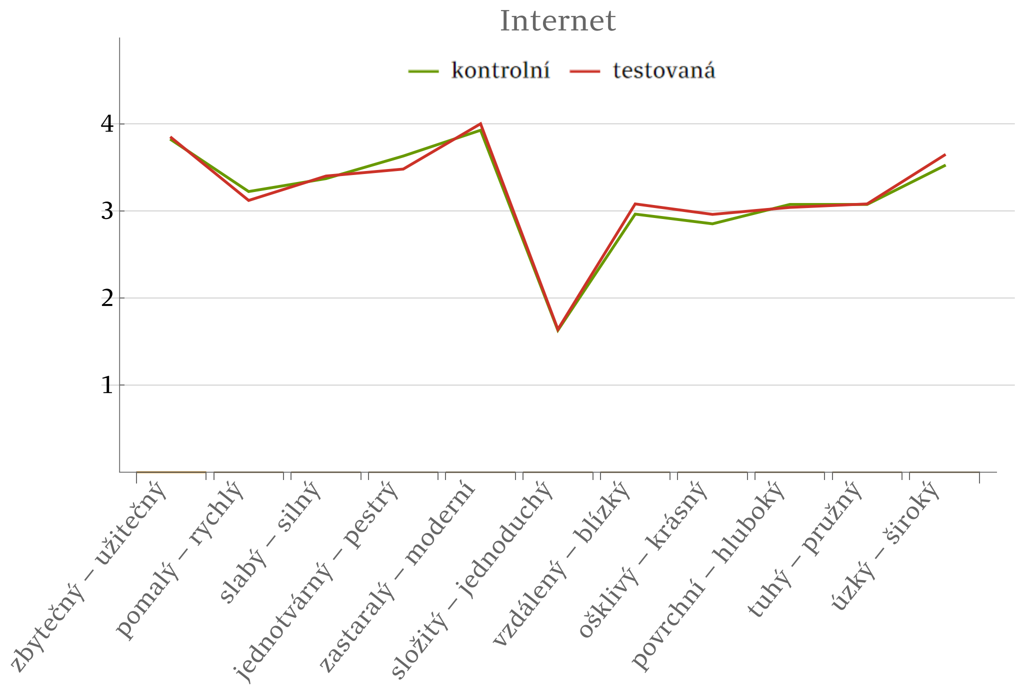
K porovnání, zda se výsledky měření na testované skupině statisticky významně liší od výsledků měření na kontrolní skupině byl použit pro všechny kombinace slov dvouvýběrový t-test. Předpoklady testu jsou splněny a vzhledem k množství dat není test normality nutný. Ověření shody rozptylu bylo proveden F-testem pro všechny vzorky. Přehled vypočtených p-hodnot pro všechny kombinace slov uvádí tabulka 5.

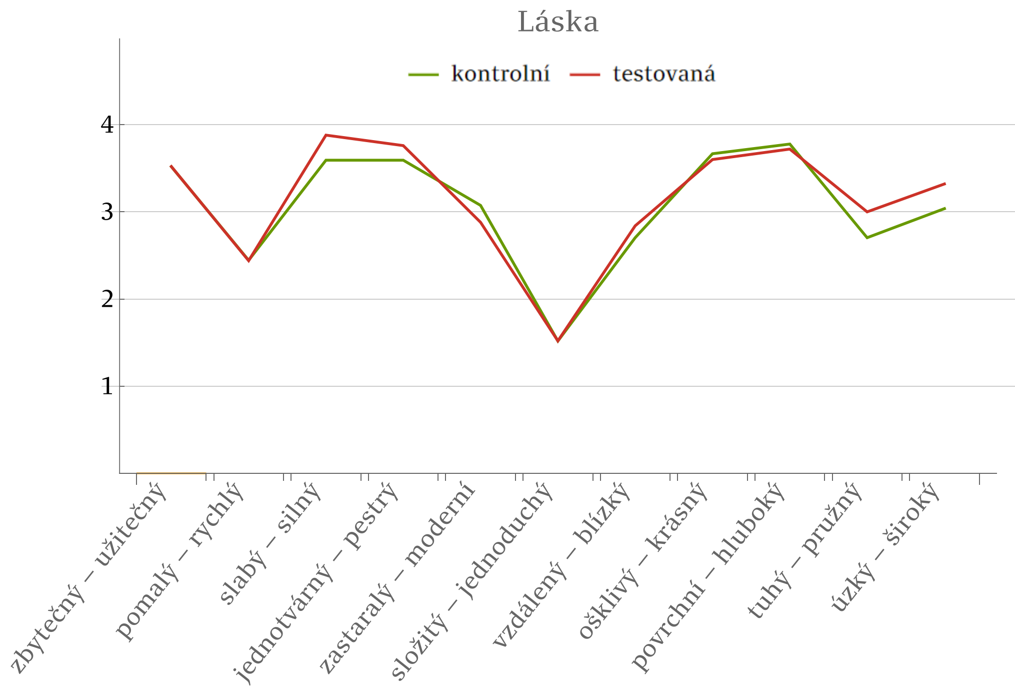
Tabulka 4: Rozdíly průměrných hodnot testované skupiny od hodnot kontrolní skupiny vypočtené pro všechny kombinace slov.

	zbytečný užitečný	pomalý rychlý	slabý silný	jednotvárný pestrý	zastaralý moderní	složitý jednoduchý	vzdálený blízký	ošklivý krásný	povrchní hluboký	tuhý pružný	úzký široký
Příroda	-0,01	0,02	0,15	0,21	-0,28	-0,19	-0,07	0,03	-0,12	0,42	0,28
Pravděpodobnost	0,00	0,56	-0,14	0,57	0,12	0,25	0,12	-0,08	0,47	0,29	0,28
Já	-0,18	0,17	-0,01	0,55	0,20	-0,16	0,30	0,04	-0,38	0,42	0,49
Láska	0,00	0,00	0,29	0,17	-0,19	0,00	0,14	-0,07	-0,06	0,30	0,28
Internet	0,03	-0,10	0,03	-0,15	0,07	0,01	0,12	0,11	-0,03	0,01	0,12
Statistika	0,38	0,11	0,30	0,26	0,27	-0,08	0,37	0,16	0,14	0,43	0,07
Algoritmus	0,42	0,30	0,28	0,16	0,44	-0,26	-0,33	0,00	-0,01	-0,15	0,04
Škola	-0,29	-0,23	0,13	0,00	-0,04	0,02	0,16	-0,24	-0,15	0,05	-0,09
Budoucnost	0,27	-0,01	0,19	0,24	-0,08	-0,04	-0,03	-0,04	0,31	0,28	0,10
Život	0,33	-0,50	0,47	0,28	0,23	-0,12	0,32	0,13	0,10	0,32	-0,02

Tabulka 5: p-hodnoty pro dvouvýběrový t-test srovnávající výsledky kontrolní a testované skupiny.

	zbytečný užitečný	pomalý rychlý	slabý silný	jednotvárný pestrý	zastaralý moderní	složitý jednoduchý	vzdálený blízký	ošklivý krásný	povrchní hluboký	tuhý pružný	úzký široký
Příroda	0,91	0,94	0,51	0,28	0,23	0,40	0,78	0,85	0,56	0,08	0,12
Pravděpodobnost	0,99	0,04	0,54	0,04	0,64	0,42	0,64	0,73	0,09	0,28	0,37
Já	0,46	0,51	0,97	0,04	0,38	0,55	0,31	0,86	0,12	0,08	0,07
Láska	0,99	0,99	0,07	0,33	0,50	1,00	0,64	0,73	0,67	0,26	0,28
Internet	0,87	0,71	0,90	0,52	0,17	0,97	0,68	0,62	0,91	0,98	0,56
Statistika	0,03	0,65	0,17	0,31	0,27	0,74	0,13	0,47	0,59	0,15	0,77
Algoritmus	0,06	0,24	0,27	0,58	0,08	0,19	0,21	0,99	0,97	0,63	0,89
Škola	0,26	0,42	0,65	0,99	0,89	0,93	0,58	0,37	0,61	0,85	0,76
Budoucnost	0,22	0,97	0,41	0,23	0,73	0,85	0,93	0,88	0,21	0,29	0,70
Život	0,29	0,11	0,13	0,33	0,37	0,56	0,29	0,64	0,72	0,18	0,94





Obrázek 35: Jen nepatrné rozdíly v odpovědích studentů obou skupin u pojmu *internet* a referenčíhopojmu *láska*. Skutečnost, že nejsou statisticky významné, lze snadno odhadnout, protože grafy hodnot obou skupin se skoro všude překrývají.

Obrázek 36: Největší rozdíly se objevily u pojmů *pravděpodobnost* a *statistika*. Na zvolené hladině významnosti lze najít v obou případech statisticky významné rozdíly.

Na základě výsledků lze z provedených 110 t-testů na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ nulovou hypotézu zamítnout u třech kombinací slov: *pravděpodobnost* ve spojení s dvojicí pomalý – rychlý a jednotvárný – pestrý, a slova *statistika* ve spojení zbytečný – užitečný. Dostatečně nízká p-hodnota vychází také u kombinace slov *já* a jednotvárný – pestrý, avšak data nesplňují test shody rozptylu, čímž může být výsledek t-testu ovlivněn.

Jinými slovy výsledky experimentu naznačují, že začlenění simulací náhodných množin mělo vliv na vnímání pravděpodobnosti jako rychlejší a pestřejší. Tento nález může odrážet zvýšenou efektivitu a zajímavost výuky pravděpodobnosti, což může vést k lepšímu pochopení a zájmu o tento předmět. Statisticky významná je také kombinace slov "zbytečný – užitečný" u slova *statistika*. Tento výsledek naznačuje, že studenti vnímají statistiku jako užitečnější po začlenění simulací badatelským přístupem. Toto může signalizovat, že studenti lépe chápou praktickou aplikaci statistiky a její význam pro různé oblasti.

9. ZÁVĚR

Z analýzy dotazníků sémantického diferenciálu, které vyplnilo 52 respondentů rozdělených do kontrolní a experimentální skupiny, a ze 110 provedených t-testů vyplynulo, že existují statisticky významné rozdíly v odpovědích mezi oběma skupinami. Tyto rozdíly byly zaznamenány u tří konkrétních kombinací slov:

- *pravděpodobnost s* dvojicí slov pomalý – rychlý
- *pravděpodobnost s* dvojicí slov jednotvárný – pestrý,
- *statistika* s dvojicí slov zbytečný – užitečný.

Výsledky experimentu metodou sémantického diferenciálu naznačují, že začlenění simulací náhodných množin do badatelsky orientované výuky mělo vliv na vnímání pravděpodobnosti jako rychlejší a pestřejší. Tento nález může odrážet zvýšenou efektivitu a zajímavost výuky pravděpodobnosti, což může vést k lepšímu pochopení a zájmu o tento předmět.
Změna v hodnocení statistiky ze strany studentů od zbytečné k užitečné naznačuje, že studenti po začlenění simulací vnímají statistiku jako významnější a praktičtější. To naznačuje, že lépe rozumí praktickému využití statistiky a její důležitosti v různých oblastech.

Ve vzdělávacím obsahu simulací náhodných množin uzpůsobeném pro žáky gymnázia byly stanoveny následují výukové cíle ve třech úrovních propracovanosti:

- Všichni musí zvládnout (Roztřídit náhodné bodové procesy podle hustoty a typu. Vytvořit simulaci jednoduché náhodné množiny.)
- Všichni by měli zvládnout (Otestovat správnost a použitelnost svého řešení. Odstranit popsané chyby.)
- Všichni by mohli zvládnout (Simulovat vybrané množiny s přirozeným okrajem za využití generátoru s binomickým rozdělením pravděpodobnosti.)

Vzhledem k aktuálně nabíhající revizi RVP mohou právě simulace náhodných množin na gymnáziu nabízet variantu k zužitkování a rozvoji digitálních kompetencí v matematice a dovedností nabytých v novém předmětu Informatika, který na druhém stupni základní školy nyní zahrnuje z velké části právě programování v blokových prostředích.

A rovněž proto, že při řešení úloh nutí žáky gymnázia uvažovat o základních pojmech statistiky a pravděpodobnosti, zatímco jejich nástroje a termíny jsou užívány mimoděk. Tvorba algoritmů s jejich okamžitou grafickou reprezentací může pomáhat budovat v myšlení žáků aparát nutný k pochopení některých principů těchto dvou oborů matematiky, jejichž význam ve světě kolem nás neustále roste.

10. Souhrn

Ve své práci jsem se zabýval začleněním simulací náhodných množin do výuky badatelským přístupem a tím, jak žáci gymnázia díky tomu vnímají předmět *pravděpodobnost* a *statistika*. Na základě výsledků dotazníků sémantického diferenciálu 52 respondentů rozdělených na kontrolní a testovanou skupinu a ze 110 provedených t-testů se potvrdil statisticky významný rozdíl středních hodnot odpovědí testované skupiny od kontrolní u třech kombinací slov: *pravděpodobnost* ve spojení s dvojicí pomalý – rychlý a jednotvárný – pestrý, a slova *statistika* ve spojení zbytečný – užitečný.

Ve vzdělávacím obsahu simulací náhodných množin uzpůsobeném pro žáky gymnázia byly stanoveny výukové cíle ve třech úrovních propracovanosti. Více než polovina žáků gymnázia se dopracovala až k vytvoření simulace náhodné množiny se shluky nebo pravidelné množiny včetně odhalení a odstranění nejčastějších chyb, které jsou v práci popsány.

POUŽITÁ LITERATURA

ABELL, Sandra K, Deborah C SMITH a Mark J VOLKMANN, 2006. Inquiry in science teacher education. In: *Scientific inquiry and nature of science*. B.m.: Springer, s. 173–199.

ARTIGUE, Michéle a Peter BAPTIST, 2012. Inquiry in mathematics education. *Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school. Recuperado el*. **22**.

ARTIGUE, Michèle a Morten BLOMHØJ, 2013. Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM* [online]. **45**(6), 797–810. ISSN 1863-9704. Dostupné z: doi:10.1007/s11858-013-0506-6

ARTIGUE, Michèle, Justin DILLON, Wynne HARLEN a Pierre LÉNA, 2012. *Learning through inquiry* [online]. B.m.: The Fibonnacci Project. Background resources for implementing inquiry in science and mathematics at school [vid. 2016-05-23]. Dostupné z: http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/learning_through_inquiry.pdf

BANCHI, Heather a Randy BELL, 2008. The many levels of inquiry. *Science and children*. **46**(2), 26.

BEN-ZVI, Dani a Alex FRIEDLANDER, 1997. Statistical thinking in a technological environment. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*. 45–55.

BERITOVÁ, Gabriela, Helena BINTEROVÁ, Kateřina DVOŘÁKOVÁ, Jana FORRMÁNKOVÁ, Petra HANOUSKOVÁ, Petra HOLUBOVÁ, Barbora KADLECOVÁ, Jana POKORNÁ, Eva POLÁNSKÁ, Renata SMOLÍKOVÁ, Marek ŠULISTA, Kateřina ŠTIKOVÁ a Marta VRTIŠOVÁ, 2012. *Propojení cizího jazyka a vyučovacího předmětu na základní škole*. B.m.: Základní škola Matice školské 3. ISBN 978-80-903427-4-3.

BIEHLER, Rolf, 1993. Software Tools and Mathematics Education: The Case of Statistics. In: Christine KEITEL a Kenneth RUTHVEN, ed. *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, s. 68–100 [vid. 2016-02-01]. ISBN 978-3-642-78544-3. Dostupné z: http://www.springerlink.com/index/10.1007/978-3-642-78542-9_4

BÍLEK, M. a I. KRÁLÍČEK, 2007. Názory učitelů přírodovědných předmětů na rozšiřování aprobace. *Rozšiřující studium učitelství přírodovědných předmětů. Náměty, souvislosti a návrhy realizace. Hradec Králové: Gaudeamus*. 63–70.

BINTEROVÁ, Helena a Marek ŠULISTA, 2013. GeoGebra Software Use within a Content and Language Integrated Learning Environment. *European Journal of Contemporary Education* [online]. **4**(2), 100–116. ISSN 23049650, 23056746. Dostupné z: doi:10.13187/ejced.2013.4.100

BLACK, Paul a Dylan WILIAM, 1998. *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. B.m.: Granada Learning.
BLAHO, Andrej a L'ubomír SALANCI, 2011. Informatics in primary school: principles and experience. In: *International Conference on Informatics in Schools: Situation, Evolution, and Perspectives*. B.m.: Springer, s. 129–142.
BOX, George E.P., George BOX, William G. HUNTER a J. Stuart HUNTER, 1978. *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*. B.m.: Wiley. Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section Series. ISBN 978-0-471-09315-2.
BRANSFORD, John D, Ann L BROWN, Rodney R COCKING, a OTHERS, 2000. *How people learn*. B.m.: Washington, DC: National academy press.
BUCK, Laura B., Stacey Lowery BRETZ a Marcy H. TOWNS, 2008. Characterizing the level of inquiry in the undergraduate laboratory. *Journal of college science teaching*. **38**(1), 52–58.
BUTLER, Darrell L. a Martin SELLBOM, 2002. Barriers to adopting technology. *Educause quarterly*. **2**(1), 22–28.
BYBEE, Rodger W., 2004. Scientific inquiry and science teaching. In: *Scientific Inquiry and Nature of Science: Implications for Teaching,Learning, and Teacher Education*. Lawrence Flick, N.G. Lederman (ed.). B.m.: Springer. ISBN 978-1-4020-2671-3.
CARR, N.G., 2011. *The Shallows: How the Internet is Changing the Way We Think, Read and Remember* [online]. B.m.: Atlantic. ISBN 978-1-84887-227-1. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=9ta-uQAACAAJ
CARTER, Susan Payne, Kyle GREENBERG a Michael S WALKER, 2017. Should professors ban laptops? How classroom computer use affects student learning. *Education Next*. **17**(4), 68–75.
CLARK-WILSON, Alison, Gilles ALDON, Annalisa CUSI, Merrilyn GOOS, Mariam HASPEKIAN, Ornella ROBUTTI a Mike THOMAS, 2014. The challenges of teaching mathematics with digital technologies–the evolving role of the teacher. In: *Proceedings of the joint meeting of PME* [online]. s. 87–116 [vid. 2016-02-14]. Dostupné z: http://www.pme38.com/wp-content/uploads/2014/05/RF-Clark-Wilson-et-al.pdf
COLBURN, Alan, 2000. An inquiry primer. *Science scope*. **23**(6), 42–44.
DEPAOLO, Concetta A., 2010. The STAT-ATTIC Website: Links to Statistics Applets for Introductory Courses. *Journal of Statistics Education* [online]. **18**(3) [vid. 2016-05-22]. Dostupné z: http://www.amstat.org/publications/jse/v18n3/depaolo.pdf
DIGGLE, Peter J, Stephen J EGLEN a John B TROY, 2006. Modelling the bivariate spatial distribution of amacrine cells. *Case Studies in Spatial Point Process Modeling*. 215–233.
DOLEŽALOVÁ, Jana, 2019. Využití tabletu při výuce finanční gramotnosti na základní škole. In: *Sborník příspěvků 9. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. B.m.: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

DORI, Yehudit Judy a John BELCHER, 2005. How does technology-enabled active learning affect undergraduate students' understanding of electromagnetism concepts? *The journal of the learning sciences*. **14**(2), 243–279.
DORIER, Jean L. a Katja MAASS, 2014. *Inquiry-based mathematics education Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 300-304)*. B.m.: Heidelberg: Springer.
DOSTÁL, Jiří, 2015. *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy*. B.m.: Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-4393-5.
DŘÍMAL, Jiří, David TRUNEC a Antonín BRABLEC, 2006. *Úvod do metody Monte Carlo*. Brno: Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita.
EDELSON, Daniel C, Douglas N GORDIN a Roy D PEA, 1999. Addressing the challenges of inquiry-based learning through technology and curriculum design. *Journal of the learning sciences*. 391–450.
ELLEDEROVÁ, Eva, 2017. Konstrukční výzkum ve vzdělávání. *Pedagogická orientace* [online]. **27**(3), 419–448. ISSN 1805-9511, 1211-4669. Dostupné z: doi:10.5817/PedOr2017-3-419
EUROPEAN SOUTHERN OBSERVATORY (ESO), 2013. *Map of the positions of thousands of galaxies in the VIPERS survey* [online]. 2013. Dostupné z: https://www.eso.org/public/images/ann13022b/
FEHÉR, Zoltán, 2015. Počítačová simulácia vo vyučovaní náhodných javov. *South Bohemia Mathematical Letters*. **23**(1), 1–7. ISSN 2336-2081.
FERJENČÍK, Ján, 2010. *Úvod do metodologie psychologického výkumu*. Praha: Portál. ISBN 978-80-262-0229-5.
FRADD, Sandra H., Okhee LEE, Francis X. SUTMAN a M. Kim SAXTON, 2001. Promoting science literacy with English language learners through instructional materials development: A case study. *Bilingual Research Journal*. **25**(4), 479–501.
GARCÍA-MORALES, Víctor J, Aurora GARRIDO-MORENO a Rodrigo MARTÍN-ROJAS, 2021. The transformation of higher education after the COVID disruption: Emerging challenges in an online learning scenario. *Frontiers in psychology*. **12**, 616059.
GINNIS, Paul, 2017. *Efektivní výukové nástroje pro učitele: strategie pro zvýšení úspěšnosti každého žáka = The teacher's toolkit : raise classroom achievement with strategies for every learner*. První vydání. Praha: EDUkační LABoratoř, z.s. ISBN 978-80-906082-6-9.
GJO, 2013. *Výroční zpráva 2012/2013*. 2013.
GRÉGOIRE, Réginald, Robert BRACEWELL a Thérèse LAFERRIÈRE, 1996. *The Contribution of New Technologies to Learning and Technology in Elementary and Secondary School* [online]. 1996. Dostupné z: http://www.tact.fse.ulaval.ca/fr/html/apport/impact96.html
GUBO, Štefan, 2015. Riešenie problémov metódou Monte Carlo v tabuľkovom kalkulátore MS Excel. *South Bohemia Mathematical Letters*. **23**(1), 18–27. ISSN 2336-2081.
HÁJKOVÁ, Radka, 2015. Výuka kombinatoriky a počtu pravděpodobnosti na základní škole badatelským přístupem. In: *Badatelsky orientovaná výuka matematiky*

a informatiky s podporou technologií. B.m.: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, s. 128–139.
HAMARI, Juho, 2007. Gamification. *The Blackwell encyclopedia of sociology*. 1–3.
HAMIDI, Farideh, Maryam MESHKAT, Maryam REZAEE a Mehdi JAFARI, 2011. Information technology in education. *Procedia Computer Science*. **3**, 369–373.
HAŠEK, Roman, 2013. Systems of Computer Algebra and Dynamic Geometry as Tools of Mathematical Investigation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*. **20**(3).
HATTIE, John, 2008. *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. B.m.: routledge.
HAUPTMEIER, Gerhard, Adolf KELL a Antonius LIPSMEIER, 1975. Zur Auswahlproblematik von Lerninhalten und zur didaktischen Reduktion wissenschaftlicher Aussagen. *Die Deutsche Berufs-und Fachschule*. **71**(12), 899–922.
HERING, D, 1958. Didaktische Vereinfachung. Einführung in das Problem des Wahrend von Wissenschaftlichkeit und Fasslichkeit der Aussagen im naturwissenschaftlichen und technischen Unterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden*. **8**(158), 59.
HEWSTONE, Miles a Wolfgang STROEBE, 2006. *Sociální psychologie: moderní učebnice sociální psychologie*. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-092-4.
HRUŠKA, Ondřej, 2023. *Chytré telefony ve vzdělávání* [online]. B.m. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/178812/120436910.pdf
CHANCE, Beth, Dani BEN-ZVI, Joan GARFIELD a Elsa MEDINA, 2007. The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*. **1**(1).
CHANCE, Beth a Allan ROSSMAN, 2006. Using simulation to teach and learn statistics. In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [online]. s. 1–6 [vid. 2016-02-08]. Dostupné z: http://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/7E1_CHAN.pdf
CHAPUT, Brigitte, Jean-Claude GIRARD a Michel HENRY, 2011. Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study: The 18th ICMI study*. 85–95.
CHEUNG, Simon KS, Lam For KWOK, Kongkiti PHUSAVAT a Harrison Hao YANG, 2021. Shaping the future learning environments with smart elements: challenges and opportunities. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*. **18**, 1–9.
CHIZMAR, John F a David B WILLIAMS, 2001. What do faculty want? *Educause quarterly*. **24**(1), 18–24.
CHRÁSKA, Miroslav, 1995. Změny v sémantickém prostoru studentů pedagogické fakulty. *Pedagogika*. **45**(48), 71.

IGCASAMA, Raymund Medrano, Dexter T RAMIREZ a Naome P SALANAP, 2020. Evaluation of photo math in teaching elementary algebra. *Journal of Education Research and Evaluation*. **4**(4), 408–413.

ILLIAN, Janine, Antti PENTTINEN, Helga STOYAN a Dietrich STOYAN, 2008. *Statistical analysis and modelling of spatial point patterns*. Chichester, England; Hoboken, NJ: John Wiley. ISBN 978-0-470-01491-2.

JAAKKOLA, T. a S. NURMI, 2008. Fostering elementary school students' understanding of simple electricity by combining simulation and laboratory activities. *Journal of Computer Assisted Learning* [online]. **24**(4), 271–283. ISSN 1365-2729. Dostupné z: doi:10.1111/j.1365-2729.2007.00259.x

JAHODOVÁ BERKOVÁ, Andrea, 2017. *Přínos systému počítačem podporovaného hodnocení pro výuku vysokoškolské matematiky* [online]. B.m. Disertační práce. Katedra aplikované kybernetiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové. Dostupné z: https://theses.cz/id/pubo3m/

JAMIE, D Mills, 2002. Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. *Journal of Statistics Education*. **10**(1).

JELEMENSKÁ, Patrícia, Elke SANDER a U KATTMANN, 2003. Model didaktickej rekonštrukcie: Impulz pre výskum v odborových didaktikách. *Pedagogika*. **53**(2), 190–201.

KAŇKOVÁ, Jana a Jiří KOPECKÝ, 2016. Využití responzivních systémů při řešení kombinatorických úloh na ZŠ. *South Bohemia Mathematical Letters*. **Vol. 24**, No. 1., 17–26. ISSN 2336-2081.

KAPITÁNOVÁ, Václava a Jiří KOPECKÝ, 2021. Příběh formativka. In: *Growth Mindset 2021* [online]. Dostupné z: https://growth-mindset.cz/pribeh-formativka/

KATTMANN, Ulrich, Reinders DUIT, Harald GROPENGIESSER, Michael KOMOREK, a OTHERS, 1997. Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*. **3**(3), 3–18.

KIESLER, Sara, Robert E KRAUT, Kenneth R KOEDINGER, Vincent ALEVEN a Bruce M MCLAREN, 2011. Gamification in education: What, how, why bother. *Academic exchange quarterly*. **15**(2), 1–5.

KLEMENT, Milan, Miroslav CHRÁSKA a Marie CHRÁSKOVÁ, 2015. The use of the semantic differential method in identifying the opininons of university students on education realized through e-learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. **186**, 1214–1223.

KNECHT, PETR, 2007. Didaktická transformace aneb od „didaktického zjednodušení "k „didaktické rekonstrukci ". *Orbis scholae*. **2**(1), 67–81.

KOPECKÝ, Jiří, 2012. *Simulace bodových procesů* [online]. České Budějovice. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Dostupné z: https://dspace.jcu.cz/bitstream/handle/123456789/29530/diplomka.pdf

KOPECKÝ, Jiří, 2013. Computable document format a jeho možnosti při výuce matematiky. *South Bohemia Mathematical Letters*. **Vol. 21**, No. 1., 28–34. ISSN 2336-2081.

KOPECKÝ, Jiří, 2014. Using computable Document Format in Teaching Mathematics. *Proceedings TIME 2014*. Technology and its integration in mathematics education International Conference.
KOPECKÝ, Jiří, 2022. *Integer histogram generator* [online]. 2022. Dostupné z: https://scratch.mit.edu/projects/723218508/
KOPECKÝ, Jiří a Tomáš MRKVIČKA, 2016. On the Bayesian estimation for the stationary Neyman-Scott point processes. *Applications of Mathematics* [online]. **61**(4), 503–514. ISSN 0862-7940, 1572-9109. Dostupné z: doi:10.1007/s10492-016-0144-8
KREJSA, Jan, 2014. *Výuka základů programování v prostředí Scratch* [online]. B.m. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, České Budějovice. Dostupné z: https://theses.cz/id/b5f11x/
KREJSA, Martin, 2012. Simulační metody typu Monte Carlo. In: *Přednáška z předmětu: Spolehlivost a bezpečnost staveb* [online]. B.m. [vid. 2020-08-12]. Dostupné z: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/sbs_tema03.pdf
KVASZOVÁ, Milena, 2011. *Didaktika statistiky*. B.m. Disertační práce. Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha.
LINN, Marcia C., Elizabeth A. DAVIS a Philip BELL, ed., 2004. *Internet environments for science education*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates. ISBN 978-0-8058-4302-6.
LINSIN, Michael, 2015. The Secret To Perfect Transitions In 5 Simple Steps. *Smart Classroom Management* [online] [vid. 2020-07-25]. Dostupné z: https://www.smartclassroommanagement.com/2015/01/17/the-secret-to-perfect-transitions-in-5-simple-steps/
LIPMAN, Matthew, 1976. Philosophy for children. *Metaphilosophy*. **7**(1), 17–39.
LOYD, Brenda H a Clarice P GRESSARD, 1986. Gender and amount of computer experience of teachers in staff development programs: Effects on computer attitudes and perceptions of the usefulness of computers. *AEDS journal*. **19**(4), 302–311.
MACKAY, RJ a W OLDFORD, 1994. Stat 231 course notes fall 1994. *Waterloo: University of Waterloo*.
MAREŠ, Jiří a Peter GAVORA, 1999. *Anglicko-český slovník pedagogický*. B.m.: Portál. ISBN 978-80-7178-310-7.
MARTIN-HANSEN, Lisa, 2002. Defining inquiry. *The science teacher*. **69**(2), 34.
MATTHEWS, Robert, 2009. The Feeling Function and Education: Differentiated Relationships and Ethics of the Teacher. *Jung Journal* [online]. **3**(4), 103–111. ISSN 1934-2039, 1934-2047. Dostupné z: doi:10.1525/jung.2009.3.4.103
MEYER, Dan, 2022. *Three-Act Math Tasks* [online]. 4. prosinec 2022. Dostupné z: http://threeacts.mrmeyer.com
MIKULČÁK, Jiří, 2007. Jak se vyvíjela pedagogika matematiky ve druhé polovině 20. století. *Matematika v proměnách věků. V*. 249–315.
MÖHLENBROCK, Rolf, 1982. *Modellbildung und didaktische Transformation*. B.m.: Didaktischer Dienst Franzbecker.
MOORE, David S., 1990. Uncertainty. *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*. 95–137.

MUILENBURG, Lin a Zane L BERGE, 2001. Barriers to distance education: A factor-analytic study. *American Journal of Distance Education*. **15**(2), 7–22.
NAH, Fiona Fui-Hoon, Qing ZENG, Venkata Rajasekhar TELAPROLU, Abhishek Padmanabhuni AYYAPPA a Brenda ESCHENBRENNER, 2014. Gamification of education: a review of literature. In: *International conference on hci in business*. B.m.: Springer, s. 401–409.
NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2000. *Inquiry and the National Science Education Standards: A Guide for Teaching and Learning* [online]. Washington, DC: The National Academies Press. ISBN 978-0-309-06476-7. Dostupné z: doi:10.17226/9596
NATIONAL RESEARCH COUNCIL (U.S.), ed., 1996. *National Science Education Standards: observe, interact, change, learn*. Washington, DC: National Academy Press. ISBN 978-0-309-05326-6.
NEUMAJER, Ondřej, 2007. *ICT kompetence učitelů*. B.m. Disertační práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
NEZVALOVÁ, Danuše, 2010. Badatelsky orientované přírodovědné vzdělávání. In: *Badatelsky orientované přírodovědné vzdělávání. In: Inovace v přírodovědném vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
OECD, 2015. Executive Summary. In: *Students, Computers and Learning: Making the Connection* [online]. Paris: OECD Publishing, s. 15–26. Dostupné z: https://www.oecd-ilibrary.org/content/component/9789264239555-2-en
OSATUYI, Babajide, Temidayo OSATUYI a Ramiro DE LA ROSA, 2018. Systematic Review of Gamification Research in IS Education: A Multi-method Approach. *Communications of the Association for Information Systems* [online]. **42**. ISSN 15293181. Dostupné z: doi:10.17705/1CAIS.04205
OSBORNE, Jonathan a Justin DILLON, 2008. *Science education in Europe: Critical reflections*. B.m.: London: The Nuffield Foundation.
OSGOOD, Charles Egerton, William H. MAY a Murray S. MIRON, 1975. *Cross-cultural universals of affective meaning*. Urbana: University of Illinois Press. ISBN 978-0-252-00426-1.
OSGOOD, Charles Egerton, George J. SUCI a Percy H. TANNENBAUM, 1957. *The measurement of meaning*. Urbana-Champaign: University of Illinois Press. ISBN 978-0-252-74539-3.
PANITZ, Ted, 1996. *A Definition of Collaborative vs Cooperative Learning* [online]. 1996. B.m.: London Metropolitan University. Dostupné z: http://colccti.colfinder.org/sites/default/files/a_definition_of_collaborative_vs_cooperative_learning.pdf
PAPÁČEK, Miroslav, 2010. Badatelsky orientované přírodovědné vyučování – cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa? *Scientia in educatione*. **1**(1), 33–49. ISSN 1804-7106.
PECH, Pavel, Lenka ČINČUROVÁ, Martin GÜNZEL, Radka HÁJKOVÁ, Roman HAŠEK, Antonín HRANÍČEK, Martin KAZDA, Jiří KOPECKÝ, Michala KOTLASOVÁ, Vladimíra PETRÁŠKOVÁ, Libuše SAMKOVÁ, Tereza SUCHOPÁROVÁ, Václav ŠIMANDL a Jiří VANÍČEK, 2015. *Badatelsky*

orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-531-2.
PETR, Jan, 2010. Biologická olympiáda – inspirace pro badatelsky orientované vyučování přírodopisu a jeho didaktiku. In: *Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování*. Sborník příspěvků semináře (Dibi 2010), s. 136–144. ISBN 978-80-7394-210-6.
PŁOCKI, Adam, 2007. *Stochastyka dla nauczyciela. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka 'in statu nascendi*. B.m.: Wyd. Nauk. Novum.
PÓCSOVÁ, Jana, 2014. Využitie metódy Monte Carlo pri vyučovaní pravděpodobnosti. *Matematika – Fyzika – Informatika*. **23**(1), 15–22. ISSN 1805-7705.
PÓLYA, George a John Horton CONWAY, 1957. *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. B.m.: Princeton University Press Princeton.
PRIESTLEY, Holly, William J. PRIESTLEY, Frank X. SUTMAN, Joseph S. SCHMUCKLER, Alexandra HILOSKY a Michael WHITE, 1998. *Evaluating the Use of the Inquiry Matrix*. B.m.: Distributed by ERIC Clearinghouse [Washington D.C.].
RA, Chaelin K, Junhan CHO, Matthew D STONE, Julianne DE LA CERDA, Nicholas I GOLDENSON, Elizabeth MORONEY, Irene TUNG, Steve S LEE a Adam M LEVENTHAL, 2018. Association of digital media use with subsequent symptoms of attention-deficit/hyperactivity disorder among adolescents. *Jama*. **320**(3), 255–263.
RAJA, R a PC NAGASUBRAMANI, 2018. Impact of modern technology in education. *Journal of Applied and Advanced Research*. **3**(1), 33–35.
REEVES, Thomas, 2006. Design research from a technology perspective. In: *Educational design research*. B.m.: Routledge, s. 64–78.
ROBOVÁ, Jarmila, 2012. Výzkumy vlivu některých typů technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. *Scientia in educatione* [online]. **3**(2) [vid. 2014-09-14]. Dostupné z: http://scied.cz/index.php/scied/article/view/38
ROUBÍČEK, Filip, 2014. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice II. In: *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. B.m.: Plzeň: Vydavatelský servis, s. 169–174.
SAK, Petr, ed., 2007. *Člověk a vzdělání v informační společnosti*. 1. vyd. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-230-0.
SAMKOVÁ, Libuše, 2011. Badatelsky orientované vyučování matematiky. In: *Sborník příspěvků 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. B.m.: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7394-324-0.
SAMKOVÁ, Libuše, 2014. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. In: *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. B.m.: Plzeň: Vydavatelský servis, s. 187–192.
SAMKOVÁ, Libuše, Alena HOŠPESOVÁ, Filip ROUBÍČEK a Marie TICHÁ, 2015. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*. **6**(1), 91–122. ISSN 1804-7106.

SCHOENFELD, Alan H, 1992. On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*. **2**(2), 179–214.
SCHWAB, Joseph J, 1969. The practical: A language for curriculum. *The school review*. **78**(1), 1–23.
SCHWAB, Joseph J a Paul F BRANDWEIN, 1962. The teaching of science as enquiry. *The teaching of science*. 3–103.
SIANI, Alessandro, 2018. BYOD strategies in higher education: current knowledge, students' perspectives, and challenges. *New Directions in the Teaching of Physical Sciences*. **12**(1).
SNEE, Ronald D., 1990. Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician*. **44**(2), 116–121.
SPITZER, Manfred, 2014. *Digitální demence: jak připravujeme sami sebe a naše děti o rozum*. Brno: Host.
SPRONKEN-SMITH, Rachel, Tom ANGELO, Helen MATTHEWS, Billy O'STEEN a Jane ROBERTSON, 2007. How effective is inquiry-based learning in linking teaching and research. In: *An International Colloquium on International Policies and Practices for Academic Enquiry, Marwell, Winchester, UK*.
STROM, Amanda, 2021. The negative effects of technology for students and educators. *Educational Technology Commons*.
STUCHLÍKOVÁ, Iva, 2010. O badatelsky orientovaném vyučování. In: *Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování*. Sborník příspěvků semináře (Dibi 2010), s. 129–135. ISBN 978-80-7394-210-6.
SULEYMANOVA, Julianna, 2021. *Integrace tabletu z pohledu výuky matematiky*. Praha. Disertační práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
SVOBODA, Mojmír, 2010. *Psychologická diagnostika dospělých*. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-706-0.
ŠERÝ, Michal a Helena BINTEROVÁ, 2012. Možnosti grafických výstupů ze sémantického diferenciálu v programovém balíku OCTAVE. *South Bohemia Mathematical Letters*. **20**(1), 30–39.
ŠKODA, Jiří a Pavel DOULÍK, 2009. Vývoj paradigmat přírodovědného vzdělávání. *Pedagogická orientace*. **19**(3), 24–44.
ŠKODA, Jiří, Pavel DOULÍK, Martin BÍLEK a Ivana ŠIMONOVÁ, 2015. The effectiveness of inquiry based science education in relation to the learners motivation types. *Journal of Baltic science education*. **14**(6), 791.
ŠTĚPÁNKOVÁ, Radka, 2012. Výuka pravděpodobnosti na středních školách pomocí počítačové simulace metodou Monte Carlo. In: *Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky*. B.m.: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-386-8.
THEUS, Martin, 2009. *Interactive graphics for data analysis: principles and examples*. Boca Raton: CRC Press. Chapman & Hall/CRC computer science and data analysis series. ISBN 978-1-58488-594-8.

TICHÁ, Marie a Alena HOŠPESOVÁ, 2014. Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III. In: *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*. B.m.: Plzeň: Vydavatelský servis, s. 217–223.
TONDEUR, Jo, Johan VAN BRAAK, Guoyuan SANG, Joke VOOGT, Petra FISSER a Anne OTTENBREIT-LEFTWICH, 2012. Preparing pre-service teachers to integrate technology in education: A synthesis of qualitative evidence. *Computers & Education*. **59**(1), 134–144.
TRNA, Josef, 2011. Konstrukční výzkum (design-based research) v přírodovědných didaktikách. *Scientia in educatione* [online]. **2**(1) [vid. 2022-07-27]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: doi:10.14712/18047106.11
TRNA, Josef a Eva TRNOVÁ, 2014. Design-based research as an innovation approach in the construction and evaluation of IBSME. In: M. U. Garip A. BILSEL, ed. *Frontiers in Mathematics and Science Education Research. Proceedings of the Frontiers and Science Education Research Conference 01-03 May 2014, Famagusta, North Cyprus*. Famagusta, North Cyprus: Science Education Research Group at Eastern Mediterranean University, s. 186–191.
VÁLEK, Jan, Vítězslav VIŠŇOVSKÝ, Petra PAVLÍKOVÁ a Tamara MIFKOVÁ, 2023. Je důležitější z fyziky všechno vědět, nebo se na to umět správně zeptat? In: *Moderní trendy v přípravě učitelů fyziky 10. Jak se za 20 let změnila výuka fyziky?*: *Sborník z konference*.
VANÍČEK, Jiří, 2013. Co mají společného informatické soutěžní úlohy s matematikou. In: *Užití počítačů ve výuce matematiky*: *Sborník příspěvků 6. konference*.
VIRIUS, Miroslav, 2010. *Metoda Monte Carlo*. Praha: Jaderná a fyzikálně inženýrská fakulta, České vysoké učení technické. ISBN 978-80-01-04595-4.
VONDROVÁ, Naďa, Jarmila NOVOTNÁ a Marie TICHÁ, 2015. Didaktika matematiky: historie, soucasnost a perspektivy s durazem na empirické vỳzkumy [Didactics of mathematics: History, present days and perspective with a focus on empirical research]. *Oborové didaktiky: vỳvoj-stav-perspektivy*. 93–122.
VOTÁPKOVÁ, Dana, Radka VAŠÍČKOVÁ, Hana SVOBODOVÁ a Barbora SEMERÁKOVÁ, 2013. *Badatelé.cz: průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním*. Praha: Sdružení Tereza. ISBN 978-80-87905-02-9.
VÝROST, Jozef a Ivan SLAMĚNÍK, 1997. Sociální psychologie. *Sociální psychologie*. **2**.
WALTEROVÁ, Eliška, 2004. *Úloha školy v rozvoji vzdělanosti*. Brno: Paido. ISBN 978-80-7315-083-9.
WEBEL, Corey a Samuel OTTEN, 2015. Teaching in a world with PhotoMath. *The Mathematics Teacher*. **109**(5), 368–373.
WILD, C. J., M. PFANNKUCH, M. REGAN a N. J. HORTON, 2011. Towards more accessible conceptions of statistical [online]. [vid. 2016-02-08]. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/pdf/23014400.pdf
WILD, Chris J. a Maxine PFANNKUCH, 1999. Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*. 223–248.

WILLIAM, Dylan a S LEAHYOVÁ, 2016. *Zavádění formativního hodnocení*.
ZAIN, Iffah NM, Mohd AB SETAMBAH, Mohd S OTHMAN a Mazarul HM HANAPI, 2023. Use of Photomath Applications in Helping Improving Students' Mathematical (Algebra) Achievement. *European Journal of Education and Pedagogy*. **4**(2), 85–87.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Přílohy

Příloha 1:
Tabulka průměrných hodnot z dotazníků sémantického diferenciálu v kontrolní skupině.

	zbytečný užitečný	pomalý rychlý	slabý silný	jednotvárný pestrý	zastaralý moderní	složitý jednoduchý	vzdálený blízký	ošklivý krásný	povrchní hluboký	tuhý pružný	úzký široký
Příroda	3,81	2,22	3,33	3,63	2,56	1,63	3,11	3,81	3,56	2,70	3,44
Pravděpodobnost	2,96	2,44	2,74	2,19	2,96	2,07	2,52	2,56	2,33	2,63	2,52
Já	3,22	2,59	2,89	2,81	3,04	2,00	2,78	3,00	3,26	2,70	2,07
Láska	3,52	2,44	3,59	3,59	3,07	1,52	2,70	3,67	3,78	2,70	3,04
Internet	3,81	3,22	3,37	3,63	3,93	1,63	2,96	2,85	3,07	3,07	3,52
Statistika	3,26	2,37	2,78	2,70	2,89	2,04	2,11	2,48	2,70	2,33	2,89
Algoritmus	3,26	2,70	2,96	2,56	3,04	1,78	2,37	2,48	2,89	2,63	3,00
Škola	3,41	2,19	2,67	2,44	2,44	1,74	2,56	2,44	2,59	2,19	2,89
Budoucnost	3,33	2,85	3,33	3,44	3,48	1,44	2,19	3,04	2,93	2,96	3,22
Život	3,07	3,26	2,85	3,04	2,85	1,48	2,96	3,07	3,22	3,04	3,22

Příloha 2:
Tabulka průměrných hodnot z dotazníků sémantického diferenciálu v testované skupině.

	zbytečný užitečný	pomalý rychlý	slabý silný	jednotvárný pestrý	zastaralý moderní	složitý jednoduchý	vzdálený blízký	ošklivý krásný	povrchní hluboký	tuhý pružný	úzký široký
Příroda	3,80	2,24	3,48	3,84	2,28	1,44	3,04	3,84	3,44	3,12	3,72
Pravděpodobnost	2,96	3,00	2,60	2,76	3,08	2,32	2,64	2,48	2,80	2,92	2,80
Já	3,04	2,76	2,88	3,36	3,24	1,84	3,08	3,04	2,88	3,12	2,56
Láska	3,52	2,44	3,88	3,76	2,88	1,52	2,84	3,60	3,72	3,00	3,32
Internet	3,84	3,12	3,40	3,48	4,00	1,64	3,08	2,96	3,04	3,08	3,64
Statistika	3,64	2,48	3,08	2,96	3,16	1,96	2,48	2,64	2,84	2,76	2,96
Algoritmus	3,68	3,00	3,24	2,72	3,48	1,52	2,04	2,48	2,88	2,48	3,04
Škola	3,12	1,96	2,80	2,44	2,40	1,76	2,72	2,20	2,44	2,24	2,80
Budoucnost	3,60	2,84	3,52	3,68	3,40	1,40	2,16	3,00	3,24	3,24	3,32
Život	3,40	2,76	3,32	3,32	3,08	1,36	3,28	3,20	3,32	3,36	3,20