



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

# CHAOS A DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE ZPOŽDĚNÍM

CHAOS AND DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ONDŘEJ ZLÁMAL

### VEDOUČÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. ZDENĚK OPLUŠTIL, Ph.D.

BRNO 2021



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Ondřej Zlámal**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.**  
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Chaos a diferenciální rovnice se zpožděním

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Chaos můžeme stručně popsat jako neperiodické chování systému, který vykazuje citlivou závislost na počátečních podmínkách. Jedním ze základních modelů, který může vykazovat chaotické chování, je například Lorenzův systém tří nelineárních diferenciálních rovnic. U matematických modelů popsaných pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním se chaos vyskytuje i v některých relativně jednodušších systémech, jejichž analogie bez zpoždění chaotické chování nevykazují.

### Cíle bakalářské práce:

Nastudování základních vlastností diferenciálních rovnic se zpožděním a systémů vykazujících chaotické chování.

Nalezení vhodných modelů pro srovnání systémů s rovnicemi bez zpoždění a jejich analogií se zpožděním.

Numerická simulace zkoumaných modelů ve vhodném matematickém software a porovnání se získanými teoretickými výsledky.

### Seznam doporučené literatury:

KOLMANOVSKII, V., MYSHKIS, A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluwer Academic Press Publishers, Dodrecht, 1992.

SMITH H. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences, Springer New York, 2011.

STROGATZ, S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd ed. Westview Press, 2015. ISBN 978-0813349107.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty



## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá dynamickými systémy vykazujícími chaotické chování a diferenciálními rovnicemi se zpožděním. Zkoumá jaký vliv má zpoždění na chaotický systém, v našem případě budeme pozorovat Lorenzův systém se zpožděním v různých členech. A také se zabývá generováním chaosu v nechaotických systémech.

## **Summary**

This thesis is about dynamical systems exhibiting chaotic behavior and delayed differential equations. It analyzes effect of delay in chaotic system, in our case it will be Lorenz's system delayed in various terms. And it also deals with generation of chaos in non-chaotic systems.

## **Klíčová slova**

Dynamický systém, chaotické chování, diferenciální rovnice se zpožděním, Lorenzův systém, anti-kontrola chaosu

## **Keywords**

Dynamic system, chaotic behaviour, delayed differential equations, Lorenz's system, anticontrol of chaos

ZLÁMAL, O. *Chaos a diferenciální rovnice se zpožděním*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 37 s. Vedoucí doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Chaos a diferenciální rovnice se zpožděním* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Zdeňka Opluštily, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Zlámal



Děkuji svému školiteli doc. Mgr. Zdeňkovi Opluštilovi, Ph.D. za cenné rady, vlídný přístup a profesionální vedení při psaní této práce.

Ondřej Zlámal



# Obsah

Úvod	10
<b>1 Dynamické systémy</b>	<b>11</b>
1.1 Geometrická interpretace . . . . .	12
1.2 Analýza systému . . . . .	13
1.3 Bifurkace . . . . .	14
1.3.1 Bifurkace sedlo-uzel . . . . .	14
1.3.2 Transkritická bifurkace . . . . .	16
1.3.3 Vidličková bifurkace . . . . .	16
1.4 Dvou-dimenzionální dynamické systémy . . . . .	18
1.4.1 Klasifikace stacionárních bodů . . . . .	19
1.4.2 Klasifikace lineárních systémů . . . . .	20
1.4.3 Linearizace . . . . .	21
1.4.4 Hopfova Bifurkace . . . . .	22
<b>2 Chaos</b>	<b>24</b>
2.1 Lorenzův systém . . . . .	24
2.1.1 Stacionární body . . . . .	24
2.1.2 Stabilita . . . . .	25
2.1.3 Ljapunovovy exponenty . . . . .	26
<b>3 Diferenciální rovnice se zpožděním</b>	<b>27</b>
<b>4 Zesilování chaosu</b>	<b>28</b>
<b>5 Generování chaosu</b>	<b>34</b>
<b>Závěr</b>	<b>36</b>

# Úvod

Pojem chaos je často spojovaný s nepředvídatelností, nekontrolovatelností a náhodností. Ovšem my se budeme zabývat odlišným chaosem, takzvaným deterministickým chaosem, kterým se zabývá teorie chaosu. V textu tedy bude pojmem chaos myšlen ten deterministický.

Systém vykazující chaotické chování je typický především nelineárností, závislostí na počáteční podmínce a velmi složitou predikovatelností. Takovýto chaos se velmi hojně vyskytuje v reálném světě. Typickým příkladem je Lorenzův systém, který popisuje atmosférickou konvekci a je velmi významný pro vývoj teorie chaosu.

Dále se budeme zabývat diferenciálními rovnicemi se zpožděním. Zpoždění bude využito primárně pro zesilování chaosu v systémech, které již chaotické chování vykazují, ale bude využito také pro generování chaosu v nechaotických systémech. Takzvaná anti-kontrola chaosu má mnoho využití, ač se tomu tak nemusí zdát. Totiž v případech, kdy je chaos vyžadovaný, je vhodné ho mít pod kontrolou. Může toho být využito například u míšení kapalin, regulace tlukotu srdce, prevence rezonance v mechanických systémech a podobně.

Práce je členěna do pěti kapitol. V první kapitole je popis základních vlastností dynamických systémů. V další kapitole je popsán chaos a způsob, jakým zjišťujeme, zda je systém chaotický. Ve třetí kapitole jsou uvedeny diferenciální rovnice se zpožděním, jejich vlastnosti a odlišnosti od obyčejných diferenciálních rovnic. Poslední dvě kapitoly jsou vyhrazeny pro modely a zkoumání dopadu zpoždění v systémech. Modely jsou řešeny pouze numericky.



# 1. Dynamické systémy

Tato sekce obsahuje základní informace potřebné pro porozumění následujících kapitol, tyto informace jsou čerpány převážně z [4], kde najdete i bližší popis problematiky. Dynamické systémy jdou popsat vícero způsoby, my však volíme definici použitou v Pokorného článku [2]. Dynamickým systémem je myšlen systém, který se vyvíjí v čase. Tedy stav tohoto systému v každém časovém okamžiku  $t$  může být vyjádřen souborem  $n$  reálných proměnných  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Označme symbolem  $\phi_t(x)$  stav systému v čase  $t$ .

**Definice 1.0.1.** Zobrazení  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá dynamickým systémem, jestliže:

- $\phi_0(x) = x$  pro všechny  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- zobrazení  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *difeomorfismus*, tedy zobrazení, které je vzájemně jednoznačné, spojité, hladké, a existuje k němu inverzní zobrazení splňující stejné podmínky,
- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  pro všechna  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Dále však budeme místo zobrazení  $\phi$  používat vektorové pole  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  na pravé straně soustavy, tedy obecně systém zapíšeme rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde  $\dot{x}$  je derivace podle  $t$ . Řešením těchto rovnic na nějakém intervalu  $\langle t_0, t_f \rangle$  je  $n$ -vektorová funkce splňující (1.1) nazývaná trajektorie a může být interpretována jako křivka v prostoru dána parametry  $(x_1, \dots, x_n)$ . Jednotlivé trajektorie vznikají volbou různých počátečních podmínek  $x(t_0) = x_0$ .

Kdybychom uvažovali diferenciální rovnici vyššího řádu, můžeme ji přepsat ve tvaru (1.1) za pomoci jednoduchého triku. Mějme například rovnici  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ . Zavedeme nové proměnné  $x_1 = x$  a  $x_2 = \dot{x}$ , z kterých plyne  $\dot{x}_1 = x_2$  a získáme

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1.$$

Upravíme a získáváme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1. \end{aligned}$$

Navíc kdyby rovnice byla *neautonomní*, tedy závislá na čase, provedeme stejnou úpravu s tím, že  $t$  také chápeme jako proměnnou. Například uvažujme harmonický oscilátor  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos t$ , za pomoci nových proměnných  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  a  $x_3 = t$ , můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-lx_1 - bx_2 + F \cos x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1. \end{aligned}$$

## 1.1 GEOMETRICKÁ INTERPRETACE

Můžeme si všimnout, že neautonomní  $n$ -rozměrný systém je speciálním případem  $(n + 1)$ -dimenzionálního autonomního systému.

Nejdříve začneme s nejjednodušším případem  $n = 1$ . Získáváme tak jedinou rovnici

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

kterou nazýváme **jedno-dimenzionální** nebo **systém prvního řádu**. Slovem *systém* je myšlen dynamický systém, tudíž i jedna rovnice může být systémem.

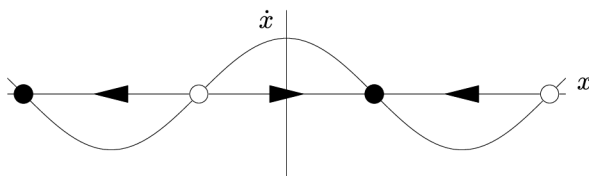
Výše uvedená rovnice definuje dynamický systém se *spojitým* časem. Naopak rovnice

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

definuje systém s *diskrétním* časem.

### 1.1. Geometrická interpretace

Velmi mocným nástrojem pro analyzování dynamických systémů je vizualizace, přesněji řečeno interpretace diferenciálních rovnic jako vektorové pole. Mějme například rovnici  $\dot{x} = \cos x$ . Uvažujme  $t$  jako čas,  $x$  jako pozici imaginární částice pohybující se podél reálné osy  $t$ , a  $\dot{x}$  jako rychlost této částice. Potom  $\dot{x} = \cos x$  reprezentuje vektorové pole, které připisuje každému  $x$  jeho vektor rychlosti  $\dot{x}$ . Zobrazíme toto pole a přidáme šipky ukazující rychlost vektoru v daném bodě. Je-li  $\dot{x} > 0$ , bude šipka směřovat doprava, naopak je-li  $\dot{x} < 0$ , bude šipka směřovat doleva.



Obrázek 1.1.1

Body  $x^*$  pro které platí  $f(x^*) = 0$  nazýváme **stacionární body**. Na obrázku 1.1.1 vidíme dva druhy stacionárních bodů, černé body reprezentují **stabilní** stacionární body (nazývané též atraktory, jelikož šipky míří k těmto bodům) a prázdné kroužky značí **nestabilní** stacionární body. Pro intuitivnější představu: můžeme si toto vektorové pole představit jako tekutinu proudící podél osy  $x$  s proměnnou rychlostí.

Abychom našli konkrétní řešení rovnice (1.2), musíme využít počáteční podmínku  $x(t_0) = x_0$ . Začneme položením imaginární částice (kterou nazýváme **fázový bod**) do bodu  $x_0$  a pozorujeme její pohyb. S časem se částice pohybuje podél osy  $x$  v závislosti na nějaké funkci  $x(t)$ . Tuto funkci nazýváme **trajektorie** a představuje řešení diferenciální funkce s počáteční podmínkou  $x_0$ . Prostor obsahující všechny možné stavy soustavy se nazývá **fázový prostor**.

Dále je dobré podotknout, že zmíněné stacionární body reprezentují **rovnovážná** řešení soustavy, tedy takové řešení, pro které platí  $x(t) = konst.$  pro všechna  $t$ . Rovnovážný bod je stabilní, pokud se částice bude vracet do tohoto bodu, i když ji od něj vzdálíme

o nějakou dostatečně malou vzdálenost. Naopak rovnováha bude nestabilní, pokud se částice nevrátí zpět do tohoto bodu i pro malou perturbaci.

Toto jde hezky vysvětlit na příkladu s kyvadlem. Kyvadlo má dva rovnovážné stavy: když je pověšeno visle dolů a když je vybalancováno a míří přímo nahoru. Pro první stav, kdy kyvadlo visí dolů, platí, že pokud kyvadlo mírně vykloníme z tohoto stavu, po chvíli se „dokymácí“ zpět do počátečního stavu, tedy stav je stabilní (dalo by se i říct, že tato rovnováha je globálně stabilní, jelikož i pro velké výkyvy platí, že se kyvadlo vrátí do tohoto stavu). Nicméně co se týče druhého rovnovážného stavu, tedy když je kyvadlo vybalancováno směrem nahoru, pokud ho mírně odkloníme, kyvadlo se zhoupne a začne se přibližovat k prvnímu stavu, v němž nakonec i zůstane.

## 1.2. Analýza systému

Pro analyzování systému (1.2) si nejdříve zavedeme pojem *linearizace*.

Nechť  $x^*$  je stacionární bod a nechť  $\eta(t) = x(t) - x^*$  je malá perturbace od  $x^*$ . Zderivujeme rovnici a získáváme

$$\dot{\eta} = d/dt(x - x^*) = \dot{x},$$

jelikož  $x^*$  je konstantní. Potom tedy  $\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$ . Nyní užitím Taylorova rozvoje získáváme

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2),$$

kde  $O(\eta^2)$  značí kvadraticky malé členy  $\eta$ . Navíc  $f(x^*) = 0$ , jelikož  $x^*$  je stacionární bod. Proto

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + O(\eta^2).$$

Pokud  $f'(x^*) \neq 0$ , potom  $O(\eta^2)$  hodnoty jsou zanedbatelné a můžeme zapsat rovnici

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*).$$

Tato lineární rovnice je linearizací uvažovaného systému. Ukazuje nám, že perturbace  $\eta(t)$  roste exponenciálně, pokud  $f'(x^*) > 0$ , a klesá, pokud  $f'(x^*) < 0$ . Ovšem pokud  $f'(x^*) = 0$ , pak  $O(\eta^2)$  nejsou zanedbatelné a nelineární analýza je potřeba k určení stability.

Hodí se poznamenat, že znaménko  $f'(x^*)$  určuje stabilitu ( $f'(x^*)$  je vždy negativní ve stabilních bodech). Na hodnotu  $f'(x^*)$  můžeme také nahlížet jako na míru stability stacionárního bodu. Její inverzní hodnota  $1/|f'(x^*)|$  se nazývá *charakteristický čas*.

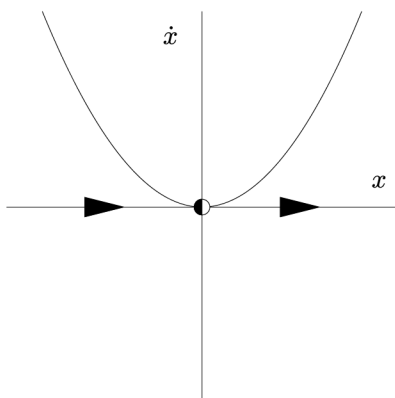
Opět se podívejme na příklad  $\dot{x} = \cos x$ . Stacionární body se zde objevují pro hodnoty  $f(x) = \cos x = 0$ . Tedy  $x^* = (2k - 1)\pi/2$ ,  $k \in Z$ . Potom

$$f'(x^*) = -\sin((2k - 1)\pi/2) = \begin{cases} -1, & k \text{ liché} \\ 1, & k \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy  $x^*$  je nestabilní pro  $k$  sudá a stabilní pro  $k$  lichá. Což odpovídá výsledkům z obrázku 1.1.1.

### 1.3 BIFURKACE

Další příklad hodný zmínění je  $\dot{x} = x^2$ . Lze vidět, že  $x^* = 0$  a  $f'(x^*) = 0$ . Z obrázku 1.2.1 vidíme, že graf se v počátku pouze dotkne osy  $x$  a pak se zase odkloní pryč, tomuto stacionárnímu bodu říkáme **polostabilní**.



Obrázek 1.2.1

## 1.3. Bifurkace

Dynamika vektorových polí v jedno-dimenzionálním prostoru je dost omezená, všechna řešení se buď ustálí v rovnováze, nebo směřují do  $\pm\infty$ . Nicméně i tyto systémy jsou zajímavé kvůli jejich *závislosti na parametrech*. Tyto změny proudění, stability apod. se nazývají **bifurkace** a parametry, u kterých k těmto změnám dochází, se nazývají **bifurkační body**. Bifurkace poskytuje modely změn a nestabilit pro změny nějakého *kontrolního parametru*. Například mějme vertikálně stojící tyč, na jejímž vrcholu je položeno závaží. Pokud bude závaží moc těžké, tyč se začne prohýbat, zde tedy hmotnost závaží představuje kontrolní parametr a změna tyče představuje dynamickou proměnnou  $x$ .

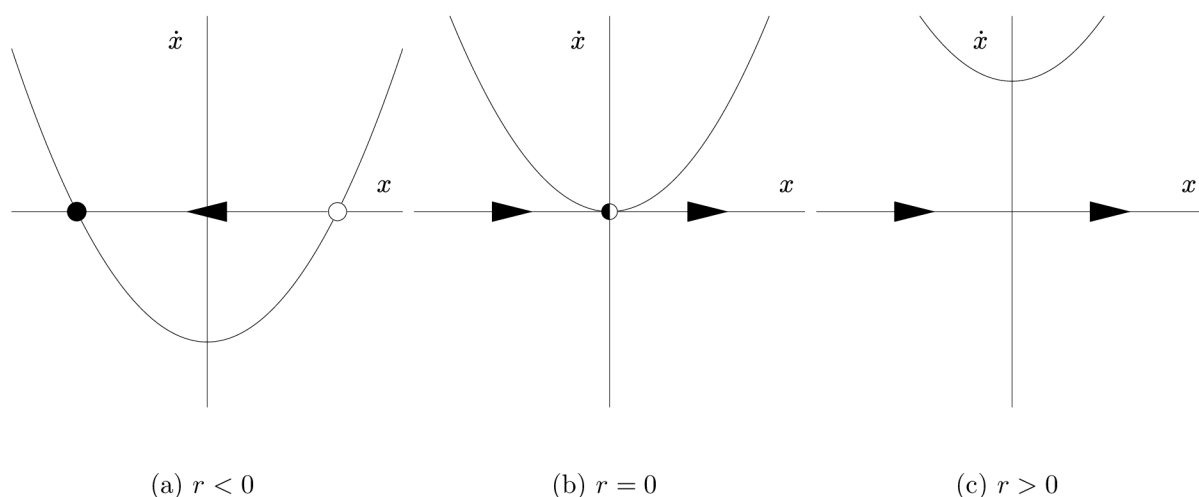
### 1.3.1. Bifurkace sedlo-uzel

Bifurkace sedlo-uzel je základní mechanismus, při kterém *vznikají a zanikají* stacionární body. Se změnou parametrů se k sobě dva stacionární body přibližují, až se nakonec srazí a navzájem se vyruší.

Typickým příkladem je systém

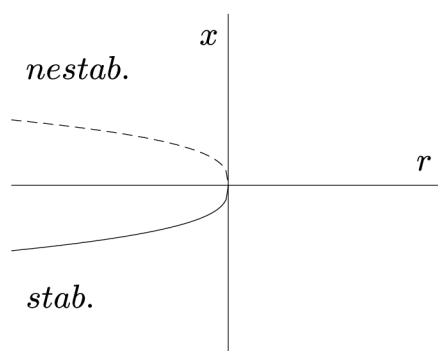
$$\dot{x} = r + x^2, \quad (1.3)$$

kde  $r$  je parametr, který může být pozitivní, negativní nebo nulový. Je-li  $r$  negativní, existují dva stacionární body: jeden stabilní a druhý nestabilní (viz 1.3.1a). S rostoucím  $r$  se stacionární body přibližují, až se nakonec setkají a pro  $r = 0$  vznikne polostabilní stacionární bod (viz 1.3.1b). Pro  $r > 0$  tento bod zmizí a nezůstane žádný stacionární bod (viz 1.3.1c).



Obrázek 1.3.1

Je více způsobů, jakým můžeme zobrazit bifurkaci. Nejpoužívanějším je zobrazení, kdy na jedné ose máme nezávislou proměnnou  $r$  a na druhé  $x$  (viz 1.3.2). Takovéto zobrazení bifurkace se nazývá **bifurkační diagram**.



Obrázek 1.3.2

Analýza systémů jako například

$$\dot{x} = r - x^2 \quad (1.4)$$

není příliš složitá. Můžeme hned najít stacionární body  $x^* = \pm\sqrt{r}$  a určit jejich stabilitu. Nicméně ne vždy je to tak jednoduché, mějme systém

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}.$$

Zde by byla klasická analýza složitější, proto se na příklad podíváme z geometrického hlediska. Mohli bychom přímo vykreslit  $f(x) = r - x - e^{-x}$ , ale existuje i jednodušší řešení. Můžeme vykreslit  $r - x$  a  $e^{-x}$ . Tam, kde se tyto dvě křivky protínají, platí  $r - x = e^{-x}$ , a proto  $f(x) = 0$ . Tedy v místě průniku jsou stacionární body. Nyní už je jednoduché si představit, jak se budou měnit stacionární body v závislosti na  $r$ .

V jistém smyslu rovnice (1.3) a (1.4) reprezentují všechny bifurkace sedlo-uzel. Takovéto rovnice jsou známy jako **normální formy**. Přesnější popis lze najít v [4].

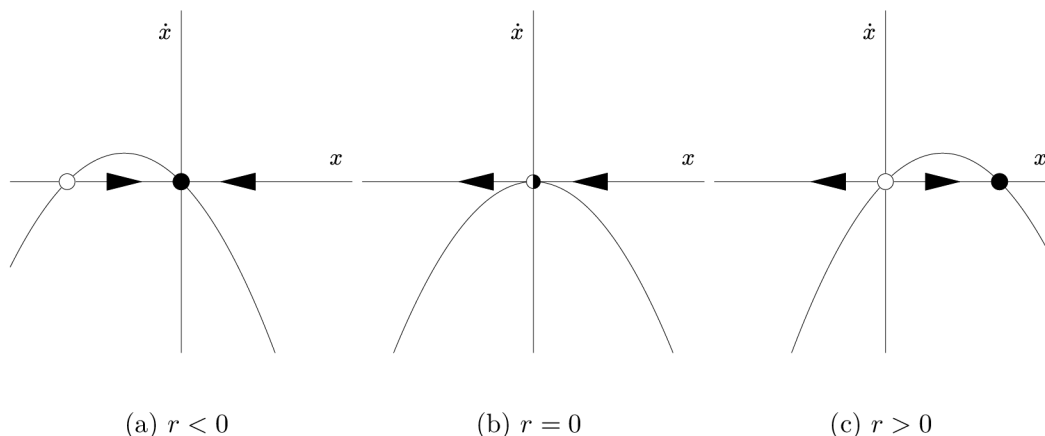
### 1.3.2. Transkritická bifurkace

Občas nastávají situace, kdy stacionární bod musí existovat pro všechny hodnoty parametru a nikdy nezmizí. Například v logistických rovnicích a populačních modelech jednoho druhu obvykle existuje stacionární bod pro nulovou populaci při jakémkoliv parametru růstu. Nicméně tento stacionární bod může měnit svoji stabilitu.

Normální formou transkritické bifurkace je

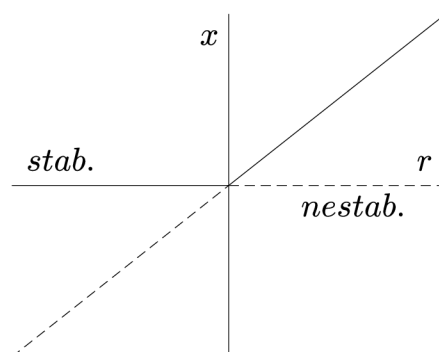
$$\dot{x} = rx - x^2.$$

Na obrázku 1.3.3 lze vidět proměnu vektorového pole se změnou  $r$  a jde vidět, že pro všechny hodnoty  $r$  existuje stacionární bod v  $x^* = 0$ .



Obrázek 1.3.3

Dá se říct, že dva singulární body **změnily stabilitu**. Toto jde dobře vidět v bifurkačním diagramu 1.3.4.



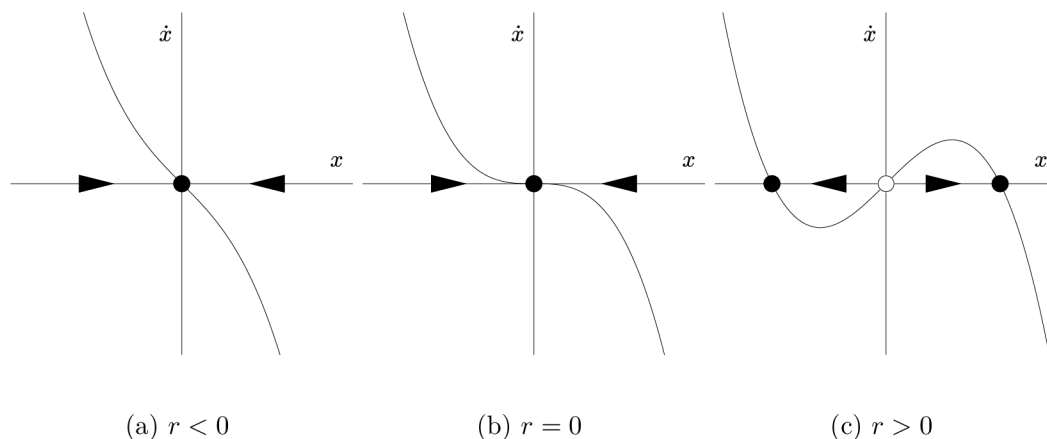
Obrázek 1.3.4

### 1.3.3. Vidličková bifurkace

Tato bifurkace je běžná u fyzikálních problémů, které jsou *symetrické*. Jsou dva různé druhy vidličkové bifurkace, jednodušší typ se nazývá **superkritická vidličková bifurkace** s normální formou

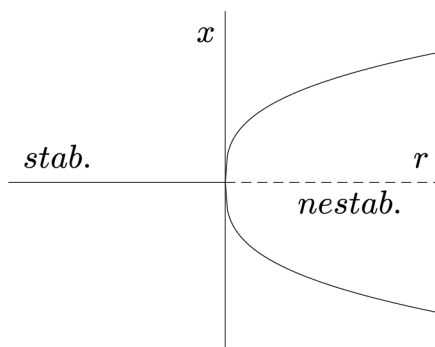
$$\dot{x} = rx - x^3.$$

Všimněme si, že je tato rovnice středově symetrická. Na obrázku 1.3.5 jde vidět, že pro záporné  $r$  existuje pouze jeden stabilní bod, ale jak  $r$  roste, slábne jeho stabilita. Když  $r = 0$ , bod je stále stabilní, ale velmi slabě. Pro  $r > 0$  je již bod nestabilní, ale vznikly dva nové, stabilní body, které jsou symetricky umístěny na  $x^* \pm \sqrt{r}$ .



Obrázek 1.3.5

Důvod proč se tato bifurkace nazývá „vidličková“ je zřejmý z bifurkačního diagramu 1.3.6.

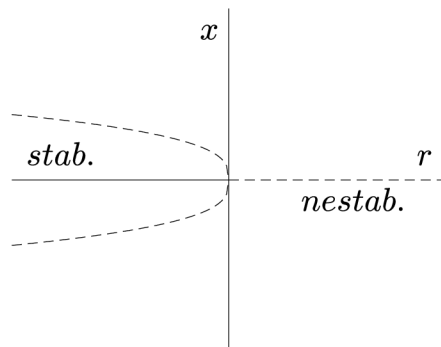


Obrázek 1.3.6

Druhým typem je **subkritická vidličková bifurkace** s normální formou

$$\dot{x} = rx - x^3.$$

Z obrázku 1.3.7 jde vidět, že nenulové stacionární body existují pouze před bifurkací ( $r < 0$ ), a proto se používá označení „subkritická“. Jde též vidět, že bifurkační diagram 1.3.7 je v podstatě inverzí 1.3.6.



Obrázek 1.3.7

## 1.4. Dvou-dimenzionální dynamické systémy

Jedno-dimenzionální systémy byly užitečné na popsání základních vlastností, nicméně neumožňují nám takový přehled jako ty dvou-dimenzionální, jejichž vlastnosti jdou lépe přenést do  $n$ -rozměrných systémů. Některé atributy jsou podobné jako u jedno-dimenzionálních systémů, ale nyní s novou dimenzí mají trajektorie více prostoru k pohybu a s tím roste i jejich rozsah dynamického chování. Navíc budeme nyní schopni klasifikovat stacionární body nelineárních systémů. Dvou-dimenzionální systém je například systém s formou

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}$$

kde  $a, b, c$  a  $d$  jsou parametry. Nebo můžeme tento systém zapsat vektorově

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Takovýto systém se nazývá **lineární** a víme o něm tedy, že pokud  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  jsou řešením, potom také jakákoliv lineární kombinace  $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$  je řešením. Všimněme si, že  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ , když  $\mathbf{x} = 0$ , tedy  $\mathbf{x}^* = 0$  je vždy stacionárním bodem pro jakoukoliv volbu  $A$ .

Řešením systému (1.5) je trajektorie pohybující se v rovině  $(x, y)$ , které budeme v tomto kontextu říkat **fázová rovina**. Mějme například těleso zavěšené na pružině, tedy *jednoduchý harmonický oscilátor* dán rovnicí

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

kde  $m$  je hmotnost,  $k$  je tuhost pružiny a  $x$  je vzdálenost tělesa od rovnovážné polohy. Je vhodné tuto rovnici přepsat na

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x,\end{aligned}$$



kde  $v$  je rychlost, a  $\omega^2 = k/m$ . Tento systém přiřazuje vektor  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$  každému bodu  $(x, v)$ , a proto reprezentuje *vektorové pole* na fázové rovině. Stejně jako v první kapitole je nápomocné si představit vektorové pole jako imaginární tekutinu proudící fázovou rovinou. Opět položíme imaginární bod, neboli **fázový bod**, na  $(x_0, v_0)$  a sledujeme jak je unášen.

Počátek je speciální: umístíme-li do něj bod, zůstane bez pohybu, protože  $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$ , když  $(x, v) = (0, 0)$ ; proto je počátek **stacionárním bodem** (v našem případě počátek představuje stav, kdy je těleso na pružině v klidu). Ale fázový bod umístěný kamkoliv jinam začne kroužit okolo středu a časem se dostane zpět do původní pozice. Této trajektorii říkáme **uzavřený orbit** (toto představuje kmitání tělesa). Zobrazení všech trajektorií ve fázovém prostoru nazýváme **fázový portrét** systému.

### 1.4.1. Klasifikace stacionárních bodů

Mějme systém (1.5), kde  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Tedy systém

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Jelikož jsou rovnice  $\dot{x} = ax$ ,  $\dot{y} = -y$  *nezávislé*, můžeme je vyřešit jednotlivě a vyjde nám

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{aligned}$$

Fázové portréty těchto řešení pro různé hodnoty  $a$  jsou promítnuty v 1.4.1. Nutno poznamenat, že pro názornější ukázkou jsou obrázky 1.4.1a a 1.4.1c zobrazeny s normalizovanými vektory; reálně by se vektory směrem k počátku zmenšovaly, obdobně jako u ostatních obrázků.

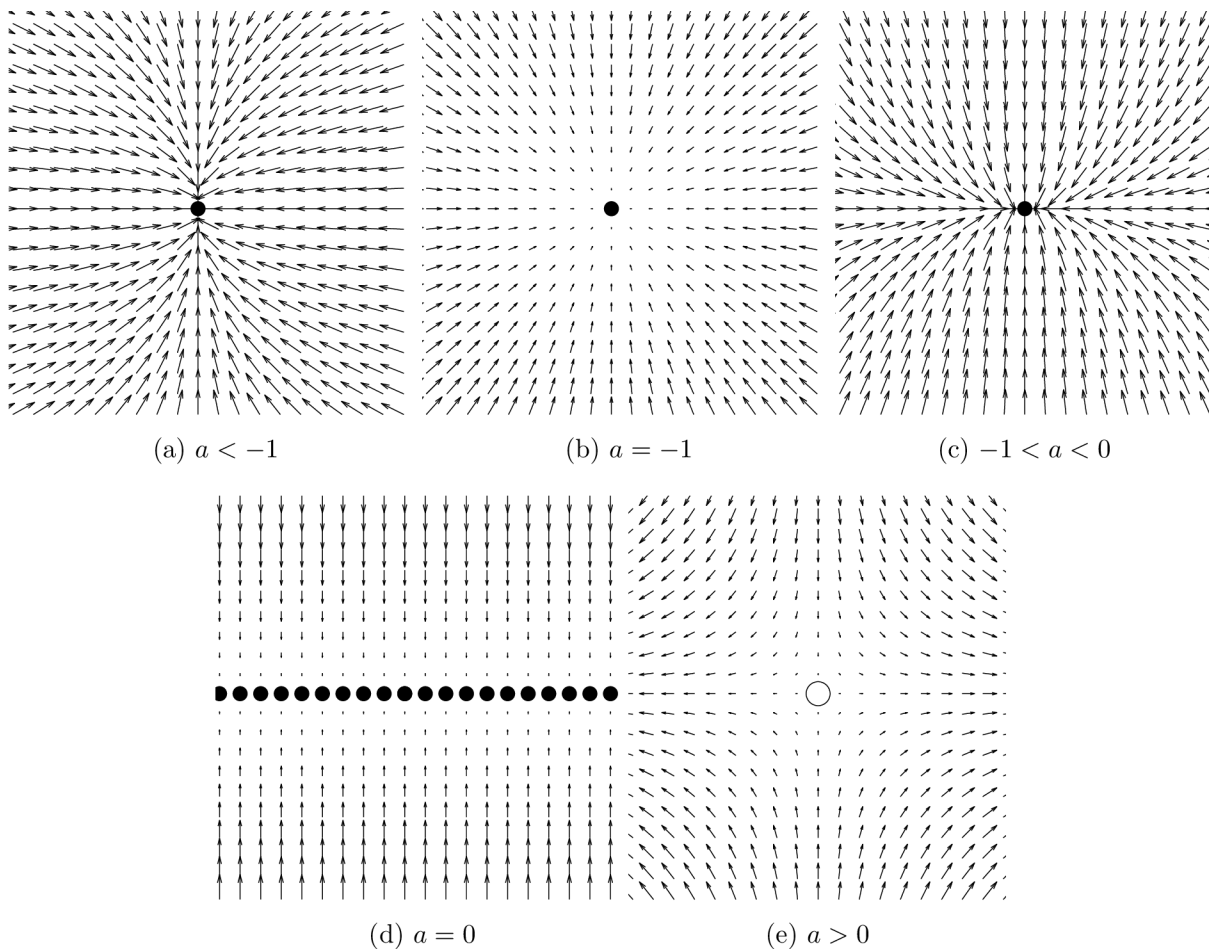
V obrázku 1.4.1a máme  $a < -1$ , z čehož plyne, že  $x(t)$  klesá rychleji než  $y(t)$ . Tedy trajektorie se přibližují k *pomalejšímu* směru, v našem případě směru  $y$ . V tomto případě se stacionární bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  nazývá **stabilní uzel**.

V okamžiku, kdy  $a = -1$ , jsou oba směry stejně rychlé, a proto trajektorie jsou přímky procházející počátkem, viz 1.4.1b. V tomto případě se  $\mathbf{x}^*$  nazývá **symetrický** nebo **hvězdíkový** uzel.

Dále pro  $-1 < a < 0$  (obrázek 1.4.1c) vznikne téměř stejný fázový portrét jako v 1.4.1a s tím rozdílem, že tentokrát je  $x$  pomalejším směrem.

Větší změna nastane v 1.4.1d pro  $a = 0$ , vychází  $x(t) = x_0$ . Tedy vznikne **přímka stacionárních bodů** podél osy  $x$  a všechny trajektorie se k těmto bodům vertikálně přibližují.

Nakonec když  $a > 0$  (obrázek 1.4.1e),  $\mathbf{x}^*$  se stává nestabilním kvůli exponenciálnímu růstu ve směru  $x$ . Většina trajektorií proudí od  $\mathbf{x}^*$ , až na trajektorie začínající na ose  $y$ ; ty proudí do počátku. Zde  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  nazýváme **sedlový bod**, kde osa  $y$  je **stabilní směr** a naopak osa  $x$  je **nestabilní směr**.



Obrázek 1.4.1

### 1.4.2. Klasifikace lineárních systémů

Ukázkový příklad (1.6) používá matici  $A$  s dvěma nenulovými prvky, nyní si ukážeme příklad pro obecnou matici  $2 \times 2$ .

Hledáme nenulové vektory  $\mathbf{v}$  a čísla  $\lambda$  taková, že

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vektory  $\mathbf{v}$  nazýváme **vlastní vektory** a čísla  $\lambda$  nazýváme **vlastní čísla**. Obecně tyto hodnoty získáme vyřešením **charakteristické rovnice**  $\det(A - \lambda I) = 0$ , kde  $I$  je jednotková matice. Pro  $2 \times 2$  matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je charakteristickou rovnicí

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Tedy

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0, \tag{1.7}$$

kde

$$\begin{aligned}\tau &= \text{stopa}(A) = a + d, \\ \Delta &= \det(A) = ad - bc.\end{aligned}$$

Potom

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

jsou řešením kvadratické rovnice (1.7). Jinými slovy, vlastní čísla jsou závislá pouze na stopě a determinantu matice  $A$ .

Většinou platí  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , z čehož plyne, že odpovídající vlastní vektory  $v_1, v_2$  jsou lineárně nezávislé. Můžeme tedy jakoukoliv počáteční podmínku  $\mathbf{x}_0$  zapsat jako lineární kombinaci vlastních vektorů:  $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ . S využitím tohoto pozorování můžeme zapsat obecné řešení pro  $\mathbf{x}(t)$  ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

Je to lineární kombinace řešení  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  splňující počáteční podmínku  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

**Věta 1.4.1.** Uvažujme lineární systém tvaru (1.5), kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou vlastní čísla matice  $A$ . Potom pro  $t \rightarrow \infty$  platí:

1. Pokud všechna vlastní čísla  $\lambda_i$  mají zápornou reálnou část, potom jsou všechna řešení soustavy stabilní.
2. Pokud alespoň jedno vlastní číslo má kladnou reálnou část, potom všechna řešení jsou nestabilní.

### 1.4.3. Linearizace

Nyní rozšíříme pojem linearizace, který jsme si ukázali pro jedno-dimenzionální systémy. Uvažujme systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

a předpokládejme, že  $(x^*, y^*)$  jsou stacionární body, tedy

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Nechť

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

představuje malé odchylky od stacionárních bodů. Abychom zjistili jestli odchylky rostou, či klesají, musíme zderivovat  $u$  a  $v$ . Začneme rovnicí  $u = x - x^*$ , jelikož  $x^*$  je konstantní, získáváme

$$\dot{u} = \dot{x}.$$

Substitucí získáme

$$\dot{u} = f(x^* + u, y^* + v),$$

## 1.4 DVOU-DIMENZIONÁLNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

dále rozvineme do Taylorových řad

$$\dot{u} = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

a jelikož  $f(x^*, y^*) = 0$ , můžeme přepsat na

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).$$

Poznamenejme, že  $\partial f/\partial x$  a  $\partial f/\partial y$  označují parciální derivace v stacionárním bodě  $(x^*, y^*)$ , jedná se tedy o *čísla*, nikoliv funkce. Dále značení  $O(u^2, v^2, uv)$  opět reprezentuje *kvadratické* členy, které jsou extrémně malé, jelikož  $u$  a  $v$  jsou také velmi malé.

Obdobně získáme

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).$$

Tedy odchylky  $(u, v)$  se vyvíjejí v závislosti na

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathbf{O}(u^2, v^2, uv)$$

Matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jacobiho matice** ve stacionárním bodě  $(x^*, y^*)$ . A jelikož kvadratické členy jsou malé, můžeme je zanedbat. Získáváme tak **linearizovaný systém**

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

**Pozn. 1.4.2.** Existují výjimky, kdy kvadratické členy vynechat nemůžeme, například degenerované uzly, hvězdicové uzly apod. Více informací viz [4].

### 1.4.4. Hopfova Bifurkace

Bifurkace popsané v první kapitole mají obdobu i ve více dimenzích. Nebudeme se jimi tedy zabývat a uvedeme si nový typ bifurkace, **Hopfovu bifurkaci**.

Uvažujme dvou-dimenzionální systém se stabilními stacionárními body. Jaké jsou všechny možné způsoby, jak mohou ztratit stabilitu? Toto nám prozradí vlastní čísla Jacobiho matice. Je-li stacionární bod stabilní, musí vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  mít nekladnou reálnou hodnotu a v případě  $\lambda = 0$  musí být kořen jednonásobný. Tedy buď jsou obě čísla reálná a záporná, nebo jsou komplexně sdružená. Ke ztrátě stability dochází jakmile vlastní čísla nabudou kladné hodnoty.

Hopfova bifurkace je kritickým bodem, kdy komplexně sdružená vlastní čísla překročí imaginární osu. Prostě řečeno, reálná část sdružených vlastních čísel změní znaménka.

Tato bifurkace se rozděluje na *superkritickou* a *subkritickou*, obdobně jako vidličková bifurkace. Subkritická Hopfova Bifurkace je mnohem nebezpečnější, jelikož trajektorie musí po bifurkaci *přeskočit* na vzdálenější atraktor. Tímto atraktorem může být chaotický atraktor, který bude zmíněn později.

## 2. Chaos

Chaos v matematice je rozdílný od klasického chaosu, jak ho známe. Je-li systém chaotický, neznamená to, že je nepředvídatelný, ale je velmi těžko předvídatelný. Matematik Robert L. Devaney popsal chaos tímto způsobem: dynamický systém klasifikujeme jako chaotický, když splňuje tyto vlastnosti:

- musí být *citlivý na počáteční podmínky*,
- je *topologicky tranzitivní*,
- má *husté periodické orbity*.

Nyní stručně popíšeme tyto vlastnosti.

Citlivost na počáteční podmínky znamená, že změníme-li počáteční podmínku, byť i jen velmi slabě, za nějaký čas dojdeme k úplně odlišnému výsledku. Tedy dvě blízké trajektorie ve fázovém prostoru se s rostoucím časem oddalují. Tato citlivost se dá měřit *Ljapunovovým exponentem*, který bude blíže popsán později.

Zobrazení  $f : X \rightarrow X$  je topologicky tranzitivní na nějaké invariantní množině  $Y$ , jestliže orbita  $\{f^n(p)\}$  nějakého bodu  $p$  je hustá v  $Y$ . Jinak řečeno,  $f$  je tranzitivní na  $Y$  právě tehdy, když pro libovolné dvě množiny  $U, V$  otevřené v  $Y$  existuje kladné  $n$  takové, že  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Velmi obecně to znamená, že se odkudkoliv dostaneme libovolně blízko kamkoliv, a také to implikuje, že nemůžeme systém rozložit na dvě otevřené množiny.

A nakonec to, že má systém husté periodické orbity, znamená že ke každému bodu v prostoru se libovolně blízko blíží periodický orbit. Nicméně chaotický systém je téměř vždy neperiodický.

### 2.1. Lorenzův systém

S využitím předchozích informací zanalyzujeme Lorenzův model. Tento model, popisující termickou konvekci, vytvořil matematik a meteorolog Edward Lorenz v roce 1963. Je tvořen třemi obyčejnými diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Zde  $\sigma, r, b > 0$  jsou parametry. Všimněme si, že obsahuje pouze dva *nelineární* členy, a to jsou  $xy$  a  $xz$ .

#### 2.1.1. Stacionární body

Lorenzův systém má dva druhy stacionárních bodů. Počátek  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$  je stacionární bod pro všechny hodnoty parametrů. V  $r = 1$  nastane vidličková bifurkace a pro  $r > 1$  existuje také symetrický pár stacionárních bodů

$$x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z^* = r - 1.\tag{2.2}$$

## 2.1.2. Stabilita

Linearizace v počátku je  $\dot{x} = \sigma(y - x)$ ,  $\dot{y} = rx - y$ ,  $\dot{z} = -bz$ , získáno z (2.1). Proměnná  $z$  je nezávislá na ostatních a jde vidět, že  $z$  se blíží k nule exponenciálně rychle. Zbylé dva směry jdou vyjádřit jako systém

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

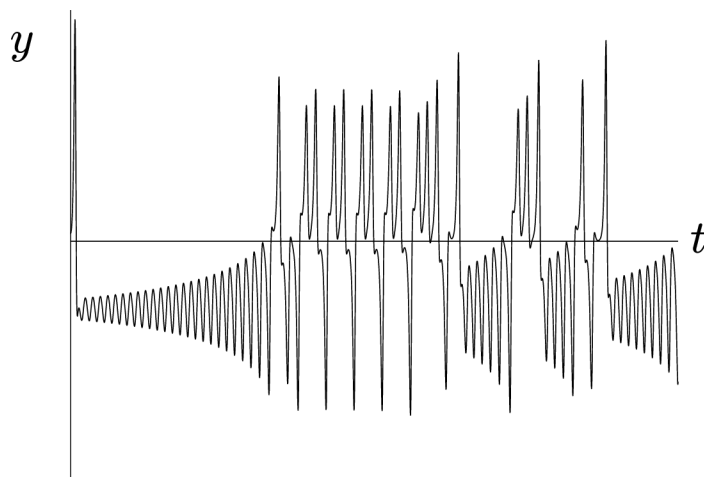
se stopou  $\tau = -\sigma - 1 < 0$  a determinantem  $\Delta = \sigma(1 - r)$ . Pokud  $r > 1$ , je počátek sedlo, protože  $\Delta < 0$ . Pro  $r < 1$  jsou všechny směry příchozí a počátek je uzol. Tedy počátek je pro  $r < 1$  stabilní, a dokonce je i **globálně stabilní**.

Předpokládejme že  $r > 1$ , takže existují stacionární body (2.2). Vytvoříme Jacobiho matici a po několika úpravách získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

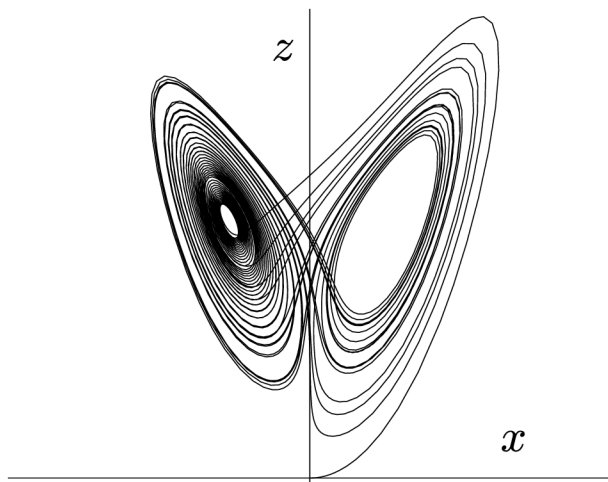
Hledáním řešení ve tvaru  $\lambda = i\omega$ , kde  $\omega$  je reálné, nacházíme pár čistě imaginárních vlastních čísel pro  $r = r_H = \sigma \frac{(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ , s předpokladem, že  $\sigma - b - 1 > 0$ , protože  $r$  máme zavedeno jako kladný parametr. Tedy  $r_H$  je parametr, pro který dochází k Hopfově bifurkaci, tedy stacionární body ztrácí stabilitu. Z toho plyne, že body (2.2) jsou stabilní pro  $1 < r < r_H$ .

Co se stane pro  $r > r_H$ ? Jelikož Hopfova bifurkace je subkritická, trajektorie musí přeskóčit na nějaký vzdálený atraktor, nicméně v okolí neexistuje žádný atraktor. Lorenz tedy model studoval pro parametry  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r = 28$ . Poznamenejme, že pro tyto parametry dochází k Hopfově bifurkaci v  $r_H \doteq 24,74$ . Začal s počáteční podmínkou  $(0, 1, 0)$  a získal řešení pro  $y(t)$ , viz 2.1.1. Jde vidět, že toto řešení osciluje *aperiodicky*.



Obrázek 2.1.1

Lorenz dále objevil, že řešení má velmi zajímavé trajektorie ve fázovém prostoru. Například podíváme-li se na řešení  $x(t)$  ku  $z(t)$ , viz obr. 2.1.2.



Obrázek 2.1.2

Trajektorie působí, že se často kříží, což je ovšem důsledkem projekce do dvourozměrné plochy. V trojrozměrném modelu by šlo vidět, že trajektorie se nikdy neprotnou. Při pohledu na trojrozměrný model by šlo vidět, že se trajektorie usadí na velmi tenké množině zvané **podivný atraktor**. Jedná se v podstatě o nekonečnou množinu ploch položených velmi blízko k sobě, kterou můžeme též nazvat **fraktál**.

**Pozn. 2.1.1.** Že se jedná o podivný atraktor dokázal v roce 2002 Warwick Tucker a vyřešil tím tak čtrnáctou otázku ze souboru *Smaleho problémů*.

### 2.1.3. Ljapunovovy exponenty

Ljapunovovy exponenty jsou čísla popisující rozbíhavost blízkých trajektorií. Mějme  $\mathbf{x}(t)$  bod na atraktoru v čase  $t$  a nějaký bod  $\mathbf{x}(t) + \delta(t)$  vzdálený o  $\delta$ . Budeme-li sledovat jak  $\delta(t)$  roste objevíme, že

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda_L t},$$

tedy blízké trajektorie se od sebe vzdalují exponenciálně rychle. Pro Lorenzův systém platí  $\lambda_L \approx 0,9$ . Číslo  $\lambda_L$  se často nazývá **Ljapunovův exponent**, ale každý  $n$ -dimenzi-onální systém má  $n$  různých Ljapunovových exponentů. Budeme tedy  $\lambda_L$  uvažovat jako **největší** Ljapunovův exponent. Poznamenejme, že index  $L$  přidáváme pro odlišení od značení vlastních čísel.

Součet všech Ljapunovových exponentů nám dává charakter systému. Má-li systém součet  $\lambda_{Li}$  záporný, jedná se o disipativní systém, je-li tento součet rovný nule, jedná se o konzervativní systém. Obvykle je systém chaotický, má-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný.

Má-li systém kladný Ljapunovův exponent, potom existuje jistý časový horizont a za tímto horizontem jsou všechny předpovědi chybné. Mějme  $a$  jako míru tolerance, jakmile  $\|\delta(t)\| \geq a$ , označíme predikci jako nepřístupnou. Toto nastane po čase

$$t_{horizont} \sim O\left(\frac{1}{\lambda_L} \ln \frac{a}{\|\delta_0\|}\right).$$

Kvůli logaritmické závislosti na  $\|\delta_0\|$  jsou předpovědi značně omezené, i když začneme s velmi malou počáteční chybou.



### 3. Diferenciální rovnice se zpožděním

U spousty reálných modelů se využívá kontroly užitím zpětné vazby. Tento jev můžeme popsat jako závislost na čase  $t - \tau$ . Zpožděné diferenciální rovnice mají mnoho využití například v odvětvích biologie a fyziky. Jejich řešení je však velmi složité a podrobnější popis této problematiky můžete najít například v [1] nebo [3].

Některé základní vlastnosti si ukážeme na diferenciální rovnici se zpožděním prvního řádu ve tvaru

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (3.1)$$

kde  $\tau > 0$  je nazýváno **zpoždění**. Na rozdíl od klasických diferenciálních rovnic je počáteční podmínka dána funkcí ve tvaru

$$x(t) = g(t), \quad -\tau \leq t \leq t_0, \quad (3.2)$$

kde  $t_0$  je čas na začátku výpočtu. Poznamenejme, že  $g(t)$  může být i konstantní a jednalo by se v podstatě o obdobu počáteční podmínky obyčejné diferenciální rovnice.

Tedy rovnice (3.1) splňující podmínku (3.2) je *počátečním problémem*. Řešením tohoto počátečního problému na intervalu  $\langle t_0, t_f \rangle$  je funkce  $x : \langle t_0 - \tau, t_f \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , která je spojitě diferencovatelná na intervalu  $\langle t_0, t_f \rangle$ , splňuje (3.1) pro všechna  $t \in \langle t_0, t_f \rangle$  a splňuje (3.2). Obdobně bychom definovali počáteční problém a jeho řešení i pro více-dimenzionální systémy.

Pro zdůraznění rozdílnosti vlastností diferenciálních rovnic s a bez zpoždění se podívejme na příklad:

$$x'(t) = -x(t - \tau).$$

Pro  $\tau = 0$ , tedy obyčejnou diferenciální rovnici bez zpoždění, existuje řešení  $x(t) = e^{-t}$ . Ovšem zvolíme-li  $\tau = \pi/2$ , řešením bude  $y(t) = \sin t$ . Tedy můžeme vidět, že jednoduché zpoždění nám výrazně změní kvalitativní vlastnosti řešení. Dalším významným rozdílem je hledání kořenů charakteristických rovnic linearizovaných systémů zpožděných rovnic, nejsou to totiž polynomy, ale rovnice tvaru

$$P_3(\lambda) + Q_2(\lambda)e^{-\tau\lambda} = 0,$$

kde  $P_3(\lambda)$  a  $Q_2(\lambda)$  jsou polynomy. Například pro systém 1. řádu má charakteristická rovnice tvar

$$\lambda + \alpha e^{-\tau\lambda} = 0.$$

Jak je to například s existencí a jednoznačností počáteční úlohy pro diferenciální rovnice se zpožděním? Pro lokální existenci a jednoznačnost platí pro rovnici (3.1) analogie Picardovy věty z teorie ODR a pro globální existenci můžeme naformulovat následující větu, kterou můžete nalézt v [1]

**Věta 3.0.1** (Globální jednoznačnost řešení). Mějme počáteční problém daný funkcí (3.1) a počáteční podmínkou (3.2). Existuje-li funkce  $L : \langle t_0, t_f \rangle \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  taková, že

$$|f(t, x_1, x_2) - f(t, \tilde{x}_1, x_2)| \leq L(t, x_2)|x_1 - \tilde{x}_1|, \quad \forall (t, x_1, x_2), (t, \tilde{x}_1, x_2) \in \langle t_0, t_f \rangle \times \mathbb{R}^2,$$

potom řešení počátečního problému je na intervalu  $\langle t_0, t_f \rangle$  jednoznačné.

## 4. Zesilování chaosu

Nyní využijeme zpoždění v diferenciálních rovnic pro zesílení chaosu. Začneme zkoumáním již zmíněného Lorenzova systému:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

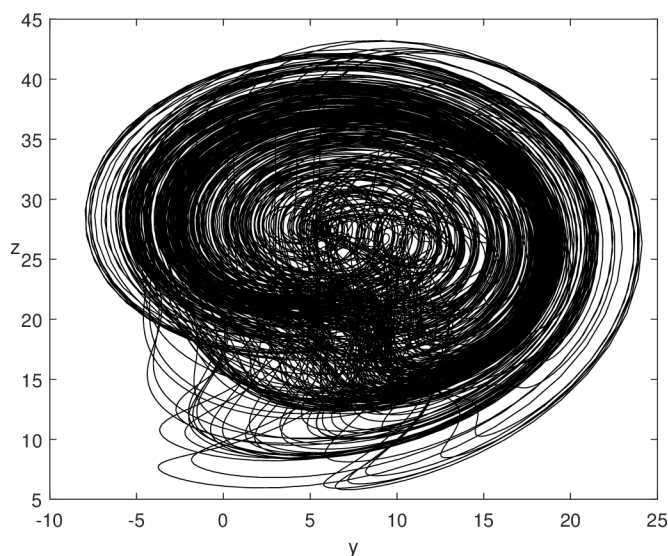
Opět budeme uvažovat  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  a  $r$  bude kontrolní parametr. Jak jsme ukázali dříve v textu, k Hopfově bifurkaci dochází pro  $r = r_H = 24,74$ . Tedy u hodnot  $r > r_H$  dochází k chaotickému chování, nicméně naším cílem bude vyvolat chaos při  $r < r_H$  využitím zpoždění.

Budeme přidávat zpoždění k jednotlivým členům a sledovat, jak se model změní. K těmto výpočtům využijeme program MATLAB, který má velmi užitečné nástroje pro výpočty diferenciálních rovnic. Pro naše účely se bude nejvíce hodit metoda DDE23, která využívá pro numerické řešení explicitní Runge-Kutta metody řádu 2 a 3.

Nejdříve se podívejme na upravený systém:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y(t-1) - x(t)) \\ \dot{y} &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z} &= x(t)y(t) - bz(t).\end{aligned}$$

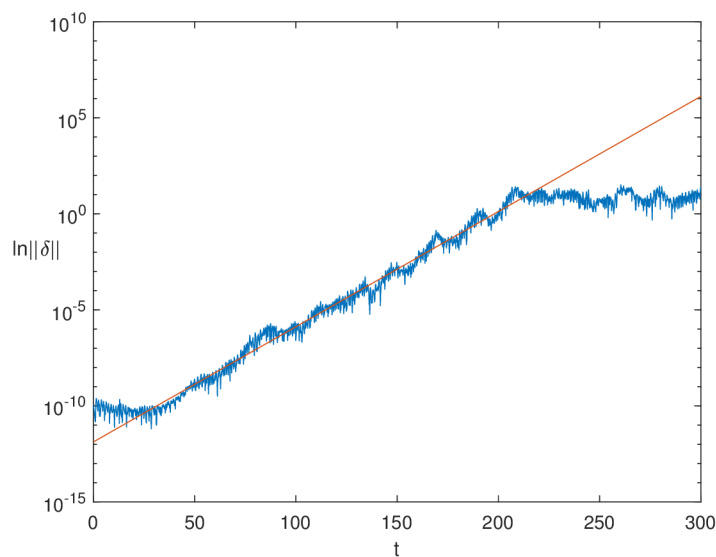
Pro hodnotu  $r = 28$  a  $\tau = 1$  vykazuje systém chaotické chování, viz obr. 4.0.1. Nutno poznamenat, že tento systém nemá příliš úhledný atraktor, a proto jeho dvourozměrná projekce není ideální.



Obrázek 4.0.1

K ověření chaotického chování tohoto systému nám poslouží jeho největší Ljapunovův exponent, jež získáme následujícím způsobem: zlogaritmujeme vzdálenosti  $\delta$  dvou velmi

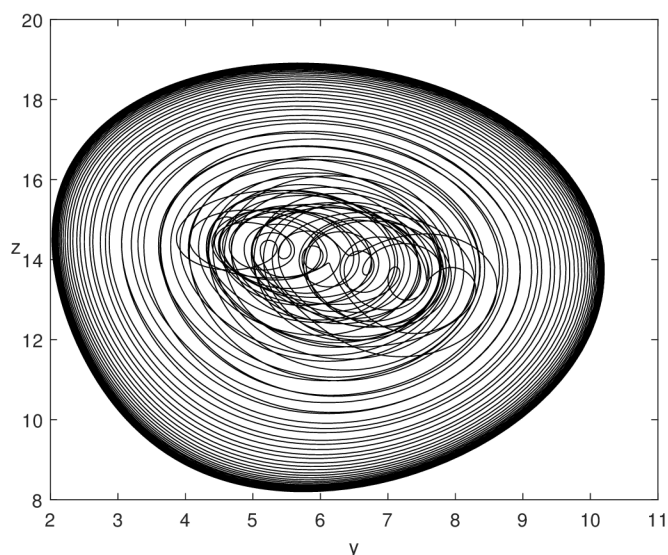
blízkých trajektorií v závislosti na čase. Získané hodnoty *vhodně* proložíme přímkou a její směrnice bude přibližně odpovídat velikosti největšího Ljapunovova koeficientu  $\lambda_L$ .



Obrázek 4.0.2

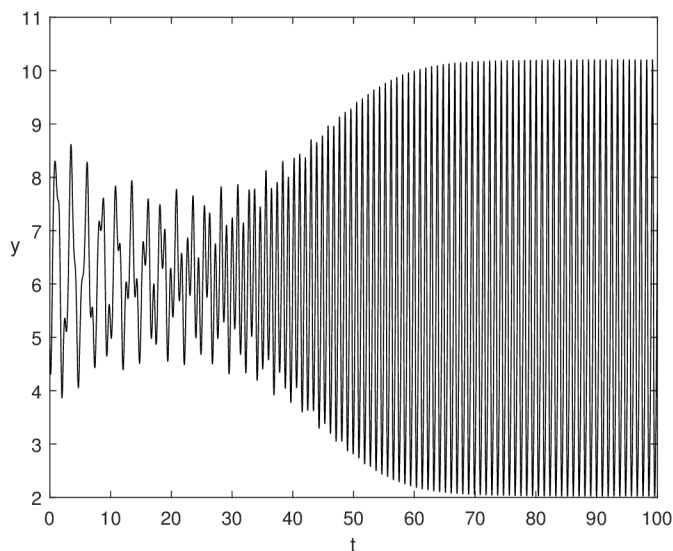
V obrázku 4.0.2 je modrou křivkou znázorněna změna vzdáleností trajektorií  $\delta(t)$ . Můžeme si povšimnout, že se křivka ustálí okolo jedné hodnoty, tato hodnota je v podstatě dána *průměrem* atraktoru. Stoupání křivky je proloženo červenou přímkou, jejíž směrnice odpovídá hodnotě  $\lambda_L = 0,1381$ . A jelikož je  $\lambda_L > 0$ , můžeme potvrdit, že se jedná o chaotický systém.

Nyní pozorujme systém pro  $r = 15 < r_H$ . Z obr. 4.0.3 si můžeme všimnout, že systém zpočátku působí chaoticky, ale po krátkém čase se ustálí k nějakému periodickému řešení.



Obrázek 4.0.3

Tomuto jevu se říká **částečný chaos**. Poznamenejme, že k tomuto jevu došlo díky vhodně zvolenému počátečnímu bodu  $x_0 = (10,079; 4,763; 14,955)$ , který se vyskytuje velmi blízko atraktoru. Kdybychom zvolili bod dále od atraktoru, tak k chaosu vůbec nedojde. Že se jedná o částečný chaos lze ukázat i na promítnutí vývoje  $y(t)$  (obr. 4.0.4), kde je vidět přechod z chaosu na periodickou oscilaci.

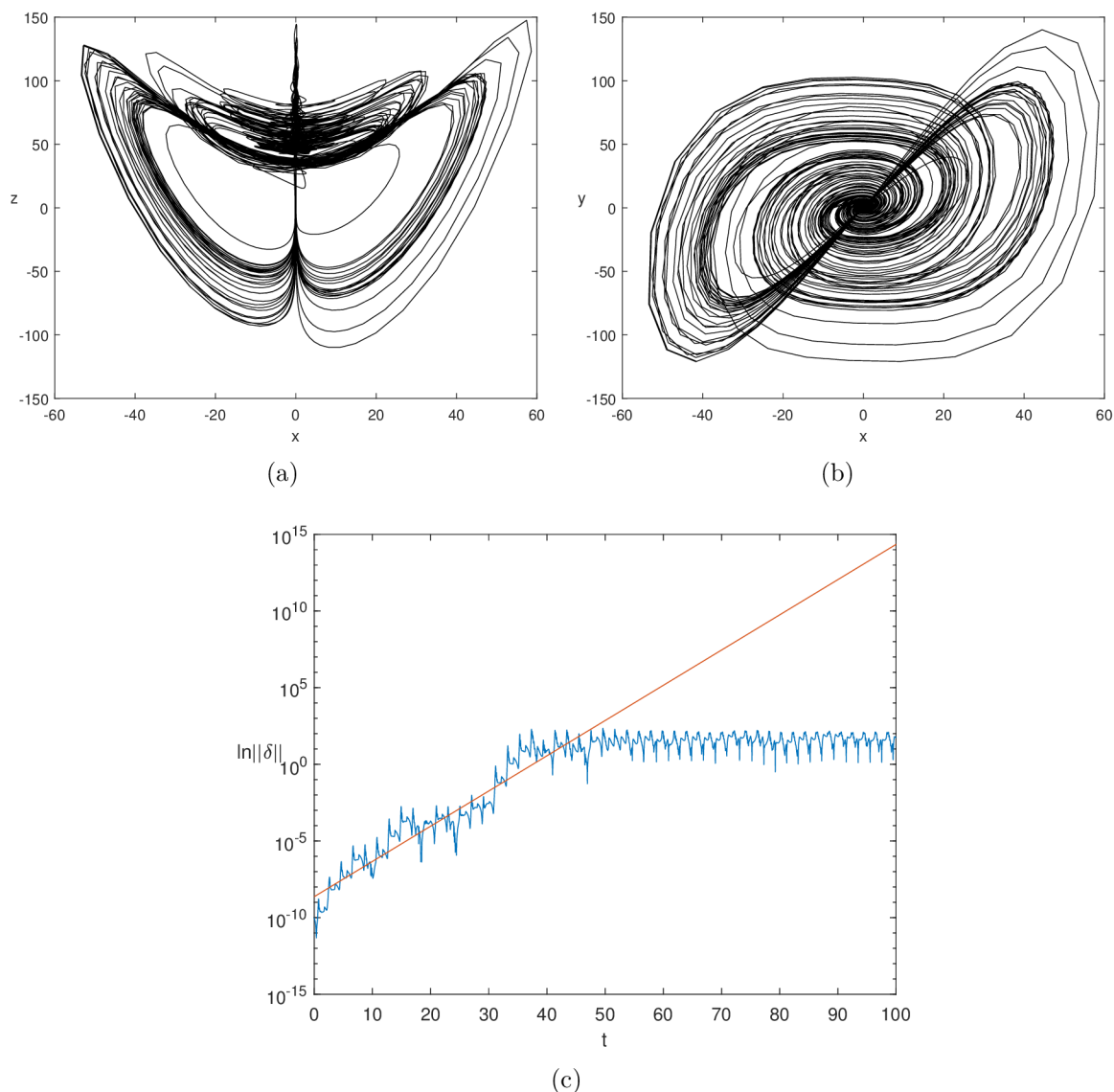


Obrázek 4.0.4

Tedy toto zpoždění nevyhovuje zcela našim požadavkům, proto se podívejme na jinak zpožděný systém:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ \dot{y} &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z} &= x(t)y(t) - bz(t - 1).\end{aligned}$$

Nebudeme se zabývat případem  $r = 28$ , jelikož u něj můžeme chaotické chování předpokládat, a podíváme se hned na případ  $r = 15$  (a opět  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ). Tato soustava se chová lépe než předchozí, jelikož již z obrázku 4.0.5a jde usoudit, že se jedná o chaotický systém. Tento odhad nám potvrdí i Ljapunovův exponent  $\lambda_L = 0,5291$  (viz obr. 4.0.5c).



Obrázek 4.0.5

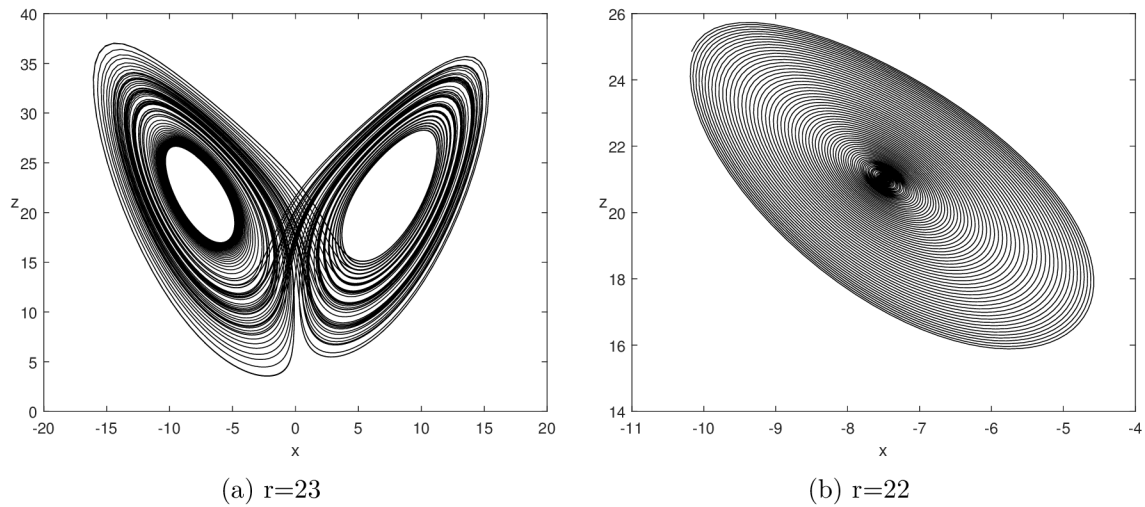
Tento systém je vizuálně velmi zajímavý, tvarově připomíná atraktor Lorenzova systému, jehož horní část se kroutí do spirály okolo osy  $z$ . Pohled na tuto spiralizaci shora jde vidět na obrázku 4.0.5b.

Nyní jsme si ukázali, že zpoždění vskutku zesiluje chaotické chování systému. Posuneme se však o krok dále a zkusíme přidat zpoždění do nelineárního členu. Podívejme se tedy na systém:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ \dot{y} &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z} &= x(t-1)y(t-1) - bz(t).\end{aligned}$$

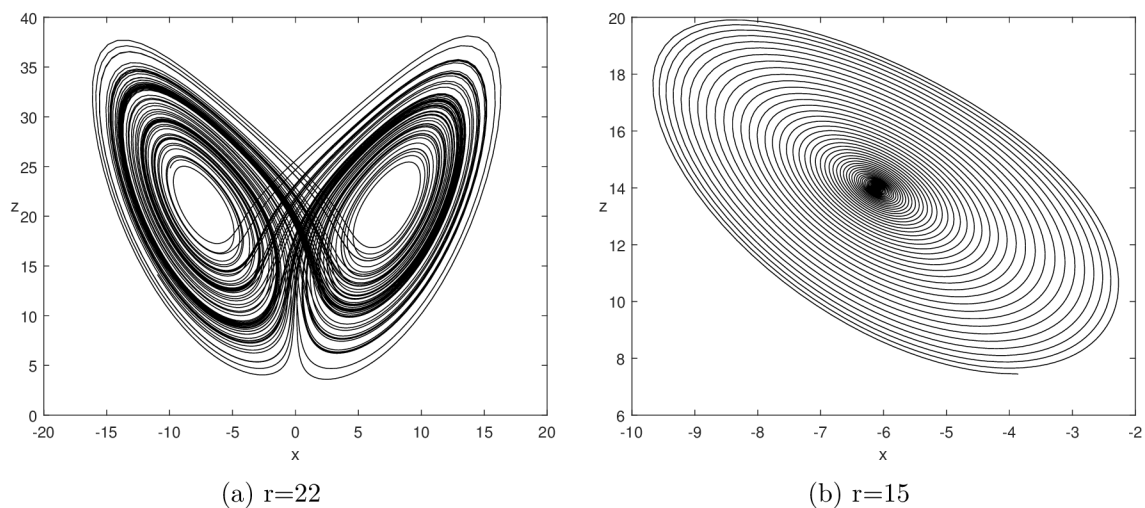
U tohoto systému si ukážeme, jaký vliv má velikost zpoždění na parametr  $r$ . Budeme pozorovat systém s různými hodnotami parametru  $r$  a různým zpožděním  $\tau$ . Začneme

s velikostí zpoždění  $\tau = 0,001$ . V obrázku 4.0.6a můžeme vidět, že systém vykazuje chaotické chování už při hodnotě  $r = 23 < r_H$ .



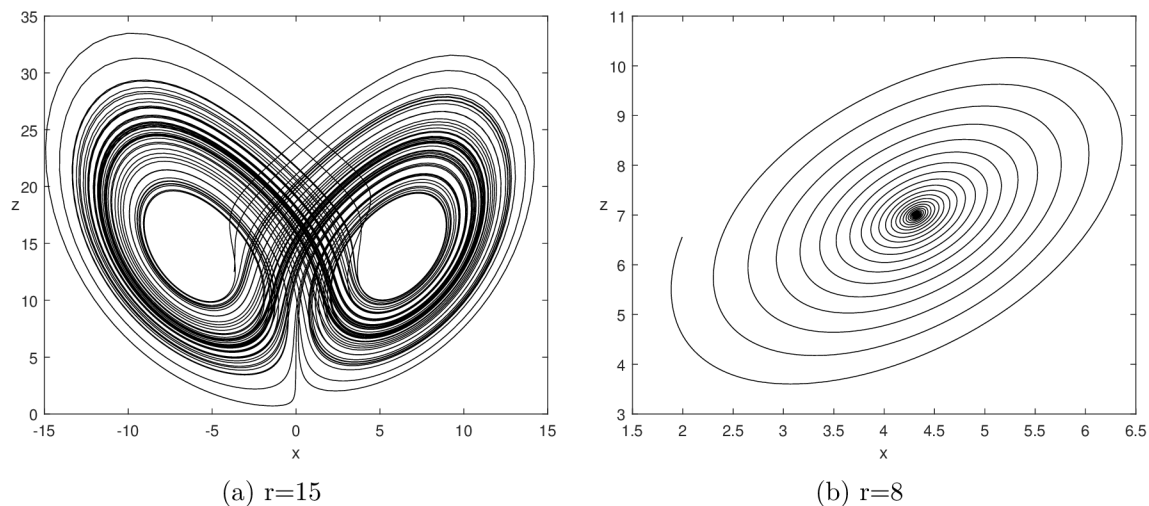
Obrázek 4.0.6

Ovšem pro  $r = 22$  již chaotické chování pozorovat nemůžeme (viz obr. 4.0.6b). Zvětšíme tedy zpoždění na hodnotu  $\tau = 0,01$ . Jak vidíme v obrázku 4.0.7a, pro tuto hodnotu je systém chaotický i s hodnotou parametru  $r = 22$  a toto chování si udržuje až do hodnoty  $r = 16$ . Jakmile se však dostaneme k hodnotě  $r = 15$ , systém opět přestává vykazovat chaotické chování (viz obr. 4.0.7b).



Obrázek 4.0.7

Zkusíme tedy ještě jednou zvýšit zpoždění na  $\tau = 0,04$ . Tentokrát chaotické chování nastává i v případě  $r = 15$  (obr. 4.0.8a) a toto chování přechází až do hodnoty parametru  $r = 8$ , kde toto chování zaniká (obr. 4.0.8b).



Obrázek 4.0.8

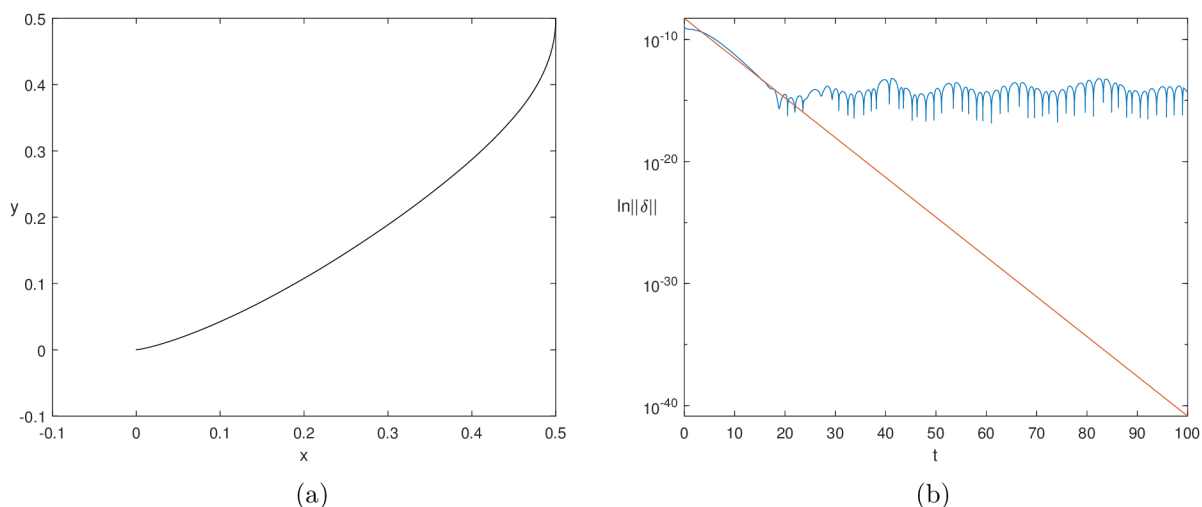
Z těchto pozorování si tedy můžeme vyvodit, že existuje nějaká nelineární závislost mezi hodnotou parametru  $r$  a zpožděním  $\tau$ . Také si můžeme povšimnout, že čím více zvětšujeme zpoždění a zmenšujeme  $r$ , tím více se tvar atraktoru začíná odlišovat od původního atraktoru Lorenzova systému.

## 5. Generování chaosu

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že zpoždění dokáže zesílit chaos v systému, který již chaotické chování vykazuje. Nyní si však ukážeme, jak jde chaotické chování vyvolat i u obyčejných systémů. Uvažujme systém:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= x^2 - y.\end{aligned}$$

Problém řešíme numericky využitím MATLABovské funkce ODE45. Z řešení v obrázku 5.0.1a můžeme vidět, že trajektorie směřuje do počátku, ve kterém se také ustálí.



Obrázek 5.0.1

Ač je zřejmé, že systém není chaotický, můžeme se o tomto faktu přesvědčit i zkoumáním rozbíhavosti blízkých trajektorií. V obr. 5.0.1b je ukázáno, že největší Ljapunovův exponent  $\lambda_L = -0,7506$ . Zápornost tohoto čísla je dána sbíhavostí trajektorií a říká nám, že se jedná o disipativní systém, což potvrzuje náš odhad.

Nyní k systému přidáme člen

$$u(t) = \alpha \sin(\sigma x(t - \tau)),$$

který je známý schopností vyvolat chaos s vhodnými parametry  $\alpha$ ,  $\sigma$ . Proč je tento člen zrovna v tomto tvaru je blíže popsáno v článku [5]. Pro náš případ objevíme, že  $u(t)$  vyvolává chaos s parametry  $\alpha = 2$ ,  $\sigma = 25$  a zpožděním  $\tau = 1$  při vložení do první rovnice systému. Upravený systém tedy vypadá takto:

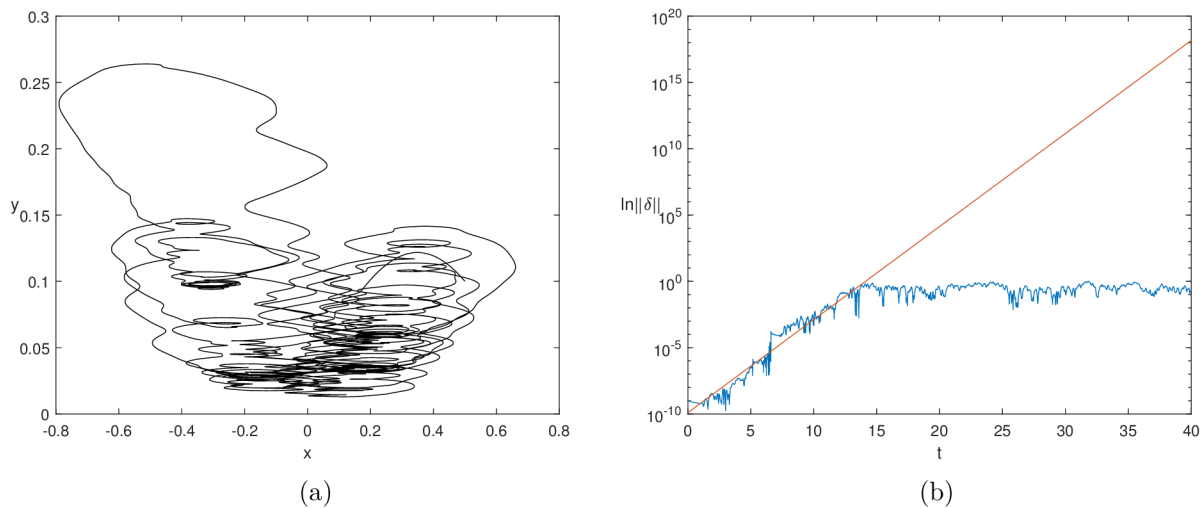
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(t) + y(t) + u(t) \\ \dot{y} &= x(t)^2 - y(t),\end{aligned}$$

kde

$$u(t) = 2 \sin(25x(t - 1)).$$

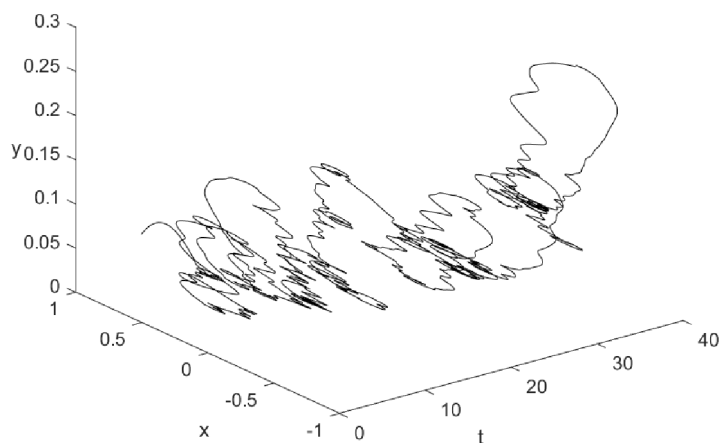
Můžeme vidět, že se skutečně jedná o systém s chaotickým chováním, viz obr. 5.0.2a. A v této myšlence nás utvrdí i Ljapunovův exponent  $\lambda_L = 1,6157$  (obr. 5.0.2b).





Obrázek 5.0.2

Je vhodné také zobrazit trajektorii v čase, viz obrázek 5.0.3, kde můžeme vidět nepravidelný vývoj.



Obrázek 5.0.3

Tedy úspěšně jsme vytvořili chaotické chování v původně nechaotickém systému.

# Závěr

Cílem této práce bylo uvedení základních vlastností systémů s chaotickým chováním a diferenciálních rovnic se zpožděním a ukázat vliv zpoždění na chaotické a nechaotické systémy.

V první kapitole jsme uvedli obecné informace o dynamických systémech, které byly potřebné k pochopení problematiky následujících kapitol.

V druhé kapitole jsme uvedli základy chaosu a Ljapunovův exponent sloužící jako možný identifikátor chaosu. Tyto základní informace jsme ukázali na Lorenzově systému.

Třetí kapitola popisovala základy diferenciálních rovnic se zpožděním a uvedla několik odlišností od obyčejných diferenciálních rovnic.

Ve čtvrté kapitole jsme zkoumali Lorenzův systém pro různé velikosti zpoždění v několika členech. Ukázali jsme, že existuje nelineární závislost mezi velikostí zpoždění a kontrolním parametrem systému. Také jsme ukázali, že čím větší je zpoždění, tím více se nový atraktor liší od původního.

V páté kapitole byla ukázka generování chaosu v obyčejném systému diferenciálních rovnic. Nutno poznamenat, že ač náš model obsahoval nelineární člen, podobné vyvolání chaosu by šlo provést i v lineárním systému.

V této práci byly pouze základní myšlenky anti-kontroly chaosu, ovšem poskytuje základ k dalšímu a podrobnějšímu zkoumání této problematiky.

# Literatura

- [1] KOLMANOVSKII, V. a A. MYSHKIS. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations* [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999 [cit. 2021-5-21]. ISBN 978-90-481-5148-6. Dostupné z: doi:10.1007/978-94-017-1965-0
- [2] POKORNÝ, Pavel. Deterministický chaos: plod počítačové fyziky. *Československý časopis pro fyziku*. Praha: Academia, 2008, **58**(6), 328-338. ISSN 0009-0700.
- [3] SMITH, Hal L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. New York: Springer, 2010. Texts in applied mathematics. ISBN 978-1-4419-7645-1.
- [4] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. 2nd ed. Reading: Perseus Books, 1994. ISBN 0-201-54344-3.
- [5] WANG, Xiao Fan, Guanrong CHEN a Xinghuo YU. Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*. 2001, **10**(4), 771-779. ISSN 1054-1500. Dostupné z: doi:10.1063/1.1322358