

MENDELOVA UNIVERZITA V BRNĚ

Provozně ekonomická fakulta

Obor: Manažersko-ekonomický



Provozně
ekonomická
fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bayesiánské techniky analýzy
ekonomických časových řad

Vedoucí práce:
doc. Mgr. David Hampel, Ph.D.

Autor práce:
Ing. Tomáš Vaněk

Brno, 2015

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé diplomové práce, panu doc. Mgr. Davidu Hampelovi, Ph.D., za cenné rady, ochotu, trpělivost a vstřícnost, a také za spolupráci během celého mého dosavadního studia. Chtěl bych také poděkovat celé své rodině za podporu.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci **Bayesiánské techniky analýzy ekonomických časových řad** vypracoval samostatně a veškeré použité prameny a informace uvádím v seznamu použité literatury. Souhlasím, aby moje práce byla zveřejněna v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a v souladu s platnou Směrnicí o zveřejňování vysokoškolských závěrečných prací.

Jsem si vědom, že se na moji práci vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, a že Mendelova univerzita v Brně má právo na uzavření licenční smlouvy a užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

Dále se zavazuji, že před sepsáním licenční smlouvy o využití díla jinou osobou (subjektem) si vyžádám písemné stanovisko univerzity, že předmětná licenční smlouva není v rozporu s oprávněnými zájmy univerzity, a zavazuji se uhradit případný příspěvek na úhradu nákladů spojených se vznikem díla, a to až do jejich skutečné výše.

V Brně dne 14. 5. 2015

vlastnoruční podpis autora

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá bayesiánskými technikami analýzy ekonomických časových řad a má dvě části. V první části je analyzován monetární transmisní mechanismus v případě České republiky, Německa a Kypru, a to pomocí bayesiánského vektorového autoregresního modelu s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou. Druhá část vyhodnocuje predikční schopnosti bayesiánských vektorových autoregresních modelů s různými apriorními hustotami při predikci vybraných makroekonomických veličin uvedených států. Součástí druhé části jsou i kombinace predikcí a jejich vyhodnocení.

Klíčová slova

vektorový autoregresní model, bayesiánský přístup, monetární transmisní mechanismus, predikce, kombinace predikcí

Abstract

This diploma thesis deals with bayesian techniques of economic time series analysis and contains two parts. In the first part the monetary transmission mechanisms of the Czech Republic, Germany and Cyprus are analysed using the bayesian vector autoregressive model with time-varying parameters and stochastic volatility. The second part evaluates the predictive performance of bayesian vector autoregressive models with different priors when predicting selected macroeconomic variables of the above-mentioned countries. In the second part combinations of predictions and their evaluation are also conducted.

Keywords

vector autoregressive model, bayesian approach, monetary transmission mechanism, prediction, prediction combination

Obsah

Úvod a cíl práce	15
1 Bayesiánský přístup a vektorové autoregresní modely	17
1.1 Bayesiánský přístup	17
1.2 VAR a BVAR model	18
1.3 Apriorní hustoty	21
1.3.1 Neinformativní apriorní hustota	21
1.3.2 Littermanova apriorní hustota (Minnesota prior)	22
1.3.3 Přirozeně konjugovaná apriorní hustota	24
1.3.4 Nezávislá normální-Wishartova apriorní hustota	25
1.3.5 Stochastic Search Variable Selection	28
1.4 Odhadové techniky	29
1.4.1 Monte Carlo simulace	30
1.4.2 Gibbsův vzorkovač	30
1.4.3 Metropolis-Hastings algoritmus	31
1.5 BVAR model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou	33
1.5.1 Normální lineární stavový model	34
1.5.2 Stochastická volatilita	34
1.5.3 TVP-BVAR-SV model a jeho odhad	35
2 Metodologie, data a modely	41
2.1 Monetární politika a její transmisní mechanismus	41
2.1.1 Monetární politika a funkce centrální banky	41
2.1.2 Cíle a nástroje monetární politiky	42
2.1.3 Monetární transmisní mechanismus	43
2.2 Predikce pomocí bayesovských modelů	44
2.2.1 Studie zabývající se predikcí pomocí (B)VAR modelů	46
2.2.2 Bayesovské průměrování modelů a kombinace predikcí	47
2.3 Data a modely	49
3 Empirická část	51
3.1 Analýza monetárního transmisního mechanismu	51
3.1.1 Výsledky pro Českou republiku	52
3.1.2 Výsledky pro Německo	54
3.1.3 Výsledky pro Kypr	55

3.2	Predikce vybraných makroekonomických veličin	56
3.2.1	Výsledky pro Českou republiku	57
3.2.2	Výsledky pro Německo	58
3.2.3	Výsledky pro Kypr	60
3.2.4	Kombinace predikcí	61
4	Diskuze	65
	Závěr	69
	Reference	71

Seznam obrázků

2.1	Monetární transmisní mechanismus ECB	44
3.1	Panel grafů vybraných makroekonomických veličin České republiky, Německa a Kypru	51
3.2	Panel grafů impulzních odezev pro Českou republiku	53
3.3	Grafy vývoje tříměsíční mezibankovní úrokové sazby a směnného kurzu CZK/EUR	53
3.4	Stochastická volatilita pro Českou republiku	53
3.5	Panel grafů impulzních odezev pro Německo	54
3.6	Stochastická volatilita pro Německo	54
3.7	Panel grafů impulzních odezev pro Kypr	55
3.8	Stochastická volatilita pro Kypr	56
3.9	Panel grafů RMSFE pro veličiny České republiky	57
3.10	Panel grafů RMSFE pro veličiny Německa	59
3.11	Panel grafů RMSFE pro veličiny Kypru	60
3.12	Kombinace predikcí HDP a UNE České republiky	62
3.13	Kombinace predikcí HDP a IR Kypru	62

Úvod a cíl práce

Tato diplomová práce se zabývá bayesiánskými technikami analýzy ekonomických časových řad. Konkrétně je zaměřena na v současnosti populární vektorové autoregresní modely a techniky s nimi spojené, které jsou při analýze a predikci ekonomických časových řad hojně využívány. Vektorové autoregresní (VAR) modely jsou zobecněním jednorovnicových autoregresních (AR) modelů. Jsou to tedy vícerozměrné modely časových řad, které na počátku 80. let 20. století zpopularizoval [Sims \(1980\)](#).

K modelování makroekonomických vztahů je zpravidla zapotřebí použít více vysvětlujících proměnných a delší časové zpoždění. VAR model tedy může obsahovat desítky nebo i stovky parametrů, které bývají často odhadovány metodou nejmenších čtverců nebo metodou maximální věrohodnosti. Nejen s touto skutečností souvisí několik problémů v případě „klasického“ přístupu¹ k VAR modelům.

Mezi nejvýznamnější z nich patří nepřesné odhady parametrů VAR modelu a vysoké chyby předpovědí vlivem omezeného počtu stupňů volnosti. V některých situacích je při konstrukci modelu vhodné vycházet z apriorních informací ekonomické či statistické povahy. Neomezený VAR model však využívá tyto apriorní informace relativně zřídka – ve výběru proměnných, zvolení maximální délky zpoždění a zavedení identifikačních omezení ([Canova, 2007](#); [Koop, Korobilis, 2010](#)). Některé výše zmíněné problémy se dají řešit bayesiánským přístupem, který v obecné rovině i v kontextu VAR modelů stručně představí první kapitola. S VAR modely je často spojena i analýza impulzních odezev a varianční dekompozice. Jsou však často využívány i pro predikci zkoumaných ekonomických veličin. Například výše zmíněné nepřesné odhady parametrů v důsledku relativně nízkého počtu stupňů volnosti mohou tuto nepřesnost přenášet i do zmíněných impulzních odezev a predikce. Bayesiánské VAR (BVAR) modely byly původně navrženy ke zlepšení predikce. V současné době je však rozsah jejich využití výrazně širší ([Canova, 2007](#)).

Právě predikci a analýze impulzních odezev s využitím BVAR modelů se bude tato diplomová práce primárně věnovat – konkrétně predikci vybraných makroekonomických veličin a analýze monetárního transmisního mechanismu České republiky, Německa a Kypru. Tyto státy byly vybrány s ohledem na rozdílnost jejich ekonomik, což se může projevit v efektivitě jejich transmisního mechanismu, a také za účelem posouzení robustnosti získaných výsledků a možnosti jejich (alespoň částečného) zobecnění.

¹V anglickém jazyce se často používá výraz *frequentist approach*.

S ohledem na predikci se budou výsledky této práce snažit vyvrátit slova [E. Solomona \(1984\)](#):² „*The only function of economic forecasting is to make astrology look respectable.*“ V tomto kontextu budou predikční schopnosti uvažovaných modelů porovnány s často používaným benchmarkem – s predikční schopností naivní predikce. Dále budou dosažené výsledky konfrontovány s tvrzením [C. W. J. Grangera \(1986\)](#): „*...in terms of forecasting ability, ... a good Bayesian will beat a non-Bayesian, who will do better than a bad Bayesian,*“ přičemž budou porovnány predikční schopnosti „klasického“ VAR modelu s uvažovanými BVAR modely a také jednotlivé BVAR modely navzájem.

Při analýze monetárního transmisního mechanismu pomocí impulzních odezev bude využit sofistikovanější model. „Základní“ (B)VAR modely totiž uvažují fixní parametry, což může být v souvislosti s analýzou monetárního transmisního mechanismu dosti restriktivní a nežádoucí předpoklad. V případě několika ekonomik bylo studiemi prokázáno, že kromě parametrů se v čase mění také rozptyl exogenních šoků, a proto je do modelu vhodné implementovat mechanismus stochastické volatility (konkrétní studie jsou uvedeny v metodologické části práce). Bude tedy využit (B)VAR model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou, který je pro tuto aplikaci vhodnější. V souvislosti s tímto modelem se zpravidla využívají bayesiánské techniky a měl by oproti „základním“ (B)VAR modelům poskytovat názornější a přesnější výsledky.

Stručně shrnuto – tato diplomová práce bude mít dvě části. První z nich bude zaměřena na predikci a druhá na analýzu monetárního transmisního mechanismu, přičemž budou využity bayesiánské techniky. Hlavním cílem této diplomové práce bude v první řadě ověřit, že modelová predikce je přesnější než naivní predikce (a má tedy vůbec význam) a prozkoumat, zda je predikce pomocí bayesovských VAR modelů přesnější než ta s využitím „klasického“ VAR modelu. Ve druhé řadě půjde o analýzu monetárního transmisního mechanismu, přičemž bude využit výše jmenovaný BVAR model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou. Dílčím cílem práce bude poskytnout ucelený text o bayesiánských vektorových autoregresních modelech a s nimi souvisejících technikách, které se pro analýzu a predikci časových řad využívají.

Struktura tohoto textu bude následující. První kapitola diplomové práce představí koncept bayesiánské analýzy a vektorové autoregresní modely. Ve druhé kapitole bude popsána metodologie práce, včetně stručného popisu monetárního transmisního mechanismu, a dále data a modely. Třetí kapitola se bude věnovat samotným predikcím a analýze monetárního transmisního mechanismu. Ve čtvrté kapitole budou diskutovány některé aspekty provedené analýzy a v závěru budou shrnuty hlavní dosažené poznatky.

²Toto tvrzení je někdy spojováno s [J. K. Galbraithem \(1988\)](#); podle některých zdrojů (např. [Brandreth \(2013\)](#)) však chybně.

Kapitola 1

Bayesiánský přístup a vektorové autoregresní modely

1.1 Bayesiánský přístup

Bayesiánský přístup vychází z několika základních pravidel pravděpodobnosti, což je jedna z jeho hlavních výhod. Ze základních pravidel pravděpodobnosti se vychází jak při odhadování parametrů modelu, tak při predikci, tak i při dalších charakteristikách, což činí Bayesiánský přístup velmi univerzálním.

Stavebním kamenem Bayesiánského přístupu je Bayesův teorém.¹ Pokud označíme matici dat jako $\mathbf{y}$ a matici parametrů modelu jako $\boldsymbol{\theta}$, Bayesův teorém můžeme zapsat následovně:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})} . \quad (1.1)$$

Nejvíce nás zajímá podmíněná hustota pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$, která odpovídá na otázku „Co můžeme říci o parametrech $\boldsymbol{\theta}$ vzhledem k našim datům?“. Z výše uvedeného tedy vyplývá, že při Bayesiánském přístupu jsou parametry $\boldsymbol{\theta}$ chápány jako náhodné veličiny, což je jeden z hlavních aspektů, kterými se Bayesiánský přístup odlišuje od „klasického“ přístupu. Vzhledem k tomu, že nás budou zajímat pouze parametry $\boldsymbol{\theta}$, můžeme z Bayesova teorému vynechat člen $p(\mathbf{y})$, který $\boldsymbol{\theta}$ nezahrnuje, a můžeme jej chápat pouze jako normalizační konstantu (Koop, 2003; Lancaster, 2004). Vztah (2.1) tedy můžeme přepsat na:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) , \quad (1.2)$$

kde $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ je posteriorní hustota, $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ je věrohodnostní funkce a $p(\boldsymbol{\theta})$ je apriorní hustota.² Věrohodnostní funkce $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ je podmíněná hustota pravděpodobnosti dat a dá se chápat jako proces, kterým jsou data generována. Apriorní hustota $p(\boldsymbol{\theta})$ reprezentuje informaci o parametrech $\boldsymbol{\theta}$, která je nezávislá na datech.³ Právě apriorní

¹Thomas Bayes (1702–1761) byl anglický matematik a presbyteriánský ministr. Jeho teorém byl publikován až po jeho smrti v roce 1764 (Kruschke, 2010).

²Vztah (1.2) se obvykle čte tak, že posteriorní hustota je proporcionální součinu věrohodnostní funkce a apriorní hustoty.

³Existují však i bayesiánské empirické metody, které pro určování apriorní hustoty využívají informaci obsaženou v datech.

hustota je další odlišností Bayesiánského přístupu od „klasického“ a bude jí věnován prostor v souvislosti s BVAR modely v dalším textu.

Bodový odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ se zpravidla odvozuje z posteriorní hustoty jako posteriorní střední hodnota. Pokud tedy budeme chápat $\boldsymbol{\theta}$ jako nějaký k -prvkový vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, posteriorní střední hodnota je definována následovně:

$$E(\theta_i|\mathbf{y}) = \int \theta_i p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} . \quad (1.3)$$

Posteriorní střední odchylka, jakožto ukazatel stupně neurčitosti spojeného s bodovým odhadem, se vypočítá jako odmocnina z posteriorního rozptylu, který má tvar

$$\text{var}(\theta_i|\mathbf{y}) = E(\theta_i^2|\mathbf{y}) - [E(\theta_i|\mathbf{y})]^2 . \quad (1.4)$$

Pro tento výpočet je zapotřebí vyhodnotit integrál ze vzorce (1.3) tímto způsobem:

$$E(\theta_i^2|\mathbf{y}) = \int \theta_i^2 p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} .$$

Obecně lze posteriorní výpočty zapsat vztahem

$$E(g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{y}) = \int g(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} , \quad (1.5)$$

přičemž $g(\boldsymbol{\theta})$ je funkce, která nás zajímá. Ve většině případů však nemá výraz (1.5) analytické řešení. Je tedy zapotřebí nějaká posteriorní simulace (Koop, 2003; Lancaster, 2004). Posteriorní simulace jsou založeny na zákonu velkých čísel a centrální limitní větě a bude jim věnován prostor v následujícím textu.

Velkým zastáncem Bayesiánského přístupu je i držitel Nobelovy ceny za ekonomii z roku 2011 Christopher A. Sims, podle kterého by měla být ekonometrie doslova vždy a všude bayesiánská (Sims, 2007).

Pro názorné příklady viz např. Eddy (2004) nebo Greenberg (2008). Pro podrobnější výklad bayesiánské ekonometrie a statistiky viz (kromě výše uvedených odkazů) např. Geweke (2005), Bolstad (2004) nebo Zellner (1996). Pro přehled bayesiánských metod využívaných v oblasti financí viz např. Rachev, Hsu, Bagasheva, Fabozzi (2008).

1.2 VAR a BVAR model

Jak již bylo částečně uvedeno v úvodu práce, vektorové autoregresní (VAR) modely jsou zobecněním jednorovnicových autoregresních (AR) modelů a v ekonometrii je na počátku 80. let 20. století zpopularizoval Sims (1980). Sims obhajoval použití VAR modelů místo strukturálních modelů simultánních rovnic, protože rozlišení mezi endogenními a exogenními proměnnými nemusí být provedeno apriori a nejsou vyžadovány restriktce k zajištění identifikovanosti. Ve VAR modelu je každá proměnná lineárně závislá na svých vlastních zpožděních i na zpožděních ostatních proměnných (např. Verbeek (2004)).

V rámci VAR modelů se často používají tyto dvě metody analýzy – analýza impulzních odezev a dekompozice rozptylu (varianční dekompozice), které umožňují získat lepší představu o dynamických vztazích mezi proměnnými v rámci zkoumaného modelu. Podstatou analýzy impulzních odezev je zachytit, jaká bude reakce proměnných na šok v chybovém členu určité proměnné. Často se také zjišťuje, zda je mezi proměnnými nejenom nějaká závislost, ale také kauzální vztah. Pro toto testování se používá koncept Grangerovy kauzality.⁴ Pro podrobnější popis viz např. [Kirchgässner, Wolters \(2007\)](#).

Mezi výhody VAR modelů patří ([Brooks, 2008](#)): není potřeba specifikovat, které proměnné jsou endogenní a které exogenní (všechny jsou endogenní); oproti AR modelům mají bohatší strukturu a jsou schopny zachytit více vztahů ve zkoumaném systému a jejich vlastností; predikce VAR modelů jsou zpravidla přesnější než predikce „tradičních“ strukturálních modelů.

Mezi problémy VAR modelů patří ([Brooks, 2008](#); [Gujarati, 2003](#)): jsou „ateoretické“ (využívají málo teoretických informací o vztahu mezi proměnnými pro specifikaci modelu); v některých případech může být nejasná interpretace odhadnutých koeficientů (proto se často počítají funkce impulzních odezev zmíněné výše, které jsou zpravidla mnohem lépe interpretovatelné); může nastat problém s determinací vhodného řádu zpoždění; velký počet parametrů k odhadu (při m proměnných, resp. rovnicích a zpoždění p je celkový počet parametrů k odhadu $m(1 + pm)$).

[Ni a Sun \(2005\)](#) a [\(2004\)](#) uvádějí i další problémy spojené s „klasickým“ přístupem k VAR modelům, jako například to, že pro některá rozdělení dat (například Studentovo t -rozdělení) odhady metodou maximální věrohodnosti nemají analytickou formu nebo vůbec neexistují.

Zatímco pro popis vzájemných vztahů mezi ekonomickými veličinami ve zkoumaném modelu je obvykle vhodnější menší počet proměnných, pro predikci může (ale samozřejmě i nemusí) být vhodnější model s více proměnnými ([Lütkepohl, Krätzig, 2004](#)). Např. [Giannone, Lenza, Primiceri \(2012\)](#) ve své práci označují jako „malé“ modely s 3 proměnnými, „střední“ modely se 7 proměnnými a „velké“ modely s 22 proměnnými. Co se týče analýzy monetárního transmisního mechanismu, např. [Primiceri \(2005\)](#) používá model pouze s 3 proměnnými s argumentem, že v důsledku nižšího počtu odhadovaných parametrů lze dosáhnout přesnějších výsledků. I při predikci budeme v této diplomové práci v návaznosti na výsledky [Vaňka \(2014\)](#) uvažovat pouze menší modely, které jsou podrobněji popsány v kapitole 2. Jedním ze závěrů jmenované práce je totiž i to, že přidání dodatečných proměnných do podobných modelů zpravidla nevede ke zpřesnění predikce.

Pro podrobný výklad VAR modelů a souvisejících problematik viz např. [Lütkepohl \(2005\)](#) nebo [Enders \(2004\)](#).

Pro zajímavost zde ještě zmiňme problematiku grafických VAR modelů. Myšlenkou je zachytit kauzální strukturu, resp. soustavu Grangerových kauzalit pomocí grafů. Této problematice se věnuje např. [Dahlhaus a Eichner \(2003\)](#), bayesovsky potom [Corander a Villani \(2006\)](#).

⁴Pro původní článek viz [Granger \(1969\)](#).

VAR(p) model o m proměnných a T pozorováních můžeme zapsat takto:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (1.6)$$

kde $\mathbf{y}_t$ pro $t \in \langle 1; T \rangle$ je $m \times 1$ vektor pozorování m proměnných (se zpožděním p) v čase t , $\mathbf{a}$ je $m \times 1$ vektor úrovnových konstant, $\mathbf{A}_i$ je $m \times m$ matice koeficientů a $\boldsymbol{\epsilon}_t$ je $m \times 1$ vektor chybových členů. Předpokládáme, že $\boldsymbol{\epsilon}_t$ je i.i.d. a $\boldsymbol{\epsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ (Koop, Korobilis, 2010).

Pokud zapíšeme $\mathbf{x}_t = (1, \mathbf{y}'_{t-1}, \dots, \mathbf{y}'_{t-p})$ a dále

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_T \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_T \end{pmatrix},$$

rovnici (1.6) můžeme přepsat do následujících dvou tvarů:⁵

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{y} = (I_m \otimes \mathbf{X})\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.8)$$

přičemž $\boldsymbol{\alpha} = \text{vec}(\mathbf{A})$, což je vektor, který sdružuje všechny koeficienty (a úrovnové konstanty) VAR modelu do jednoho vektoru o velikosti $km \times 1$, kde $k = 1 + mp$, a $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes I_T)$ (Koop, Korobilis, 2010; O'Hara, 2012).

Věrohodnostní funkci můžeme odvodit z podmíněné hustoty pravděpodobnosti $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Sigma})$, kterou můžeme chápat jako funkci parametrů a rozdělit ji na dvě části (Koop, Korobilis, 2010):

$$\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y} \sim N(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}), \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|\mathbf{y} \sim W(\mathbf{S}^{-1}, T - k - m - 1), \quad (1.10)$$

kde $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{A}})$, přičemž $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, což je odhad $\mathbf{A}$ metodou nejmenších čtverců, a $\mathbf{S} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}})$.

Věrohodnostní funkce je tedy proporcionální součinu podmíněného normálního rozdělení (pro $\boldsymbol{\alpha}$) a podmíněného inverzního Wishartova rozdělení⁶ (pro $\boldsymbol{\Sigma}$) a můžeme ji zapsat následovně (Canova, 2007; Lütkepohl, 2005):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\Sigma}) &\propto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{Tm}{2}} |\boldsymbol{\Sigma} \otimes I_T|^{-\frac{1}{2}} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y} - (I_m \otimes \mathbf{X})\boldsymbol{\alpha}]' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes I_T) [\mathbf{y} - (I_m \otimes \mathbf{X})\boldsymbol{\alpha}] \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Jak bylo uvedeno výše, VAR modely mohou nabývat desítek nebo i stovek parametrů, s čímž jsou spojeny nepříjemnosti s přesností odhadovaných parametrů, predikcí

⁵Symbol $\otimes$ označuje Kroneckerův součin.

⁶Pro podrobnější informace nejenom k normálnímu a Wishartovu rozdělení (které budou v této práci využívány nejvíce) viz např. Timm (2002) nebo Forbes, Evans, Hastings, Peacock (2011).

nebo například funkcí odezev (vzhledem k malému počtu stupňů volnosti vykazují velké standardní chyby). Jedním z řešení tohoto přeparametrizování může být redukce parametrů,⁷ což umožňuje implementace různých apriorních hustot v rámci Bayesiánského přístupu, které se liší právě způsobem dosahování této redukce parametrů. Apriorní hustoty se liší také tím, zda vedou k analytickému řešení posteriorní hustoty, nebo je třeba použít Markov Chain Monte Carlo metody (často například Gibbsův vzorkovač) (Koop, Korobilis, 2010).

1.3 Apriorní hustoty

Tato kapitola se bude věnovat některým apriorním hustotám, které se ve spojitosti s BVAR modely využívají. Nejprve bude představena neinformativní, resp. difúzní apriorní hustota (kapitola 1.3.1), kterou můžeme chápat jako předěl mezi „klasickým“ a bayesiánským přístupem. Dále bude popsána Littermanova apriorní hustota (v anglicky psané literatuře často uváděná jako Minnesota prior) (kapitola 1.3.2). Poté bude pozornost věnována přirozeně konjugované apriorní hustotě (kapitola 1.3.3), nezávislé normální-Wishartově apriorní hustotě (1.3.4) a na závěr technice zvané Stochastic Search Variable Selection (1.3.5).

1.3.1 Neinformativní apriorní hustota

Běžně používanou neinformativní apriorní hustotou je Jeffreysova apriorní hustota,⁸ která je proporcionální odmocnině determinantu Fisherovy informační matice. Ta je však vhodnější spíše pro řešení jednoparametrických problémů. Mezi nejpopulárnější neinformativní apriorní hustoty v souvislosti s BVAR modely patří tzv. difúzní apriorní hustota, což je konstantní apriorní hustota pro α a Jeffreysova apriorní hustota pro Σ . Někteří autoři dělají mezi pojmy „neinformativní apriorní hustota“ a „difúzní apriorní hustota“ malý rozdíl, jejich obsahová náplň se ale z velké části kryje. Někteří autoři je proto používají jako synonyma (Ni, Sun, 2004; Hamada, Wilson, Reese, Martz, 2008). Vzhledem k tomu, že neinformativní apriorní hustota se dá nadefinovat i jiným způsobem, např. neinformativní verzí přirozeně konjugované apriorní hustoty nebo nezávislé normální-Wishartovy apriorní hustoty, jsou zde tato dvě označení takto oddělena. Difúzní apriorní hustota vypadá následovně (Koop, Korobilis, 2009):⁹

$$p(\alpha, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-(m+1)/2} . \quad (1.12)$$

Pro posteriorní hustoty poté platí:

$$\alpha | \Sigma, \mathbf{y} \sim N(\hat{\alpha}, \Sigma \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) , \quad (1.13)$$

⁷V anglickém jazyce se tato redukce označuje *shrinkage*.

⁸Pro původní práci viz Jeffreys (1961). Vzhledem k významu a vlivu Jeffreysovy práce na vývoj bayesiánské statistiky, resp. ekonometrie, je nutno zároveň zmínit první vydání jeho díla *Theory of Probability* z roku 1939 – viz Jeffreys (1939). V tomto kontextu zde ještě uvedme (již zmíněnou) významnou knihu A. Zellnera *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics* z roku 1971 v původním vydání.

⁹Pro rozšíření viz např. Sevinç, Ergün (2009) nebo Ni, Sun (2004).

$$\Sigma|\mathbf{y} \sim IW(\mathbf{S}, T - k) . \quad (1.14)$$

1.3.2 Littermanova apriorní hustota (Minnesota prior)

Littermanovu apriorní hustotu poprvé použili v polovině 80. let výzkumníci z University of Minnesota a Federal Reserve Bank of Minneapolis, konkrétně Doan, Litterman a Sims.¹⁰ Tato apriorní hustota je založena na nahrazení kovarianční matice Σ jejím odhadem $\hat{\Sigma}$. Dále se předpokládá (v původní verzi), že Σ je diagonální matice. V tomto případě je každá rovnice VAR modelu odhadnuta samostatně a můžeme nastavit $\sigma_{ii}^2 = s_i^2$, přičemž s_i^2 je odhad chybového rozptylu v i -té rovnici metodou nejmenších čtverců a σ_{ii}^2 je ii -tý prvek $\hat{\Sigma}$. Pokud není zaveden předpoklad, že Σ je diagonální, může se použít odhad $\hat{\Sigma} = \frac{\mathbf{S}}{T}$.

Nevýhodou tohoto přístupu je to, že nahrazujeme neznámou matici parametrů odhadem, místo jejího odvození Bayesiánským způsobem. Na druhou stranu tato technika zjednoduší výpočet tak, že bude k dispozici analytické řešení posteriorní nebo prediktivní hustoty. Navíc zajišťuje vysokou flexibilitu při volbě apriorní hustoty (Koop, Korobilis, 2010; Lütkepohl, 2005).

Pokud je tedy kovarianční matice Σ nahrazena jejím odhadem, můžeme se zaměřit na nastavení apriorní hustoty pro parametry α , přičemž Littermanova apriorní hustota předpokládá, že

$$\alpha \sim N(\underline{\alpha}, \underline{\mathbf{V}}) . \quad (1.15)$$

Pro apriorní střední hodnotu $\underline{\alpha}$ se nastavuje většina jejích prvků (nebo i všechny) rovny nule, což zajistí redukci koeficientů VAR modelu a sníží tak riziko přefitování. Pokud pracujeme se stacionárními časovými řadami (zpravidla růstové veličiny, např. růst HDP), je vhodné nastavit $\underline{\alpha} = \mathbf{0}_{km}$. Pokud pracujeme s nestacionárními časovými řadami (zpravidla úrovněvé veličiny, např. HDP), Littermanova apriorní hustota používá takovou apriorní střední hodnotu, podle které se jednotlivé proměnné chovají jako procesy náhodné procházky. Proto se apriorní střední hodnota nastavuje podobně jako v předchozím případě, kromě prvků, které odpovídají prvnímu zpoždění závislé proměnné v každé rovnici – ty jsou nastaveny na hodnotu jedna (Koop, Korobilis, 2010). Existují však různé variace – například podle Karlssona (2012) je možné v případě stacionárních časových řad, o kterých se předpokládá, že jsou relativně perzistentní,¹¹ nastavit apriorní střední hodnoty u prvních zpoždění závislé proměnné v každé rovnici na hodnotu o něco nižší než 1 (např. 0,9).

Littermanova apriorní hustota předpokládá, že apriorní kovarianční matice $\underline{\mathbf{V}}$ je diagonální. Pokud $\underline{\mathbf{V}}_i$ značí blok apriorní kovarianční matice $\underline{\mathbf{V}}$, který je spojen s k koeficienty v i -té rovnici, přičemž $\underline{\mathbf{V}}_{i,jj}$ jsou jeho diagonální prvky, implementace vypadá následovně (Koop, Korobilis, 2010):

$$\underline{\mathbf{V}}_{i,jj} = \begin{cases} \frac{a_1}{r^2} & \text{pro koeficienty zpoždění } r \text{ proměnné } j = i \text{ pro } r \in \langle 1; p \rangle, \\ \frac{a_2 \sigma_{ii}^2}{r^2 \sigma_{jj}^2} & \text{pro koeficienty zpoždění } r \text{ proměnné } j \neq i \text{ pro } r \in \langle 1; p \rangle, \\ a_3 \sigma_{ii}^2 & \text{pro koeficienty exogenních proměnných.} \end{cases} \quad (1.16)$$

¹⁰Pro původní články viz Doan, Litterman, Sims (1984) a Litterman (1986).

¹¹Perzistentní časová řada je taková časová řada, kdy realizace proměnné v současnosti dlouhodobě ovlivňuje hodnoty této proměnné v budoucnosti.

Littermanova apriorní hustota zjednodušuje nastavení všech prvků apriorní kovarianční matice $\underline{\mathbf{V}}$ na výběr tří skalárů $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ a $\underline{a}_3$. Tento způsob zajišťuje to, že čím větší je zpoždění, tím více jsou příslušné koeficienty redukovány k nule, a také to, že nastavením $\underline{a}_1 > \underline{a}_2$ se zvyšuje váha zpoždění příslušné proměnné oproti zpoždění jiných proměnných. Zpravidla se nastavuje $\sigma_{ii}^2 = s_i^2$.

Canova (2007) představuje o něco obecnější verzi předchozího nastavení, která má tuto podobu:

$$\underline{V}_{i,jj} = \begin{cases} \frac{\underline{a}_1}{d(r)} & \text{pro koeficienty zpoždění } r \text{ proměnné } j = i \text{ pro } r \in \langle 1; p \rangle, \\ \frac{\underline{a}_1 \underline{a}_2 \sigma_{jj}^2}{d(r) \sigma_{ii}^2} & \text{pro koeficienty zpoždění } r \text{ proměnné } j \neq i \text{ pro } r \in \langle 1; p \rangle, \\ \underline{a}_1 \underline{a}_3 & \text{pro koeficienty exogenních proměnných.} \end{cases} \quad (1.17)$$

V tomto případě je $d(r)$ tzv. funkce rozkladu (*decay function*). V předchozím případě tedy platilo $d(r) = r^2$. Nastavit lze například (Canova, 2007; O'Hara, 2012):

$$d(r) = \begin{cases} r^{\underline{a}_4} & (\text{přičemž } \underline{a}_4 > 0) \text{ pro harmonickou funkci rozkladu,} \\ \underline{a}_4^{-r+1} & (\text{přičemž } \underline{a}_4 > 0) \text{ pro geometrickou funkci rozkladu,} \\ r & (\text{tzn. } \underline{a}_4 = 0) \text{ pro lineární funkci rozkladu.} \end{cases}$$

Velkou výhodou Littermanovy apriorní hustoty je, že výpočet posteriorní hustoty zahrnuje pouze normální rozdělení. Platí tedy:

$$\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{y} \sim N(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{V}}), \quad (1.18)$$

přičemž $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ a $\bar{\mathbf{V}}$ mají následující podobu:

$$\bar{\mathbf{V}} = \left[\underline{\mathbf{V}}^{-1} + \left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X}) \right) \right]^{-1}, \quad (1.19)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\mathbf{V}} \left[\underline{\mathbf{V}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\alpha}} + \left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{X} \right)' \mathbf{y} \right]. \quad (1.20)$$

Littermanova apriorní hustota může být specifikována i s pomocí umělých (dummy) pozorování.¹² Mezi tato tzv. umělá pozorování můžeme zařadit např. skutečná pozorování z jiných států nebo pozorování vygenerovaná simulací odpovídajícího makroekonomického modelu. Dále se jim ovšem v této práci věnovat nebudeme (Koop, Korobilis, 2010; Del Negro, Schorfheide, 2011). Modifikaci Littermanovy apriorní hustoty použili Banbura, Giannone, Reichlin (2010) i při práci s „velkými“ VAR modely, které obsahovaly přes 100 závislých proměnných, přičemž dosáhli ještě lepší predikční schopnosti než faktorové modely.

Pro rozšíření Littermanovy apriorní hustoty na vektorové modely korekce chyb viz např. práce LeSageho (1990) a (1999) nebo Shoesmitha (1995a) a (1995b).

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme krátké srovnání s „klasickým“ přístupem. Při „klasickém“ přístupu jsou nevýznamná zpoždění z modelu odstraněna zpravidla pomocí t -testů nebo podobných technik, čímž se implementuje silná apriorní

¹²Přidání umělých pozorování lze interpretovat jako použití konjugované apriorní hustoty, protože má stejnou formu jako věrohodnostní funkce dodatečných umělých pozorování (viz např. Sims (2005)).

restrikce ve smyslu, které proměnné a která zpoždění v modelu mají být či nikoliv. Naproti tomu Littermanova apriorní hustota implementuje restrikce flexibilnějším způsobem – přiřazuje koeficientům VAR modelu pravděpodobnostní rozdělení a zároveň poskytuje výzkumníkovi bližší náhled na neurčitost, se kterou se při řešení daného problému setkává (Canova, 2007).

1.3.3 Přirozeně konjugovaná apriorní hustota

Přirozeně konjugovaná apriorní hustota má dvě žádoucí vlastnosti – lze snadno interpretovat a zjednodušuje výpočet. Konjugované apriorní rozdělení po kombinaci s věrohodnostní funkcí vede k posteriorní hustotě, která náleží do stejné třídy rozdělení. Přirozeně konjugované apriorní rozdělení má navíc vlastnost, že má stejnou funkční formu jako věrohodnostní funkce. Přirozeně konjugovanou apriorní hustotu lze tedy interpretovat tak, že pochází z fiktivního datového souboru, generovaného stejným procesem jako reálná data (Koop, 2003; Koop, Poirier, Tobias, 2007).

Na základě rovnic (1.9) a (1.10) lze pro VAR modely zapsat přirozeně konjugovanou apriorní hustotu v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\Sigma} \sim N(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \underline{\mathbf{V}}) , \quad (1.21)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim W(\underline{\mathbf{S}}^{-1}, \underline{\nu}) , \quad (1.22)$$

kde $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$, $\underline{\mathbf{V}}$, $\underline{\nu}$ a $\underline{\mathbf{S}}$ jsou tzv. apriorní hyperparametry. Posteriorní hustota poté vypadá následovně:

$$\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y} \sim N(\overline{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \overline{\mathbf{V}}) , \quad (1.23)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|\mathbf{y} \sim W(\overline{\mathbf{S}}^{-1}, \overline{\nu}) , \quad (1.24)$$

kde

$$\overline{\mathbf{V}} = (\underline{\mathbf{V}}^{-1} + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} ,$$

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \text{vec}(\overline{\mathbf{A}}) ,$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \underline{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{A}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{A}}'(\underline{\mathbf{V}}^{-1} + \mathbf{X}'\mathbf{X})\overline{\mathbf{A}} ,$$

$$\overline{\nu} = T + \underline{\nu} .$$

Matice $\underline{\mathbf{A}}$ o velikosti $k \times m$ se získá zpětně z $km \times 1$ vektoru $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$. Pro výpočet posteriorních hustot koeficientů VAR modelu se využije vlastnosti, že marginální posteriorní hustota (po vyintegrování $\boldsymbol{\Sigma}$) pro $\boldsymbol{\alpha}$ má vícerozměrné t -rozdělení se střední hodnotou $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$, počtem stupňů volnosti $\overline{\nu}$ a kovarianční maticí

$$\text{var}(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{y}) = \frac{1}{\overline{\nu} - m - 1} \overline{\mathbf{S}} \otimes \overline{\mathbf{V}} .$$

Neinformativní verzi přirozeně konjugované apriorní hustoty lze získat nastavením, kde $\underline{\nu} = 0$ a $\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{V}}^{-1} = cI$, přičemž c je kladná konstanta blízká se k 0. Výsledky při tomto nastavení budou založeny na výsledcích získaných metodou nejmenších čtverců. Nevýhodou neinformativní verze této apriorní hustoty je však to, že neza-
jišťuje redukci parametrů, o které bylo napsáno výše.

Co se týče predikce, predikční rozdělení y_{T+1} je vícerozměrné t -rozdělení s $\bar{\nu}$ stupni volnosti, predikční střední hodnotou $(\mathbf{x}_{T+1}\bar{\mathbf{A}})'$ a kovarianční maticí $\frac{1}{\bar{\nu}-2}(1 + \mathbf{x}_{T+1}\bar{\mathbf{V}}\mathbf{x}_{T+1}')\bar{\mathbf{S}}$. Pokud se však provádí predikce více než jedno období dopředu, analytické řešení neexistuje – v tomto případě je nutno použít buď metodu přímé predikce (přičemž můžeme psát $\mathbf{y}_{t+h} = \mathbf{a} + \mathbf{y}_t\mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{y}_{t-p+1}\mathbf{A}_p + \boldsymbol{\epsilon}_{t+h}$) nebo simulaci.

Z výše uvedeného plyne, že za použití přirozeně konjugované apriorní hustoty existuje pro posteriorní hustotu analytické řešení. Například Monte Carlo integraci je však nutné použít v případě výpočtu impulzních odezev – výběry $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ lze získat z (1.24) a podmíněně na nich výběry $\boldsymbol{\alpha}$ ze (1.23). Výběry impulzních odezev lze pak spočítat s využitím hodnot těchto výběrů.

Přirozeně konjugovaná apriorní hustota však může mít za určitých okolností i některé nežádoucí vlastnosti. Zaprvé – podle formy vysvětlujících proměnných v rovnici (1.8), tzn. $(I_m \otimes \mathbf{X})$, má každá rovnice stejnou sadu vysvětlujících proměnných. Pro neomezený model to problém není, avšak pro model s nějakými restrikcemi ano. Z druhé – vzhledem k tomu, že apriorní kovarianční matice má tvar $\boldsymbol{\Sigma} \otimes \underline{\mathbf{V}}$ (přičemž prvek $\boldsymbol{\Sigma}$ označíme σ_{ij}), apriorní kovariance koeficientů v i -té rovnici jsou rovny $\sigma_{ii}\underline{\mathbf{V}}$. Z toho plyne, že apriorní kovariance koeficientů v nějakých dvou rovnicích musí být vzájemně proporcionální, což může být v určitých případech nežádoucí. Při srovnání kovarianční matice u přirozeně konjugované apriorní hustoty a Littermanovy apriorní hustoty lze říci, že „bloková“ struktura kovarianční matice Littermanovy apriorní hustoty (viz (1.16)) je v tomto ohledu flexibilnější – její bloky se mohou napříč rovnicemi lišit, což u kovarianční matice přirozeně konjugované apriorní hustoty není možné (Koop, Korobilis, 2010).

Pro překonání výše zmíněných dvou problémů zobecnili Kadiyala a Karlsson tuto apriorní hustotu na tzv. rozšířenou přirozeně konjugovanou apriorní hustotu – pro podrobnosti viz Kadiyala, Karlsson (1997).

1.3.4 Nezávislá normální-Wishartova apriorní hustota

Přestože přirozeně konjugovaná apriorní hustota měla tu výhodu, že existovalo analytické řešení pro posteriorní a predikční hustotu, byly s ní spojeny i některé nevýhody, o kterých bylo zmíněno výše. Navíc platilo, že $\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\Sigma} \sim N$ a $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim W$ (viz rovnice (1.23) a (1.24)). To znamená, že $\boldsymbol{\alpha}$ závisí na $\boldsymbol{\Sigma}$, tudíž $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ nejsou vzájemně nezávislé. Obecnější apriorní hustotou, u které $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ nezávislé jsou, a se kterou nejsou spojeny nežádoucí vlastnosti jako v předchozím případě, je nezávislá normální-Wishartova apriorní hustota.

Pro popis nezávislé normální-Wishartovy apriorní hustoty zavedeme značení, při kterém je každá rovnice VAR modelu zapsána takto:

$$y_{nt} = \mathbf{z}_{nt}'\boldsymbol{\beta}_n + \varepsilon_{nt}, \quad (1.25)$$

kde $t = 1, \dots, T$ pozorování pro $n = 1, \dots, m$ proměnných, y_{nt} je t -té pozorování n -té proměnné, $\mathbf{z}_{nt}$ je vektor zahrnující t -té pozorování vektoru vysvětlujících proměnných příslušných n -té proměnné a $\boldsymbol{\beta}_n$ je vektor regresních koeficientů.¹³ Pokud zapíšeme všechny rovnice ve vektorech, resp. maticích, následovně

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{mt} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{mt} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{z}'_{1t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{z}'_{2t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{z}'_{mt} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{\beta}$ je $k \times 1$ vektor, $\mathbf{Z}_t$ je $m \times k$ matice, přičemž $k = \sum_{j=1}^m k_j$, a $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, VAR model můžeme zapsat

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (1.26)$$

Dále pokud zapíšeme

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_T \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_T \end{pmatrix},$$

tak (potenciálně) omezený VAR model lze zapsat jako normální lineární regresní model

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.27)$$

přičemž $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, I \otimes \boldsymbol{\Sigma})$.

Nezávislá normální-Wishartova apriorní hustota má pak tvar

$$p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) = p(\boldsymbol{\beta})p(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}),$$

kde

$$\boldsymbol{\beta} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}), \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim W(\mathbf{S}^{-1}, \underline{\nu}). \quad (1.29)$$

Oproti přirozeně konjugované apriorní hustotě tedy může být v tomto případě kovarianční matice $\mathbf{V}$ nastavena mnohem flexibilněji. Neinformativní verzi nezávislé normální-Wishartovy apriorní hustoty lze získat nastavením $\underline{\nu} = 0$ a $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1} = cI$, přičemž c je kladná konstanta blízká se k 0.

Podmíněné posteriorní rozdělení $p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1})$ pak má následující tvar:

¹³Pokud by platilo, že $\mathbf{z}_{nt} = (\mathbf{1}, \mathbf{y}'_{t-1}, \dots, \mathbf{y}'_{t-p})'$ pro $n = 1, \dots, m$, výsledkem by byl neomezený VAR model, jak byl používán v předchozích kapitolách. V této kapitole však chceme umožnit vektoru $\mathbf{z}_{nt}$ lišit se napříč rovnicemi, tzn., že výsledkem může být omezený VAR model.

$$\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim N(\bar{\boldsymbol{\beta}}, \bar{\mathbf{V}}) , \quad (1.30)$$

kde

$$\bar{\mathbf{V}} = (\mathbf{V}^{-1} + \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}_t)^{-1} , \quad (1.31)$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{V}^{-1} \underline{\boldsymbol{\beta}} + \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}_t) . \quad (1.32)$$

Podmíněné posteriorní rozdělení $p(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta})$ má poté tvar

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta} \sim W(\bar{\mathbf{S}}^{-1}, \bar{\nu}) , \quad (1.33)$$

přičemž

$$\bar{\nu} = T + \underline{\nu} ,$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\beta})(\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\beta})' .$$

V souvislosti s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou je však oproti předchozím případům zapotřebí posteriorní simulace, jako je Gibbsův vzorkovač.

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{Z}_\tau$ obsahuje zpožděné proměnné, obsahuje informaci v čase $\tau - 1$ nebo dřívejší. Podmíněná predikční hustota o jedno období dopředu (tzn. pro predikci v čase τ), má následující podobu

$$y_\tau|\mathbf{Z}_\tau, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma} \sim N(\mathbf{Z}_\tau \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) .$$

Při použití Gibbsova vzorkovače a výběrů $\boldsymbol{\beta}^{(s)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(s)}$, kde $s = 1, \dots, S$, můžeme predikční střední hodnotu (tzn. bodovou predikci) získat jako¹⁴

$$E(y_\tau|\mathbf{Z}_\tau) = \frac{\sum_{s=1}^S \mathbf{Z}_\tau \boldsymbol{\beta}^{(s)}}{S} .$$

Pro predikci více období dopředu lze použít i metodu přímé predikce jako v případě předchozí apriorní hustoty (Koop, Korobilis, 2010).

Nezávislá normální-Wishartova apriorní hustota může být použita například i pro detekci počtu strukturálních zlomů ve VAR modelu. Touto problematikou se zabývá např. Sugita (2008).

¹⁴Podrobněji je Gibbsův vzorkovač popsán v kapitole 1.4.2.

1.3.5 Stochastic Search Variable Selection

Stochastic Search Variable Selection (SSVS)¹⁵ je technika, při které apriorní hustota v určitém smyslu také zajišťuje redukci parametrů, přičemž je implementována automaticky a vyžaduje minimální intervenci výzkumníka. Základní myšlenka je ta, že místo běžného přiřazení apriorní hustoty koeficientům VAR modelu α_j , SSVS specifikuje hierarchickou apriorní hustotu, což je apriorní hustota vyjádřená pomocí parametrů, které mají svoji vlastní apriorní hustotu. Jedná se tedy o kombinaci dvou normálních rozdělání:

$$\alpha_j | \gamma_j \sim (1 - \gamma_j) N(0, \kappa_{0j}^2) + \gamma_j N(0, \kappa_{1j}^2) , \quad (1.34)$$

kde γ_j je umělá proměnná. Pokud tedy $\gamma_j = 1$, α_j je brána z druhého normálního rozdělání a pokud $\gamma_j = 0$, α_j je brána z prvního normálního rozdělání. Apriorní hustota je hierarchická, protože γ_j je chápána jako neznámý parametr a je odhadována na základě dat. První apriorní rozptyl se volí $\kappa_{0j}^2 \rightarrow 0$ (omezení příslušného koeficientu α_j prakticky na nulu) a druhý $\kappa_{1j}^2 \rightarrow \infty$ (zavedení relativně neinformativní apriorní hustoty pro příslušný koeficient α_j).

Apriorní hustotu zapsanou vztahem (1.34) můžeme zapsat i následovně:

$$\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\gamma} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{D}\mathbf{D}) , \quad (1.35)$$

kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice, jejíž jj -té prvky jsou dány D_{jj} , přičemž $D_{jj} = \kappa_{0j}$ pokud $\gamma_j = 0$ a $D_{jj} = \kappa_{1j}$ pokud $\gamma_j = 1$. Opět se tedy jedná o kombinaci dvou normálních rozdělání a tento zápis je ekvivalentní zápisu (1.34).

George, Sun a Ni (2008) použili pro nastavování κ_{0j} a κ_{1j} tzv. defaultní poloautomatický přístup,¹⁶ přičemž $\kappa_{0j} = c_0 \sqrt{\widehat{\text{var}}(\alpha_j)}$ a $\kappa_{1j} = c_1 \sqrt{\widehat{\text{var}}(\alpha_j)}$, kde $\widehat{\text{var}}(\alpha_j)$ je odhad rozptylu koeficientu v neomezeném VAR modelu (např. metodou nejmenších čtverců). U konstant c_0 a c_1 musí platit $c_0 \ll c_1$ (např. 0,1 a 10). SSVS předpokládá, že každý prvek γ_j ($j = 1, \dots, km$) má Bernoulliho rozdělání: $P(\gamma_j = 1) = \underline{q}_j$ a $P(\gamma_j = 0) = 1 - \underline{q}_j$, přičemž $\underline{q}_j$ se zpravidla nastavuje neinformativně na hodnotu 0,5.

Co se týče kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$, přestože v původní práci používají George, Sun a Ni (2008) SSVS i v rámci $\boldsymbol{\Sigma}$, v této práci použijeme Wishartovu apriorní hustotu pro $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ podle Koopa a Korobilise (2010):

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim W(\underline{\mathbf{S}}^{-1}, \underline{\nu}) , \quad (1.36)$$

kde $\underline{\nu} = m + 1$ a $\underline{\mathbf{S}}^{-1} = \mathbf{I}_m$. Pro výpočet posteriorních středních hodnot můžeme v souvislosti s SSVS použít Gibbsův vzorkovač. Pro koeficienty VAR modelu poté platí:

$$\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\Sigma} \sim N(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{V}}) , \quad (1.37)$$

¹⁵V tomto textu je popsána podstata verze SSVS podle George, Sun, Ni (2008). Existují však i její modifikace (např. Korobilis (2013)).

¹⁶V anglickém jazyce označován jako *default semi-automatic approach*.

kde

$$\bar{\mathbf{V}} = [\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X}) + (\mathbf{D}\mathbf{D})^{-1}]^{-1}, \quad (1.38)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\mathbf{V}}[(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}') \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\alpha}}], \quad (1.39)$$

přičemž $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ a $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{A}})$ – tzn., že $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ je OLS odhad $\boldsymbol{\alpha}$. Dále platí, že $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\Psi}'^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-1}$. Pokud je $\boldsymbol{\Psi}$ horní trojúhelníková matice („upper-triangular“), jedná se tedy o Choleskyho dekompozici kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$.

Co se týče posteriorní hustoty pro γ_j , γ_j má Bernoulliho rozdělení: $P[\gamma_j = 1|\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}] = \bar{q}_j$, $P[\gamma_j = 0|\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}] = 1 - \bar{q}_j$, kde

$$\bar{q}_j = \frac{\frac{1}{\kappa_{1j}} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\kappa_{1j}^2}\right) q_j}{\frac{1}{\kappa_{1j}} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\kappa_{1j}^2}\right) q_j + \frac{1}{\kappa_{0j}} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\kappa_{0j}^2}\right) (1 - q_j)}.$$

Pro kovarianční matici $\mathbf{\Sigma}$ bude tedy platit

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} \sim W(\bar{\mathbf{S}}^{-1}, \bar{\nu}), \quad (1.40)$$

kde $\bar{\nu} = T + \underline{\nu}$ a $\bar{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}^{-1} + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}})$. Jak bylo uvedeno výše, s využitím těchto vztahů lze pro výpočet posteriorních středních hodnot použít Gibbsův vzorkovač (Koop a Korobilis, 2010; George, Sun, Ni, 2008). Pro podrobné informace o SSVS viz původní článek George, Sun, Ni (2008). Pro rozšíření SSVS na VEC modely viz Jochmann, Koop, León-Gonzales, Strachan (2013).

Na závěr kapitoly o apriorních hustotách se pro zajímavost a rozšíření krátce zmiňme o problematice *steady-state* apriorních hustot pro VAR modely, které se věnuje Villani (2009). Jak bylo napsáno v úvodu této práce, apriorní informace je využitelná v rámci redukce parametrů v přeparametrizovaném VAR modelu. Apriorní informace v předchozím textu se týkala zpravidla koeficientů VAR modelu. V některých případech může mít výzkumník silné apriorní informace o nepodmíněné střední hodnotě (*steady-state*) proměnných zahrnutých v modelu. Myšlenka je pak taková, že tyto apriorní informace se mohou využít jako dodatečný zdroj redukce. Pro původní článek viz Villani (2009), kde zároveň ilustruje využitelnost tohoto typu apriorní hustoty při zpřesnění predikce.

1.4 Odhadové techniky

V této podkapitole budou popsány odhadové techniky využívané v této diplomové práci. Začneme nejjednodušší metodou – Monte Carlo simulací a postupně se přes Gibbsův vzorkovač dostaneme k Metropolis-Hastings algoritmu.

1.4.1 Monte Carlo simulace

Jak bylo uvedeno v kapitole 1.1 – vztah 1.5 pro posteriorní výpočty lze vyhodnotit analyticky pouze vyjíměčně. Ve většině případů je zapotřebí použití nějaké simulace. Nejjednodušším simulačním algoritmem je Monte Carlo simulace. Její myšlenka je následující. Pokud $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$ pro $s = 1, \dots, S$ je náhodný výběr z $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ a $g(\cdot)$ je funkce, která nás zajímá, přičemž

$$\hat{g}_S = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S g(\boldsymbol{\theta}^{(s)}) , \quad (1.41)$$

potom bude $\hat{g}_S$ konvergovat k $E[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{y}]$ pro $S \rightarrow \infty$. Jinak řečeno, pokud jsme schopni generovat náhodné výběry z posteriorní hustoty, lze $E[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{y}]$ aproximovat prostým průměrováním funkce, která nás zajímá. V mnoha případech však posteriorní hustoty nenabývají známých forem, proto je nutné použít techniky o něco náročnější. Pokud jsme schopni generovat náhodné výběry z podmíněné posteriorní hustoty, můžeme použít Gibbsův vzorkovač. Pokud nejsme schopni ani to, je nutno využít algoritmus obecnější, v našem případě Metropolis-Hastings algoritmus. Jmenované techniky jsou předmětem následujících podkapitol (Koop, 2003).

1.4.2 Gibbsův vzorkovač

Gibbsův vzorkovač je Markov Chain Monte Carlo metoda, která se v souvislosti s BVAR modely používá asi nejčastěji.¹⁷ Je založen na sekvenčních výběrech z podmíněné posteriorní hustoty. Máme dán vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ – v našem případě tedy $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Sigma})'$. Pro BVAR modely neprovádíme výběry přímo ze sdružené posteriorní hustoty vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$, ale parametry rozdělujeme do B bloků, tzn. $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_{(1)}, \boldsymbol{\theta}'_{(2)}, \dots, \boldsymbol{\theta}'_{(B)})$. Důvodem k použití této techniky je obecně řečeno to, že podmíněná posteriorní hustota každého bloku parametrů náleží do známého parametrického rozdělení.

Dá se tedy napsat, že Gibbsův vzorkovač tvoří Markovský řetězec (O'Hara, 2012):

$$\{\boldsymbol{\theta}^{(s)}\}_{s=1}^S \sim \left\{ \left\{ p\left(\boldsymbol{\theta}_{(b)} \mid \{\boldsymbol{\theta}_{(i)}^{(s)}\}_{i < b}^{b-1}, \{\boldsymbol{\theta}_{(i)}^{(s)}\}_{i=b+1}^B, \mathbf{y}\right) \right\}_{b=1}^B \right\}_{s=1}^S , \quad (1.42)$$

kde dolní index označuje blok ($b = 1, \dots, B$) a horní index číslo vzorku ($s = 1, \dots, S$). Jeho realizace je ekvivalentem výběru z $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Pro BVAR modely je ve většině případů vhodné provádět výběry nejprve $\boldsymbol{\alpha}$ a poté $\boldsymbol{\Sigma}$. Problém se získáním počátečního výběru se řeší zpravidla tak, že se hodnota počátečního výběru zvolí a po proběhnutí S replikací Gibbsova vzorkovače se prvních S_0 vzorků odstraní.¹⁸ Gibbsův vzorkovač bude totiž konvergovat k sekvenci výběrů z $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Zbývajících S_1 vzorků ($S = S_0 + S_1$) se použije k odhadu střední hodnoty funkce parametrů, která nás zajímá.

Algoritmus Gibbsova vzorkovače se dá tedy zapsat do následujících kroků:

¹⁷Podle některých autorů je Gibbsův vzorkovač pravděpodobně nejpoblárnější MCMC metoda vůbec (např. Tsay (2005)).

¹⁸V anglickém jazyce se tyto odstraněné vzorky označují *burn-in replications*.

- *Krok 0:* Volba počáteční hodnoty $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$. Pro $s = 1, \dots, S$:
- *Krok 1:* Provedení náhodného výběru $\boldsymbol{\theta}_{(1)}^{(s)}$ z podmíněné posteriorní hustoty pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{\theta}_{(1)}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{(2)}^{(s-1)}, \boldsymbol{\theta}_{(3)}^{(s-1)}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{(B)}^{(s-1)})$.
- *Krok 2:* Provedení náhodného výběru $\boldsymbol{\theta}_{(2)}^{(s)}$ z podmíněné posteriorní hustoty pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{\theta}_{(2)}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{(1)}^{(s)}, \boldsymbol{\theta}_{(3)}^{(s-1)}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{(B)}^{(s-1)})$.
- ⋮
- *Krok B:* Provedení náhodného výběru $\boldsymbol{\theta}_{(B)}^{(s)}$ z podmíněné posteriorní hustoty pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{\theta}_{(B)}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{(1)}^{(s)}, \boldsymbol{\theta}_{(2)}^{(s)}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{(B-1)}^{(s)})$.

Pokud nás tedy zajímá funkce parametrů $g(\cdot)$, přičemž

$$\hat{g}_{S_1} = \frac{1}{S_1} \sum_{s=S_0+1}^S g(\boldsymbol{\theta}^{(s)}), \quad (1.43)$$

$\hat{g}_{S_1}$ bude konvergovat ke střední hodnotě $E[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{y}]$ pro $S_1 \rightarrow \infty$. K ověření spolehlivosti získaných výsledků se často využívají některé konvergenční diagnostiky¹⁹ (Koop, 2003; O'Hara, 2012).

1.4.3 Metropolis-Hastings algoritmus

V rámci Metropolis-Hastings algoritmu generujeme náhodné výběry z tzv. kandidátské hustoty. Nechť $\boldsymbol{\theta}^*$ označuje výběr z této hustoty pravděpodobnosti, který označíme $q(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta})$. Lze tedy říci, že kandidátský výběr $\boldsymbol{\theta}^*$ je realizací náhodné veličiny $\boldsymbol{\theta}$, jejíž hustota závisí na $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$. Vzhledem k tomu, že současný výběr závisí na předchozím výběru, patří Metropolis-Hastings (stejně jako Gibbsův vzorkovač) do třídy Markov Chain Monte Carlo technik.

Kandidátská hustota je pouze aproximací posteriorní hustoty, proto je nutné brát jejich rozdílnost v potaz. Metropolis-Hastings algoritmus to řeší tím, že neakceptuje každý kandidátský výběr. Je proto odvozena akceptační pravděpodobnost, která je nejvyšší v oblastech, kde je i posteriorní hustota vysoká, a nejnižší v oblastech, kde je posteriorní hustota nízká. Pokud je tedy $g(\cdot)$ funkce, která nás zajímá, je možné získat odhad $E[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{y}]$ jednoduchým průměrem provedených výběrů:

$$\hat{g}_S = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S g(\boldsymbol{\theta}^{(s)}). \quad (1.44)$$

Metropolis-Hastings algoritmus tak můžeme shrnout do následujících kroků:

- *Krok 0:* Volba počáteční hodnoty $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$.
- *Krok 1:* Vygenerování kandidátského $\boldsymbol{\theta}^*$ ze stanovené kandidátské hustoty $q(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta})$.

¹⁹Přehled konvergenčních diagnostik poskytují např. Cowless a Carlin (1996) nebo Burke (2011).

- *Krok 2:* Výpočet akceptační pravděpodobnosti $\alpha(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta})$.
- *Krok 3:* Přiřazení $\boldsymbol{\theta}^{(s)} = \boldsymbol{\theta}^*$ s pravděpodobností $\alpha(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}^*)$ a $\boldsymbol{\theta}^{(s)} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$ s pravděpodobností $1 - \alpha(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}^*)$.
- *Krok 4:* Opakování kroku 1, 2 a 3 celkem S -krát.
- *Krok 5:* Výpočet průměru S výběrů $g(\boldsymbol{\theta}^{(1)}), \dots, g(\boldsymbol{\theta}^{(S)})$.

Vzhledem k tomu, že (stejně jako v případě Gibbsova vzorkovače) je potřeba zvolit počáteční hodnotu $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, je pro omezení jejího vlivu žádoucí odstranit prvních S_0 výběrů. Pro ověření konvergence je i v tomto případě vhodné využít některé konvergenční diagnostiky.

Co se týče akceptační pravděpodobnosti, její podoba vypadá následovně:²⁰

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}^*) = \min \left[\frac{p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^* | \mathbf{y}) q(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)})}{p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)} | \mathbf{y}) q(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*)}, 1 \right], \quad (1.45)$$

přičemž $p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^* | \mathbf{y})$ je posteriorní hustota vyhodnocená v bodě $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$, $q(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{\theta})$ je hustota pro náhodnou veličinu $\boldsymbol{\theta}$, a $q(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)})$ je tato hustota vyhodnocená v bodě $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$. Vztah pro výpočet akceptační pravděpodobnosti je upraven tak, aby její hodnota nepřesáhla hodnotu 1.

Nyní se dostáváme k otázce výběru kandidátské hustoty. Metropolis-Hastings algoritmus je vlastně celá třída algoritmů, které se liší právě výběrem kandidátské hustoty. Mezi hojně používaný patří Independence Metropolis-Hastings algoritmus a Random Walk Metropolis-Hastings algoritmus.

V rámci **Independence Metropolis-Hastings algoritmu** se vybírá kandidátská hustota, která je nezávislá na výběrech. Tato verze M-H algoritmu je vhodná v případě, kdy existuje vhodná aproximace posteriorní hustoty, která se využije jako kandidátská hustota. V případě Independence M-H algoritmu platí, že funkce $q(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}) = q^*(\boldsymbol{\theta})$ a kandidátská hustota není závislá na $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$. Akceptační pravděpodobnost má pak tvar:

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}^*) = \min \left[\frac{p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^* | \mathbf{y}) q^*(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(s-1)})}{p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)} | \mathbf{y}) q^*(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*)}, 1 \right]. \quad (1.46)$$

Pro nalezení kandidátské hustoty $q^*(\boldsymbol{\theta})$ lze využít jako jednu z možností výsledky klasické metody maximální věrohodnosti. Pokud označíme estimátor metody maximální věrohodnosti jako $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$, můžeme jako relativně obvyklou aproximaci kandidátské hustoty zapsat následovně: $f_t(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}, \text{vâr}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}), \nu)$. Jedná se tedy o t -rozdělení, a to z toho důvodu, že má tlustší konce než normální rozdělení, což je při aproximaci kandidátské hustoty žádoucí.

Random Walk Metropolis-Hastings algoritmus je univerzálnější a je ho proto vhodné použít v případě, kdy je posteriorní hustotu obtížné aproximovat. V rámci této verze M-H algoritmu se posteriorní hustota neaproximuje. Namísto

²⁰Pro její odvození viz např. Chib, Greenberg (1995).

toho se volí kandidátská hustota s širokým rozsahem, přičemž jsou vybírány náhodné vzorky v různých oblastech posteriorní hustoty. Jak již název této verze M-H algoritmu napovídá, kandidátské výběry jsou generovány jako náhodná procházka:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)} + z, \quad (1.47)$$

kde z je tzv. přírůstková náhodná veličina. Kandidátské vzorky jsou tedy vybírány v náhodném směru ze současného bodu a akceptační pravděpodobnost by měla zajistit, aby se řetězec posunul žádoucím směrem. Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{\theta}^*$ a $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$ vstupují do vztahu 1.46 symetricky, a platí $q(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}) = q(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*)$, akceptační pravděpodobnost lze zapsat následovně:

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}^*) = \min \left[\frac{p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^* | \mathbf{y})}{p(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(s-1)} | \mathbf{y})}, 1 \right]. \quad (1.48)$$

Je zde tedy tendence se posouvat do oblasti vyšší posteriorní hustoty. Kandidátská hustota je definována výběrem hustoty pro z , přičemž se obvykle volí vícerozměrné normální rozdělení. Střední hodnota tohoto normálního rozdělení je podle vztahu 1.46 rovna $\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}$. Je však třeba zvolit kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma}$, přičemž můžeme psát

$$q(\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}; \boldsymbol{\theta}) = f_N(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (1.49)$$

Volba kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ by měla být taková, abychom dosáhli akceptačního poměru (tzn. podílu počtu akceptovaných výběrů ze všech výběrů) mezi 0,2 a 0,5 (což je obecně přijímané pravidlo). Je vhodné nastavit $\boldsymbol{\Sigma} = c\boldsymbol{\Omega}$, kde c je skalár a $\boldsymbol{\Omega}$ je kovarianční matice $\boldsymbol{\theta}$, přičemž se dají zkoušet nastavovat různé hodnoty c pro dosažení rozumného akceptačního poměru. Měla by se také ověřit konvergence algoritmu (Koop, 2003).

V souvislosti s BVAR modely s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou bude využit i Kalmanův filtr.²¹ Vzhledem k tomu, že se tato práce zaměřuje na bayesiánské techniky, nebudeme ho tu podrobněji popisovat. Pro podrobnější informace viz např. Hamilton (1994), případně Pasricha (2006) pro ukázkou jeho využití v ekonometrických modelech.

1.5 BVAR model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou

VAR modely jsou vhodnými a často používanými nástroji pro modelování vzájemných vztahů mezi ekonomickými veličinami. Nicméně „základní“ VAR modely předpokládají, že se parametry v čase nemění, což může být v určitých případech příliš restriktivní a nežádoucí. Mezi tyto případy může patřit i modelování monetárního transmisního mechanismu, kterému se tato práce věnuje. Zpravidla je proto vhodné využít VAR model s časově proměnnými parametry. Je ovšem žádoucí brát v potaz ještě jednu věc. Historicky bylo několika studiemi dokázáno, že rozptyl exogenních

²¹Pro původní článek viz Kalman (1960).

šoků se v čase mění také – viz např. [Primiceri \(2005\)](#) pro případ USA, [Nakajima \(2011\)](#) pro případ Japonska, [Mwabutwa, Bittencourt a Viegi \(2013\)](#) pro případ Malawi nebo [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#) pro případ České republiky. A právě proto by měl v uvažovaném modelu být přítomen mechanismus stochastické volatility, jehož důležitost zdůrazňuje většina citovaných autorů v této podkapitole.

V této podkapitole tedy bude představen bayesiánský vektorový autoregresní model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou. VAR model s časově proměnnými parametry (označovaný často jako TVP-VAR z anglického *time-varying parameters*) je speciálním případem normálního lineárního stavového modelu. Pro snadnější porozumění proto bude nyní následovat velmi stručná podkapitola právě o normálním lineárním stavovém modelu. Celá podkapitola 1.5 bude pro lepší srozumitelnost a snadnější čtení prezentována bez přílišných technických detailů (s výjimkou části o samotném odhadu modelu). Ty lze v případě zájmu nalézt v citované literatuře.

1.5.1 Normální lineární stavový model

Normální lineární stavový model lze v obecném tvaru zapsat následujícími dvěma rovnicemi:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_t \boldsymbol{\phi} + \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (1.50)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1} = \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{u}_t, \quad (1.51)$$

kde $\mathbf{y}_t$ je $M \times 1$ vektor pozorování, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ je $M \times 1$ vektor chybových členů, $\mathbf{\Gamma}_t$ je $M \times r$ matice (která může obsahovat zpožděné hodnoty závisle proměnných nebo jiné vysvětlující proměnné s konstantními parametry), $\boldsymbol{\phi}$ je $r \times 1$ vektor parametrů, $\mathbf{Z}_t$ je $M \times k$ matice (která může obsahovat zpožděné hodnoty závisle proměnných nebo jiné vysvětlující proměnné s časově proměnnými parametry) a $\boldsymbol{\beta}_t$ je $k \times 1$ vektor parametrů (stavů), které se v čase mění. Předpokládá se rovněž, že $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_t)$ a $\mathbf{u}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_t)$, a že $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ a $\mathbf{u}_s$ jsou vzájemně nezávislé pro všechna t a s .

Rovnice 1.50 se nazývá rovnice pozorování a rovnice 1.51 se nazývá stavová rovnice. Společně tedy definují stavový model. Pro podrobnější informace o stavových modelech viz [Durbin a Koopman \(2012\)](#), z bayesovského pohledu potom viz např. [Kim a Nelson \(1999\)](#). Uveďme ještě, že pro posteriorní simulaci $\boldsymbol{\beta}_t$ byly vyvinuty různé algoritmy, z nichž mezi nejvýznamnější patří algoritmus [Cartera a Kohna \(1994\)](#) nebo [Fruhwirth-Schnatterové \(1994\)](#). Právě algoritmus [Cartera a Kohna \(1994\)](#) bude v rámci praktické části využit i v této práci.

Normální lineární stavový model se využívá v moderní makroekonomii i v rámci DSGE modelů, když se provádí jejich linearizace aproximací prvního řádu. V některých případech se provádí aproximace druhého řádu, následkem čehož se rovnice pozorování stává nelineární ([Koop a Korobilis, 2010](#)).

1.5.2 Stochastická volatilita

Jak bylo uvedeno v úvodu podkapitoly 1.5, rozptyl exogenních šoků se v čase může měnit, proto by měl ekonomický model zahrnovat mechanismus stochastické volatility. [Primiceri \(2005\)](#) v návaznosti na výčet studií věnujících se změnám v monetární

politice (v USA) dokonce uvádí, že každý relevantní pokus modelovat změny v (monetární) politice a jejich strukturu a vzájemné vztahy by měl zahrnovat v čase proměnnou kovarianční matici šoků (inovací). Zdůrazňuje také, že modelování časově proměnných parametrů a stochastické volatility je důležité pro rozlišení změn ve velikosti exogenních šoků a změn v samotném transmisním mechanismu. A například Nakajima (2011) upozorňuje, že pokud bychom neoprávněně ignorovali změny ve volatilitě šoků a odhadli pouze TVP-BVAR model, pravděpodobně bychom získali vychýlené odhady časově proměnných parametrů.

Vraťme se na tomto místě k modelu popsanému rovnicemi 1.50 a 1.51. Jak bylo vysvětleno výše, je důležité uvažovat kovarianční matici Σ_t měnící se v čase. Kovarianční matice Σ_t je však pozitivně definitní matice o rozměru $M \times M$ s $M \times (M+1)/2$. A pro $t = 1, \dots, T$ máme co dočinění s $T \times (M \times (M+1)/2)$ neznámými parametry, což je zpravidla velmi velké číslo. Tento problém je tedy nutné řešit buď nějakými restrikcemi, nebo vhodným nastavením apriorních hustot. Mezi průkopnické a nejvíce citované články v této oblasti patří Primiceri (2005) a Cogley a Sargent (2005). Posledně jmenovaní definují Σ_t jako

$$\Sigma_t = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{B}^{-1'} , \quad (1.52)$$

kde $\mathbf{H}_t$ je diagonální matice s chybovými členy na diagonále a $\mathbf{B}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále. Je nutno dodat, že ačkoliv už ε_{it} a ε_{jt} nejsou nezávislé, přístup Cogleyho a Sargenta (2005) umožňuje změnu kovariance mezi chybovými členy relativně restriktivním způsobem.

Primiceri (2005) definuje Σ_t následovně:

$$\Sigma_t = \mathbf{B}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{B}_t^{-1'} , \quad (1.53)$$

přičemž matice $\mathbf{B}_t$ je definována také jako dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, nyní je však v čase proměnná. Tento přístup je tedy mnohem flexibilnější než přístup předchozí.²²

1.5.3 TVP-BVAR-SV model a jeho odhad

V této diplomové práci budeme postupovat podle Blakea a Mumtaze (2012) a budeme uvažovat následující TVP-BVAR-SV model:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{a}_t + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_{j,t} \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t , \quad (1.54)$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \{\mathbf{a}_t, \mathbf{A}_{j,t}, \dots, \mathbf{A}_{p,t}\} , \quad (1.55)$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \mathbf{e}_t , \quad (1.56)$$

²²Primiceri (2005) v úvodu svého článku uvádí předchozí studie a restrikce či problémy spojené s přístupem v nich použitých.

přičemž kovarianční matici chybového členu $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ označíme jako $\boldsymbol{\Sigma}_t$ (její prvky jsou časově proměnné) a kovarianční matici $\mathbf{e}_t$ označíme jako $\mathbf{Q}$. Strukturu $\boldsymbol{\Sigma}_t$ budeme uvažovat stejně jako Primiceri (2005) (viz vzorec 1.53 výše), tedy

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{B}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{B}_t^{-1'} , \quad (1.57)$$

kde $\mathbf{B}_t$ je dolní trojúhelníková matice s prvky $b_{ij,t}$ a $\mathbf{H}_t$ je diagonální matice s prvky $h_{i,t}$. Pokud tedy máme model o 3 proměnných, matice vypadají následovně:

$$\mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{12,t} & 1 & 0 \\ b_{13,t} & b_{23,t} & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} h_{1,t} & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,t} & 0 \\ 0 & 0 & h_{3,t} \end{pmatrix} , \quad (1.58)$$

kde

$$b_{ij,t} = b_{ij,t-1} + \nu_t , \quad (1.59)$$

$$\ln h_{i,t} = \ln h_{i,t-1} + z_{i,t} , \quad (1.60)$$

přičemž $\text{var}(\nu_t) = D$ a $\text{var}(z_{i,t}) = g_i$ pro $i = 1, 2, 3$. V rámci tohoto modelu tedy máme dvě sady časově proměnných parametrů – $\boldsymbol{\beta}_t$ a $b_{ij,t}$ a mechanismus stochastické volatility pro diagonální prvky $h_{i,t}$. Na tomto místě ještě uvedme následující vztah:

$$\mathbf{B}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\lambda}_t , \quad (1.61)$$

přičemž kovarianční matice $\boldsymbol{\lambda}_t$ je $\mathbf{H}_t$. Pro model o 3 proměnných tedy můžeme psát

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{12,t} & 1 & 0 \\ b_{13,t} & b_{23,t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,t} \\ \lambda_{2,t} \\ \lambda_{3,t} \end{pmatrix} , \quad (1.62)$$

tedy

$$\varepsilon_{1,t} = \lambda_{1,t} ,$$

$$\varepsilon_{2,t} = -b_{12,t} \varepsilon_{1,t} + \lambda_{2,t} , \quad (1.63)$$

$$\varepsilon_{3,t} = -b_{13,t} \varepsilon_{1,t} - b_{23,t} \varepsilon_{2,t} + \lambda_{3,t} ,$$

kde $\text{var}(\varepsilon_{2,t}) = h_{2,t}$ a $\text{var}(\varepsilon_{3,t}) = h_{3,t}$, a

$$b_{12,t} = b_{12,t-1} + \nu_{1t} , \quad (1.64)$$

$$\begin{pmatrix} b_{13,t} \\ b_{23,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{13,t-1} \\ b_{23,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_{2t} \\ \nu_{3t} \end{pmatrix} , \quad (1.65)$$

kde $\text{var}(\nu_{1t}) = d_1$ a $\text{var} \begin{pmatrix} \nu_{2t} \\ \nu_{3t} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_2$. Než si blíže popíšeme postup odhadu našeho modelu, uvedme důvody, proč je u tohoto typu modelů vhodnější použít bayesiánský

přístup. Podle [Primiceriho \(2005\)](#) mezi ně patří zejména to, že při odhadu „klasickou“ metodou maximální věrohodnosti bychom narazili na problém vysoké dimenzionality a nelinearity. U takto složitého modelu bychom se mohli setkat s problémem, že věrohodnost má v parametrickém prostoru více vrcholů, z nichž jsou některé v nežádoucích oblastech. Navíc mohou být tyto vrcholy velmi úzké, s čímž jsou spojeny další problémy a nepřesnosti. Při použití bayesiánského přístupu lze tyto problémy překonat vhodným nastavením (neinformativních) apriorních hustot na žádoucí oblast parametrického prostoru. Další důvod je výpočetní – při „klasickém“ přístupu je obecně velmi složité maximalizovat věrohodnostní funkci u parametrického prostoru s tak vysokou dimenzí. V rámci bayesiánského přístupu se lze k tomuto problému stavět s využitím MCMC metod, které byly popsány výše. Konkrétně [Primiceri \(2005\)](#) využívá Gibbsův vzorkovač, v této práci bude využit Gibbsův vzorkovač v kombinaci s Independence M-H algoritmem, jehož kroky si v souvislosti s TVP-BVAR-SV modelem nyní podle [Blakea a Mumtaze \(2012\)](#) blíže popíšeme:

Krok 1a: Nastavení apriorní hustoty pro $\mathbf{Q}$ a počáteční hodnoty pro Kalmanův filtr. Apriorní hustota pro $\mathbf{Q}$ je inverzní Wishartova, tedy $\mathbf{Q} \sim iW(\mathbf{Q}_0, T_0)$ a její nastavení je velmi důležité v tom smyslu, že silně ovlivňuje intenzitu časové proměnlivosti v rámci modelu. Vyšší hodnoty matice $\mathbf{Q}_0$ implikují výraznější fluktuace v β_t . Tato apriorní hustota se obvykle nastavuje pomocí tzv. trénovacího souboru (*training sample*). Prvních T_0 pozorování je využito k odhadu „standardních“ (fixních) koeficientů modelu pomocí metody nejmenších čtverců, takže platí

$$\beta_0 = (\mathbf{X}'_{0t}\mathbf{X}_{0t})^{-1}(\mathbf{X}'_{0t}\mathbf{y}_{0t})$$

s kovarianční maticí

$$\Sigma_{0|0} = \Sigma_0 \otimes (\mathbf{X}'_{0t}\mathbf{X}_{0t})^{-1} ,$$

kde

$$\mathbf{X}_{0t} = \{\mathbf{y}_{0t-1}, \dots, \mathbf{y}_{0t-p}, 1\} ,$$

$$\Sigma_0 = \frac{(\mathbf{y}_{0t} - \mathbf{X}_{0t}\beta_0)'(\mathbf{y}_{0t} - \mathbf{X}_{0t}\beta_0)}{T_0 - K}$$

a dolní index 0 označuje souvislost s trénovacím vzorkem. Matici $\mathbf{Q}_0$ lze chápat jako škálovací matici, přičemž se nastavuje jako $\mathbf{Q}_0 = \Sigma_{0|0} \times T_0 \times \tau$, kde τ je tzv. škálovací faktor. Uvedme, že trénovací vzorek je obvykle malý a odhad kovarianční matice $\Sigma_{0|0}$ tedy může být nepřesný. Tato skutečnost se zpravidla reflektuje v podobě nastavení škálovacího faktoru jakožto malého čísla (např. $\tau = 3,510^{-4}$). Nastavením škálovacího faktoru se tedy ovlivňuje výše zmíněná intenzita časové proměnlivosti v rámci modelu. V prvním kroku je tedy třeba nastavit počáteční hodnotu $\mathbf{Q}$, přičemž počáteční stav je nastaven jako $\beta_{0|0} = \text{vec}(\beta_0)'$ a počáteční stavová kovarianční matice je stanovena jako $\Sigma_{0|0}$.

Krok 1b: Nastavení apriorní hustoty pro d_1 a $\mathbf{D}_2$. Apriorní hustota pro d_1 je inverzní gama a apriorní hustota pro $\mathbf{D}_2$ je inverzní Wishartova, můžeme tedy psát $d_1 \sim iG(d_{10}, T_0)$ a $\mathbf{D}_2 \sim iW(\mathbf{D}_{20}, T_0)$. Hodnoty d_{10} a $\mathbf{D}_{20}$ budou nastaveny podle

Benatiho a Mumtaze (2007) jako $d_{10} = 0,001$ a $\mathbf{D}_{20} = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{pmatrix}$. Nyní zadefinujeme $\mathbf{C} = \Sigma_0^{0,5}$ a $\mathbf{C}_0$ jako inverzi matice $\mathbf{C}$ s diagonálními prvky normalizovanými na jedničky. Počáteční hodnoty pro $b_{ij,t}$ (tzn. počáteční stav $b_{ij,0|0}$) se nastaví jako nenulové prvky matice $\mathbf{C}_0$ s rozptylem počátečního stavu nastaveným jako $\text{abs}(b_{ij}) \times 10$ (opět podle Benatiho a Mumtaze (2007)). Ve druhém kroku je tedy stanovena počáteční hodnota pro $b_{ij,t}$.

Krok 1c: Nastavení počátečních hodnot pro $h_{i,t}$ jako $h_{i,t} = \hat{\varepsilon}_{it}^2$ pro $t = 1, \dots, T$ a $i = 1, 2, 3$ a nastavení $\underline{\mu}_i$ a $\underline{\sigma}$. $\underline{\mu}_i$ lze nastavit jako logaritmus i -tého diagonálního prvku matice Σ_0 a $\underline{\sigma}$ se zpravidla nastavuje jako relativně velké číslo. Dále se ve třetím kroku nastavuje apriorní hustota a počáteční hodnota pro g_i , přičemž apriorní hustota je inverzní gama, tzn. $g_i \sim iG(g_0, \varepsilon_0)$.

Krok 2: Generování výběrů β_t podmíněně na $\mathbf{B}_t$, $\mathbf{H}_t$ a $\mathbf{Q}$ s využitím modifikace algoritmu Cartera a Kohna (1994).

Krok 3: Využití výběrů z předchozího kroku pro získání reziduí matice přechodu $\beta_t = \beta_{t-1} + \mathbf{e}_t$ a následně $\mathbf{Q}$ z inverzního Wishartova rozdělení s použitím škálovací matice $\mathbf{e}_t' \mathbf{e}_t + \mathbf{Q}_0$ a počtem stupňů volnosti $T + T_0$.

Krok 4: Generování výběrů prvků $b_{ij,t}$ matice $\mathbf{B}_t$ podmíněně na β_t , $\mathbf{H}_t$, d_1 a $\mathbf{D}_2$ s využitím modifikace algoritmu Cartera a Kohna (1994). Stavová formulace pro $b_{12,t}$ je

$$\varepsilon_{2,t} = -b_{12,t}\varepsilon_{1,t} + \lambda_{2,t} ,$$

$$b_{12,t} = b_{12,t-1} + \nu_{1t} ,$$

kde $\text{var}(\lambda_{2,t}) = h_{2,t}$ a $\text{var}(\nu_{1t}) = d_1$, a stavová formulace pro $b_{13,t}$ a $b_{23,t}$ vypadá následovně:

$$\varepsilon_{3,t} = -b_{13,t}\varepsilon_{1,t} - b_{23,t}\varepsilon_{2,t} + \lambda_{3,t} ,$$

$$\begin{pmatrix} b_{13,t} \\ b_{23,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{13,t-1} \\ b_{23,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_{2t} \\ \nu_{3t} \end{pmatrix} ,$$

kde $\text{var}(\lambda_{3,t}) = h_{3,t}$ a $\text{var} \begin{pmatrix} \nu_{2t} \\ \nu_{3t} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_2$. Algoritmus Cartera a Kohna je aplikovaný na každou formulaci samostatně a provádí výběry $b_{12,t}$, $b_{13,t}$ a $b_{23,t}$.

Krok 5: Výpočet reziduí ν_{1t} , ν_{2t} a ν_{3t} podmíněně na výběrech $b_{12,t}$, $b_{13,t}$ a $b_{23,t}$. Generování výběrů d_1 z inv. gama rozdělení se škálovacím parametrem $(\nu_{1t}'\nu_{1t} + d_{1,0})/2$ a počtem stupňů volnosti $(T + T_0)/2$. Generování výběrů $\mathbf{D}_2$ z inverzního Wishartova rozdělení se škálovací maticí $\nu_{2t}'\nu_{2t} + \mathbf{D}_{2,0}$ a počtem stupňů volnosti $T + T_0$.

Krok 6: S využitím výběrů $\mathbf{B}_t$ z kroku 4 výpočet $\lambda_t = \mathbf{B}_t \varepsilon_t$, kde $\lambda_t = (\lambda_{1,t} \ \lambda_{2,t} \ \lambda_{3,t})'$, přičemž λ_t jsou vzájemně nekorelované. Lze tedy generovat výběry $h_{i,t}$ pro $i = 1, 2, 3$ samostatně s využitím Independence M-H algoritmu pro každou λ_t .

Krok 7: Generování výběrů g_i z inverzního gama rozdělení se škálovacím parametrem $[(\ln h_{i,t} - \ln h_{i,t-1})'(\ln h_{i,t} - \ln h_{i,t-1}) + g_0]/2$ a počtem stupňů volnosti $(T + \varepsilon_0)/2$ podmíněně na výběru $h_{i,t}$ pro $i = 1, 2, 3$.

Krok 8: Opakování kroku 2 a 7 S -krát, přičemž posledních S_1 výběrů je využito k aproximaci marginální posteriorní hustoty parametrů našeho modelu.

Kapitola 2

Metodologie, data a modely

2.1 Monetární politika a její transmisní mechanismus

Tato kapitola se bude věnovat monetární politice a jejímu transmisnímu mechanismu, jehož efektivita a proměnlivost v čase bude vyhodnocena pomocí bayesiánských ekonometrických metod v praktické části této diplomové práce. Vzhledem k zaměření diplomové práce není úkolem této kapitoly podat podrobný popis všech aspektů souvisejících s monetární politikou, ale spíše vytvořit základ pro aplikaci BVAR modelů popsaných v teoretické části práce.

2.1.1 Monetární politika a funkce centrální banky

Monetární (měnová) politika je proces, ve kterém centrální banka (obecně řečeno monetární autorita) usiluje o dosažení svých cílů regulací nabídky peněz a úrokové míry. Monetární politika je součástí stabilizační hospodářské politiky a spolu s politikou fiskální představuje nástroje, které jsou využívány (centrální bankou a vládou) k ovlivňování ekonomiky. Mezi základní funkce centrálních bank zpravidla patří (Klíková, Kotlán, 2003; Bénassy-Quéré, Coeuré, Jacquet, Pisany-Ferry, 2010):

- provádění monetární politiky a tím ovlivňování ekonomiky,
- kontrola nabídky peněz,
- devizová činnost,
- regulace a dohled na fungování bankovního systému,
- emitování hotovostních peněz,
- působení jako banka bank a banka státu,
- reprezentace státu v měnové oblasti (Mezinárodní měnový fond, Světová banka).

Dodejme ještě, že pohledy na monetární politiku a její teoretické základy se v průběhu času výrazně měnily a vyvíjely, a ani dnes v tomto směru nepanuje jednoznačná názorová shoda. Stručný přehled teoretických přístupů a jejich časového vývoje poskytuje např. [Dobešová \(2012\)](#).

2.1.2 Cíle a nástroje monetární politiky

Hlavním cílem monetární politiky, potažmo centrální banky, je cenová stabilita, resp. stabilní a nízká míra inflace. Tím dopomáhá k naplňování obecných hospodářsko-politických cílů, jako je stabilní ekonomický růst. Podle vytyčených cílů fungují centrální banky v rámci určitého monetárního režimu. V současnosti se zpravidla jedná o režim cílování inflace, kdy centrální banka nastaví inflační cíl (jako hodnotu, případně interval), kterého má být dosaženo. Např. v ČR je to $2 \pm 1 \%$ a v Evropě je to zpravidla kolem 2–3 %.¹

Centrální banka však cíl nemůže ovlivňovat přímo, ovlivňuje jej tedy zprostředkovaně pomocí transmisního mechanismu s využitím různých nástrojů. Stanovuje tedy zpravidla operační cíl a zprostředkující cíl,² které následně ovlivňují cíl hlavní. Operační cíl reaguje na nástroje centrální banky již v krátkém období a v současnosti jím je zpravidla krátkodobá úroková sazba mezibankovního trhu. Operační cíl následně ovlivňuje zprostředkující cíl (za který bývá někdy považována prognóza inflace), který ovlivňuje cíl hlavní. Mezi opatřeními centrální banky a jejich vlivem na cíl je tedy (střednědobé) časové zpoždění – zpravidla se udává 12–18 měsíců.

Nástroje centrální banky můžeme rozdělit na přímé (působící na určitý subjekt) a nepřímé (působící plošně), přičemž s postupem času se od používání přímých nástrojů upustilo a v současnosti převažují nástroje nepřímé. Mezi přímé nástroje se řadí:

- Pravidla likvidity: závazná struktura bilance obchodních bank.
- Úrokové limity: hranice či intervaly, v rámci kterých se mohou komerční banky při určování úrokových sazeb pohybovat.
- Úvěrové limity: omezení možného objemu poskytnutých úvěrů.
- Povinné vklady: vklady, které musí dotyčná instituce mít na účtu centrální banky.
- Doporučení, výzvy, gentlemen'ské dohody.

Mezi nepřímé nástroje patří:

- Operace na volném trhu: Přímé operace – odkup cenných papírů centrální bankou od obchodních bank → zvýšení peněžní zásoby (analogicky naopak). Repo operace – převod cenných papírů centrální bankou na obchodní banky (snížení peněžní zásoby) se závazkem je po určité době splatit zpět i s úroky (reverzní repo operace), analogicky naopak.

¹Zajímavý souhrn inflačního cíle vybraných států z celého světa poskytuje např. [Hammond \(2012\)](#).

²Někteří autoři používají označení operační a zprostředkující (případně střednědobé) kritérium.

- Diskontní nástroje: Úvěry a jejich úrokové sazby, které poskytuje centrální banka obchodním bankám – diskontní úvěr, reeskontní úvěr, lombardní úvěr, přičemž diskontní sazba je zpravidla nejnižší úrokovou sazbou v ekonomice a lombardní naopak nejvyšší.
- Povinné minimální rezervy: Určují procento z vkladů nebankovních subjektů, které musí být uloženy (zpravidla bezúročně) na účtu centrální banky.
- Kurzové (devizové) intervence: přímé – nákup (prodej) zahraniční (domácí) měny; nepřímé – přes změnu úrokových sazeb.

Nejpoužívanějším a nejefektivnějším nástrojem ve vyspělých ekonomikách jsou v současnosti operace na volném trhu (Kliková, Kotlán, 2003; Picker, 2007).

2.1.3 Monetární transmisní mechanismus

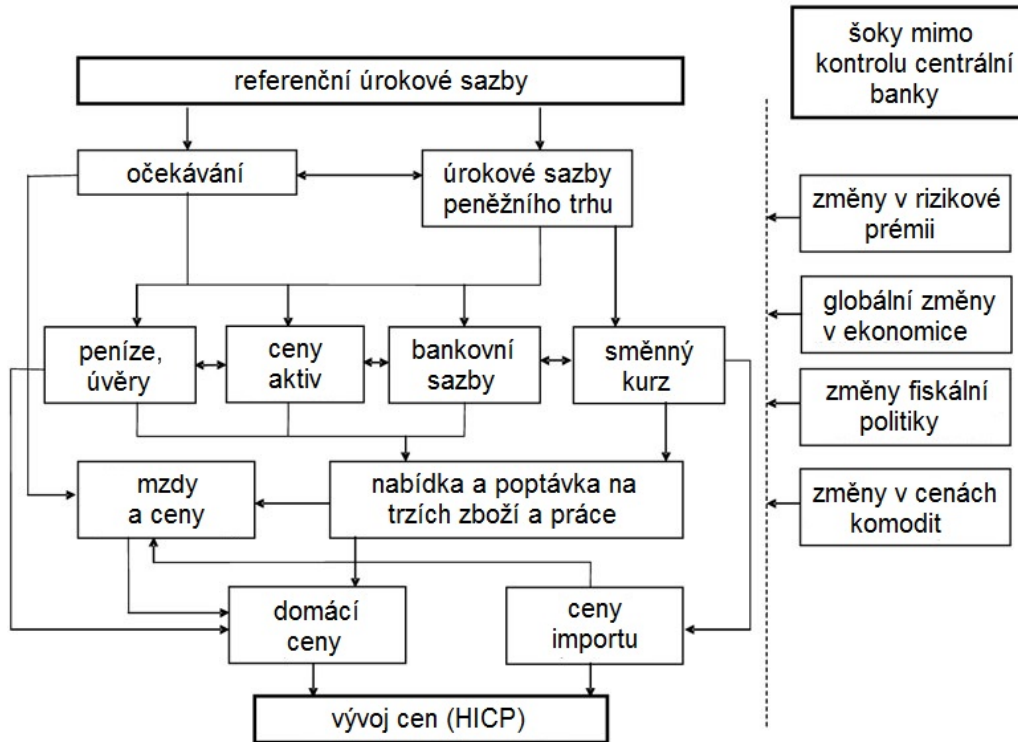
Jak již bylo naznačeno výše, centrální banka ovlivňuje hlavní cíl (tedy míru inflace) zprostředkovaně přes monetární transmisní mechanismus (od nastavení nástrojů, přes ovlivnění operačního a zprostředkujícího cíle, až po ovlivnění míry inflace). Pro správnou a efektivní implementaci monetární politiky je tedy klíčové, aby transmisní mechanismus reálně fungoval, jak se předpokládá.

Monetární transmisní mechanismus obsahuje několik kanálů. Mezi nejčastěji jmenované patří zejména kanál úrokový, úvěrový a kurzový:

- Úrokový kanál: Např. pokud centrální banka (restriktivně) zvýší úrokovou sazbu, měly by se zvýšit i tržní úrokové sazby. Domácnosti pak začnou více spořit a firmy méně investovat, což povede k poklesu agregátní poptávky a snížení míry inflace.
- Úvěrový kanál: Např. pokud centrální banka (restriktivně) zvýší úrokovou sazbu, objem pasiv komerčních bank poklesne a objem poskytnutých úvěrů se sníží. Tato skutečnost povede také ke snížení agregátní poptávky, což má stejný efekt jako v předchozím případě.
- Měnový kanál: Např. pokud centrální banka (restriktivně) zvýší úrokovou sazbu, lze očekávat příliv spekulativního kapitálu do země. Dojde tedy k posílení domácí měny, relativnímu zdražení domácího zboží a snížení exportu a zvýšení importu. Důsledkem je tedy opět pokles agregátní poptávky, potažmo míry inflace.

Kanálů monetárního transmisního mechanismu lze v literatuře nalézt několik – pro doplnění viz např. Mishkin (1996), Cevik, Teksoz (2012), Sgherri (2000) nebo Walsh (2010). Například monetární transmisní mechanismus Evropské centrální banky vypadá následovně (European Central Bank, 2010):

Obrázek 2.1: Monetární transmisní mechanismus ECB



Uvažujeme tedy, že centrální banky ovlivňují míru inflace nepřímo – tedy, že úroková sazba centrální banky ovlivňuje operační cíl – krátkodobou úrokovou sazbu mezibankovního trhu – okamžitě, ale toto opatření se projeví v míře inflace až se střednědobým zpožděním 12–18 měsíců.

2.2 Predikce pomocí bayesovských modelů

V této kapitole bude popsána predikce pomocí uvedených bayesovských modelů, její výhody a naopak problémy s ní spojené.

V této práci bude provedena rekurzivní predikce – s využitím dat v rámci časového horizontu τ , přičemž $\tau = \tau_0, \dots, T - h$, se získá predikční hustota $y_{\tau+h}$. Asi nejčastější statistikou, která se používá pro hodnocení a porovnávání predikcí je Mean square forecast error (MSFE), která je definována následovně:

$$MSFE = \frac{\sum_{\tau=\tau_0}^{T-h} \left[y_{i,\tau+h}^{\text{poz}} - E(y_{i,\tau+h} | \text{data}_{\tau}) \right]^2}{T - h - \tau_0 + 1}, \quad (2.1)$$

kde $y_{i,\tau+h}$ je náhodná veličina, kterou chceme predikovat, $y_{i,\tau+h}^{\text{poz}}$ je její pozorovaná hodnota a $p(y_{i,\tau+h} | \text{data}_{\tau})$ je predikční hustota s využitím informací dostupných v čase τ . Pro jednotlivá pozorování lze zapsat jednoduše

$$MSFE = (y_{i,\tau+h}^{\text{poz}} - y_{i,\tau+h}^{\text{real}})^2, \quad (2.2)$$

kde $y_{i,\tau+h}^{\text{real}}$ je skutečná hodnota a $\tau + h$ je horizont predikce. Pro hodnocení predikce se často používá odmocnina z MSFE, tedy Root mean square forecast error

$$RMSFE = \sqrt{MSFE} . \quad (2.3)$$

(R)MSFE využívá pouze bodové predikce a nebere v potaz zbytek predikčního rozdělení. Preferovanější statistikou v rámci bayesovské predikce je proto někdy predikční věrohodnost (resp. suma jejích logaritmů), což je predikční hustota pro $y_{i,\tau+h}$ vyhodnocena v $y_{i,\tau+h}^{\text{poz}}$. Suma logaritmů predikčních věrohodností (Sum of log predictive likelihoods) se dá tedy vyjádřit jako

$$SLPL = \sum_{\tau=\tau_0}^{T-h} \log \left[p(y_{i,\tau+h} = y_{i,\tau+h}^{\text{poz}} | \text{data}_{\tau}) \right] . \quad (2.4)$$

Uvedme ještě, že se někdy může stát, že MSFE a SLPL vedou k odlišným závěrům (Koop a Korobilis, 2010). To je také jeden z důvodů, proč hlavní metrikou pro vyhodnocení přesnosti predikce bude v této práci RMSFE a SLPL bude zmíněn spíše okrajově.

V některých případech může počet koeficientů převyšovat počet pozorování. I v takovéto situaci lze využít bayesiánský přístup, který kombinuje věrohodnostní funkci a apriorní hustotu. I v případě, kdy některé parametry v rámci věrohodnostní funkce nejsou identifikovány, za platnosti tzv. slabých podmínek povede použití „pravé“ apriorní hustoty k platné posteriorní hustotě.

Problémem při predikci pomocí BVAR modelů a bayesiánských modelů obecně (o kterém se zmiňuje většina autorů z podkapitoly 2.2.1) může být nastavení hyperparametrů v rámci apriorní hustoty. Pochopitelně neexistuje nějaké univerzální nastavení, při kterém je možno dosáhnout největší přesnosti predikcí, proto je vhodné vyzkoušet více verzí. Na to navazuje skutečnost, že „optimální“ specifikace apriorní hustoty pro datový soubor v rámci nějakého časového rozpětí nemusí být „optimální“ v rámci jiného časového rozpětí.

Dále VAR modely obecně – ať už klasické nebo bayesovské – nemusí být vhodné při výskytu nějakých strukturálních změn v ekonomice a v rámci těchto modelů nejsou brány v potaz případně nelinearity v datech. Nejenom pro řešení těchto problémů byly vyvinuty dynamické stochastické modely všeobecné rovnováhy (DSGE modely³).⁴

Podle autorů Carriero, Clark a Marcellino (2011) je také dobré mít na paměti, že redukce parametrů, která je často s bayesiánskými technikami odhadu parametrů spojena, může způsobit vychýlení těchto parametrů, případně predikcí. Nicméně toto vychýlení by obecně nemělo mít zásadní charakter.

³Pro bližší informace viz např. McCandless (2008) nebo Balke, Canova, Milani, Wynne (2012).

⁴Na tomto místě můžeme ještě krátce doplnit kapitolu 1.3 o apriorních hustotách. Existují také přístupy, ve kterých se pro BVAR modely využívají apriorní hustoty odvozené právě z DSGE modelů. Mezi prvními, kdo použili tento přístup, byli DeJong, Ingram a Whiteman (1993) a Ingram a Whiteman (1994). Např. Del Negro a Schorfheide (2004) dosáhli tímto (DSGE-VAR) přístupem srovnatelných – a v některých případech i lepších – predikčních výsledků než BVAR model s Littermanovou apriorní hustotou (přičemž jejich model zahrnoval růst reálného HDP, inflaci a úrokovou míru federálního fondu). Oproti BVAR modelu s Littermanovou apriorní hustotou může také lépe sloužit k analýze hospodářské (zejména monetární) politiky.

Gupta (2006) nabízí zajímavé srovnání s Gupta a Sichei (2006), kde pro některé dílčí výsledky u BVAR modelů dosahují odlišných výsledků, přičemž používají stejné datové soubory (ze stejného zdroje), stejné časové rozpětí, stejný řád zpoždění, stejné apriorní hustoty i stejné metody odhadu. Tento rozdíl připisuje rozdílnosti algoritmů pro výpočet – zatímco u prvně jmenované práce je použit výpočetní systém MATLAB (Ekonometrický toolbox), u druhé je použit software RATS. Přestože takto způsobené rozdíly ve výsledcích nebývají většinou příliš významné, i vzhledem k výše uvedenému srovnání má tato problematika v této kapitole své místo.

2.2.1 Studie zabývající se predikcí pomocí (B)VAR modelů

V této kapitole budou uvedeny výsledky některých studií, které se zabývají predikcí pomocí (B)VAR a pro doplnění také (B)VEC modelů.

Villani (2009) se zabývá predikcí hrubého domácího produktu, inflace a tříměsíční úrokové míry u ekonomiky Švédska. Přestože je tato práce zaměřena primárně na *steady-state* apriorní hustoty pro BVAR modely, v rámci srovnání zde uvádí i výsledky získané pomocí VAR a BVAR modelů, přičemž lepší predikční schopnosti vykazuje v tomto srovnání BVAR model. Na úvod této kapitoly ještě poznamenejme, že pokud nebude uvedeno jinak, autoři používají Littermanovu apriorní hustotu, resp. nějakou její modifikaci (různá definice, různé nastavení – jak bylo popsáno v kapitole 1.3.2).

LeSage (1990) porovnává predikční schopnosti (B)VAR a (B)VEC modelů s využitím měsíčních časových řad zaměstnanosti, nominálních mezd (data 50 firem z Ohia) a indexu spotřebitelských cen. Pokud byly proměnné kointegrovány, výsledky s nejnižší predikční chybou podával VEC model. Pokud proměnné kointegrovány nebyly, pro kratší časový horizont vycházel nejlépe BVAR model, pro delší časový horizont potom BVEC model. V případech, kdy byla kointegrace nejistá (různé výsledky testů), nejlepší předpovědi vykazoval BVAR model.

Z oblasti spíše marketingu můžeme zmínit práci Ramose (2003), který predikuje tržní podíl lídra na trhu automobilů Portugalska. I v tomto případě podával BVAR model přesnější predikce před VAR a ARIMA modely.

Félix a Nunes (2002) a (2003) se zabývají predikcí některých makroekonomických veličin v rámci Eurozóny. Oproti (B)VAR modelům používají i (B)VEC modely. U inflace a nezaměstnanosti podával nejlepší výsledky BVAR model, u hrubého domácího produktu BVEC model (těsně před BVAR modelem). Bayesiánské modely obecně podávaly lepší výsledky než jejich „klasické“ protějšky.

Amisano a Serati (1999) se zaměřují na predikci makroekonomických veličin ekonomiky Itálie, konkrétně hrubého domácího produktu, spotřeby a hrubých investic. Dalo by se říci, že BVAR model je přesnější oproti BVEC modelu s neinformativní apriorní hustotou při predikci kratších časových horizontů, při predikci delšího časového horizontu je přesnější zmíněný BVEC model. Úplně nejlepší výsledky však podává BVEC model s jejich specifikací informativní apriorní hustoty.

Predikcí některých makroekonomických veličin v rámci ekonomiky Jihoafrické republiky (konkrétně spotřeby, inflace, hrubého domácího produktu, investic, 91denní

sazby státních pokladničních poukázek a sazby vládních dluhopisů (se splatností 10 a více let)) se zabývá Gupta (2006). Pro pět z uvedených šesti proměnných získává nejlepší výsledky pomocí BVEC modelu, přičemž používá různá nastavení apriorní hustoty. Dochází ale k relativně neobvyklému výsledku pro BVAR model. Zatímco BVEC model podával lepší výsledky než „klasický“ VEC model, u srovnání BVAR a VAR modelu hovořily získané výsledky těsně ve prospěch VAR modelu (konkrétně u inflace, sazby státních dluhopisů a sazby státních pokladničních poukázek měl lepší výsledky VAR model, u spotřeby byly výsledky srovnatelné a u hrubého domácího produktu a investic vycházel lépe BVAR model). Co se týče nastavení apriorních hustot, dospěl k závěru, že přesnější předpovědi podávaly modely s „přísnější“ nastavenými (*tight*) apriorními hustotami – to je v souladu například s poznatky autorů Ni a Sun (2005), ale v rozporu s poznatky autorů Dua a Ray (1995), kteří získali přesnější predikce s použitím „volnější“ nastavených (*loose*) apriorních hustot.

Zmínit můžeme ještě práci Gupta, Kabundi, Miller a Uwilingiye (2011), kteří se zabývají predikcí zaměstnanosti v několika sektorech ekonomiky USA. Používají k tomu (B)VAR, (B)VEC modely a zejména jejich faktorové modifikace. Pokud srovnáme (B)VAR a (B)VEC modely, lepší výsledky podávaly bayesovské modely, přičemž pro kratší predikční horizont BVAR a pro delší potom BVEC modely.

Zajímavou diskuzi o nastavování apriorních hyperparametrů a parametru zpoždění při využití BVAR modelu s normální-Wishartovou apriorní hustotou a jejich vlivu na přesnost predikce poskytují Carriero, Clark a Marcellino (2011). Uvažují 18 makroekonomických a finančních proměnných pro USA. Za zmínku stojí jejich poznatek, že s rostoucím zpožděním se predikční schopnost „klasického“ VAR modelu zhoršuje, zatímco BVAR model profituje z redukce parametrů a jeho predikční schopnost se spíše zlepšuje.

Doplňme ještě úvahu o problému uvedeném v předchozí kapitole, spojeném s úpravou časových řad. Někteří autoři – např. již zmínění Banbura, Giannone a Reichlin (2010) nebo Giannone, Lenza a Primiceri (2012) – používají modely s proměnnými v úrovnovém tvaru (případně jejich logaritmy); naopak např. Clark a McCracken (2008) nebo Del Negro a Schorfheide (2004) používají diferencované proměnné nebo jejich míry růstu. Carriero, Clark a Marcellino (2011) provedli predikci pomocí modelů s oběma tvary proměnných, přičemž lepší výsledky vykazoval model s proměnnými ve tvaru měr růstu.

2.2.2 Bayesovské průměrování modelů a kombinace predikcí

Techniky bayesovského průměrování modelů lze těžko provádět nebayesiánským způsobem.⁵ Je to proto oblast, ve které je bayesiánská ekonometrie velmi užitečná.

Pokud uvažujeme M modelů, můžeme je označit jako $\mathcal{M}_i$ pro $i = 1, \dots, M$. Pokud je označen vektor nebo matice parametrů i -tého modelu jako θ_i , každý model je spjat s apriorní hustotou $p(\theta_i|\mathcal{M}_i)$, věrohodnostní funkcí $p(\mathbf{y}|\theta_i, \mathcal{M}_i)$ a posteriorní hustotou $p(\theta_i|\mathbf{y}, \mathcal{M}_i)$. Posteriorní pravděpodobnost modelu je pak označena $p(\mathcal{M}_i|\mathbf{y})$ pro $i = 1, \dots, M$. Pokud označíme parametry, které mají stejnou interpre-

⁵Avšak i v „klasické“ ekonometrii existují některé *ad hoc* techniky průměrování modelů – viz např. Sala-i-Martin (1997).

taci ve všech modelech jako Φ , na základě pravidel pravděpodobnosti můžeme pro jejich posteriorní hustotu psát

$$p(\Phi|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^M p(\Phi_i|\mathbf{y}, \mathcal{M}_i) p(\mathcal{M}_i|\mathbf{y}) . \quad (2.5)$$

Obecněji lze tento vztah zapsat následovně:

$$E[g(\Phi)|\mathbf{y}] = \sum_{i=1}^M E[g(\Phi)_i|\mathbf{y}, \mathcal{M}_i] p(\mathcal{M}_i|\mathbf{y}) , \quad (2.6)$$

kde $g(\Phi)$ je funkce parametrů Φ . Jedná se tedy o průměr posteriorních rozdělání každého uvažovaného modelu, přičemž váhy jsou reprezentovány posteriorními pravděpodobnostmi těchto modelů. Posteriorní pravděpodobnost, resp. váha pro model $\mathcal{M}_i$ se tedy vypočítá:

$$p(\mathcal{M}_i|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathcal{M}_i)p(\mathcal{M}_i)}{\sum_{j=1}^M p(\mathbf{y}|\mathcal{M}_j)p(\mathcal{M}_j)} , \quad (2.7)$$

přičemž $p(\mathbf{y}|\mathcal{M}_i)$ je marginální věrohodnost modelu i a platí pro ni

$$p(\mathbf{y}|\mathcal{M}_i) = \int p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_i, \mathcal{M}_i) p(\boldsymbol{\theta}_i|\mathcal{M}_i) d\boldsymbol{\theta}_i . \quad (2.8)$$

Tento vztah však zpravidla nelze vyhodnotit analyticky (Koop, 2003; Hoeting, Madigan, Raftery, Volinsky, 1999). Pro výpočet marginální věrohodnosti se často používá například metoda Gelfanda a Deye (1994) nebo Chibova (1995) metoda.⁶

V kontextu této diplomové práce však bude oproti výše představenému „tradičnímu“ přístupu k bayesovskému průměrování modelů provedena modifikace. Vzhledem k tomu, že se primárně zaměřujeme na predikci a bude nás zajímat, zda určitá kombinace predikcí⁷ povede ke zlepšení výsledků v porovnání s jednotlivými modely, ve vzorci pro výpočet vah (2.7) nahradíme marginální věrohodnost věrohodností predikční, která je těsněji spjata s predikční výkonností modelu. S tímto přístupem při použití jednorovnicových modelů dosahují relativně lepších výsledků Eklund a Karlsson (2005) a na vektorové autoregresní modely jej rozšiřují Andersson a Karlsson (2007). Tito autoři zároveň upozorňují na některé problémy spojené použitím marginální věrohodnosti při kombinaci predikcí. Jedná se zejména o to, že například při přidání dodatečné proměnné do VAR modelu se může změnit marginální věrohodnost, ale predikce může zůstat neovlivněna. I to je jeden z důvodů, proč při výpočtu vah pro kombinaci predikcí používat predikční věrohodnost. Dále uvádějí koncept tzv. marginalizace predikční věrohodnosti. Tuto techniku je vhodné použít v případě, kdy máme například VAR model o více proměnných, ale zajímá nás predikce pouze jedné. Můžeme tak získat metriku, která je vztažena právě k té proměnné, která nás zajímá. Touto problematikou se více zabývají např. Ding a Karlsson

⁶Diskuzi k různým výpočtům marginální věrohodnosti včetně jejich přesnosti poskytuje např. Bos (2002).

⁷S kombinováním predikcí jako takovým už začali Bates a Granger (1969).

(2012) nebo Warne, Coenen, Christoffel (2013), kteří mimo jiné podrobněji popisují vztah mezi marginální a predikční věrohodností.

Pro doplnění ještě dodejme, že pro stanovování vah při kombinaci predikcí existují i „nebayesiánské“ přístupy, založené například na využití různých informačních kritérií – viz např. Kapetanios, Labhard a Price (2008) nebo Clark a McCracken (2010).

Kombinace predikcí uvedeným způsobem bude také porovnána s kombinací dosaženou jednoduchým průměrem predikcí uvažovaných modelů. Pomocí druhé uvedené metody – i přes její jednoduchost – dosahovali relativně velmi dobrých výsledků právě jmenovaní Clark a McCracken (2010).

2.3 Data a modely

Empirická část této diplomové práce je rozdělena na dvě části – první se věnuje analýze monetárního transmisního mechanismu České republiky, Německa a Kypru pomocí bayesiánského vektorového autoregresního modelu s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou a druhá část se věnuje predikci vybraných makroekonomických veličin pomocí bayesiánských vektorových autoregresních modelů s různými apriorními hustotami.

Pro analýzu monetárního transmisního mechanismu budou použity čtvrtletní modely zahrnující tři proměnné – hrubý domácí produkt (HDP), harmonizovaný index spotřebitelských (HICP) cen a úrokovou míru (repo sazbu) centrální banky (CBIR). Zdrojem dat je databáze Eurostatu, databáze Evropské centrální banky a databáze národních centrálních bank České republiky, Německa a Kypru. Časové řady jsou sezónně očištěny a jejich časový rozsah je 1996Q1–2014Q4. Ačkoliv by nestacionarita časových řad neměla být v této aplikaci vážný problém, protože se odhaduje model s časově proměnnými parametry (a to navíc bayesovskými technikami), vstoupí proměnné (v návaznosti např. na Blakea a Mumtaze (2012) či Nakajimu (2012)) do modelu ve tvaru procentních změn (v případě HDP a HICP) či diferencí (v případě CBIR). Uvedme však, že někteří autoři zavádí proměnné do modelu v úroňovém tvaru (např. Franta, Horváth a Rusnák (2014)). Na tomto místě ještě dodejme, že řád zpoždění byl zvolen na základě výsledků informačních kritérií, a to na hodnotu 2. Jak doporučují Ivanov a Kilian (2001), v souvislosti s výpočtem impulzních odezev je nejvhodnější zvolit řád zpoždění podle Hannan-Quinova informačního kritéria zejména pro čtvrtletní data. Pokud máme více než 120 pozorování, doporučují pro výběr řádu zpoždění použít Schwarzovo informační kritérium.

Pouze tři proměnné jsou použity v návaznosti na argumentaci Primiceriho (2005), který používá tento (relativně malý) počet proměnných z důvodu vyhnutí se přeparametrizování modelu a nepřesnostem s ním spojeným. Model obsahuje dva bloky, jeden „nepolitický“ (non-policy block) a jeden „politický“ (policy block). Primiceri (2005) používá pro reprezentaci nepolitického bloku HDP a inflaci a pro reprezentaci politického bloku používá tříměsíční úrokovou míru (pro USA). Tato práce bude však následovat Blakea a Mumtaze (2012) a pro vyjádření nepolitického bloku bude použit HDP a HICP, potažmo inflace, a pro vyjádření politického bloku úroková míra centrální banky (repo sazba). Zkoumat se tedy bude především do-

pad politického šoku (v úrokové míře centrální banky) na „nepolitické“ proměnné, zejména tedy na HICP, potažmo inflaci.

Co se týče některých dalších studií, např. [Mwabutwa, Bittencourt a Viegi \(2013\)](#) a [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#) používají následující modely malé otevřené ekonomiky – HDP, CPI, tříměsíční úrokovou míru a nominální efektivní směnný kurz ([Mwabutwa, Bittencourt a Viegi \(2013\)](#) pro Malawi a [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#) pro Českou republiku). Dále např. [Nakajima \(2012\)](#) používá – podobně jako je použito v této práci – modely o 3 proměnných, a to HDP, CPI a krátkodobou či střednědobou úrokovou míru (pro Japonsko).

Pro predikci budou modely obohaceny o další proměnné, konkrétně o nezaměstnanost a tříměsíční úrokovou míru komerčních bank. Zároveň bude vypuštěna úroková míra centrální banky, a to z důvodu zahrnutí tříměsíční úrokové míry komerčních bank, která se od ní do velké míry odvíjí. Modely tak budou obsahovat 4 proměnné, a to přírůstkovém tvaru (v případě HDP a HICP) či diferencích (v případě UNE, IR). V této části práce se bude pracovat s časovými řadami od roku 2000, a to z důvodu eliminace relativně extrémních hodnot proměnných na konci 90. let, které by ke zpřesnění predikce v blízké budoucnosti jistě nepřispěly.

Dodejme ještě, že všechny výpočty v této diplomové práci jsou provedeny s využitím výpočetního systému MATLAB.

Kapitola 3

Empirická část

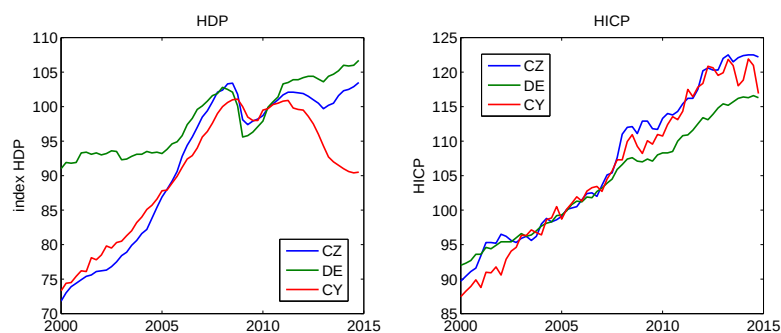
První část empirické části této diplomové práce se zabývá analýzou monetárního transmisního mechanismu v České republice, Německu a Kypru pomocí BVAR modelu s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou; druhá část je poté věnována predikci vybraných makroekonomických veličin pomocí BVAR modelů s různými apriorními hustotami a vyhodnocení jejich predikčních schopností.

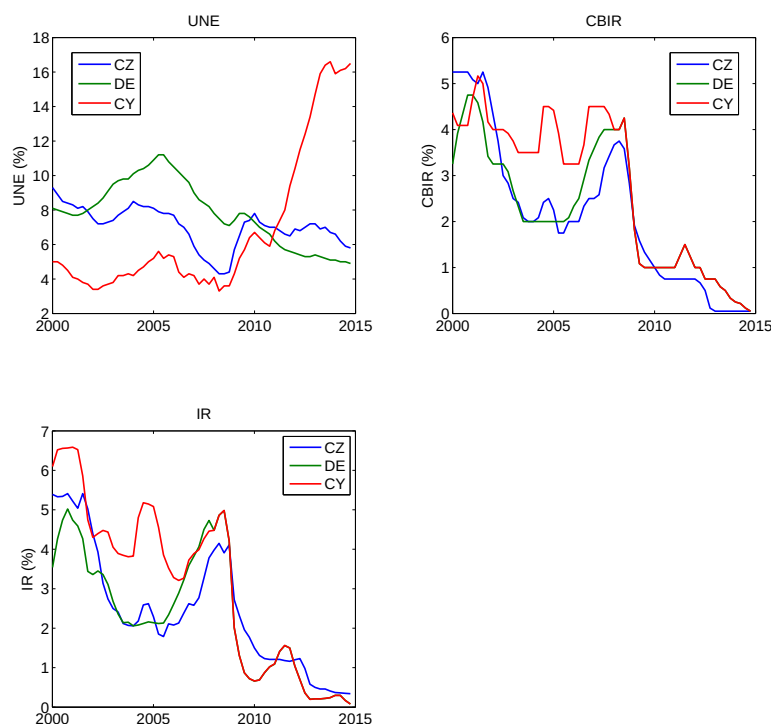
3.1 Analýza monetárního transmisního mechanismu

Analýza monetárního transmisního mechanismu je založena na impulzních odezvách HDP, HICP a CBIR na monetární šok (tzn. šok v CBIR). Ty jsou vypočítány pomocí TVP-BVAR-SV modelu od 2006Q3 do 2014Q4 s využitím techniky znaménkových restrikcí. Prvních 10 let je tedy využito jako předvzorek, či trénovací vzorek (*pre-sample*, resp. *training sample*). Pro doplnění je vždy uveden graf stochastické volatility chybového členu rovnice související s danou proměnnou. Nejprve jsou uvedeny výsledky pro Českou republiku, dále pro Německo a nakonec pro Kypr.

Před uvedením samotných výsledků ještě ilustrujme všechny proměnné, se kterými se v empirické části této diplomové práce pracuje.

Obrázek 3.1: Panel grafů vybraných makroekonomických veličin České republiky, Německa a Kypru



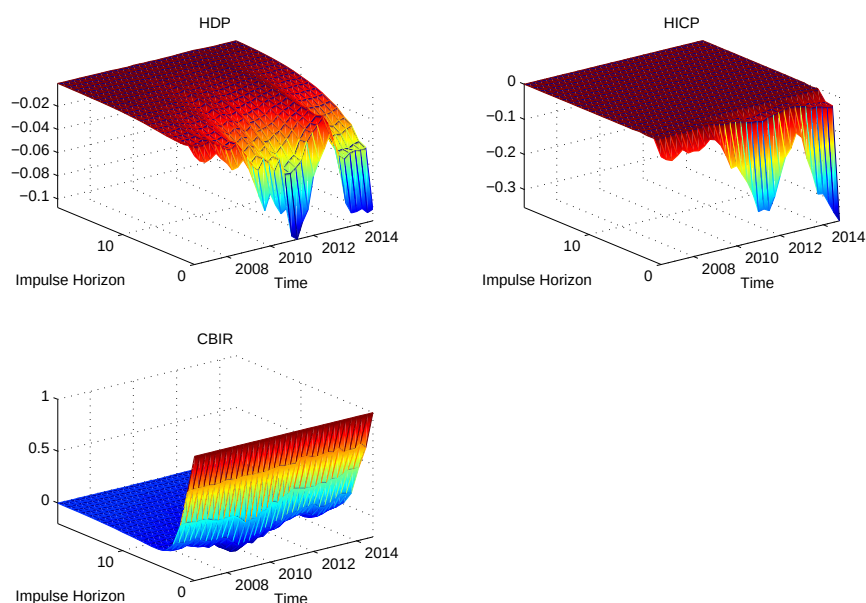


3.1.1 Výsledky pro Českou republiku

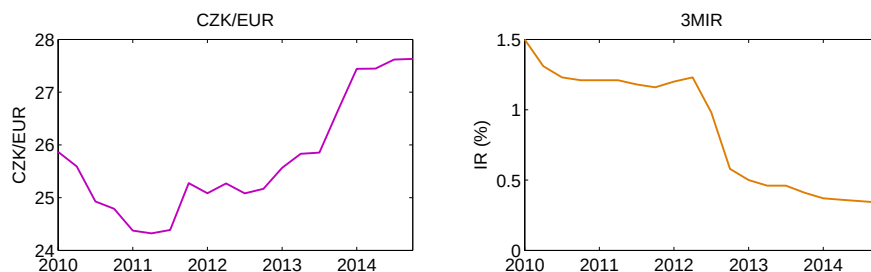
Grafy v panelu 3.2 prezentují impulzní odezvy HDP, HICP a CBIR na monetární šok pro Českou republiku. Na tomto místě ještě zopakujeme, že proměnné vstupují do modelu ve tvaru procentních změn (v případě HDP a HICP), případně diferencí (v případě CBIR).

Z grafu je patrné, že výsledky jsou v souladu s teoretickými předpoklady – tedy, že růst hrubého domácího produktu a cen (resp. inflace) se po monetárním šoku (tedy šokovém zvýšení úrokové míry centrální banky) sníží. Impulzní odezva na šok se však u těchto veličin v čase mění, což můžeme zaznamenat právě v důsledku využití TVP-BVAR-SV modelu. Jak v případě růstu HDP, tak v případě inflace můžeme z grafů pozorovat relativně mírnou odezvu na monetární šok přibližně do konce roku 2008. Od roku 2009, tedy s nástupem ekonomické krize, lze vyčíst postupný nárůst intenzity reakce u obou jmenovaných veličin na monetární šok, a to až do roku 2011–2012, kdy krize eskalovala. Poté lze sledovat postupný útlum intenzity reakce, a to do roku 2013, následovaný opět zintenzivněním impulzní odezvy až do konce sledovaného období, tedy 2014Q4. Toto chování může být z významné části zapříčiněno mimo jiné vývojem mezibankovních úrokových měr, které během roku 2012 postupně výrazně poklesly a zůstávají na relativně velmi nízké úrovni, a také vývojem směnného kurzu CZK/EUR, kdy od listopadu roku 2013 dochází k devizovým intervencím České národní banky. Relevantní období vývoje těchto veličin ilustrují grafy v obrázku 3.3. Transmise monetárního šoku do úrokové míry centrální banky je v čase relativně stabilní. Dodejme ještě, že obnovení rovnováhy HDP a CBIR dle impulzních odezev trvá přibližně 8 čtvrtletí, a v případě inflace jsou to asi 4 čtvrtletí.

Obrázek 3.2: Panel grafů impulzních odezev pro Českou republiku

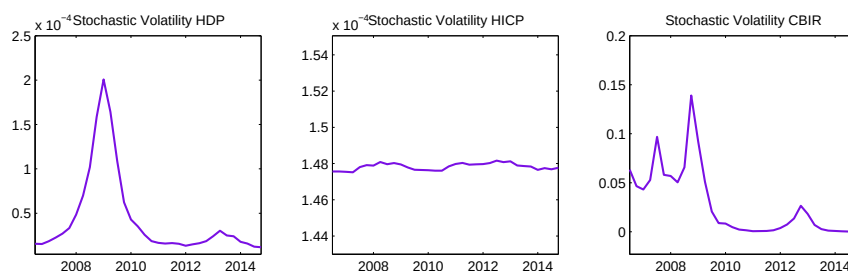


Obrázek 3.3: Grafy vývoje tříměsíční mezibankovní úrokové sazby a směnného kurzu CZK/EUR



Grafy v obrázku 3.4 znázorňují stochastickou volatilitu chybového členu v rovnicích uvažovaných proměnných. Z nich lze pozorovat nárůst volatility po vypuknutí krize a její postupný útlum zejména v případě HDP, což koresponduje s výsledky impulzních odezev z předchozího panelu grafů.

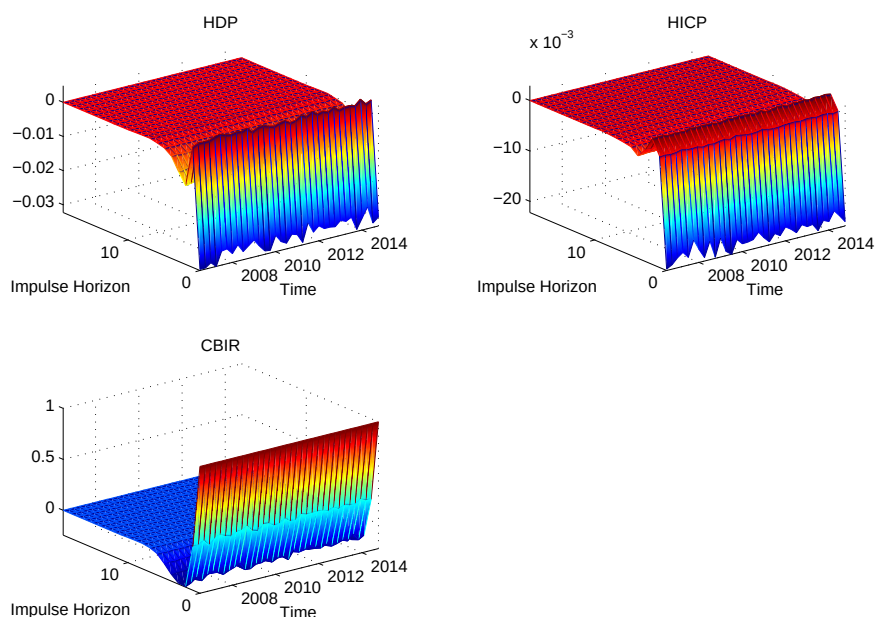
Obrázek 3.4: Stochastická volatilita pro Českou republiku



3.1.2 Výsledky pro Německo

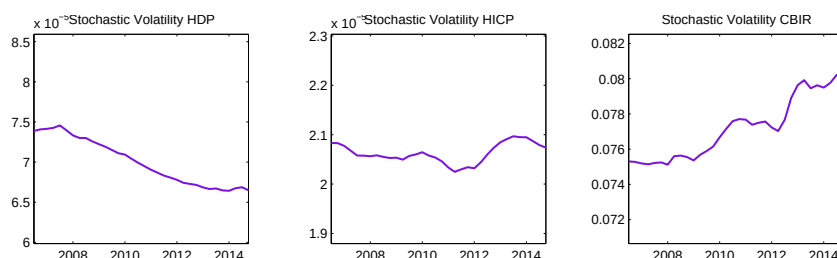
Impulzní odezvy uvažovaných proměnných na monetární šok pro případ Německa jsou uvedeny v panelu grafů 3.5. I zde můžeme vidět, že výsledky jsou v souladu s teoretickými předpoklady – růst hrubého domácího produktu a inflace se po monetárním šoku sníží. Oproti případu České republiky jsou však odezvy všech veličin relativně stabilní v čase, a to i během ekonomické krize. Také jejich intenzita je téměř o jeden řád menší. K obnovení rovnováhy dojde zhruba po 5 čtvrtletích.

Obrázek 3.5: Panel grafů impulzních odezev pro Německo



Jak je patrné z následujícího panelu grafů, stochastická volatilita chybových členů v rovnicích uvažovaných veličin není v případě Německa nijak výrazná (ve srovnání s výsledky pro Českou republiku), což koresponduje s poznatky z předchozího panelu grafů s impulzními odezvami. Na základě popsaných výsledků se tedy zdá, že Německo – jakožto velká otevřená ekonomika s eurem a ECB jako monetární autoritou – je vůči monetárnímu šoku relativně odolnější, a to i ve smyslu jeho stability v čase.

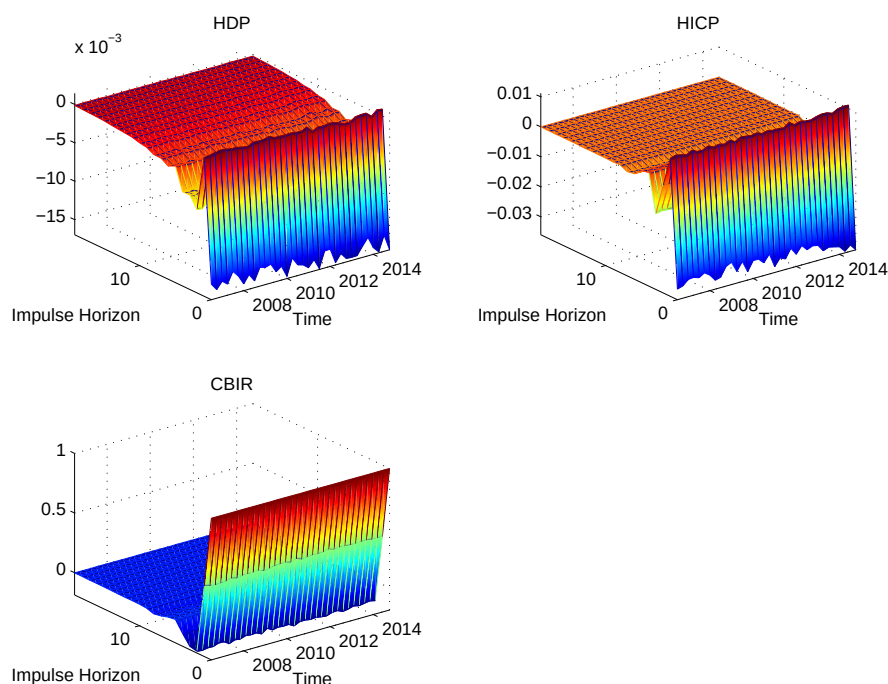
Obrázek 3.6: Stochastická volatilita pro Německo



3.1.3 Výsledky pro Kypr

Grafy v panelu 3.7 ilustrují impulzní odezvy HDP, HICP a CBIR na monetární šok pro Kypr. V tomto případě jsou komentáře obdobné jako v případě Německa. Odezvy uvažovaných veličin korespondují s teoretickými předpoklady a velikostně se podobají těm z předchozí podkapitoly. Jejich časová proměnlivost je také velmi nízká. Je zde však podstatný rozdíl v době obnovy rovnováhy, která je vyšší než v případě Německa – jedná se přibližně o 8 čtvrtletí.

Obrázek 3.7: Panel grafů impulzních odezev pro Kypr

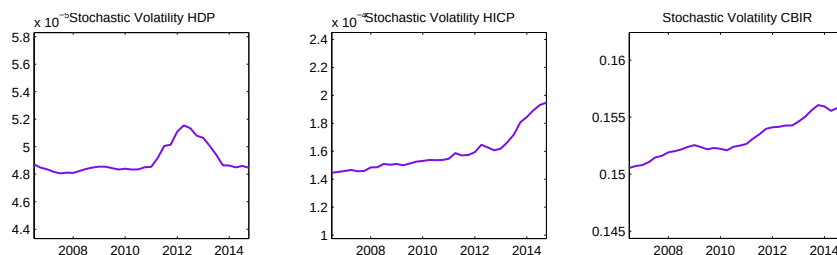


Efektivita monetárního transmisního mechanismu je tedy po sledované období stabilní, a to i navzdory finančním a ekonomickým problémům, se kterými se v posledních letech Kypr potýkal. V důsledku ekonomické krize došlo po roce 2009 ke snížení HDP, zvýšení nezaměstnanosti (což bylo z velké části zaviněno také problémy v turistickém sektoru) a celkovému zhoršení ekonomické výkonnosti. Postupně narůstal podíl nesplacených úvěrů, což zvyšovalo tlak na bankovní sektor. Vzhledem ke snižující se důvěře v bankovní sektor a také k tomu, že depozita v kyperských bankách (z velké části také ruských firem) byla objemově velmi vysoká a několikanásobně překračovala objem kyperského hrubého domácího produktu,¹ nejvýznamnější kyperské banky se staly insolventními. Došlo ke zhoršení ratingu Kypru a v důsledku popsaných skutečností k významným problémům, které vyústily v půjčky od Ruska, evropských institucí (zahrnujících ECB) a Mezinárodního měnového fondu. Přesto

¹Příčinou relativně velmi vysokého objemu depozit v kyperských bankách byly také výhodné daňové podmínky – proto se Kypr často označoval jako „daňový ráj“.

všechno byla efektivita monetárního transmisního mechanismu stabilní, pravděpodobně v důsledku příprav Kypru pro vstup do Eurozóny a jeho následné realizace v roce 2008 – tedy přijetí eura a monetární politiky ECB (Theophanous, 2013; The Economist, 2013; Clerides and Stephanou, 2009).

Obrázek 3.8: Stochastická volatilita pro Kypr



Z panelu grafů 3.8 je patrné, že stochastická volatilita chybových členů rovnic uvažovaných veličin není v případě Kypru – obdobně jako tomu bylo v případě Německa – příliš výrazná (v porovnání se stochastickou volatilitou v případě České republiky), což opět koresponduje s předchozími výsledky.

3.2 Predikce vybraných makroekonomických veličin

V této části práce bude provedena rekurzivní predikce vybraných makroekonomických veličin České republiky, Německa a Kypru. Konkrétně se bude jednat o predikci hrubého domácího produktu (HDP), harmonizovaného indexu spotřebitelských cen (HICP), nezaměstnanosti (UNE) a tříměsíční úrokové míry komerčních bank (IR). HDP a HICP jsou upraveny do tvaru procentních změn, UNE a IR jsou převedeny do tvaru diferencí. Pro predikci budou použity následující modely:

- naivní model (naive),
- „klasický“ VAR model (VAR),
- BVAR model s neinformativní (difúzní) apriorní hustotou (BVAR diff),
- BVAR model s Littermanovou apriorní hustotou (BVAR litt),²
- BVAR model s přirozeně konjugovanou apriorní hustotou (BVAR nc),
- BVAR model s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou (BVAR nw),
- BVAR model s využitím techniky SSVS (BVAR ssvs).

²Co se týče nastavení apriorních hyperparametrů u BVAR modelu s Littermanovou apriorní hustotou, budeme zde vycházet z výsledků práce Vaňka (2014), a hyperparametry $\underline{a}_1$ a $\underline{a}_2$ budou nastaveny na hodnotu 0,2.

Jak již bylo uvedeno výše, časový rozsah proměnných bude v tomto případě od 2000Q1 do 2014Q4. Oproti první části empirické práce je tedy mírně zkrácen, a to z důvodu snahy o eliminaci relativně extrémních hodnot proměnných na konci 90. let, které by ke zpřesnění predikce v blízké budoucnosti zřejmě nevedly. Predikce bude provedena rekurzivně od roku 2009, tzn. že bude k dispozici 24 jednokrokových predikcí, 23 dvoukrokových, ..., až 17 osmikrokových.

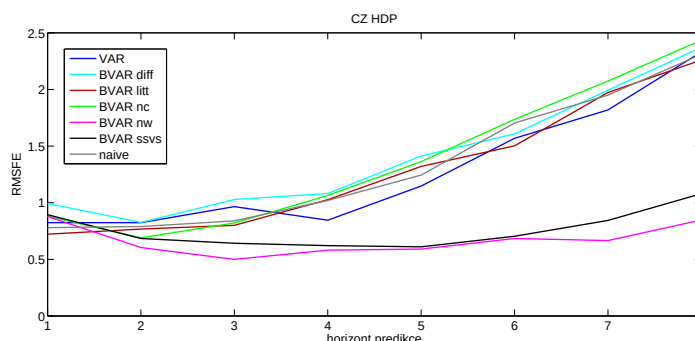
Následně bude provedena kombinace predikcí jak klasickým, tak bayesovským způsobem a bude zkoumán jak celkový vliv kombinace predikcí na jejich přesnost, tak rozdíly mezi uvedenými dvěma metodami.

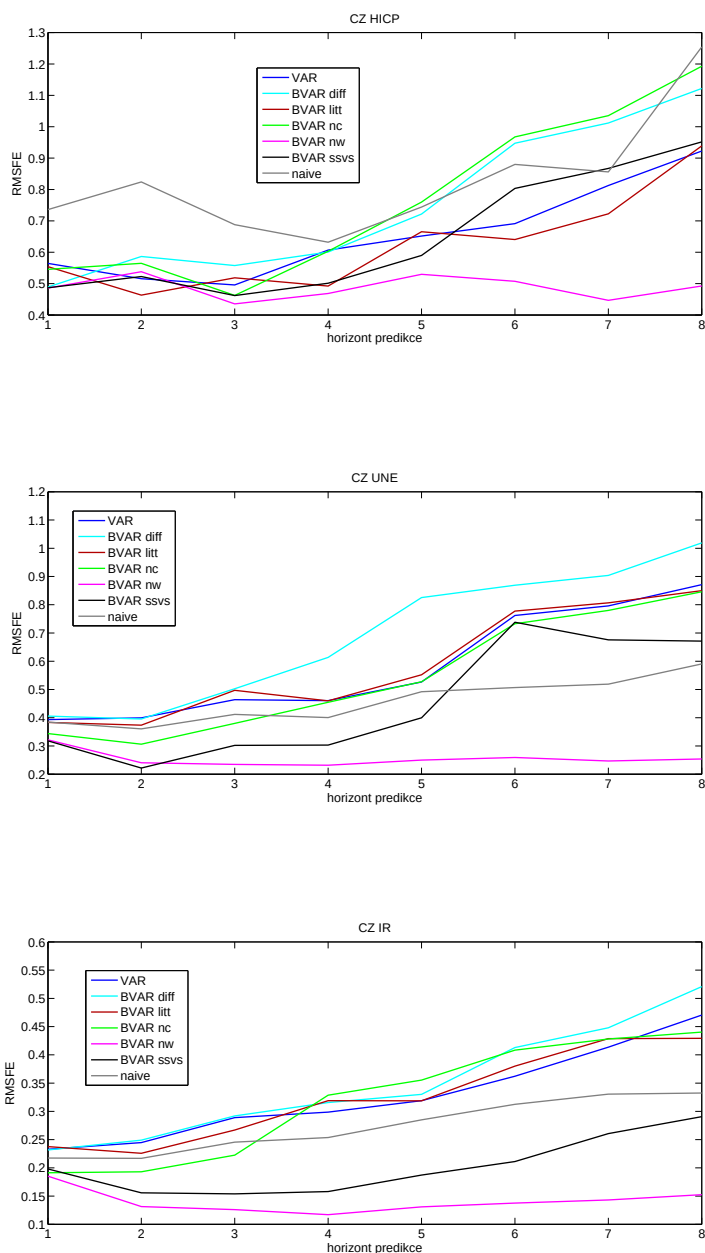
3.2.1 Výsledky pro Českou republiku

Aby se neustále neopakoval podobný komentář výsledků a názvy modelů, bude provedeno souhrnnější hodnocení modelových predikcí všech uvažovaných proměnných, a to pro každý stát samostatně.

Uvažované proměnné – tedy hrubý domácí produkt (HCP), harmonizovaný index spotřebitelských cen (HICP), nezaměstnanost (UNE) a úrokovou míru komerčních bank (IR) – predikoval v případě České republiky nejlépe s výrazným náskokem BVAR model s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou. Mimo něj můžeme ještě vyzdvihnout BVAR model s využitím techniky SSVS. Výsledky „klasického“ VAR modelu lze celkově označit za průměrné až mírně podprůměrné a srovnatelné s BVAR modelem s Littermanovou apriorní hustotou. Tyto dva jmenované modely zpravidla překonaly či byly srovnatelné s BVAR modely s difúzní a přirozeně konjugovanou apriorní hustotou, ale naopak výrazně zaostaly za BVAR modelem s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou a BVAR modelem s využitím techniky SSVS. Co se týče výsledků naivní predikce, tu (B)VAR modely v případě hrubého domácího produktu a harmonizovaného indexu spotřebitelských cen zpravidla překonaly. Za zmínku však stojí její relativně dobré výsledky zejména ve vyšších horizontech při predikci nezaměstnanosti a úrokové míry.

Obrázek 3.9: Panel grafů RMSFE pro veličiny České republiky

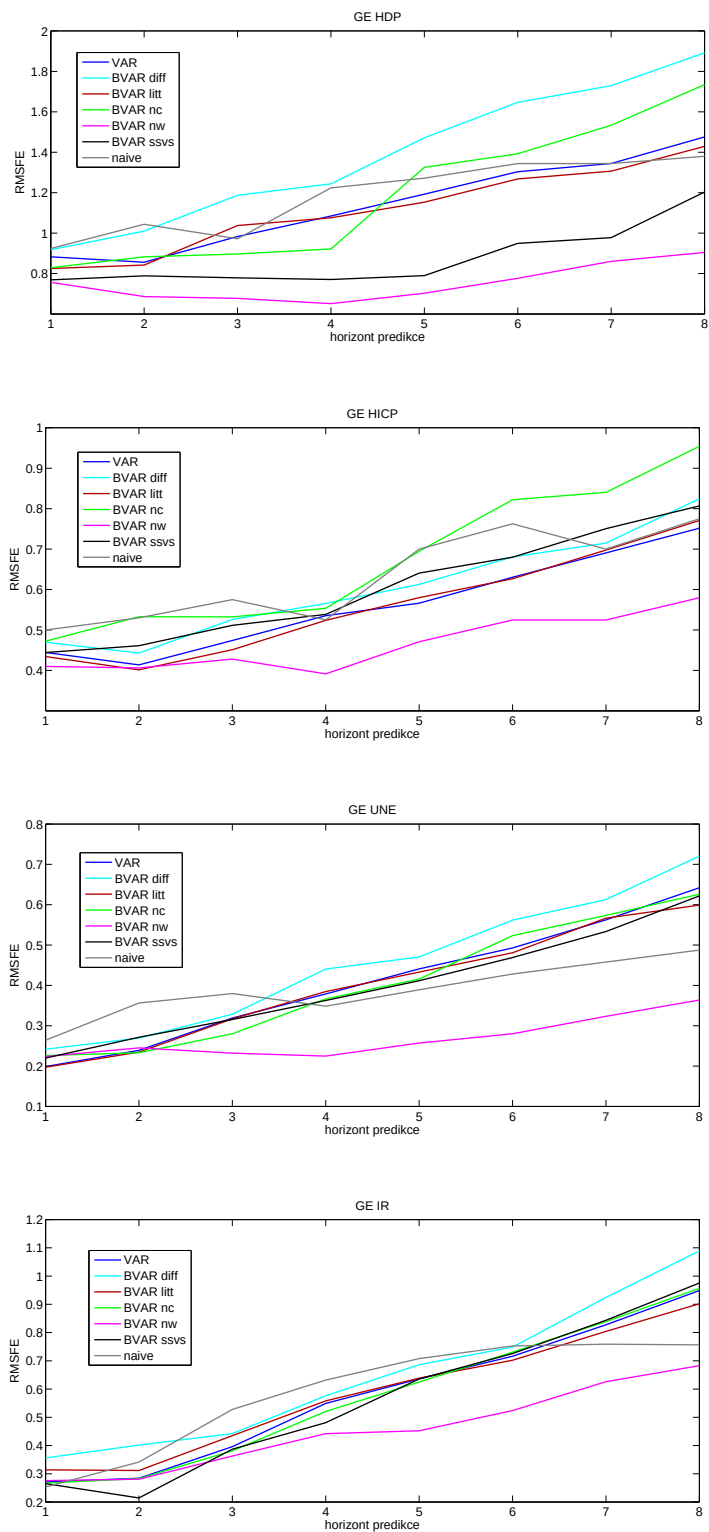




3.2.2 Výsledky pro Německo

I v případě predikce vybraných veličin Německa dominoval BVAR model s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou. V případě hrubého domácího produktu můžeme ještě vyzdvihnout BVAR model s využitím techniky SSVS. Relativně dobré výsledky také podával BVAR model s Littermanovou apriorní hustotou, který zpravidla mírně překonal „klasický“ VAR model. Za nejhorší můžeme označit výsledky BVAR modelů s difúzní a přirozeně konjugovanou apriorní hustotou. Většina modelů zpravidla překonala naivní predikci s výjimkou vyšších horizontů v případě nezaměstnanosti.

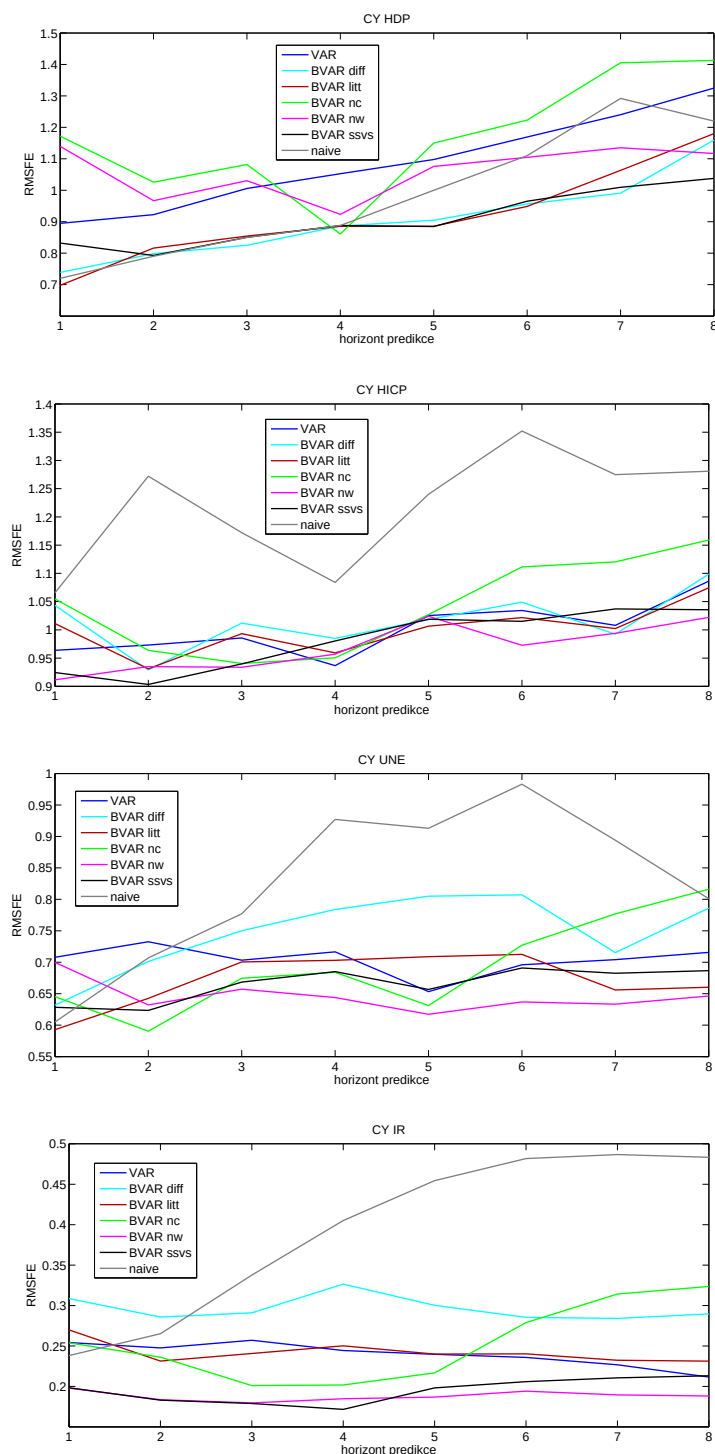
Obrázek 3.10: Panel grafů RMSFE pro veličiny Německa



3.2.3 Výsledky pro Kypr

Co se týče výsledků jednotlivých modelů pro uvažované veličiny v případě Kypru, opět vyzdvihneme výkonnost BVAR modelu s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou (s výjimkou predikce hrubého domácího produktu).

Obrázek 3.11: Panel grafů RMSFE pro veličiny Kypru



Dobré výsledky podával také BVAR model s využitím techniky SSVS a BVAR model s Littermanovou apriorní hustotou. Výkonnost „klasického“ VAR modelu lze označit spíše jako podprůměrnou. Dodejme, že modelová predikce zpravidla výrazně překonala naivní predikci, která se zdá být v případě Kypru použitelná pouze při predikci hrubého domácího produktu.

Jak bylo poznamenáno v metodologii, okrajově bude kromě RMSFE zmíněna také SLPL (sum of log predictive likelihoods), která byla při výpočtech sledována. V tomto kontextu k žádným systematickým anomáliím nedocházelo a modely, které predikovaly s relativně nižšími RMSFE zpravidla zároveň vykazovaly vyšší hodnoty SLPL, a s modely, jejichž predikce byly z hlediska RMSFE obdobné, byla spojena obdobná hodnota SLPL.

3.2.4 Kombinace predikcí

V této podkapitole bude provedena kombinace predikcí vybraných modelů, a to dvěma způsoby – klasickým (jednoduchým průměrem) a bayesovským (za pomoci vah stanovených na základě predikční věrohodnosti). Poté se bude sledovat, zda kombinace vede ke zpřesnění predikce či nikoliv. Na základě výsledků z předchozích podkapitol byly pro kombinaci vybrány tři modely – BVAR model s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou, BVAR model s využitím techniky SSVS a BVAR model s Littermanovou apriorní hustotou. Pro zachování přehlednosti budou prezentovány pouze výsledky, které opravdu vedly alespoň k částečnému zlepšení predikce.

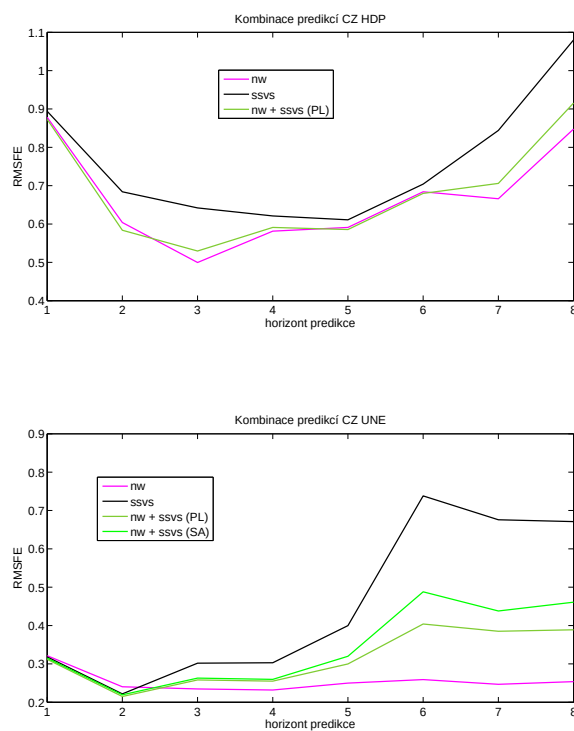
Celkově lze shrnout, že po určité kombinaci predikcí došlo k mírnému zlepšení predikce v případě hrubého domácího produktu a nezaměstnanosti České republiky, a v případě hrubého domácího produktu a úrokové míry Kypru. Vývoj statistiky RMSFE ilustrují grafy v obrázcích 3.12 a 3.13.

Co se týče výsledků pro Českou republiku, v případě hrubého domácího produktu došlo ke zlepšení predikce po kombinaci výsledků BVAR modelu s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou a BVAR modelu s využitím techniky SSVS, a to za použití vah získaných na základě predikční věrohodnosti. Konkrétně došlo ke zlepšení predikce v horizontech 1, 2, 5 a 6. Taktéž při predikci nezaměstnanosti došlo ke zlepšení po kombinaci BVAR modelu s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou a BVAR modelu s využitím techniky SSVS, a to jak za použití vah spočítaných na základě predikční věrohodnosti, tak jednoduchým průměrem predikcí. Ke zpřesnění došlo pouze v nízkých horizontech, konkrétně 1 a 2. Pokud porovnáme výsledky získané za použití vah spočítaných s využitím predikční věrohodnosti (PL) a výsledky získané jednoduchým průměrem predikcí (SA), můžeme uvést, že predikce po kombinaci modelů s využitím vah získaných z predikční věrohodnosti byly přesnější než predikce získané jednoduchým průměrováním.

V případě Kypru došlo ze zpřesnění predikce hrubého domácího produktu po kombinaci výsledků BVAR modelu s Littermanovou apriorní hustotou a BVAR modelu s využitím techniky SSVS, a to za použití obou typů kombinací (PL i SA). Ke zlepšení došlo v horizontech 2, 3 a 4 v případě použití PL vah a v horizontu 3 a 4 za použití jednoduchého průměrování predikcí. I v tomto případě vychází ze vzá-

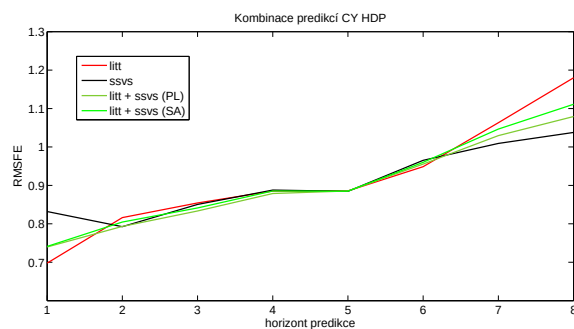
jemného srovnání lépe metoda, která využívá váhy vypočítané na základě predikční věrohodnosti.

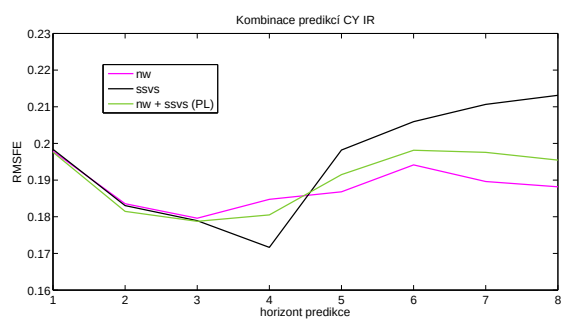
Obrázek 3.12: Kombinace predikcí HDP a UNE České republiky



Jak bylo uvedeno výše, ke zlepšení výsledků došlo také v případě úrokové míry, a to po kombinaci predikcí BVAR modelu s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou a BVAR modelu s využitím techniky SSVS. Konkrétně se jedná o horizonty 1, 2 a 3, a to za použití PL vah.

Obrázek 3.13: Kombinace predikcí HDP a IR Kypru





V následující kapitole budou diskutovány vybrané aspekty provedené analýzy.

Kapitola 4

Diskuze

Přestože byly různé aspekty provedené analýzy a aplikace uvažovaných modelů diskutovány napříč celou diplomovou prací, budou na tomto místě shrnuty do samostatné kapitoly. Obě části diplomové práce, tedy analýza monetárního transmisního mechanismu a predikce vybraných makroekonomických veličin, budou vzhledem k rozdílnosti použitých technik a modelů diskutovány samostatně.

Co se týče analýzy monetárního transmisního mechanismu, byl použit bayesiánský vektorový autoregresní model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou (TVP-BVAR-SV model). Přestože jsou „standardní“ (B)VAR modely vhodnými a často používanými nástroji pro modelování vzájemných vztahů mezi ekonomickými veličinami, předpokládají, že se jejich parametry v čase nemění, což může být mimo jiné v případě analýzy monetárního transmisního mechanismu příliš restriktivní a nežádoucí. Je proto použit model s časově proměnnými parametry. Jak však bylo několika studiemi prokázáno – kromě samotných parametrů se v čase může měnit také rozptyl exogenních šoků – viz např. [Primiceri \(2005\)](#) pro případ USA, [Nakajima \(2011\)](#) pro případ Japonska, [Mwabutwa \(2013\)](#) pro případ Malawi nebo [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#) pro případ České republiky. A právě proto by měl v uvažovaném modelu být přítomen mechanismus stochastické volatility. [Primiceri \(2005\)](#) v návaznosti na výčet studií věnujících se změnám v monetární politice (v USA) dokonce uvádí, že každý relevantní pokus modelovat změny v (monetární) politice a jejich strukturu a vzájemné vztahy by měl zahrnovat v čase proměnnou kovarianční matici šoků (inovací). Zdůrazňuje také, že modelování časově proměnných parametrů a stochastické volatility je důležité pro rozlišení změn ve velikosti exogenních šoků a změn v samotném transmisním mechanismu. A například [Nakajima \(2011\)](#) upozorňuje, že pokud bychom neoprávněně ignorovali změny ve volatilitě šoků a odhadli pouze TVP-VAR model, pravděpodobně bychom získali vychýlené odhady časově proměnných parametrů. Na základě těchto argumentů byl tedy využit právě VAR model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou.

Pro zdůvodnění využití bayesiánského přístupu můžeme použít argumenty [Primiceriho \(2005\)](#), který uvádí, že při odhadu „klasickou“ metodou maximální věrohodnosti bychom narazili na problém vysoké dimenzionality a nelinearity. U takto složitého modelu bychom se mohli setkat s problémem, že věrohodnost má v parametrickém prostoru více vrcholů, z nichž jsou některé v nežádoucích oblastech.

Navíc mohou být tyto vrcholy velmi úzké, s čímž jsou spojeny další problémy a nepřesnosti. Při použití bayesiánského přístupu lze tyto problémy překonat vhodným nastavením (neinformativních) apriorních hustot na žádoucí oblast parametrického prostoru. Další důvod je výpočetní – při „klasickém“ přístupu je obecně velmi složité maximalizovat věrohodnostní funkci u parametrického prostoru s tak vysokou dimenzí. V rámci bayesiánského přístupu se lze k tomuto problému stavět s využitím Markov Chain Monte Carlo metod. Co se týče konkrétního použitého modelu, je následován postup [Blakea a Mumtaze \(2012\)](#), což je modifikace [Primiceriho \(2005\)](#) přístupu. Další mírnou modifikaci představuje např. [Nakajima \(2011\)](#). TVP-BVAR-SV modely se v současných studiích zpravidla odvíjejí od modelu [Primiceriho \(2005\)](#) a mírné modifikace by neměly mít na výsledky významný vliv.

Bayesiánský vektorový autoregresní model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou však není jediný sofistikovanější model, který se ve spojitosti s analýzou monetárního transmisního mechanismu využívá. V posledních několika letech se pro tyto účely využívají zejména sofistikované dynamické stochastické modely všeobecné rovnováhy (DSGE modely), které jsou odvozeny z mikroekonomických základů a obsahují řadu mechanismů, aby daný model odpovídal potřebám pro modelování ekonomických vztahů pro uvažovanou ekonomiku. Pro DSGE model České národní banky (tzv. „g3“ model) viz [Andrle, Hlédík, Kameník a Vlček \(2009\)](#). V souvislosti nejenom s DSGE modely se často provádí také šoková a varianční dekompozice, které mohou posloužit k hlubší analýze ekonomických vztahů.

Dalším aspektem pro diskuzi jsou použité ekonomické veličiny, které do modelu vstupují, jejich forma a celkový počet. Pouze tři proměnné jsou v této práci použity v návaznosti na argumentaci [Primiceriho \(2005\)](#), který používá tento (relativně malý) počet proměnných z důvodu vyhnutí se přeparametrizování modelu a nepřesnostem s ním spojeným. Model obsahuje dva bloky, jeden „nepolitický“ (non-policy block) a jeden „politický“ (policy block). [Primiceri \(2005\)](#) používá pro reprezentaci nepolitického bloku HDP a inflaci a pro reprezentaci politického bloku používá tříměsíční úrokovou míru (pro USA). Tato práce však následuje [Blakea a Mumtaze \(2012\)](#) a pro vyjádření nepolitického bloku používá HDP a harmonizovaný index spotřebitelských cen (potažmo inflaci), a pro vyjádření politického bloku úrokovou míru centrální banky (repo sazba). Co se týče některých dalších studií, např. [Mwabutwa \(2013\)](#) a [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#) používají následující modely malé otevřené ekonomiky – HDP, index spotřebitelských cen, tříměsíční úrokovou míru a nominální efektivní směnný kurz ([Mwabutwa \(2013\)](#) pro Malawi; [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#) pro Českou republiku). Dále např. [Nakajima \(2012\)](#) používá – podobně jako je použito v této práci – modely o třech proměnných, a to HDP, index spotřebitelských cen a krátkodobou či střednědobou úrokovou míru (pro Japonsko). Za zvážení by tedy také stálo rozšíření modelu o další proměnné (např. směnný kurz) či obměnu politického, případně nepolitického bloku proměnných, a sledování vlivu těchto změn na celkové výsledky. Co se týče formy proměnných, které do modelu vstupují, můžeme uvést následující. Přestože někteří autoři zavádí proměnné do modelu v úrovnovém tvaru (např. [Franta, Horváth a Rusnák \(2014\)](#)), v této práci vstupují veličiny do modelu v návaznosti např. na [Blakea a Mumtaze \(2012\)](#) či [Nakajimu \(2012\)](#) ve tvaru procentních změn či diferencí.

Co se týče druhé části práce, tedy predikci vybraných makroekonomických veličin, zde je použit bayesiánský přístup „přirozené“, protože – jak píše např. [Canova \(2007\)](#) – bayesiánské VAR modely byly původně navrženy právě ke zlepšení predikce. Počet proměnných byl v tomto případě zvolen z nemalé části na základě analýzy [Vaňka \(2014\)](#), ve které byl mimo jiné analyzován vliv přidání dodatečných proměnných na zlepšení predikce. Tento vliv se zpravidla ukázal být dokonce jako negativní, což se dá zdůvodnit vysokým počtem odhadovaných parametrů a z toho plynoucích nepřesností. Také proto jsou v této práci pro predikci vybraných makroekonomických veličin sestaveny relativně „malé“ modely o čtyřech proměnných. Ačkoliv se dá argumentovat, že někteří autoři používají větší počet proměnných a přesto dosahují přesnějších predikcí než menší modely – např. [Banbura, Giannone, Reichlin \(2010\)](#) – je nutno dodat, že v těchto studiích jsou apriorní hustoty zpravidla výrazně upraveny právě pro práci s velkými modely, případně samotné modely zahrnují např. faktorovou modifikaci (a jedná se tak nikoliv o „standardní“ VAR modely, ale o „faktorově rozšířené“ VAR modely – tzv. FAVAR modely). Co se týče konkrétního výběru proměnných, ty jsou vybrány částečně na základě ekonomické teorie, aby tvořily smysluplnou soustavu ekonomických vztahů, a částečně na základě proměnných použitých ve studiích z kapitoly 2.2.1.

Předmětem diskuze mohou být také použité apriorní hustoty. Jejich výčet samozřejmě není vyčerpávající a jak plyne z různých studií uváděných v průběhu celé práce, existují i další apriorní hustoty, případně modifikace apriorních hustot popsaných. V této souvislosti by mohlo být zajímavé rozšíření provedené analýzy o BVAR model se *steady-state* apriorní hustotou podle [Villaniho \(2009\)](#). Dalším aspektem je také nastavení apriorních hyperparametrů některých apriorních hustot. Mezi nejpožívanější z nich patří Littermanova apriorní hustota. V rámci té byly na základě analýzy [Vaňka \(2014\)](#) stanoveny apriorní hyperparametry (a_1 a a_2) „přísněji“ (na nižší hodnotu), což je v souladu se studiemi [Ni a Sun \(2005\)](#) nebo [Gupta \(2006\)](#).

V práci [Vaňka \(2014\)](#) bylo také ukázáno, že při vyšším řádu zpoždění je výraznější rozdíl v přesnosti predikce mezi „klasickým“ a bayesiánskými modely, a to zejména v důsledku v práci probírané redukce parametrů spojené s nastavením apriorních hustot. To je v souladu s prací [Carriero, Clark a Marcellino \(2011\)](#). U modelů s nižším řádem zpoždění nemusí být rozdíly natolik výrazné, nicméně predikce modelů je celkově přesnější. Na základě těchto poznatků a také informačních kritérií byl řád zpoždění v této práci nastaven na relativně nízkou hodnotu 2. Na tomto místě ještě uvedme poznámku k měření přesnosti predikce. V této práci byla za hlavní statistiku pro tento účel zvolena RMSFE (root mean squared forecast error), která zohledňuje rozdíl mezi skutečnou a predikovanou hodnotou dané veličiny. RMSFE však využívá pouze bodové predikce a nebere v potaz zbytek predikčního rozdělení. Preferovanější statistikou v rámci bayesovské predikce je proto někdy predikční věrohodnost (resp. suma jejích logaritmů – SLPL). Vzhledem k tomu, že někdy RMSFE a SLPL vedou k odlišným závěrům ([Koop a Korobilis, 2010](#)), byla statistika SLPL v průběhu analýzy také sledována. V tomto kontextu k žádným systematickým anomáliím nedocházelo a modely, které predikovaly s relativně nižšími RMSFE zpravidla zároveň vykazovaly vyšší hodnoty SLPL, a s modely, jejichž predikce byly z hlediska RMSFE obdobné, byla spojena i obdobná hodnota SLPL.

Na závěr této části opět zmiňme DSGE modely, které se např. v centrálních bankách pro predikci hojně využívají. Pro případ České národní banky lze opět odkázat na práci [Andrleho, Hlédika, Kameníka a Vlčka \(2009\)](#). Je nutno ovšem podotknout, že sofistikovanější DSGE modely jsou vzhledem ke své komplexnosti a výpočetní náročnosti předmětem zpravidla prací dizertačních, nikoliv diplomových.

Závěr

Tato diplomová práce se zabývala bayesiánskými technikami analýzy ekonomických časových řad. V první kapitole byly představeny bayesiánské vektorové autoregresní modely s různými apriorními hustotami, bayesiánský vektorový autoregresní model s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou, a odhadové techniky, které se v souvislosti s nimi využívají.

Druhá kapitola práce popsala monetární transmisní mechanismus a metodologii predikce pomocí bayesiánských modelů včetně kombinace predikcí. Na závěr také představila použité modely a data, se kterými se pracovalo v třetí – empirické – kapitole této diplomové práce.

Třetí kapitola se skládala ze dvou částí. V první z nich byl analyzován monetární transmisní mechanismus České republiky, Německa a Kypru, a to pomocí bayesiánského vektorového autoregresního modelu s časově proměnnými parametry a stochastickou volatilitou. Grafy impulzních odezev ukázaly, že zatímco v případě České republiky lze sledovat výkyvy v intenzitě reakce inflace a růstu HDP na monetární šok, v případě Německa a Kypru jsou reakce uvedených veličin na monetární šok po sledované období relativně stabilní. Výsledky pro Českou republiku byly odůvodněny především vývojem mezibankovních úrokových sazeb a devizovými intervencemi České národní banky. Výsledky pro Německo a Kypr byly zdůvodněny především členstvím v Eurozóně a monetární politikou Evropské centrální banky. Ve druhé části třetí kapitoly byla provedena predikce vybraných makroekonomických veličin uvedených států pomocí bayesiánských vektorových autoregresních modelů s různými apriorními hustotami. Výsledky ukázaly, že nejlepšími predikčními schopnostmi (z hlediska nejnižších RMSFE statistik) disponuje bayesiánský vektorový autoregresní model s nezávislou normální-Wishartovou apriorní hustotou a s využitím techniky SSVS. Dále lze uvést model s Littermanovou apriorní hustotou. Při porovnání bayesiánských VAR modelů s klasickým lze uvést, že predikční schopnosti klasického jsou průměrné až mírně podprůměrné. Co se týče naivní predikce, ta podávala relativně dobré výsledky ve vyšších horizontech například v případě predikce nezaměstnanosti a úrokové míry České republiky a Německa. Modelová predikce ji však ve většině případů zpravidla překonala. Následně byla provedena kombinace predikcí nejlepších modelů, a to bayesiánským způsobem (pomocí vah vypočítaných na základě predikční věrohodnosti) a nebayesiánským způsobem (jednoduchým průměrem predikcí). Výsledky ukázaly, že v některých případech lze kombinací predikcí dosáhnout mírného zlepšení predikce v určitých horizontech, přičemž lepší výsledky byly dosahovány po kombinaci predikcí bayesiánským způsobem.

Reference

- ANDERSSON, Michael K.; KARLSSON, Sune. *Bayesian Forecast Combination for VAR Models*. Working paper 216, Sveriges Riksbank, 2007.
- ANDRLE, Michal; HLÉDIK, Tibor; KAMENÍK, Ondra; VLČEK, Jan. *Implementing the New Structural Model of the Czech National Bank*. CNB Working Paper Series, no. 2, 2009.
- AMISANO, Gianni; SERATI, Massimiliano. Forecasting Cointegrated Series with BVAR models. *Journal of Forecasting*, 1999, vol. 18.
- BALKE, Nathan; CANOVA, Fabio; MILANI, Fabio; WYNNE, Mark. *DSGE Models in Macroeconomics: Estimation, Evaluation and New Developments*. Bingley, UK: Emerald Group, 2012. ISBN 978-1-78190-305-6.
- BAÑBURA, Marta; GIANNONE, Domenico; REICHLIN, Lucrezia. Large Bayesian vector auto regressions. *Journal of Applied Econometrics*, 2010, vol. 25, no. 1.
- BATES, John; GRANGER, Clive W. J. The Combination of Forecasts. *Operations Research Quarterly*, 1969, vol. 20, no. 4.
- BÉNASSY-QUÉRÉ, Agnès; COEURÉ, Benoit; JACQUET, Pierre; PISANY-FERRY, JEAN. *Economic Policy: Theory and Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2010. ISBN 978-0-19-532273-6.
- BENATI, Luca; MUMTAZ, Haroon. *U.S. evolving macroeconomic dynamics: a structural investigation*. European Central Bank, Working Paper Series 0746, 2007.
- BLAKE, Andrew; MUMTAZ, Haroon. *Applied Bayesian econometrics for central bankers*. Centre for Central Banking Studies, Bank of England, 2012. ISSN 1756-7297.
- BOLSTAD, William M. *Introduction to Bayesian statistics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. ISBN 978-0-471-27020-2.
- BOS, Charles S. *A Comparison of Marginal Likelihood Computation Methods*. Tinbergen Institute Discussion Paper, 2002.
- BOX, George E. P.; JENKINS, Gwilym. *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day, 1970.
- BOX, George E. P.; JENKINS, Gwilym; REINSEL, Gregory C. *Time series analysis:*

Forecasting and control. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0-470-27284-8.

BRANDRETH, Gyles. *Oxford Dictionary of Humorous Quotations*. Oxford: Oxford University Press, 2014. ISBN 978-0-19-968136-5.

BROOKS, Chris. *Introductory Econometrics for Finance*. New York: Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0-521-87306-2.

BURKE, Matthew J. *The Development of a Convergence Diagnostic for Markov Chain Monte Carlo Estimation*. University of North Carolina at Greensboro, dizertační práce, 2011.

CARRIERO, Andrea; CLARK, Todd E.; MARCELLINO, Massimiliano. *Bayesian VARs: Specification Choices and Forecast Accuracy*. Working paper 11-12, Federal Reserve Bank of Cleveland, 2011.

CARTER, Christopher. K.; KOHN, Robert. On Gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, 1994, vol. 81, no. 3.

CANOVA, Fabio. *Methods for Applied Macroeconomic Research*. Princeton: Princeton University Press, 2007. ISBN 978-0-691-11504-7.

CEVIK, Serhan; TEKSOZ, Katerina. *Lost in Transmission? The Effectiveness of Monetary Policy Transmission Channels in the GCC Countries*. IMF Working Paper 191, 2012.

CHIB, Siddhartha. Marginal Likelihood from the Gibbs Output. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, vol. 90, no. 432.

CHIB, Siddhartha; GREENBERG, Edward. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *American Statistician*, 1995, vol. 49, no. 4.

CLARK, Todd E.; McCracken, Michael W. Forecasting with Small Macroeconomic VARs in the Presence of Instabilities. In: RAPACH, David E.; WOCHAR, Mark E. *Forecasting in the Presence of Structural Breaks and Model Uncertainty*. Bingley, UK: Emerald Group, 2008. ISBN 978-0-444-52942-8.

CLARK, Todd E.; McCracken, Michael W. Averaging Forecasts with VARs with Uncertain Instabilities. *Journal of Applied Econometrics*, 2010, vol. 25, no. 1.

CLERIDES, Marios; STEPHANOU, Constantinos. The Financial Crisis and the Banking System in Cyprus. *Cyprus Economic Policy Review*, 2009, vol. 3, no. 1.

COGLEY, Timothy; SARGENT, Thomas J. Drift and Volatilities: Monetary Policies and Outcomes in the Post WWII U.S. *Review of Economic Dynamics*, 2005, vol. 8, no. 2.

CORANDER, Jukka; VILLANI, Mattias. A Bayesian Approach to Modelling Graphical Vector Autoregressions. *Journal of Time Series Analysis*, 2006, vol. 27, no. 1.

- COWLESS, Mary K., CARLIN, Bradley P. Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A Comparative Review. *Journal of the American Statistical Association*, 1996, vol. 91, no. 434.
- DAHLHAUS, Rainer; EICHLER, Michael. Causality and graphical models in time series analysis. In: GREEN, Peter J.; HJORT, Nils J.; RICHARDSON, Sylvia. *Highly Structured Stochastic Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2003. ISBN 978-0-19-851055-0.
- DeJONG, Dave N.; INGRAM, Beth F.; WHITEMAN, Charles H. Analyzing VARs with Monetary Business Cycle Model Priors. *Proceedings of the American Statistical Association, Bayesian Statistics Section*, 1993.
- DEL NEGRO, Marco; SCHORFHEIDE, Frank. Bayesian Macroeconometrics. In: GEWEKE, John; KOOP, Gary; VAN DIJK, Herman. *The Oxford handbook of Bayesian Econometrics*. Oxford: Oxford University Press, 2011. ISBN 978-0-19-955908-4.
- DEL NEGRO, Marco; SCHORFHEIDE, Frank. Priors from General Equilibrium Models for VARs. *International Economic Review*, 2004, vol. 45, no. 2.
- DING, Shutong; KARLSSON, Sune. *Model averaging and variable selection in VAR models*. Örebro University, 2012.
- DOAN, Thomas; LITTERMAN, Robert B.; SIMS, Christopher A. Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions. *Econometric Reviews*, 1984, vol. 3, no. 1.
- DOBEŠOVÁ, Anna. *Změna vlivu monetární politiky na inflaci během finanční krize v zemích Visegrádské čtyřky*. Diplomová práce, Mendelova univerzita v Brně, 2012. Vedoucí práce: David Hampel.
- DOH, Taeyoung; CONNOLLY, Michael. *The State Space Representation and Estimation of a Time-Varying Parameter VAR with Stochastic Volatility*. Research Working Paper, The Federal Reserve Bank of Kansas City, 2012. ISSN 1936-5330.
- DUA, Pami; RAY, Subhash C. A BVAR Model for the Connecticut Economy. *Journal of Forecasting*, 1995, vol. 14, no. 3.
- DURBIN, James; KOOPMAN, Siem J. *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press, 2012. ISBN 978-0-19-964117-8.
- EDDY, Shawn R. What is Bayesian statistics?. *Nature Biotechnology*, 2004, vol. 22, no. 9.
- EKLUND, Jana; KARLSSON, Sune. *Forecast Combination and Model Averaging Using Predictive Measures*. Working paper 191, Sveriges Riksbank, 2005.
- ENDERS, Walter. *Applied Time Series Analysis*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2004. ISBN 978-0-471-45173-8.

- European Central Bank. *Transmission mechanism of monetary policy*, 2010. URL: <https://www.ecb.europa.eu/mopo/intro/transmission/html/index.en.html>.
- FÉLIX, Ricardo M.; NUNES, Luís C. *Bayesian Forecasting Models for the Euro Area*. Economic Bulletin, Banco de Portugal, 2002. ISSN 2182-035X.
- FÉLIX, Ricardo M.; NUNES, Luís C. *Forecasting Euro Area Aggregates with Bayesian VAR and VECM models*. Working paper, Banco de Portugal, 2003.
- FRANTA, Michal; HORVÁTH, Roman; RUSNÁK, Marek. Evaluating Changes in the Monetary Transmission Mechanism in the Czech Republic. *Empirical Economics*, 2014, vol. 46, no. 3.
- FRÜHWIRTH-SCHNATTER, Sylvia. Data augmentation and dynamic linear models. *Journal of Time Series Analysis*, 1994, vol. 15, no. 2.
- FORBES, Catherine; EVANS, Merran; HASTINGS, Nicholas; PEACOCK, Brian. *Statistical Distributions*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011. ISBN 978-0-470-39063-4.
- GALBRAITH, John K. *U.S. News & World Report*, 7. březn 1988.
- GELFAND, Alan E.; DEY, Dipak K. Bayesian Model Choice: Asymptotics and Exact Calculations. *Journal of the Royal Statistical Society B* 56, 1994.
- GEORGE, Edward; SUN, Dongchu; NI, Shawn. Bayesian stochastic search for VAR model restrictions. *Journal of Econometrics*, 2008, vol. 142, no. 1.
- GEWEKE, John. *Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005. ISBN 978-0-471-67932-5.
- GIANNONE, Domenico; LENZA, Michele; PRIMICERI, Giorgio E. *Prior selection for vector autoregressions*. Working paper 1494, European Central Bank, 2012.
- GRANGER, Clive W. J. Forecasting Accuracy of Alternative Techniques: A Comparison of U.S. Macroeconomic Forecasts: Comment. *Journal of Business & Economic Statistics*, 1986, vol. 4, no. 1.
- GRANGER, Clive W. J. Investigating Casual Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*, 1969, vol. 37, no. 3.
- GREENBERG, Edward. *Introduction to Bayesian econometrics*. New York: Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0-521-85871-7.
- GUJARATI, Damodar N. *Basic Econometrics*. New York: McGraw-Hill, 2003. ISBN 978-0-07-233542-4.
- GUPTA, Rangan. Forecasting the South African Economy with VARs and VECMs. *South African Journal of Economics*, 2006, vol. 74, no. 4.
- GUPTA, Rangan; SICHEI, Moses M. A BVAR Model for the South African Economy. *South African Journal of Economics*, 2006, vol. 74, no. 3.

- GUPTA, Rangan; KABUNDI, Alain; MILLER, Stephen M.; UWILINGIYE, Josine. *Using Large Data Sets to Forecast Sectoral Employment*. Working paper, 2011.
- HAMADA, Michael S.; WILSON, Alyson G.; REESE, Shane C.; MARTZ, Harry F. *Bayesian Reliability*. New York: Springer, 2008. ISBN 978-0-387-77948-5.
- HAMILTON, James D. *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994. ISBN 978-0-691-04289-3.
- HOETING, Jennifer A.; MADIGAN, David; RAFTERY, Adrian E.; VOLINSKY, Chris T. Bayesian Model Averaging: A Tutorial. *Statistical Science*, 1999, vol. 14, no. 4.
- INGRAM, Beth F.; WHITEMAN, Charles H. Supplanting the 'Minnesota prior': Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors. *Journal of Monetary Economics*, 1994, vol. 34, no. 3.
- IVANOV, Ventzislav; KILIAN, Lutz. *A Practitioner's Guide to Lag-Order Selection for Vector Autoregressions*. CEPR Discussion Paper 2685, 2001.
- JEFFREYS, Harold. *Theory of Probability*, 1st ed. Oxford: Oxford University Press, 1939.
- JEFFREYS, Harold. *Theory of Probability*, 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 1961.
- JOCHMANN, Markus; KOOP, Gary; LEÓN-GONZÁLEZ, Roberto; STRACHAN, Rodney W. Stochastic Search Variable Selection in Vector Error Correction Models with an Application to a Model of the UK Macroeconomy. *Journal of Applied Econometrics*, 2013, vol. 28, no. 1.
- KADIYALA, Rao K.; KARLSSON, Sune. Numerical Methods for Estimation and Inference in Bayesian VAR Models. *Journal of Applied Econometrics*, 1997, vol. 12, no. 2.
- KALMAN, Rudolf E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems *Journal of Basic Engineering*, 1960, vol. 82, no. 1.
- KAPETANIOS, George; LABHARD, Vincent; PRICE, Simon. Forecasting Using Bayesian and Information-Theoretic Model Averaging: An Application to U.K. Inflation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2008, vol. 26, no. 1.
- KARLSSON, Sune. *Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions*. Working paper, Örebro University, 2012. ISSN 1403-0586.
- KIM, Chang-Jin; NELSON, Charles R. *State-Space Models with Regime Switching*. Boston: MIT Press, 1999. ISBN 978-0-262-11238-3.
- KIRCHGÄSSNER, Gebhard; WOLTERS, Jürgen. *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Berlin: Springer, 2007. ISBN 978-3-540-73290-7.
- KLIKOVÁ, Christiana; KOTLÁN, Igor. *Hospodářská politika*. Ostrava: Sokrates,

2003. ISBN 978-80-86572-04-88.

KOOP, Gary. *Bayesian Econometrics*. West Sussex: John Wiley & Sons, 2003. ISBN 0-470-84567-8.

KOOP, Gary; KOROILIS, Dimitris. Bayesian Multivariate Time Series Methods for Empirical Macroeconomics. *Foundations and Trends in Econometrics*, 2010, vol. 3, no. 4.

KOOP, Gary; KOROILIS, Dimitris. *Manual to accompany MATLAB package for Bayesian VAR models*. Glasgow: University of Strathclyde, 2009.

KOOP, Gary; POIRIER, Dale J.; TOBIAS, Justin L. *Bayesian Econometric Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-85571-6.

KOROILIS, Dimitris. VAR Forecasting Using Bayesian Variable Selection. *Journal of Applied Econometrics*, 2013, vol. 28, no. 2.

KRUSCHKE, John K. *Doing Bayesian Data Analysis: A Tutorial with R and BUGS*. Salt Lake City: Academic Press, 2010. ISBN 978-0-123-81485-2.

LANCASTER, Tony. *An introduction to modern Bayesian econometrics*. Oxford: Blackwell Publishing, 2004. ISBN 978-1-4051-1720-3.

LeSAGE, James P. A Comparison of the Forecasting Ability of ECM and VAR models. *The Review of Economics and Statistics*, 1990, vol. 72, no. 4.

LeSAGE, James P. *Applied Econometrics using MATLAB*. University of Toledo, 1999. URL: <http://www.spatial-econometrics.com>.

LITTERMAN, Robert B. Forecasting with Bayesian vector autoregressions - five years of experience. *Journal of Business & Economic Statistics*, 1986, vol. 4, no. 1.

HAMMOND, Gill. *State of the art of inflation targeting*. Centre for Central Banking Studies, Bank of England, 2012.

LÜTKEPOHL, Helmut. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin: Springer, 2005. ISBN 978-3-540-40172-5.

LÜTKEPOHL, Helmut; KRÄTZIG, Markus. *Applied Time Series Econometrics*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-83919-8.

McCANDLESS, George. *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*. Cambridge: Harvard University Press, 2008. ISBN 978-0-674-02814-2.

MWABUTWA, Chance; BITTENCOURT, Manoel; VIEGI, Nicola. *Evolution of Monetary Policy Transmission Mechanism in Malawi: A TVP-VAR Approach*. University of Pretoria, Working Paper 201327, 2013.

MISHKIN, Frederic S. *The Channels of Monetary Transmission: Lesson for Monetary Policy*. NBER Working Paper 5464, 1996.

- MITCHELL, James. *The importance of long run structure for impulse response analysis in VAR models..* NIESR Discussion Paper 172, 2000.
- NAKAJIMA, Jouchi. *Time-Varying Parameter VAR Model with Stochastic Volatility: An Overview of Methodology and Empirical Applications.* IMES Discussion Paper Series 10-E-09, Bank of Japan, 2011.
- NI, Shawn; SUN, Dongchu. Bayesian Estimates for Vector Autoregressive Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2005, vol. 23, no. 1.
- NI, Shawn; SUN, Dongchu. Bayesian Analysis of Vector-Autoregressive Models with Noninformative Priors. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2004, vol. 121, no. 2.
- O'HARA, Keith. *Bayesian Macroeconometrics in R.* New York University, 2012.
- PASRICHA, Gurnain K. *Kalman Filter and Its Economic Applications*, MPRA Paper 22734, 2006.
- PICKER, Anne D. *International Economic Indicators and Central Banks.* Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 978-0-471-75113-7.
- PRIMICERI, Giorgio E. Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy. *Review of Economic Studies*, 2005, vol. 72, no. 3.
- RACHEV, Svetlozar T.; HSU, John S.; BAGASHEVA, Biliana S.; FABOZZI, Frank J. *Bayesian Methods in Finance.* New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0-471-92083-0.
- RAMOS, Francisco F. R. Forecasts of market shares from VAR and BVAR models: a comparison of their accuracy. *International Journal of Forecasting*, 2003, vol. 19, no. 1.
- SALA-I-MARTIN, Xavier. I Just Ran Two Million Regressions. *American Economic Review*, 1997, vol. 87, no. 2.
- SEVINÇ, Volkan; ERGÜN, Gül. Usage of Different Prior Distributions in Bayesian Vector Autoregressive Models. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2012, vol. 38.
- SGHERRI, Silvia. *Monetary Transmission Channels, Monetary Regimes and Consumption Behaviour.* DNB Staff Reports no. 53, 2010.
- SHOESMITH, Gary L. Long-term Forecasting of Non-Cointegrated and Cointegrated Regional and National Models. *Journal of Regional Science*, 1995, vol. 35, no. 1.
- SHOESMITH, Gary L. Multiple Cointegrating Vectors, Error Correction, and Forecasting with Litterman's Model. *International Journal of Forecasting*, 1995, vol. 11, no. 4.
- SIMS, Christopher A. *Bayesian Methods in Applied Econometrics, or, Why Econo-*

metrics Should Always and Everywhere Be Bayesian. Princeton University, 2007.

SIMS, Christopher A. *Dummy Observation Priors Revisited*. Princeton University, 2005.

SIMS, Christopher A. Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 1980, vol. 48, no. 1.

SOLOMON, Ezra. *Psychology Today*, březn 1984.

SUGITA, Katsuhiro. Bayesian analysis of a vector autoregressive model with multiple structural breaks. *Economics Bulletin*, 2008, vol. 3, no. 22.

TIMM, Neil H. *Applied Multivariate Analysis*. New York: Springer, 2002. ISBN 978-0-387-95347-7.

The Economist. *An interview with Athanasios Orphanides: What happened in Cyprus*, March 28, 2013.

THEOPHANOUS, Andreas. *The way out of the Cyprus economic crisis*. Policy paper 96, Notre Europe, 2013.

TSAY, Ruey S. *Analysis of Financial Time Series*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005. ISBN 978-0-471-69074-0.

VANĚK, Tomáš. *Bayesovský přístup k analýze a predikci časových řad*. Diplomová práce, Masarykova univerzita, 2014. Vedoucí práce: Daniel Němec.

VERBEEK, Marno. *A Guide to Modern Econometrics*. West Sussex: John Wiley & Sons, 2004. ISBN 978-0-470-85773-0.

VILLANI, Mattias. Steady-state priors for vector autoregressions. *Journal of Applied Econometrics*, 2009, vol. 24, no. 4.

WALSH, Carl E. *Monetary Theory and Policy*. Cambridge: MIT Press, 2010. ISBN 978-0-262-01377-2.

WARNE, Anders; COENEN, Günter; CHRISTOFFEL, Kai. *Marginalized Predictive Likelihood Comparisons with Applications to DSGE, DSGE-VAR, and VAR Models*. European Central Bank, 2013.

ZELLNER, Arnold. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. New York: John Wiley & Sons, 1996. ISBN 978-0-471-16937-4.