Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

ANALÝZA ŘEŠENÍ ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiřina BŘEZINOVÁ

České Budějovice, říjen 2009

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce fakultou, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne …………….. ………………………

Anotace

Název:	Analýza řešení úloh III. kola Z9 55. ročníku MO v Jihočeském kraji
Vypracovala:	Jiřina Březinová
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

Práce obsahuje analýzu řešení úloh III. kola 55. ročníku matematické olympiády. Tyto úlohy z kategorie Z9 byly zadány žákům základní školy v Nerudově ulici č.9 v Českých Budějovicích dne 22.3.2006.

Annotation

Title:	The problems solutions analysis of the third round Z9 of 55-th year MO in South Bohemia region
Author:	Jiřina Březinová
Supervisor:	RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

This bachelor work contains the analysis of assignments solutions of the 3rd level of the 55th year of the mathematical Olympiad. These assignments of the Z9 category were set to the pupils of the primary school at Nerudova street num. 9 in České Budějovice on 22nd March 2006.

Tímto bych chtěla poděkovat svému učiteli RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph. D. za velkou trpělivost a odborné vedení při psaní této bakalářské práce.

Obsah:

1 Úvod ..... - 7 -

2 Matematická olympiáda ..... - 8 -

2.1 Povaha a cíl Matematické olympiády ..... - 8 -

2.2 Organizace a řízení soutěže ..... - 8 -

3 Úloha Z9-III-1 ..... - 11 -

3.1 Zadání a vzorové řešení ..... - 11 -

3.2 Rozbor chyb žáků ..... - 16 -

3.3 Vyhodnocení úkolu ..... - 17 -

4 Úloha Z9-III-2 ..... - 19 -

4.1 Zadání a vzorové řešení ..... - 19 -

4.2 Různé strategie řešení ..... - 21 -

4.3 Rozbor chyb žáků ..... - 24 -

4.4 Vyhodnocení úkolu ..... - 24 -

5 Úloha Z9-III-3 ..... - 26 -

5.1 Zadání a vzorové řešení ..... - 26 -

5.2 Různé strategie řešení ..... - 28 -

5.3 Rozbor chyb žáků ..... - 29 -

5.4 Vyhodnocení úkolu ..... - 29 -

6 Úloha Z9-III-4 ..... - 31 -

6.1 Zadání a vzorové řešení ..... - 31 -

6.2 Různé strategie řešení ..... - 32 -

6.3 Rozbor chyb žáků ..... - 36 -

6.4 Vyhodnocení úkolu ..... - 37 -

7 Statistika úspěšnosti úloh Z9-III-1-4 ..... - 38 -

8 Závěr ..... - 40 -

9 Literatura ..... - 41 -

10 Seznam příloh ..... - 42 -

1 Úvod

Práce je zaměřena na analýzu úloh III. kola matematické olympiády kategorie Z9, jež byla zadána v Jihočeském kraji v roce 2006. Tato analýza je prováděna na základě originálů žákovských řešení.

Cílem práce je analyzovat jednotlivá řešení úloh, rozbor chyb a možných příčin neúspěchu při řešení a vyhodnocení se srovnáním obtížností úloh.

U každé úlohy je uvedeno zadání, vzorové řešení, jiné způsoby řešení úlohy (získáno nejen z originálních žákovských řešení) s komentářem a také přehled a rozbor žákovských chyb.

2 Matematická olympiáda

2.1 Povaha a cíl Matematické olympiády

Matematická olympiáda je soutěž z matematiky pro žáky základních a středních škol, jejímž cílem je napomáhat vyhledávání talentovaných žáků, systematicky podporovat a rozvíjet jejich odborný růst. Matematická olympiáda (dále jen MO) neslouží jen pro zájemce o matematiku jako příležitost k řešení náročných problémů, ale také jako nástroj k popularizaci matematiky a informatiky , která je bezesporu nutná.

Pojetí MO je v souladu s Mezinárodní matematickou olympiádou (International Mathematical Olympiad) a jejím vyhlašovatelem je Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy.

2.2 Organizace a řízení soutěže

Matematická olympiáda se člení podle kategorií a soutěžních kol a je jednotná pro celé území České republiky.

Vybrané kategorie a soutěžní kola MO[1]

a) v kategorii C – určené pro žáky 1. ročníků středních škol, 5. ročníků osmiletých gymnázií a 3. ročníků šestiletých gymnázií; probíhá ve školním a krajském soutěžním kole

b) v kategorii Z9 – určeno pro žáky 9. ročníků základních škol, 4. ročníků osmiletých gymnázií a 2. ročníků šestiletých gymnázií; probíhá ve školním, okresním a krajském soutěžním kole

[1] Informace získány z oficiálních stránek MO [1]

c) v kategorii Z8 – určeno pro žáky 8. ročníků základních škol, 3. ročníků osmiletých gymnázií a 1. ročníků šestiletých gymnázií; probíhá ve školním, okresním a krajském soutěžním kole.

Další kategorie jsou A, B, Z7, Z6, Z5 a P (zaměřeno na informatiku)

Tématické zaměření jednotlivých kategorií MO dané úlohami domácí části školního kola, pravidla soutěže a další informace upřesňující organizaci příslušného ročníku MO jsou zveřejňovány Ústřední komisí Matematické olympiády v letácích, ve vybraných časopisech a na internetových stránkách MO. Termíny konání jednotlivých kol se stanovují tak, aby pokud možno nebylo narušeno pravidelné vyučování a obecný chod škol.

Úkoly soutěžících

Úkolem soutěžících je samostatně vyřešit úlohy daného soutěžního kola a řešení zapsat tak, aby bylo možno sledovat jejich myšlenkový postup. Každý soutěžící odevzdává kromě „čistopisu“ s čitelně popsaným řešením i takzvané „šmíráky“, což jsou listy s průběžnými výpočty a poznámkami soutěžícího.

Utajení textů úloh je nezbytnou podmínkou regulérnosti soutěže. Se zněním úloh (s°výjimkou úloh domácí části školního kola) se soutěžící seznamují bezprostředně při zahájení vlastního soutěžního kola).

Žáci pozvaní do třetího, tedy krajského kola kategorie Z9, řeší samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Každý soutěžící vypracuje řešení úloh na list formátu A4 a každou úlohu začíná na novém listě. Nehodnotí se jen výsledek, ke kterému žáci došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly. Řešení úloh jsou obodovány a podle součtu získaných bodů je sestaveno pořadí účastníků krajského kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla alespoň polovinu z dosažených bodů), se stanou úspěšnými řešiteli krajského kola a nejlepší z nich jsou vyhlášeni vítězi krajského kola Matematické olympiády.

Soutěžní úlohy jsou navrženy tak, aby nezkoumaly jen schopnost aplikovat získané vědomosti ze školy, ale aby vybídly k logickým úvahám na základě základních znalostí o struktuře a vlastnostech matematiky.

3 Úloha Z9-III-1

3.1 Zadání a vzorové řešení

Doplňte do čtverečků přirozená čísla tak, aby:

- součet všech doplněných čísel byl 44,
- součet čísel v každém čtyřčtverečkovém čtverci byl stejný,
- nejmenší doplněné číslo bylo liché,
- uprostřed čtverce bylo jednociferné číslo.

	7	
8		4
	2	

Obr. 3.1: Tabulka ze zadání

Vzorové řešení[2]

Prostřední číslo, které je společné pro všechny čtyřčtverečkové čtverce označme x a všechny ostatní chybějící čísla nahradíme písmeny z abecedy, tedy *a, b, c* a *d.* Tabulka nyní vypadá takto: (obr. 3.2).

a	7	b
8	x	4
c	2	d

Obr. 3.2: Tabulka s proměnnými

Nyní si již můžeme zadání přepsat do, pro nás příjemnějších, matematických rovnic. Na základě první podmínky snadno získáme rovnici:

$$a+b+c+d+x=44 \tag{1}$$

Druhou podmínku můžeme přepsat například takto:

[2] (upravené podle [1])

$$(a+7+8+x)=(7+b+x+4)=(8+x+c+2)=(x+4+2+d)$$

Což je $(a+x+15)=(b+x+11)=(c+x+10)=(d+x+6)$

Jak vidíme, lze pomocí jediného čtverce vyjádřit všechny ostatní, tedy:

$$\begin{aligned} a+x+15&=b+x+11\\ a+x+15&=c+x+10\\ a+x+15&=d+x+6 \end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} b&=a+4\\ c&=a+5\\ d&=a+9 \end{aligned} \tag{2}$$

Za neznámé *b*, *c*, *d* dosadíme do rovnice (1) výrazy z posledních tří vztahů (2), dostaneme:

$$a+(a+4)+(a+5)+(a+9)+x=44$$

neboli $$4a+x=26$$

Odtud tabulka všech možností pro různé hodnoty neznámé *a* s dopočtem pro *x*.

a	1	2	3	4	**5**	**6**
x	22	18	14	10	**6**	**2**

Není řešením, protože má být x <10

a=5; x=6; b=9; c=10; d=14
nejmenší je 5, což je liché => toto <u>může být řešení</u>

a=6; x=2; b=10; c=11; d=15
nejmenší doplněné číslo není liché => není řešením

Výsledek:

5	7	9
8	6	4
10	2	14

Obr. 3.3: Výsledná podoba tabulky

Různé strategie řešení

Jiný, méně používaný (pouze 3 žáci z 51) způsob řešení je založen hlavně na logické úvaze a správném pochopení všech podmínek které jsou uvedeny v zadání. Kdybychom posuzovali náročnost jednotlivých způsobů řešení, byl by tento způsob kvalitnější v porovnání se vzorovým řešením. Žáci vypozorovali již ze zadání vlastnosti doplňovaných čísel a jejich vzájemné propojení a dokázali tak ihned odvodit vztahy (3). Jak to provedli, podrobně vysvětlím níže.

Pro přehlednost na začátku znovu uvedu ony podmínky, které musí výsledná tabulka splňovat a očísluji je po řadě od 1 do 4, což mi pomůže při vysvětlení, proč daná série čísel nesplňuje podmínky, a které konkrétně.

Musí být splněny podmínky:

|1| součet všech doplněných čísel je 44

|2| součet čísel v každém čtyřčtverečku je stejný

|3| nejmenší doplněné číslo je liché

|4| uprostřed čtverce je jednociferné číslo

a	7	b
8	x	4
c	2	d

Obr. 3.4

Pro splnění podmínky |4|, musí být x jednociferné, tedy $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ a

aby byla splněna podmínka |2|, musím do čtverečků doplňovat čísla tak, aby platilo:

b je o 4 větší než a

d je o 9 větší než a (3)

c je o 5 větší než a

a	7	b
8	x	4
c	2	d

Obr. 3.5: Porovnání dvou sousedních čtyřčtverců

Tyto důsledky můžeme vidět z obrázku (obr. 3.5) kde je zvýrazněn první a druhý čtyřčtverec, kde jsou hodnoty 7 a x společné pro oba čtyřčtverce. Jelikož musí být součet v každém z nich stejný a $7+x$ se bude nacházet v obou součtech, pak je zřejmé, že $a + 8 = b + 4$. Odsud pak víme, že je b o 4 větší než a. Stejnou úvahou pak získáme i ostatní uvedené důsledky.

Nyní dosazujeme za x (čísla od 1 do 9) a podle něj měníme a tak, aby po dosazení zbylých čísel byla splněna i podmínka |1| a |3|.

Například pro $x = 5$, by to vypadalo takto:

<u>$x = 5$</u>

$a = 1$…součet doplněných čísel je 27, nevyhovuje podmínka|1|[3]

$a = 2$…nevyhovuje podmínka |3|

$a = 3$…součet je 35 , nevyhovuje podmínka |1|

$a = 4$…nevyhovuje podmínce |3|

$a = 5$…součet je 43, nevyhovuje podmínka |1|

$a = 6$… součet je 47, nevyhovuje podmínce |1|-> příliš velký součet

řešením tedy nemůže být $x = 5$

<u>x = 6</u>

$a = 1$…součet doplněných čísel je 28, nevyhovuje |1|

$a = 2$…nevyhovuje |3|

$a = 3$…součet doplněných 36, nevyhovuje |1|

$a = 4$…nevyhovuje |3|

<u>$a = 5$…součet doplněných 44, a je liché,součet všech čtverců 26</u>

zjistíme, že pouze kombinace $x = 6$, $a = 5$, splňuje všechny stanovené podmínky, je tedy řešením; dopočítáme že $b = 9$, $c = 10$, $d = 14$.

[3] Pokud volíme x=5, a=1, jsme schopni dopočítat ostatní neznámé z důsledků jež jsme vyvodili z podmínky (2) – b je o 4 větší než a, b = 4+1=5; podobně d = 9+1=10; c = 5+1=6. Součet doplněných čísel = $a+b+c+d+x$= 1+5+6+10+5 = 27

Jiný způsob řešení

Další řešení, na které bych chtěla upozornit pracuje na podobném principu jako předchozí, jen s tím rozdílem, že tentokrát jsme se zaměřili nejprve na podmínku týkající se nejmenšího doplněného čísla. Tento typ řešení si zvolila žákyně Karolína Dvořáková (kopie originálu, příloha I.). Řešení předkládám formou přesného přepisu protokolu zmíněné studentky, abychom mohli posoudit kvalitu této práce.

Tabulka původně vypadala takto:

	7	
8		4
	2	

Je zřejmé, že nejmenší číslo, které budeme doplňovat (které musí být liché) a které doplníme do levého horního rohu, protože má okolo sebe největší čísla, která jsou napsaná v tabulce, to jsou 7 *a* 8.

Poté, co jsem dosadila do levého horního rohu 1 *a poté* 3, *přes všechno zkoušení mi stále nevycházelo, aby součet všech doplněných čísel byl* 44. *Tudíž jsem do tohoto rohu dosadila následující vyšší liché číslo, tj.* 5.

5	7	
8		4
	2	

Do prostředního čtverečku by teoreticky šlo dosadit také číslo 5, *protože nikde v zadání nebylo řečeno, že se čísla nesmí opakovat.*

V každém čtyřčtverečkovém čtverci by měl tudíž vyjít součet 25. *Podle toho doplníme zbytek tabulky.*

5	7	9
8	5	4
10	2	14

$5+9+5+10+14=43$

číslo by se mělo rovnat 44 => *toto je špatný výsledek*

$44-43=1$

Do tabulky do prostředního čtverečku tedy doplníme o 1 *vyšší číslo, tedy* 6 *(využíváme poznatku, že když o* 1 *zvýšíme číslo v prostředním čtverečku a také o* 1 *zvýšíme součet, který musí vyjít v každém čtyřčtverečkovém čtverci, doplněná čísla v rozích se nemění).*

Součet v čtyřčtverečkových čtvercích tedy bude 26*.*
Doplněná tabulka bude vypadat takto:

5	7	9
8	6	4
10	2	14

5 + 7 + 8 + 6 = 26

7 + 9 + 6 + 4 = 26

8 + 6 + 10 + 2 = 26

6 + 4 + 2 + 14 = 26

Zkouška: 5 + 6 + 9 + 10 + 14 = 44

3.2 Rozbor chyb žáků

Ukázalo se, že největší překážkou v tomto úkolu nebyly nedostatečné znalosti či zbytečné chyby z nepozornosti, nýbrž prosté pochopení samotného zadání. Onen „kámen úrazu“ byl ve větě „součet všech doplněných čísel roven 44“. Podle poznámek v řešení se domnívám, že někteří řešitelé za „doplněná“ čísla považovali nejen námi doplněná čísla *x*; *a*; *b*; *c*; *d*, nýbrž všechna čísla, včetně těch, která jsou již v tabulce zapsána. Jak už bylo řečeno dříve, nehodnotí se pouze výsledek, ale také postup, který k němu vedl.

Potíže s porozuměním zadání mělo 23 žáků z 51, nedomnívám se však, že by důvodem špatné interpretace požadavků mohlo být nejasné či neúplné zadání.

Postupy v řešení úlohy těmito žáky se - až na onen součet doplněných čísel – nijak neliší od ostatních, již uvedených způsobů řešení. Jednu z těchto prací si můžete prohlédnout v příloze V. Výsledek k němuž došli, je zobrazen na (obr. 3.6).

1	7	5
8	1	4
6	2	10

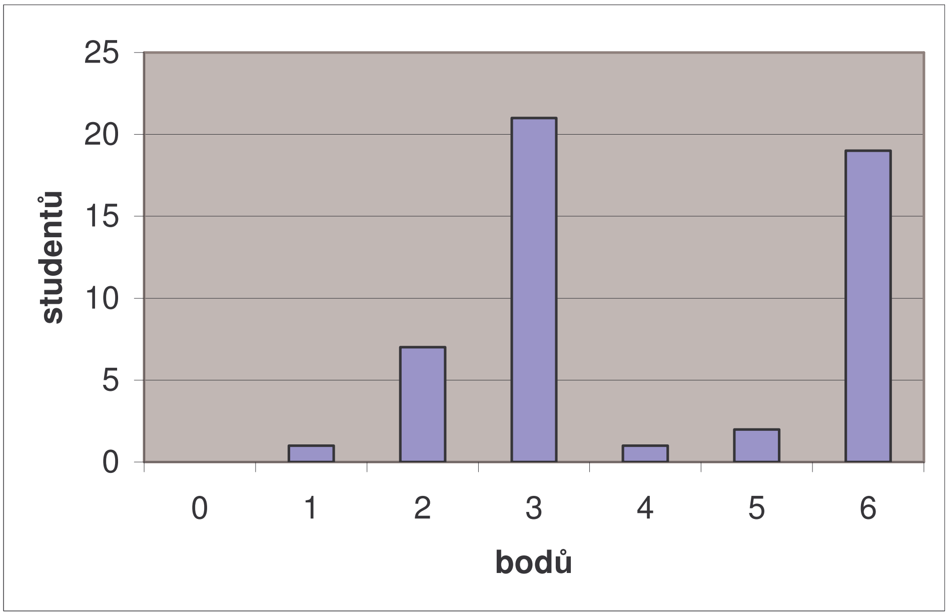
Obr. 3.6: Výsledek žáků kteří špatně pochopili zadání

3.3 Vyhodnocení úkolu

Prostudovala jsem řešení 51 studentů a s radostí mohu konstatovat, že pouze jediný student úlohu nedořešil a několik dalších jedinců dosáhlo řešení pomocí náhodného zkoušení. Maximální počet 6-ti bodů dosáhlo 19 studentů. Jak si ale můžete všimnout v grafu (obr. 3.8), velké procento studentů získalo pouze polovinu z celkového počtu bodů. Těchto 23 studentů špatně pochopilo zadání, což způsobilo chybný výsledek řešeného příkladu (viz. Rozbor chyb žáků).

Počet bodů	Četnost	Relativní četnost(%)
0	0	0,0
1	1	2,0
2	7	13,7
3	21	41,2
4	1	2,0
5	2	3,9
6	19	37,3

Obr. 3.7: Tabulka četností

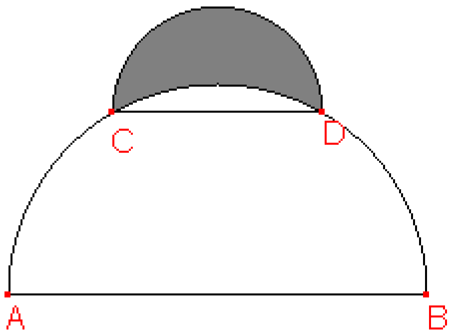


Obr. 3.8: Graf četností

4 Úloha Z9-III-2

4.1 Zadání a vzorové řešení

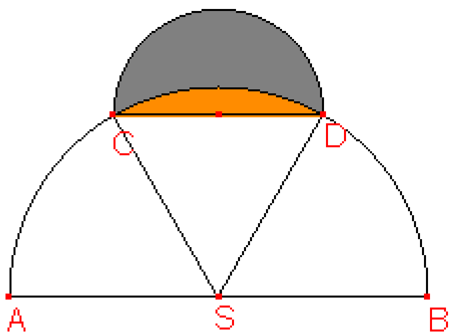
Určete obsah šedého měsíčku z obrázku (obr. 4.1), pokud víte, že průměr AB větší polokružnice má délku 2 cm, průměr CD menší polokružnice má délku 1 cm a platí $AB \parallel CD$.



Obr. 4.1: zadání úkolu Z9-III-2

Vzorové řešení

Označíme S střed úsečky AB. Trojúhelník SCD je rovnostranný (s délkou strany 1 cm). Obsah šedého měsíčku vypočítáme tak, že od obsahu menšího půlkruhu (s průměrem 1 cm) odečteme obsah úseče většího kruhu (obr. 4.2).

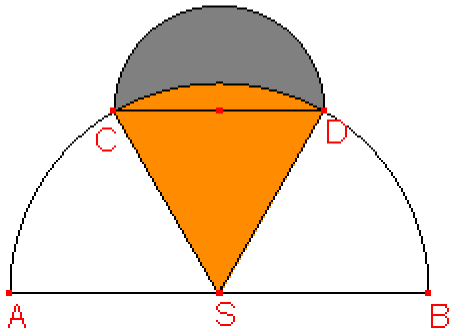


Obr. 4.2: Kruhová úseč většího kruhu

Obsah menšího půlkruhu:

$$S_M = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{cm}^2$$

Obsah úseče: Vypočteme jako rozdíl obsahu příslušné kruhové výseče (šestina obsahu většího kruhu) a obsahu rovnostranného trojúhelníku *SCD* (obr. 4.3).



Obr. 4.3: Kruhová výseč na větší kružnici

Obsah výseče:

$$S_V = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{cm}^2$$

Obsah trojúhelníku:

Vypočteme obsah rovnostranného trojúhelníku díky znalosti vzorce $S_\Delta = \dfrac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4}$

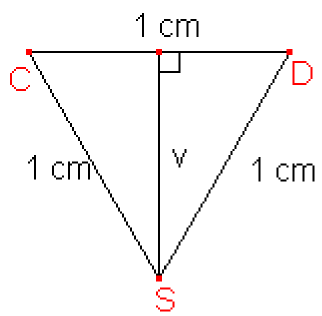
nebo výpočtem výšky trojúhelníka a uplatněním vzorce pro obsah obecného Δ.

Z Pythagorovy věty:

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + v^2$$

$$v^2 = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Obr. 4.4 – rovnoramenný Δ CDS

$$S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Obsah šedého měsíčku:

$$S = S_M - \left(S_V - S_\Delta\right) = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}\right)\text{cm}^2$$

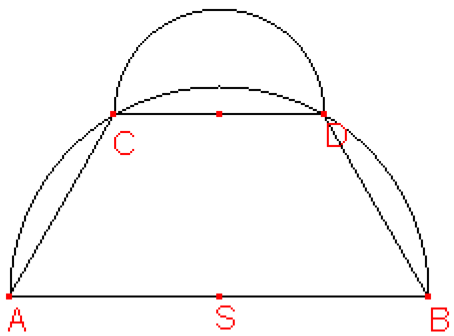
4.2 Různé strategie řešení

Jedinou možností, jak získat obsah vyšrafované části je odečíst obsah úseče větší kružnice od obsahu menší půlkružnice. V tomto bodě jsou všechny postupy jednotné a proto se tímto krokem nebudeme nijak zabývat a soustředíme se na různé způsoby jak žáci získali obsah oné úseče („měsíčku“).

Lichoběžník

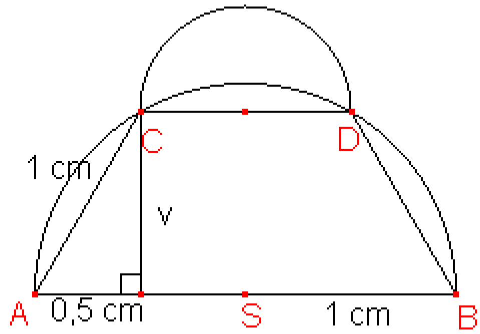
Jeden z pěti studentů, kteří k vypočtení obsahu měsíčku použili rovnoramenný lichoběžník, byl i Vít Petřina, jehož řešení naleznete v příloze VII.

Obsah měsíčku získali odečtením obsahu rovnoramenného lichoběžníka (tvoří polovinu šestiúhelníka) od obsahu větší kružnice a následným vydělením třemi .

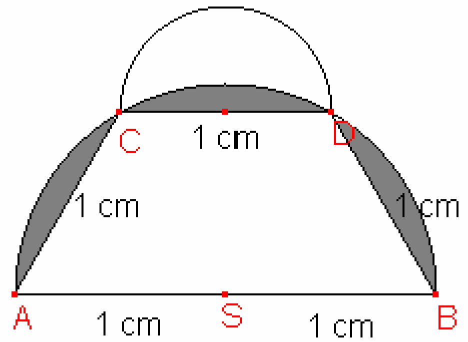


Obr. 4.5: Rovnoramenný lichoběžník vepsaný do větší půlkružnice

$$v = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}$$



$$S_{lichobeznik} = \frac{\left(|AB| + |CD|\right)}{2} \cdot v = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



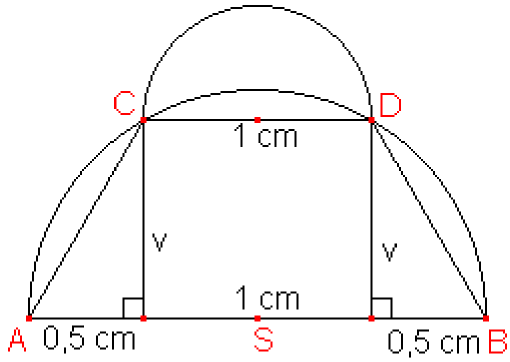
Obr.4.6: Tři identické měsíčky

Všimněme si, že po odečtení $S_V - S_{lichobeznik}$ zůstanou tři identické měsíčky. Hledaný obsah jednoho měsíčku tedy získáme vydělením třemi.

$$S_{měsíčku} = S_V - S_{lichobeznik} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} cm^2$$

Lichoběžník 2

Zdá se, že dva žáci neznali vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku, a nebo si neuvědomili, že se jedná o lichoběžník a rozřezali jej na dva pravoúhlé trojúhelníky. Obdélník a obsahy těchto útvarů pak odečetli od větší půlkružnice, čímž opět dostali obsahy tří identických měsíčků.



Obr. 4.7: Rozřezaný lichoběžník

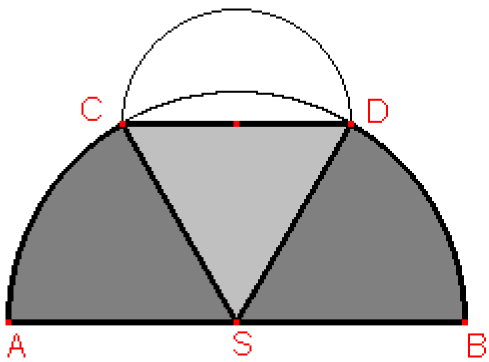
Obsah obdélníku: $S_1 = 1 \cdot v = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Obsah měsíčku: $S_m = \left[S_V - (2 \cdot S_2 + S_1)\right] : 3 = \ldots = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Jiné řešení

Dva žáci použili vzorec na výpočet kruhové výseče $\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ pro úhel $\alpha = 60^\circ$ (šestiúhelník) a od obsahu půlkruhu větší kružnice odečetli obsah dvou těchto výsečí a také obsah rovnostranného trojúhelníku *CDS*.



4.3 Rozbor chyb žáků

Téměř všichni žáci dokázali slovně popsat správný postup, jak se dopočítat k hledanému obsahu zvýrazněné části. Způsoby se lišily, nicméně plán byl dobrý. Důvodem, že se někteří řešitelé nedopočítali byly hrubé chyby ve výpočtech.

Dva žáci si, v lepším případě, špatně přečetli zadání a průměr AB ze zadání považovali za poloměr větší kružnice, v horším případě pak neznají rozdíl mezi těmito pojmy.

Jednou z početních chyb bylo také opomenutí vydělit obsah větší kružnice dvěmi a tak nepočítali s polokružnicí, nýbrž s obsahem celé kružnice. Je to sice chyba, ale není natolik závažná, jako například tvrzení, že $\frac{60}{360}=\frac{1}{60}$ či $\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,75}}{2}=\sqrt{0,75}$. Za nejhorší prohřešek při řešení této úlohy však považuji chybný výpočet Pythagorovy věty, jehož se jeden z žáků dopustil.

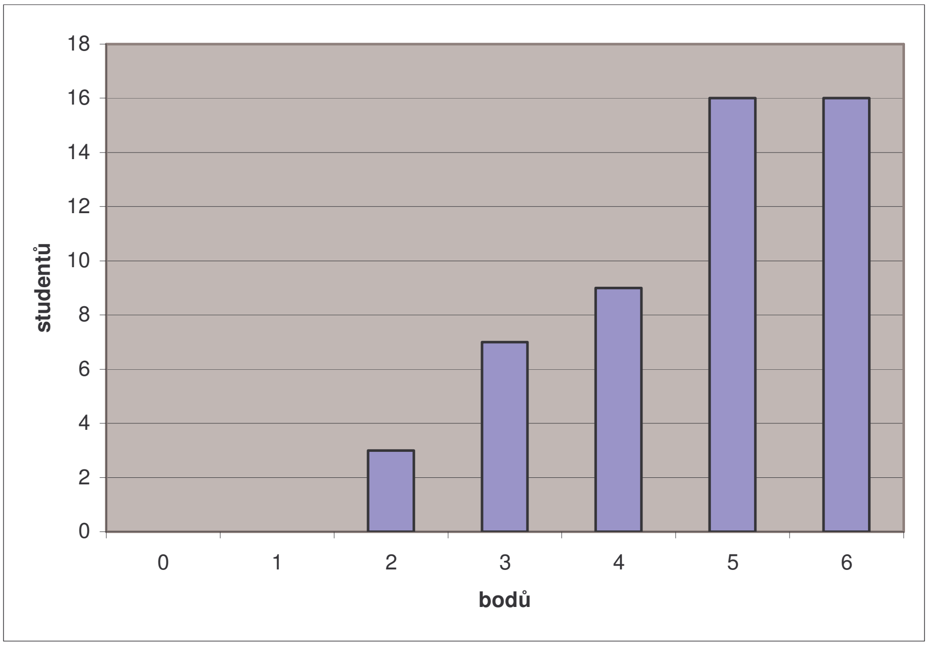
Velmi častou chybou bylo vyčíslování hodnot během výpočtu a neustálé zaokrouhlování, čímž se stal výsledek nepřesným. Práce některých z těchto 22 žáků je k nahlédnutí v přílohách VII až X.

4.4 Vyhodnocení úkolu

Jak lze vidět z grafického znázornění získaného počtu bodů (obr. 4.9), žáci neměli při řešení větší potíže. Dvě nejpočetnější skupiny získaly pět či šest bodů. Protože maximum bodů, které bylo možno získat bylo 6, vyvstává otázka, proč tolik žáků o ten jeden bod přišlo. Oním důvodem byl nepřesný výsledný obsah, k němuž žáci dospěli vyčíslením iracionálního čísla, jeho zaokrouhlením a následným opětovným použitím při dalších výpočtech.

Počet bodů	Četnost	Relativní četnost(%)
0	0	0,0
1	0	0,0
2	3	5,9
3	7	13,7
4	9	17,6
5	16	31,4
6	16	31,4

Obr. 4.8: Tabulka četnosti



Obr. 4.9: Graf četnosti

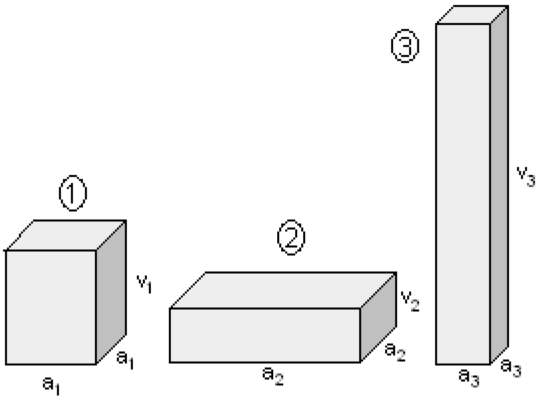
5 Úloha Z9-III-3

5.1 Zadání a vzorové řešení

Kuba našel ve sklepě tři krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou. První byla dvakrát vyšší než druhá. Druhá byla 1,5 krát širší než první. Třetí byla třikrát vyšší než první a dvakrát užší než první. V jakém poměru jsou objemy krabic?

Vzorové řešení [4]

Mám tedy tři krabice tvaru kvádru s čtvercovou podstavou :



Obr. 5.1: Zadané kvádry

Zadání si vyjádřím pomocí proměnných jež jsem si definovala v obrázku pro jednotlivé kvádry.

První krabice	2 krát vyšší než druhá	$v_1 = 2v_2$
Druhá krabice	1,5 krát širší než první	$a_2 = 1,5a_1$
Třetí krabice	3 krát vyšší než první	$v_3 = 3v_1$
Třetí krabice	2 krát užší než první	$a_3 = 0,5a_1$

[4] Upraveno autorkou práce

Zadání zaneseme do přehledné tabulky:

krabice	délka podstavné hrany	výška
první	a_1	$v_1 = 2v_2$
druhá	$a_2 = 1{,}5a_1$	v_2
třetí	$a_3 = 0{,}5a_1$	$v_3 = 3v_1$

Rozměry nádob vyjádřím pomocí a_3 a v_2 (není důležité, podle kterých neznámých budeme vyjadřovat rozměry krabic, při špatné volbě si můžeme výpočet pouze trochu zkomplikovat):

krabice	délka podstavné hrany	výška
první	$a_1 = 2a_3$	$v_1 = 2v_2$
druhá	$a_2 = 3a_3$	v_2
třetí	a_3	$v_3 = 6v_2$

Vypočítám objemy pro jednotlivé krabice dosazením do vzorce pro objem kvádru $V = abv$, kde *a, b* jsou rozměry podstavy. Jelikož je naše podstava čtvercová a tedy $b = a$, budeme objem počítat jako $V = a^2v$.

první krabice $V_1 = a_1^2 v_1 = (2a_3)^2 \cdot 2v_2 = 8a_3^2 v_2$

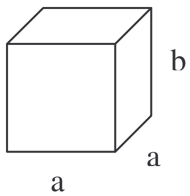
druhá krabice $V_2 = a_2^2 v_2 = (3a_3)^2 \cdot v_2 = 9a_3^2 v_2$

třetí krabice $V_3 = a_3^2 v_3 = a_3^2 \cdot 6v_2 = 6a_3^2 v_2$

Odtud je zřejmé, že se jedná o poměr $V_1 : V_2 : V_3 = 8 : 9 : 6$.

5.2 Různé strategie řešení

Až na jedinou výjimku, se řešení jednotlivých žáků nijak zásadně nelišilo. Při výpočtu tohoto příkladu ani není příliš prostoru pro obměny, přesto se ale našel žák, jehož postup byl, oproti ostatním, rozdílný. Následujícím postupem vypočítal úlohu žák Ladislav Beneš, kopie jeho protokolu v příloze XIII, zde tento postup pouze doplním o pár komentářů.



Ze zadání pro rozměry podstavy:

$a_1 : a_2 = 1 : 1{,}5$

$a_1 : a_3 = 2 : 1$

Tyto dva poměry stran podstavy převedu na společný poměr všech tří stran podstavy:

$$a_1 : a_2 : a_3 = 2 : 3 : 1$$

Podobně ze zadání získám poměry výšek

$b_1 : b_2 = 2 : 1$

$b_3 : b_1 = 3 : 1$

a převedu na společný poměr výšek jednotlivých kvádrů:

$$b_1 : b_2 : b_3 = 2 : 1 : 6$$

Nyní , jelikož je objem $V = a^2 b$, dokážeme určit i poměr objemů takovýchto kvádrů.

$V_1 : V_2 : V_3 = a_1^2 b_1 : a_2^2 b_2 : a_3^2 b_3 = 2^2 \cdot 2 : 3^2 \cdot 1 : 1^2 \cdot 6 = 8 : 9 : 6$

Hledaný poměr objemů je tedy $8 : 9 : 6$.

5.3 Rozbor chyb žáků

Co se týče chyb, kterých se žáci dopustili, jedná se téměř výhradně o tři úrovně. V prvním případě se jedná o nepozornost, kdy si žáci důkladně nepřečetli zadání a nevšimli si, že podstava kvádru je čtvercová.

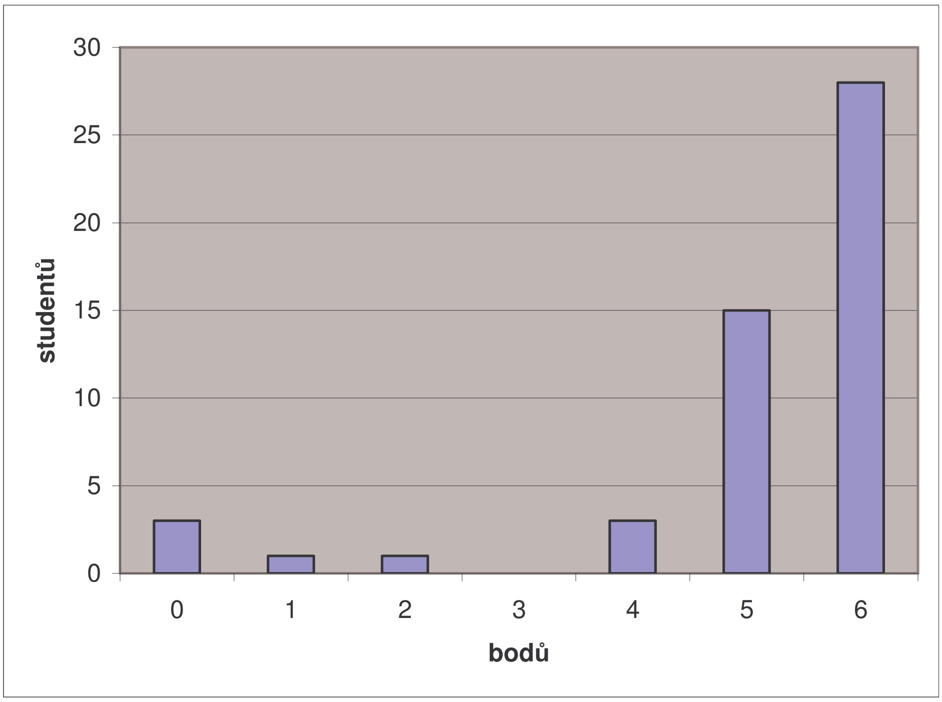
Poměrně značné množství studentů sice vyřešilo danou úlohu správně, ale dosáhli toho zvolením rozměrů některé z krychlí a následným dopočítáním ostatních dle vztahů v zadání. U těchto postupů chybělo obecné řešení, a proto nebyly hodnoceny plným počtem bodů. Dalším důvodem pro neudělení plného počtu bodů, někdy i v kombinaci s absencí obecného řešení, byl zápis výsledného poměru, kde nebyl dodržen požadavek, aby byl poměr vyjádřen v celých číslech.

5.4 Vyhodnocení úkolu

Jak se zdá, ze všech úkolů v tomto kole olympiády, bylo vyřešení tohoto příkladu nejméně komplikované. Důkazem toho je i graf (obr. 5.3), zobrazující dosažený počet bodů. Samozřejmě se našlo i pár jedinců, kteří neuspěli, jejich počet je však minimální.

Počet bodů	Četnost	Relativní četnost(%)
0	3	5,9
1	1	2,0
2	1	2,0
3	0	0,0
4	3	5,9
5	15	29,4
6	28	54,9

Obr. 5.2: Tabulka četnosti



Obr. 5.3: Graf četnosti

6 Úloha Z9-III-4

6.1 Zadání a vzorové řešení

Při přijímacích zkouškách na univerzitu je každému zájemci o studium přidělován krycí kód složený z pěti číslic. Zkoušky organizoval důkladný, leč pověrčivý docent, který se před přidělováním kódů rozhodl vyřadit ze všech možných kódů (tj. 00000 až 99999) ty, které v sobě obsahovaly číslo 13, tedy číslici 3 bezprostředně následující po číslici 1. Kolik kódů musel docent vyřadit?

Vzorové řešení [5]

Na každém z pěti míst je možno dát čísla od nuly do devíti, tedy jednu z deseti cifer. Musíme si tedy uvědomit, že v tomto případě může byt na začátku i nula, dokonce několik nul. Kdybychom chtěli například spočítat, v kolika pěticiferných číslech je obsaženo číslo 13, pak by bylo řešení jiné, protože po umístění nuly na začátek by se z onoho čísla stalo číslo čtyřciferné (např. 0125Kč = 125 Kč). V tomto příkladu se nemusíme obávat umístění nul na začátku zápisu čísla, jelikož je v zadání uveden rozsah od 00000 do 99999.

0-9 0-9 0-9 0-9 0-9

Obr. 6.1: Rozsah čísel k možných dosadit na pozici

[5] upraveno autorkou práce

Nejprve zjistíme, kolik kódů obsahuje číslo 13 jednou. Třináctka se může nacházet na čtyřech různých místech (obr. 6.2). Na každé volné místo můžeme umístit jedno z deseti cifer, je tedy možné sestavit $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ čísel.

1) 1 3 __ __ __	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
2) __ 1 3 __ __	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
3) __ __ 1 3 __	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
4) __ __ __ 1 3	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

Obr. 6.2: Možná rozmístění pro třináctku

V těchto 4000 číslech jsou dvakrát započítány ty, které obsahují dvě čísla 13. Musíme ale zjistit, kolik takových kódů je.

a) 1 3 1 3 __

b) __ 1 3 1 3

c) 1 3 __ 1 3

Obr. 6.3: Možné rozmístění pro dvě třináctky

Zde vidíme tři možné rozestavení dvou třináctek (obr 6.3), z každého tohoto typu můžeme vytvořit deset různých kódů, cekem tedy 30 kódů.

Celkový počet kódů je 4000 – 30 = 3970. Pověrčivý docent vyřadil 3970 kódů z celkového počtu 10 000.

6.2 Různé strategie řešení

Ve vzorovém řešení jsme postupně vypočítali kolik je kódů obsahujících jedenkrát číslo třinác a od tohoto počtu potom odečetli ta čísla, která obsahovala třináctky dvě. Není však nutné tyto dva kroky oddělovat, jak nyní ukáži na řešení žáka Petra Procházky, který ihned v průběhu výpočtu nepovoloval opětovné započítání již vyřazeného kódu. Kvůli lepší srozumitelnosti doplním jeho řešení o obrázky a podrobnější vysvětlení kroků. Přesnou kopii Petrovy práce naleznete v příloze XV.

Libovolnou číslici označím x, $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. *Číslo 13 (tedy jednička následovaná trojkou) může být ve čtyřech různých pozicích a pro každou z nich zvlášť vypočítám počet kódů. Při tom hlídám, zda se vlevo od třináctky neobjeví další třináctka, protože takový kód byl již dříve vyřazen (při zjištění různých pozic pro číslo* 13 *postupujeme zleva doprava, proto například číslo* 13213 *vyřadíme hned na začátku kvůli prvnímu číslu* 13*, když ale dojdeme k možnosti umístit* 13 *na konec, toto stejné číslo bychom chtěli vyřadit znovu, což by byla chyba).*

Tři třináctky za sebou být nemohou, proto stačí dávat pozor pouze na jeden další výskyt třináctky vlevo.

$13xxx$ <u>*1000 kódů*</u> *(za každé x mohu dosadit jedno z deseti číslic)*

$x13xx$ $10 \cdot 100 =$ <u>*1000 kódů*</u>

$xx13x$ $100 \cdot 10 = 1000$ *kódů, nalevo od třináctky se mi může vyskytnout další číslo třináct a taková čísla již byla započítána v prvním kroku a proto je nebudu počítat znovu. Možností pro situaci* $1313x$ *je tedy deset, pro každé možné x. K vyřazení je tedy* 1000 – 10 = <u>*990 kódů*</u>.

$xxx13$ *opět* 1000 *kódů, tentokrát však mohou být nalevo třináctky na dvou místech a v obou případech se jedná o kódy které již vyřazeny byly, proto je znovu vyřazovat nebudeme.* $13x13$ *pro tuto možnost je to* 10 *kódů a pro* $x1313$ *dalších* 10 *kódů. Celkem tedy pro třináctku vyskytující se na konci musíme vyřadit* 1000 – 10 – 10 = <u>*980 kódů*</u>.

Pokud tedy sečteme všechny vyřazené kódy, dojdeme k přesvědčení, že docent vyřadil 1000 + 1000 + 990 + 980 = 3970 *kódů.*

Jiný způsob řešení

Tento příklad by se dal vyřešit i principem inkluze a exkluze pro čtyři množiny (pro čtyři způsoby rozmístění třináctky). Nemá smysl rozebírat jak tento princip funguje, stačí vědět, že pro průnik čtyř množin by zápis dle tohoto principu vypadal takto:

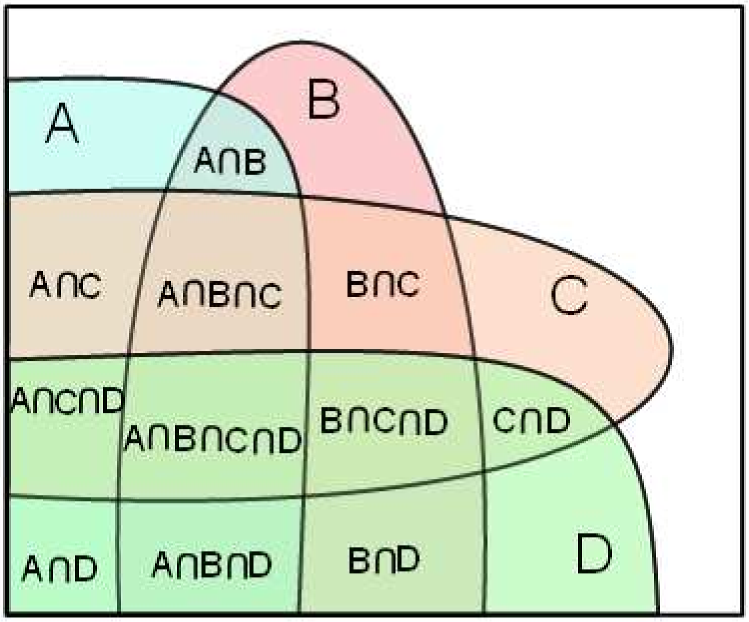
$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| -$$

$$- |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap D| - |B \cap C \cap D| + |A \cap B \cap C \cap D|$$

Označení:

$|A|$ počet prvků této konečné množiny A

$|A \cup B \cup C \cup D|$ celkový počet kódů k vyřazení



Obr. 6.4: Vennův diagram pro čtyři množiny

A všechny kódy, které mají 13 na začátku $1\,3\,x\,x\,x$ *těchto kódů je* 1000

B $x\,1\,3\,x\,x$ *těchto kódů je* 1000

C $x\,x\,1\,3\,x$ *těchto kódů je* 1000

D $x\,x\,x\,1\,3$ *těchto kódů je* 1000

$|A \cap B|$ Všechny kódy z této množiny jsou současně prvky množiny A a také množiny B, ale jelikož by číslice na druhé pozici musela být 1 a současně 3, což není možné, je tedy počet prvků v této množině $A \cap B$ nulový.

$|A \cap C|$ Každý prvek této množiny je současně prvkem množiny A i C, proto musí splňovat podmínku, že třináctka zabírá první dvě místa a také třetí a čtvrté, vypadá tedy takto: $1313x$. Takovýchto kódů je celkem 10.

$|A \cap D|$ Pokud mají prvky této množiny splňovat podmínku $13xxx$ a také zároveň $xxx13$, pak bude vypadat takto: $13x13$. Takovýchto kódů je 10.

$|B \cap D|$ $x1313$ kódů v této množině je 10.

Pro zbylé průniky dvou množin vždy nastane situace kdy se na jednom místě má nacházet současně číslo 1 a číslo 3, což přirozeně nemůže nastat, proto je průnik těchto množin, podobně jako $|A \cap B|$ nulový.

Kódy mají být pětimístné, a proto není možné poskládat vedle sebe třikrát číslici 13, průsečíky tří a více množin tak musí být nulové.

Pokud se budeme řídit vzorcem uvedeným v úvodu, byl by celkový počet kódů k vyřazení:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 - 0 - 10 - 10 - 0 - 10 - 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 3970$$

Princip inkluze a exkluze je velmi užitečný při práci s větším počtem množin, obzvláště pokud nejsou průniky množin nulové, je řešení mnohem přehlednější.

6.3 Rozbor chyb žáků

O řešitelích, kteří získali plný počet bodů nemá smysl mluvit, takže se nyní zaměřím na ta řešení, kdy k úspěchu chyběl už jen kousek. V těchto případech studenti zjistili, že jsou čtyři možná umístění pro číslo 13 tak, jak je popsáno ve vzorovém řešení. V této fázi mají 4000 kódů, která je zapotřebí vyřadit, ale některá z nich jsou započítána dvakrát. Tuto skutečnost si ale 17 studentů neuvědomilo a číslo 4000 uvedli jako počet čísel nutných k vyřazení.

Další 3 studenti se nedali zastavit a uvažovali i o možnosti že se v čísle vyskytují třináctky dvě a v oněch čtyřech tisících kódů jsou některé započítány dvakrát. Správně určili i tři možné rozestavění pro dvě třináctky a pro každou z těchto možností chybí stanovit poslední cifru (čísla od 0 do 9 – 10 cifer). Tito 3 žáci však nepočítali se všemi možnostmi pro stanovení poslední cifry a určili tedy, že vyřadit je nutné $4000 - 3 = 3997$ kódů.

Toto byli řešitelé, kteří sice nedopočítali, ale byli na dobré cestě. Našli se bohužel i tací, u kterých se mi ale vůbec nepodařilo zjistit jak uvažovali, jelikož kromě výpočtů nijak nekomentovali své myšlenkové pochody. Jeden z těchto případů byla i žákyně, která chtěla vyřadit 18 115 kódů, a i když by mě to velmi zajímalo, nevím jak na to přišla.

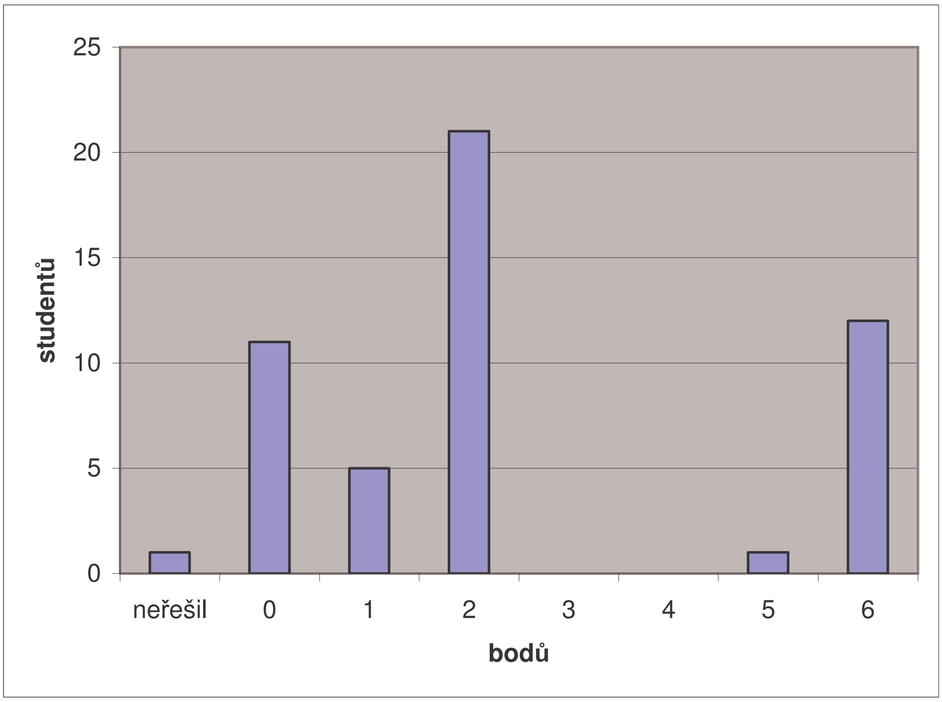
Pouze jediný student se pokusil zabránit výskytu nuly na začátku kódu, svou práci však nedokončil.

6.4 Vyhodnocení úkolu

Studenti, jež řešili tuto úlohu spadají do skupin podle toho, jak daleko se v řešení dostali. Jsou tedy jen tři silnější skupiny – úspěšní řešitelé (6b), nedokončené řešení (2b) a neúspěšní řešitelé. Tento fakt je patrný i z grafu (obr. 6.6), kde je znázorněno množství studentů pro určité bodové ohodnocení.

Počet bodů	Četnost	Relativní četnost (%)
neřešil	1	1,96
0	11	21,6
1	5	9,8
2	21	41,2
3	0	0,0
4	0	0,0
5	1	2,0
6	12	23,5

Obr. 6.5 - Tabulka četnosti



Obr. 6.6 - Graf četnosti

7 Statistika úspěšnosti úloh Z9-III-1-4

Jak vidíme z tabulky (obr. 7.1), nejlépe dopadla třetí úloha a hned za ní úloha druhá. Obě tyto úlohy měly geometrický základ, což zdá se, žákům lépe vyhovovalo. Horších výsledků jsme se pak dočkali u první úlohy, kde bylo zapotřebí logického uvažování. Nejméně bodů pak bylo uděleno v poslední úloze, což není nijak velkým překvapením, vzhledem k tomu, že kombinatorika u žáků nikdy nebyla nijak zvláště oblíbená.

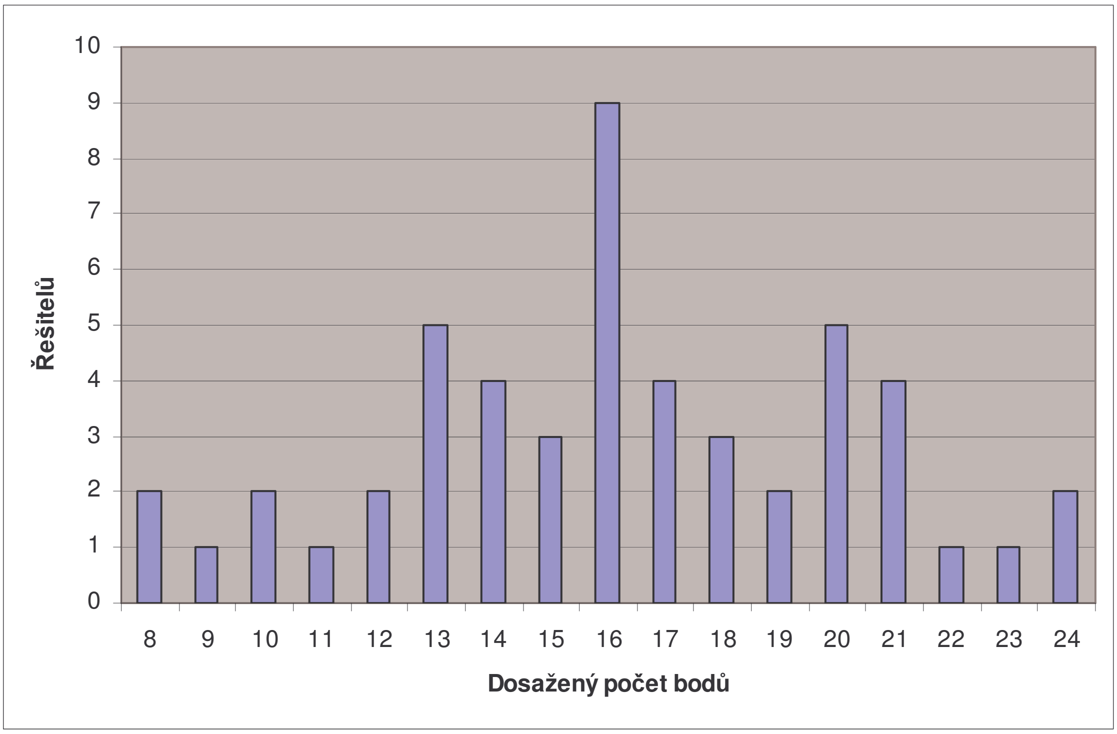
	úloha I.		úloha II.		úloha III.		úloha IV.	
Bodů	Četnost	Relativní četnost(%)	Četnost	Relativní četnost(%)	Četnost	Relativní četnost(%)	Četnost	Relativní četnost(%)
neřešil	0	0,0	0	0,0	0	0,0	1	1,96
0	0	0,0	0	0,0	3	5,9	11	21,6
1	1	2,0	0	0,0	1	2,0	5	9,8
2	7	13,7	3	5,9	1	2,0	21	41,2
3	21	41,2	7	13,7	0	0,0	0	0,0
4	1	2,0	9	17,6	3	5,9	0	0,0
5	2	3,9	16	31,4	15	29,4	1	2,0
6	19	37,3	16	31,4	28	54,9	12	23,5

Obr. 7.1: Tabulka četnosti všech jednotlivých úloh

Rozdíly mezi jednotlivými řešiteli tohoto kola matematické olympiády jsou patrné z tabulky obsahující celkový dosažený počet (obr. 7.2) a četnost žáků, jež tento počet získalo. Jak vidíme, nejméně bodů získali dva žáci (8b), zatímco maximum bodů (24 b), získali dva žáci. Žáci průměrně získali 13 až 19 bodů.

Dosažený počet bodů	Absolutní četnost	Relativní četnost(%)
8	2	3,92
9	1	1,96
10	2	3,92
11	1	1,96
12	2	3,92
13	5	9,80
14	4	7,84
15	3	5,88
16	9	17,65
17	4	7,84
18	3	5,88
19	2	3,92
20	5	9,80
21	4	7,84
22	1	1,96
23	1	1,96
24	2	3,92

Obr. 7.2: Tabulka dosažených bodů jednotlivých studentů



Obr. 7.3: Grafické znázornění dosažených bodů jednotlivých studentů

8 Závěr

V této bakalářské práci jsem analyzovala originální žákovská řešení III. kola 55. ročníku matematické olympiády kategorie Z9, jež je určena pro žáky 9. ročníku základních škol a žáky odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Jednalo se o řešení 51 žáků, kdy každý žák řešil 4 dané úlohy, z nichž dvě měly spojitost s geometrií.

Mým cílem bylo prostudovat strategie žákovských řešení a zjistit, které části jim dělaly potíže a jakých chyb se nejčastěji dopouštěli.

Práce může sloužit jako studijní materiál pro žáky se zvýšeným zájmem o matematiku, řešitele korespondenčních seminářů či jako pomůcka pro učitele připravujících řešitele matematických olympiád. Tato práce by se také dala využít v běžném vyučování vyšších ročníků jako opakování známého učiva a sloužit jako podmět k zamyšlení.

9 Literatura

[1] KRČÁL, Marek. *Matematická olympiáda* [online], poslední revize 20.února 2006 [cit. 2009-10-25]. < http://www.math.muni.cz/~rvmo/ >

[2] HEJNÝ Milan, MICHALCOVÁ Anna, *Skúmanie matematického riešitel'ského postupu,* Metodické centrum v Bratislave, Bratislava 2001

10 Seznam příloh

Z9-III-1

I. DVOŘÁKOVÁ Karolína, gymnázium J. V. Jirsíka

II. MORAVEC Jan, ZŠ Horní Planá

III. KOUKOLOVÁ Karolína, gymnázium Písek

IV. JAN Pavel, ZŠ Kaplice

V. BENEŠ Ladislav, ZŠ Milevsko

Z9-III-2

VI. VAVÁČKOVÁ Martina, gymnázium P.de Coubertina, Tábor

VII. PETŘINA Vít, gymnázium Jírovcova

VIII. SMUTNÁ Marta, ZŠ Nerudova

IX. HLUCHÝ Tomáš, ZŠ Dukelská

X. KRUPICOVÁ, gymnázium Vítězslava Nováka, J. Hradec

Z9-III-3

XI. DVOŘÁKOVÁ Karolína, gymnázium J. V. Jirsíka

XII. ČERMÁK Marek, ZŠ Čkyně

XIII. BENEŠ Ladislav, ZŠ Milevsko

Z9-III-4

XIV. VAVÁČKOVÁ Martina, gymnázium P. de Coubertina, Tábor

XV. PROCHÁZKA Petr, gymnázium Písek

Z9 - III - 1

Karolína Dvořáková
GJVJ

6 b

Tabulka původně vypadala takto:

	7	
8		4
	2	

Je zřejmé, že nejmenší číslo, které budeme doplňovat (které musí být liché) doplníme do levého horního rohu, protože má okolo sebe největší čísla, která jsou napsaná v tabulce, to jsou 7 a 8.

Poté, co jsem ~~n~~ dosadila do levého horního rohu 1 a poté 3, přes všechno zkoušení mi stále nevycházelo, aby součet všech doplněných čísel byl 44. Tudíž jsem do tohoto rohu dosadila následující vyšší liché číslo, tj. 5.

5	7	
8		4
	2	

- Do prostředního čtverečku by teoreticky šlo dosadit také číslo 5, protože nikde v zadání nebylo řečeno, že se čísla nesmí opakovat.

→ v každém čtyřčtverečkovém čtverci by měl tudíž vyjít součet 25. Podle toho doplníme zbytek tabulky.

5	7	9
8	5	4
10	2	14

5 + 9 + 5 + 10 + 14 = 43

čísla by se měla rovnat 44 => toto je špatný výsledek

44 - 43 = 1

Do tabulky do prostředního čtverečku tedy doplníme o 1 vyšší číslo, tedy 6 (využíváme poznatku, že když o 1 zvýšíme číslo v prostředním čtverečku a také o 1 zvýšíme součet, který musí vyjít v každém ~~čtyř~~ čtyřčtverečkovaném čtverci, doplněná čísla v rozích se nemění)

- Součet v čtyřčtverečkovaných čtvercích tedy bude 26.

a doplněná tabulka tudíž bude vypadat takto:

$5+7+8+6=26$
$7+9+6+4=26$
$8+6+10+2=26$
$6+4+2+14=26$

5	7	9
8	6	4
10	2	14

ZKOUŠKA:

$5+6+9+10+14=\underline{\underline{44}}$

JAN MORAVEC
29-III-1
ZŠ Horní Blatná

6b MR

1.

	7	
8		4
	2	

1) abych doplnil 1. čtyřčtvereček musím do ostatních čtverců napsat čísla 4; 9 a 5 = 18

2) Ale dohromady musí dát 44, takže je musím zvětšit o 44-18=<u>26</u>

3) Každý čtvereček v kraji zvětšíme o nějakou ~~čtyřnásobky~~ čtveřicinu čtyřnásobků do 26, aby ale současně dohromady nepřesáhly těch 26 a zbytek byl jednociferné číslo

4) Mám dvě možnosti: 1. přičtu 6 a zbyde na prostředek 2
2. přičtu 5 a zbyde 6

5) Protože mají být největší neprázdná čísla liché vybral jsem 2. možnost, protože v prvním čtyřčtverečku k nule přičtu 5 a 0+5=5 a 5 je liché číslo a zároveň největší ze všech neprázdných (v první bude nejmenší sudé)

6)

5	7	9
8	6	4
10	2	14

1)

KAROLÍNA KOUKOLOVÁ
GYMNÁZIUM PÍSEK

6b mR

a	7	b
8	x	4
d	2	c

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a 7 / 8 x	16	17	18	19	20	21	22	23	24
7 b / x 4	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x 4 / 2 c	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8 x / d 2	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Za x dosadím a sečtu si jednotlivé čtverečky. K jednotlivým součtům zkouším přičítat takové čísla, aby mi vyšlo číslo, které jsem si předem stanovila, a abych tím splnila podmínku č. 2.

Po odečtení součtu čísel $a + b + c + d + x$ od čísla 44 mi musí vyjít číslo beze zbytku nebo dělitelné čtyřmi.

Př.: A)

	7	
8	1	4
	2	

v jednotlivých čtverečcích dopočítávám do 20

$16 + 4 = 20$

$12 + 8 = 20$

$7 + 13 = 20$

$11 + 9 = 20$

$a + b + c + d + x =$
$= 4 + 8 + 13 + 9 + 1 = 35$

$44 - 35 = 9$

9 není dělitelné čtyřmi $\Rightarrow$ 1 nemůže být x

3)

	7	
8	6	4
	2	

dopočítávám do 25

21 + 4 = 25
17 + 8 = 25
12 + 13 = 25
16 + 9 = 25

a + b + c + d + x = 4 + 8 + 13 + 9 + 6 = 40

44 − 40 = 4

⇓

čísla a, b, c, d zvětším o 1

5	7	9
8	6	4
10	2	14

Pavel Jan
ZŠ Školní 226
Kaplice

6b
mk

1.

5	7	9
8	6	4
10	2	14

Rozdělil jsem si čtverec na čtyři čtyřčtverečkové čtverce

5	7
8	6

7	9
6	4

součet čtverečků je 26

8	6
10	2

6	4
2	14

tato čísla mají vždy společné musí být jednociferné (1-9)

Doplňoval jsem čísla od 1-9 do prostředka. a ~~čísla~~ čtverec splňoval podmínky zadání s prostředním číslem 6. Aby vyšel součet 44, musí být součet přidaných číslic bez šestky 38.

~~38~~ - 5+9+10+14=38

38+6=44

LADISLAV BENEŠ   II. ZŠ. MILEVSKO   Z9-III-1

2b mR

	7	
8		4
	2	

Jelikož je celkový součet doplněných čísel 44, tak si od něj musím odečíst již doplněná čísla

$44 - 8 - 7 - 4 - 2 = 23$

1	7	
8		4
	2	

Prozatím je největší součet čísel v levém horním čtyř čtverci, takže tam musí být nejmenší číslo.*

Prozatimní součet v levém horním čtyř čtverci je 16. Takže si doplním čísla do všech čtyř čtverců, aby ~~tam~~ jejich součet byl 16.

1	7	5
8		4
6	2	10

Nyní zbývá pouze poslední číslo doprostřed, to vypočteme 44 − součet.

$44 - (1+7+5+8+4+6+2+10) = 44 - 43 = 1$

1	7	5
8	1	4
6	2	10

Doprostřed tedy bude pasovat číslo 1.

chybná úvaha $1+5+1+6+10 \neq 44$

17	17
17	17

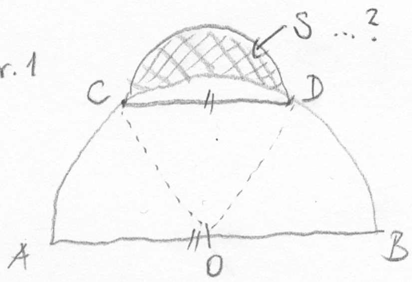
Součty ve čtyř čtvercích jsou všechny stejné.

* nejmenší číslo je liché, takže se nabízí možnost 1 a 3. 3 by ~~[illegible]~~ ale byla moc velká hodnota, takže doplním 1.

2

MARTINA VAVAČKOVÁ
GYMNÁZIUM P. DE COUBERTINA
6bTO

obr. 1



$|CD| = 1\,cm$
$|AB| = 2\,cm$

Na začátek bych chtěla podotknout, že je úplně jedno, jestli AB ∥ CD, jestliže oba body C a D leží na polokružnici ohraničenou body A a B.

Pokud O je střed úsečky AB (obr. 1), pak platí $|AO| = |OB| = \frac{2}{2}\,cm = 1\,cm$. Protože kružnice je množinou bodů stejně vzdálených od středu, platí také $|AO| = |CO| = |DO| = 1\,cm$.

Δ ODC je proto zřejmě rovnostranným Δ, tedy všechny jeho vnitřní úhly mají 60°.

Obsah S, který mám vypočítat, stanovím jako obsah menší polokružnice (CD) mínus průnik kruhové výseče COD a malé půlkružnice. Tento průnik vypočítám jako obsah kruhové výseče COD mínus obsah Δ COD (resp. ODC), který jsme prohlásili za rovnostranný.

$$S = \frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{6} - \frac{\cancel{2} r_1 v}{\cancel{2}}\right)$$

$\nwarrow 60° = \frac{1}{6}$ z 360° => 1/6 kruhu

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{|CD|}{2} \\ r_2 &= |AO| = |BO| \end{aligned}\right\} r_2 = 2r_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= \tfrac{1}{2}\,cm \\ r_2 &= 1\,cm \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{|CD|^2 - \left(|CD| \cdot \tfrac{1}{2}\right)^2}$$ ... Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

P.S. Promiňte za dosazení před upravením výrazu. Příště si to uvědomím včas.

$$S = \frac{\pi \cdot \frac{1}{4}}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\pi - 4\pi + 6\sqrt{3}}{24} =$$

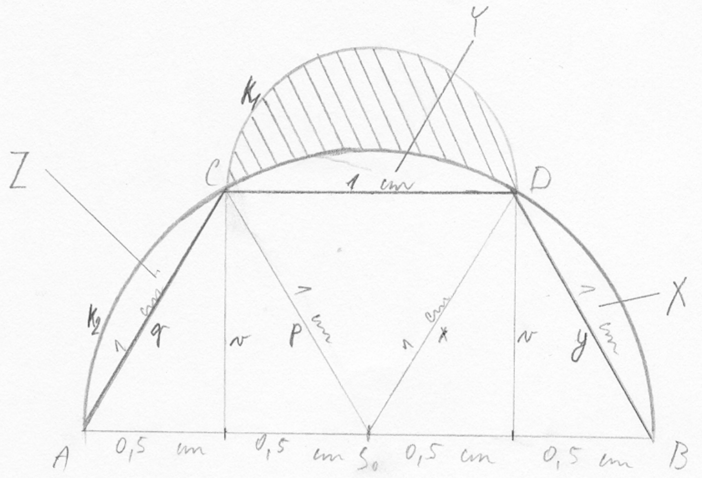
$$= \underline{\underline{\frac{6\sqrt{3} - \pi}{24}\,cm^2}} \left(= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}\,cm^2\right) \doteq 0{,}302113008\ldots\,cm^2 \;:-)$$

Obsah vyšrafované části je $\frac{6\sqrt{3} - \pi}{24}\,cm^2$.

(2)

56TT

Vít Peřina
Gymnázium Jírovcova



$S = ?$

$\Rightarrow q = p = x = y = 1$ cm

$\Downarrow$

$X = Y = Z$

$S_{\frown k_2} = \pi \cdot r^2 : 2$

$S_{\frown k_2} = \pi \cdot 1 : 2$

$S_{\frown k_2} = \dfrac{\pi}{2}$ (cm²)

$S_{\square} = \dfrac{(z_1 + z_2)}{2} \cdot v$

$S_{\square} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{\square} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (cm²)

$v = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$v = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$

$v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cm)

$Y = (S_{\frown k_2} - S_{\square}) : 3$

$Y = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right) : 3$

$Y \doteq 0{,}27 : 3$

$Y \doteq 0{,}09$ (cm)

$S_{\frown k_1} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 : 2$

$S_{\frown k_1} = \frac{1}{4}\pi : 2$

$S_{\frown k_1} = \dfrac{\pi}{8}$ (cm)

$S = S_{\frown k_1} - Y$

$S \doteq \dfrac{\pi}{8} - 0{,}09$

$S \doteq 0{,}39 - 0{,}09$

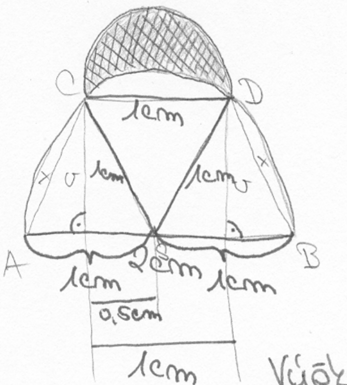
$S \doteq 0{,}3021$ (cm)

MARTA SMUTNÁ IX.C
ZŠ A MŠ NERUDOVA 9

Z9-III-2 45 TV

$|AB| = 2\,cm$; $|CD| = 1\,cm$; $AB \parallel CD$; S(vyznačeného) = ?

Náčrt:



Velký půlkruh

$S = \frac{\pi r^2}{2}$

$S = \frac{3{,}14 \cdot 1^2}{2}$

$S = \frac{3{,}14}{2}$

$S = 1{,}57\,cm^2$

Malý půlkruh

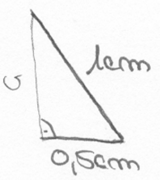
$S = \frac{\pi r^2}{2}$

$S = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2}{2}$

$S = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}25}{2}$

$S = \frac{0{,}785}{2}$

$S = 0{,}3925\,cm^2$



Výška

$b^2 = c^2 - a^2$

$v^2 = 1^2 - 0{,}5^2$

$v^2 = 1 - 0{,}25$

$v = \sqrt{0{,}75}$

$v \doteq 0{,}87\,cm$

Lichoběžník

$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$

$S = \frac{(2+1) \cdot 0{,}87}{2}$

$S = \frac{3 \cdot 0{,}87}{2}$

$S = \frac{2{,}61}{2}$

$S = 1{,}305\,cm^2$

$S_{\triangle} - S_{⏢} = S_{\frown}$ (S velkého ⌓ − S lich. = S 3 půlkruhů)

$1{,}57 - 1{,}305 = 0{,}265\,cm^2$ (3 půlkruhy kolem lichoběžníku)

$\Rightarrow 0{,}265 : 3 \doteq 0{,}088\,cm^2$ (1 půlkruh u lichoběžníku)

$S_{\triangle} - S_{\frown} = S_{\frown}$ (S malého ⌓ − S půlkruhu u lich. = S vyznačeného)

$0{,}3925 - 0{,}088 = 0{,}3045\,cm^2$

+ obecné řeš

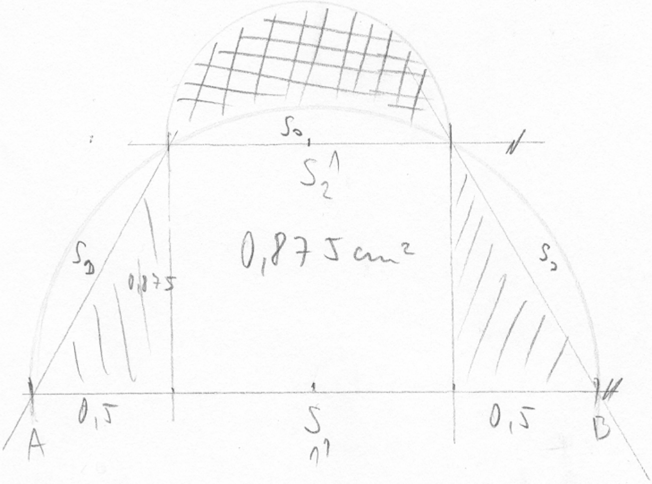
Obsah vyznačeného šedého měsíčku je $0{,}3045\,cm^2$.

TOMÁŠ MLUCHÝ
2.S Dukelská

(2) Nejdříve si vypočtu obsahy obou polokružnic. 4b 9.17

$S_1 = \frac{\pi a^2}{8}$ $\qquad$ $S_2 = \frac{\pi a^2}{8}$

$\underline{S_1 = 1{,}57\ cm^2}$ $\qquad$ $\underline{S_2 = 0{,}39\ cm^2}$



Nyní si vypočtu obsahy obou troj.

$\underline{S_\Delta = 0{,}4375\ cm^2}$

Přičtu to k obsahu obdélníku.

$\underline{\Delta S = 1{,}3125\ cm^2}$

Toto odečtu od obsahu S_1, vydělím 2 a dostanu S_3.

$2S_3 = 0{,}258\ cm^2$

$\underline{S_3 \doteq 0{,}86\ cm^2}$ – Toto odečtu od S_2 a mám výsledek.

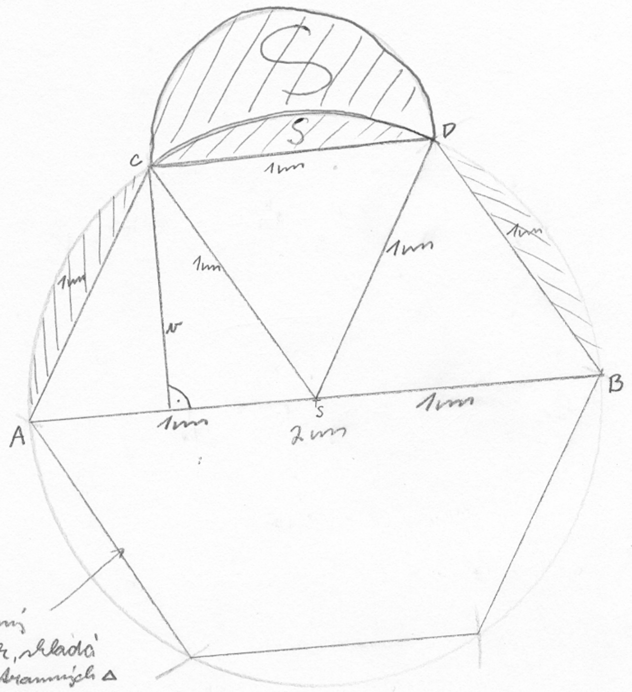
$\underline{S \doteq 0{,}31\ cm^2}$

Obsah vyšrafované části je 0,31 cm².

29-III-2 5 b TO

Krupicová
GVN J. Hradec

$|AB| = 2\,m$
$|CD| = 1\,m$
$AB \parallel CD$
$|SB| = \frac{|AB|}{2} = \frac{2}{2} = 1\,m$
$|SB| = |SA| = |SC| = |SD| = |DB| = |CA|$



rovnostranný šestiúhelník, skládá se z 6 rovnostranných Δ

půlkružnice$_1$: $d = 2\,m$
$r = 1\,m$
$S = ?\,m^2$

$S = \frac{\pi r^2}{2}$
$S = \frac{\pi 1^2}{2}$
$S = \frac{\pi}{2}$
$S = \underline{1{,}570796327\,m^2}$

lichoběžník ABDC: $|AB| = 2\,m$
$|BD| = 1\,m$
$|DC| = 1\,m$
$|CA| = 1\,m$
$v = ?\,m$
$S = ?\,m^2$

$\cancel{v^2 = 1^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2}$
$v^2 = |AC|^2 - \left(\frac{|AB|}{4}\right)^2$
$v^2 = 1^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2$
$v^2 = 0{,}75$
$v = 0{,}8660254034\,m = \sqrt{0{,}75}$
$S = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot v}{2}$
$S = \frac{(2+1) \cdot \sqrt{0{,}75}}{2}$
$S = \frac{3 \cdot \sqrt{0{,}75}}{2}$
$S = 1{,}5\sqrt{0{,}75}$
$S = \underline{1{,}299038106\,m^2}$

$\mathcal{S} = S_{\text{půlkružnice}_1} - S_{\text{lichob.}} = 1{,}570796327 - 1{,}299038106 =$
$= 0{,}271758221$

$S = \frac{\mathcal{S}}{3}$
$S = \frac{0{,}271758221}{3}$
$S = \underline{0{,}090586073\,m^2}$

půlkružnice$_2$: $d = 1\,m$
$r = 0{,}5\,m$
$S = ?\,m^2$

$S = \frac{\pi r^2}{2}$
$S = \frac{0{,}25\pi}{2}$
$S = \underline{0{,}392699081\,m^2}$

$\mathcal{S} = S_{\text{půlkružnice}_2} - S$
$\mathcal{S} = 0{,}392699081 - 0{,}090586073$
$\mathcal{S} = \underline{0{,}302113008\,m^2}$

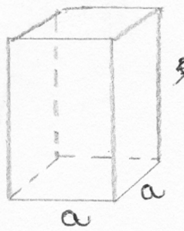
[illegible]

Obsah hledané části je $0{,}302113008\,m^2$.

Z9 - III - 3

Karolína Dvořáková
GJVJ

6 b



ZADÁNÍ:

1. krabice ... 2x vyšší než
2. krabice ... 1,5 x širší než
3. krabice ... 3x vyšší a 2x užší než

$V_1 : V_2 : V_3 = ?$

- vzoreček pro vypočítání objemu kvádru: $V = a \cdot b \cdot c$
  → v našem případě ho ale pozměním na: $V = a \cdot a \cdot c = a^2 \cdot c$
- vyjádříme si výšku $\underline{c}$ jednotlivých krabic jako neznámou x
  1. krabice ... 2x
  2. krabice ... x → podle zadání upravujeme x
  3. krabice ... 6x
- vyjádříme si šířku $\underline{a}$ jednotlivých krabic jako neznámou y
  1. krabice ... y
  2. krabice ... 1,5 y
  3. krabice ... 0,5 y
- podle vzorečku pro vypočítání objemu vypočítáme objemy jednotlivých krabic s použitím neznámých $\underline{x}$ a $\underline{y}$

$$V_1 = 2x \cdot y \cdot y = 2xy^2$$
$$V_2 = x \cdot 1{,}5y \cdot 1{,}5y = 2{,}25\,xy^2$$
$$V_3 = 6x \cdot 0{,}5y \cdot 0{,}5y = 1{,}5\,xy^2$$

- a teď si vyjádříme poměr objemů krabic a upravíme ho do co nejjednoduššího tvaru

$$V_1 : V_2 : V_3$$
$$2xy^2 : 2{,}25xy^2 : 1{,}5xy^2$$ → všechny ~~poměry~~ objemy vydělíme xy^2
$$2 : 2{,}25 : 1{,}5$$ → tohle už by se dalo považovat za výsledek, jen pro přehlednost všechny objemy vynásobíme 4, abychom získali celá čísla

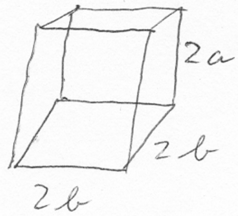
$$\underline{8 : 9 : 6}$$

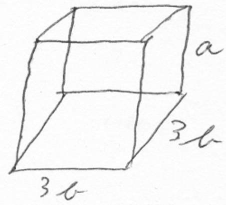
Objemy krabic jsou v poměru 8 : 9 : 6.

Marek Čermák | ZŠ Chýše
Z9 – III – 3 | 5k

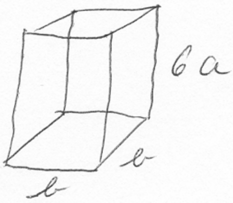
3 krabice – podstava - čtverec

1. dvakrát vyšší než 2.
2. 1,5krát širší než 1.
3. 3× vyšší než 1. a 2× užší než 1

1. 

2. 

vyjádřím si velikosti pomocí proměnných

3. 

k výpočtu objemů si dosadím libovolné číslo.

$a = 2$
$b = 2$

$V_1 = a\,b\,c$
$V_1 = 4 \cdot 4 \cdot 4$
$V_1 = \underline{64}$

$V_2 = a\,b\,c$
$V_2 = 6 \cdot 6 \cdot 2$
$V_2 = \underline{72}$

$V_3 = a\,b\,c$
$V_3 = 2 \cdot 2 \cdot \cancel{48}\,12$
$V_3 = \underline{48}$

+ obecné řešení

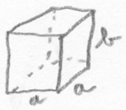
poměry jsou $64 : 72 : 48$

převedeno na základní tvar $\underline{\underline{8 : 9 : 6}}$

Objemy krabic jsou v poměru 8:9:6.

LADISLAV BENEŠ   II. ZŠ   MILEVSKO   Z9-III-3

6 b



$a_1 : a_2 = 1{,}0 : 1{,}5$

$a_1 : a_3 = 2 : 1$

$a_1 : a_2 : a_3$

$2 : 3 : 1$

$b_1 : b_2 = 2 : 1$

$b_3 : b_1 = 3 : 1$

$b_1 : b_2 : b_3$

$2 : 1 : 6$

$\longrightarrow$

poměry dvou a dvou stran si převedu na společný poměr všech tří stran.

$V_1 = 2^2 \cdot 2$

$V_1 = 4 \cdot 2$

$V_1 = 8$

$V_2 = 3^2 \cdot 1$

$V_2 = 9 \cdot 1$

$V_2 = 9$

$V_3 = 1^2 \cdot 6$

$V_3 = 1 \cdot 6$

$V_3 = 6$

Poměr obsahů

$V_1 : V_2 : V_3$

$8 : 9 : 6$

✓

4

MARTINA VAVAČKOVÁ
GYMNÁZIUM P. ~~DE~~ COUBERTINA

6b

Kódy : $\langle 00000 ; 99999 \rangle$

Vyřazeny ty, které obsahují dvojčíslí "13" .... # = x ...?

$$x = \binom{4}{1} \cdot 10^3 - 3 \cdot 10$$

Když "13" sloučím (tedy budu dělat, že je to 1 číslice), budu mít právě $\binom{4}{1} = 4$ možnosti, kam tuto číslici umístit. Jen pro zajímavost: 13abc
a13bc
ab13c
abc13

každá z poloh "13" obsahuje 10^3 možností, jak zapsat ostatní čísla (v mém případě a, b, c), neboť jak za písmeno a, tak za b, a tak i za c umístíme právě jednu z číslic 0-9

nakonec musím ještě 30 možností odečíst – to jsou ty, které jsme započítali 2x, totiž ty, které obsahují "13" více
např. 13113 jsem počítala jak pro 13abc, tak i pro abc13

Možnosti, které musíme odečíst, je 30 protože existuje právě 30 čísel, které obsahují "13" dvě. Jsou to tyto:

1313a
13a13 $\quad a \in \langle 0 ; 9 \rangle$
a1313 $\quad a \in N$

$$x = 4 \cdot 1000 - 30 = 3970 \text{ možností}$$

Vyřadil 3970 kódů z 100000. Pokud se tedy zúčastní zkoušek více než 96030 zájemců, bude mít asi značné problémy (pozn. řeš.).

PETR PROCHÁZKA
GYMNÁZIUM PÍSEK

6b

ÚLOHA 4

(000–999)
13xxx ⇒ 1000 kódů

(0-9) (00-99)
x13xx ⇒ 10 · 100 = 1000 kódů

(00-99) (0-9)
xx13x ⇒ 100 · 10 = 1000 kódů

bez 1313x (0-9) ⇒ 10 kódů

⇒ 990 kódů

(000-999)
xxx13 ⇒ 1000 kódů

bez 13x13 (0-9) ⇒ 10 kódů

bez x1313 (0-9) ⇒ 10 kódů

⇒ 980 kódů

1000
1000
990
980
3970 kódů, které musel docent vyřadit.

Jakoukoliv libovolnou číslici označíme x.
13 může být ve ~~pěti~~ čtyřech pozicích.
Vypočítáme počet kódů pro každou z nich.
Hlídáme, zda se vlevo od třináctky neobjeví další třináctka.
Takový kód byl už dříve vyřazen.
Např.: 13213 jsme vyřadili v prvním kroku proto ho nebudeme vyřazovat ve čtvrtém.

a sečteme všechny vyřazené kódy.

Tři třináctky za sebou být nemohou, proto stačí pouze dávat pozor na jednu vlevo.