

ZJEDNODUŠENÝ STRUKTURNÍ MODEL PĚNOVÉHO MATERIÁLU

Bakalářská práce

Studijní program: B2301 – Strojní inženýrství
Studijní obor: 2301R000 – Strojní inženýrství

Autor práce: Lukáš Paur
Vedoucí práce: doc., Ing., David Círk, Ph.D.

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Lukáš Paur**

Osobní číslo: **S12000160**

Studijní program: **B2301 Strojní inženýrství**

Studijní obor: **Strojní inženýrství**

Název tématu: **Zjednodušený strukturní model pěnového materiálu**

Zadávací katedra: **Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Strukturním prvkem pěnového materiálu je buňka, která vzniká vypěněním základního materiálu. To je technologicky zajištěno tvorbou kysličníku uhličitého v průběhu pění, kdy základní materiál zároveň tuhne. Každá buňka má jinou velikost, kterou lze v daném objemu materiálu statisticky vyhodnotit, jak je provedeno např. v [1]. Jednotlivé strukturní elementy vykazují závislost mezi tlakovým silovým působením a deformací, která má nelineární charakter (viz [2]), a rychlostí deformace. Zjednodušený strukturní model bude koncipován jako skupina sériově řazených elementů se statistickým rozložením vlastností. Vznikne tak soustava diferenciálních rovnic, kterou bude třeba vyřešit v matematickém softwaru jako je např. Matlab, Maple.

Postup práce:

- 1) Seznámení se se současným stavem problematiky studiem doporučené literatury.
- 2) Sestavení modelu.
- 3) Přiřazení konstant modelu podle zvolené statistické charakteristiky.
- 4) Posouzení kvalitativních vlastností odezvy modelu v porovnání s experimentem.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah pracovní zprávy: **cca 50 stran**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:


- [1] **ELIOT, J., A. at al.** *In-situ deformation of an open-cell flexible polyurethane foam characterised by 3D computed microtomography.* **Journal of Material Science**, vol. **37**, 2002, p. **1547-1555**
- [2] **MILLS, N. J..** *Micromechanics of polymeric foams. 3-rd meeting on Material and Mechanics.* Denmark, Aalborg, 2000, p. **45-76**
- [3] **WANG, Y. and A. M. CUITINO.** *Full-field measurements of heterogeneous deformation patterns on polymeric foams using digital image correlation.* **International Journal of Solids and Structures**, vol. **39**, 2002, p. **3777-3796**
- [4] **CIRKL, D.** *Mechanické vlastnosti polyuretanové pěny.* **Disertační práce.** Liberec, TUL, 2006.
- [5] **CIRKL, D.** *Měření, vyhodnocení a modelování mechanických vlastností polyuretanové pěny.* Liberec, TUL, 2012.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. David Cirkl, Ph.D.**
Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání bakalářské práce: **18. listopadu 2015**
Termín odevzdání bakalářské práce: **18. února 2017**

prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld
děkan




doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. března 2016

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména §60 - školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinností informovat o této skutečnosti TUL, v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí vloženou do IS STAG.

Datum: 30. 6. 2016

Podpis:



Anotace

Cílem této bakalářské práce je popsat některé z důležitých mechanických vlastností pěnového materiálu, obzvláště pak v případě pružné polyuretanové pěny, jež se hojně využívá jako materiál na výrobu čalounění autosedaček. Tyto vlastnosti byly následně simulovány na numerických modelech v softwaru Matlab. V mechanickém strukturním modelu byly jednotlivé buňky materiálu vyjádřeny soustavou nelineárních pružin a tlumičů, jejichž parametry byly generovány zvoleným statistickým rozložením pravděpodobnosti. Metodou uvolnění vznikla soustava diferenciálních rovnic, řešených v softwaru Matlab při různých typech zatěžování. Jednalo se o kinematické buzení v kvazistatickém a dynamickém režimu.

klíčová slova

polyuretanová pěna, distribuční funkce, reologický model, strukturní buněčný model

Annotation

Purpose of this bachelor thesis was to describe some important mechanical properties of foam material, especially in the case of flexible polyurethane foam, that is often used in the industry as material for production of car seats upholstery. These properties were than simulated on the numerical models in Matlab software. In mechanical model cells of the material were expressed by a system of nonlinear springs and dashpots, whose parameters were generated by the chosen statistical distribution function. Method of the free body diagram developed a system of ordinary differential equations, being solved in Matlab with differentiated types of load. Types of loads were used in the means of cinematic excitement in quasistatic and dynamic regime.

keywords

polyurethan foam, distribution function, rheological model, structural cell model

Poděkování

Tato bakalářská práce vznikla za na katedře mechaniky, pružnosti a pevnosti Fakulty strojní Technické univerzity v Liberci.

Touto cestou bych rád poděkoval mému vedoucímu práce, doc., Ing. Davidovi Čirklovi, Ph.D. za podporu, odborné rady a dohled potřebný k úspěšnému dokončení této práce. Dále bych rád touto cestou poděkoval přítelkyni, rodině a přátelům za morální podporu během studia a během psaní této práce.

Obsah

1	Úvod	12
2	Pěnový materiál-Polyurethanová pěna	14
2.1	Chemické složení a struktura materiálu	14
2.2	Vnitřní struktura a statistické rozložení velikosti buněk	15
2.3	Logaritmicko-normální rozdělení pravděpodobnosti	19
3	Mechanické vlastnosti pěnového materiálu	21
3.1	Typické fáze silové odezvy při zatížení	23
3.2	Heterogenní charakter deformace vnitřní struktury	25
3.3	Hystereze napětí a práce tlumící síly	30
4	Simulační model polyurethanové pěny	32
4.1	Budící funkce	32
4.2	Strukturní simulační model pěny	36
4.2.1	Vratná síla	38
4.2.2	Lineární tlumící síla	40
4.2.3	Metoda uvolnění a sestavení rovnic	41
4.3	Kvazistatický model výpočtu pro jednotlivé buňky	43
4.4	Dynamický režim - harmonické buzení	52
4.5	Dynamický režim - trojúhelníkové buzení	57
5	Práce tlumící síly	63

6	Porovnání a zhodnocení výsledků	65
7	Možnost zlepšení chování modelu zavedením nelineární tlumící síly	67
8	Závěr	70
A	Simulační model polyurethanové pěny	74
B	Zdrojový kód simulačního výpočtu	78
B.1	Kvazistatický režim výpočtu	78
B.2	Dynamický režim výpočtu harmonické buzení	87
B.3	Dynamický režim výpočtu trojúhelníkové buzení	94
B.4	Výpočet práce tlumící síly	101

Seznam použitých zkratek a symbolů

Označení	Fyzikální jednotka	Popis
μ	[–]	parametr lognormálního pravděpodobnostního rozdělení
σ	[–]	parametr lognormálního pravděpodobnostního rozdělení
m	[–]	střední hodnota náhodné veličiny
v	[–]	rozptyl náhodné veličiny
ρ	$[\frac{kg}{m^3}]$	hustota pěnového materiálu
ε	[–]	poměrná deformace
W_d	[J]	práce tlumící síly
$z(t)$	[m]	funkce kinematického buzení
$v_z(t)$	[m/s]	funkce rychlosti kinematického buzení
Z_0	[m]	střední hodnota kmitu
Z	[m]	amplituda kmitu
ω	[rad/s]	úhlová frekvence buzení
f	[Hz]	frekvence buzení
t_n	[s]	čas lineárního náběhu
F_{Vi}	[N]	vratná síla i-té buňky
F_{ui}	[N]	složka vratné síly vyjadřující únosnost buňky
F_{pi}	[N]	složka vratné síly vyjadřující přechování buňky
F_{si}	[N]	složka vratné síly vyjadřující ztrátu stability buňky
F_{ti}	[N]	tlumící síla buňky
F_{ci}	[N]	celková silová odezva i-té buňky
h_c	[m]	celková výška vzorku pěny
h_{pi}	[m]	volná délka pružiny, velikost i-té buňky
m_{ui}	[N]	mez únosnosti buňky
k_{ui}	[1/m]	koeficient únosnosti
n_{pi}	[–]	polytropický exponent

S_{pi}	$[m]$	konstanta složky síly F_{pi}
p_{pi}	$[m]$	konstanta složky síly F_{pi}
c	$[kg/s]$	koeficient tlumení
Δ_i	$[m]$	relativní posuv, deformace i-tého členu
n_{ci}	$[-]$	počet zatěžovacích signálů při periodickém budícím signálu
a	$[-]$	exponent nelineární tlumící síly

Kapitola 1

Úvod

S pěnovými materiály se setkáváme téměř každým dnem, proto vzniká určitá potřeba získat co nejvíce informací o jejich mechanických vlastnostech. Je nutno přitom rozlišovat mezi pěnovými materiály, protože je veliký rozdíl mezi vlastnostmi například pružné polyuretanové pěny a mezi vlastnostmi pěn z polystyrenu nebo polypropylenu. Nejčastějším předmětem výzkumného zájmu posledních let je výzkum vlastností polyuretanové pěny, která se v průmyslu používá na výrobu čalounění autosedaček a tím tak při jízdě automobilem ovlivňuje jízdní komfort a tedy životy každého z nás. Mimo to se využívá například i ve formě různých výztuží a polstrovaní nábytku nebo jako hojně používaný biomateriál v medicíně vzhledem k tomu, že umožňuje vhodnou volbou výchozích surovin při výrobě získat biodegradabilní materiál vhodný jako rozložitelný nosič buněk při hojení tkání a podobně.

Polyuretanová pěna aplikovaná jako materiál čalounění autosedaček velmi ovlivňuje náš jízdní komfort, protože tlumí nárazy při přejíždění nerovností vozovky, které jsou přenášeny zprostředkovaně až na sedící osobu. Předmětem výzkumného zájmu jsou tedy její pružící a tlumící vlastnosti, jejichž souvislost od sebe nelze jednoduše oddělit, proto se mluví jako o visko-elastickém materiálu. Nejčastější formou experimentálního výzkumu je měření a sestavování diagramu silové odezvy pro jednoosé zatížení tlakem, při němž pěna vykazuje nelineární charakter silové odezvy a jejíž analytický popis není triviálním úkolem. Pro tento typ zatížení je pěna původně koncipována, ale čistě tlakové zatížení je zjednodušení, protože například při zatížení sedící osobou je skutečná napjatost dána kombinací více typů namáhání a ne jenom jednoosým tlakovým zatížením. Metod a přístupů, jakými se dají mechanické vlastnosti pěnového materiálu popsat je několik a v podstatě by se dalo říct, že existují dva hlavní obecné přístupy. Jedním z nich je pěnu popsat za pomoci metod reologie strukturním modelem se soustředěnými parametry, kdy je pěna vyjádřena soustavou pružin a tlumičů s takovými zatěžovacími charakteristikami, které by popisovaly co nejlépe její experimentálně změřitelné chování a právě již zmíněné visko-elastické vlastnosti. Podobným modelem se zabývá například [1]. Model, který je předmětem této práce sice též vychází z reologického přístupu, vyjadřuje však mechanické

vlastnosti pěnového materiálu rozprostřené do jednotlivých buněk a každá strukturní buňka tak bude vytvořena kombinací tlumičů a pružin se zvolenou zatěžovací charakteristikou. Dalším možným přístupem je popsat pěnu pomocí mikromechanického modelu, jenž vyjadřuje mechanické chování jedné buňky v sousvislosti ve spojení s ostatními buňkami a jejich deformačních mechanismů na konkrétní geometrii vnitřní struktury. Tento přístup popisuje například [2]. Způsoby jakými se dá zkoumat a zaznamenat tato vnitřní struktura pěny je též více a jsou popsány například v [3].

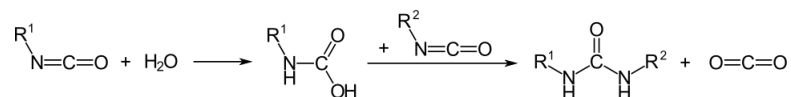
Kapitola 2

Pěnový materiál-Polyurethanová pěna

2.1 Chemické složení a struktura materiálu

Jako hlavním zástupcem pěnových materiálů bude uváděna pružná polyuretanová pěna, jejíž vnitřní struktura byla určitými metodami zaznamenána a je dohledatelná v literatuře, např. [3]. Vnitřní strukturu ovlivňuje v první řadě chemická reakce, jež stojí za jejím vznikem.

Z chemického hlediska patří polyuretan do skupiny polymerů. Charakteristické jsou tím, že ve své strukturní jednotce obsahují uskupení atomů -NH-CO-O-, jež se nazývá uretanová skupina. Vznikají z diizokynátů, nejčastěji aromatických, které jsou velmi reaktivní a jsou tak schopny reagovat s celou řadou látek, která obsahuje takzvaný pohyblivý vodík. Nejčastěji na sebe váží hydroxylové, aminové nebo karboxylové skupiny, jež poté určují výsledný produkt. Strukturní jednotka polyuretanů ve formě uretanové skupiny obsahuje oproti jim podobným polyamidům navíc ještě kyslík v hlavním řetězci, který způsobuje jejich větší ohebnost a nižší bod teploty tání. Rozličnost různých typů reakcí vede k celé řadě možných produktů. Jsou jimi například lineární polyuretany, polyuretanové kaučuky, polyuretanové laky a lepidla a právě již zmíněné polyuretanové pěny.

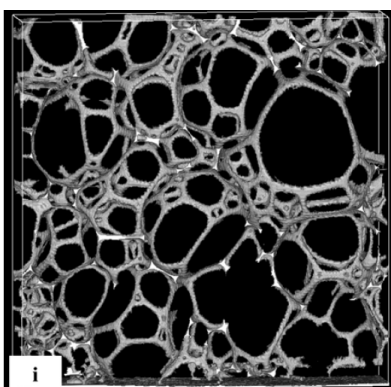


Obrázek 2.1: Chemická reakce, vznik polyurethanu

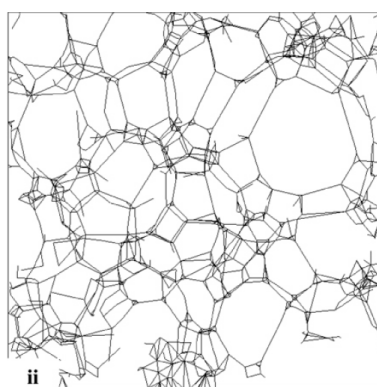
Polyuretanová pěna se připravuje z polyesterů se dvěma hydroxylovými skupinami na koncích, izokyanátu a vody. Záleží při tom na přesném dávkování, které je určující pro výsledné vlastnosti. Reakcí vody s izokyanáty se uvolňuje oxid uhličitý, který způsobuje právě onu pěnovou strukturu. V závislosti na složení výchozí směsi lze připravit pěnu s různou tuhostí, od měkkých přes polotuhé a až tuhé. Výsledné pěny se poté rozlišují zkratkou MDI (dephenylemethandiizokyanát) nebo TDI (toluendiizokyanát) podle typu izokyanátu, který se podílel na chemické reakci a mohou mít jak otevřený, tak i uzavřený pórovitý povrch. O chemickém vzniku a složení pojednává například [4].

2.2 Vnitřní struktura a statistické rozložení velikosti buněk

Pěnový materiál se skládá z buněk. Pod pojmem buňka není v tomto případě myšlena základní stavební jednotka biologické struktury, nýbrž uskupení základních stavebních jednotek do určitých, při zjednodušení geometricky popsatelných útvarů, tvořících nosnou část ve formě nosníků nebo podpěr dané pěnové struktury. Vzhledem k charakteru popsané chemické reakce, způsobující vypěnění struktury, je tato struktura velmi nepravidelná. Existují postupy, který dokáží tuto strukturu jistým způsobem kvantifikovat a použít ve formě dat k další analýze. Jednou z takovýchto metod je kupříkladu rentgenová mikrotomografie, odborně popsaná v článku [3]. Tato metoda poskytuje určitou bližší představu o seskupení nosníků struktury, jejich orientaci a velikosti a během zatížení tak umožňuje získat představu o tom, jaké deformační děje v materiálu probíhají. Tomografické snímky mohou poté projít takzvaným procesem skeletonizace, který původní strukturu zjednoduší na soustavu uzlových bodů a nosníků. Vzniknou tak snímky podobné následujícímu.



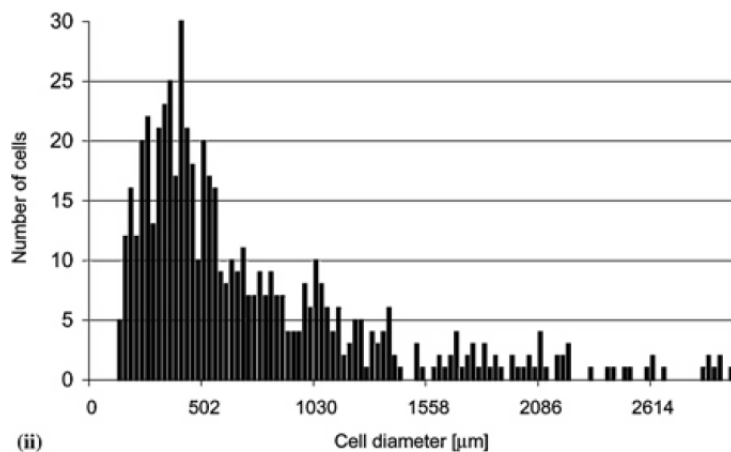
Obrázek 2.2: Tomografický snímek vnitřní struktury



Obrázek 2.3: Snímek po následné skeletonizaci

Obrázek 2.4: Vnitřní struktura pěnového materiálu, převzato z [3]

V článku [3] je dále zmíněn algoritmus, který nahrazuje původně složité geometrické uspořádání vyplnění meziprostoru mezi nosníky za pomoci koulí s definovaným průměrem, jakožto tvarově nejlepší nahrazení tohoto meziprostoru. Na základě algoritmu je poté sestaven histogram relativních četností velikosti průměru buňky, jež je zobrazen na následujícím obr. 2.5. Takto zaznamenaným datům byla věnována patřičná pozornost, neboť velikost průměru buňky byl jedním z parametrů později popsaného strukturního simulačního modelu. Byla snaha ze zmíněného histogramu 2.5 replikovat takové teoretické statistické rozdělení pravděpodobnosti, které by se co nejvíce svým průběhem přiblížilo zmíněným datům a aplikovat ho v modelu. Za jeho pomoci bylo možné generovat hodnoty náhodných veličin, popisujících náhodně rozložené parametry modelu a simulovat tak nejen dané mechanické chování z hlediska popsané silové odezvy při deformaci, ale i z hlediska nepravidelnosti vnitřní struktury a vlivu na tuto odezvu.



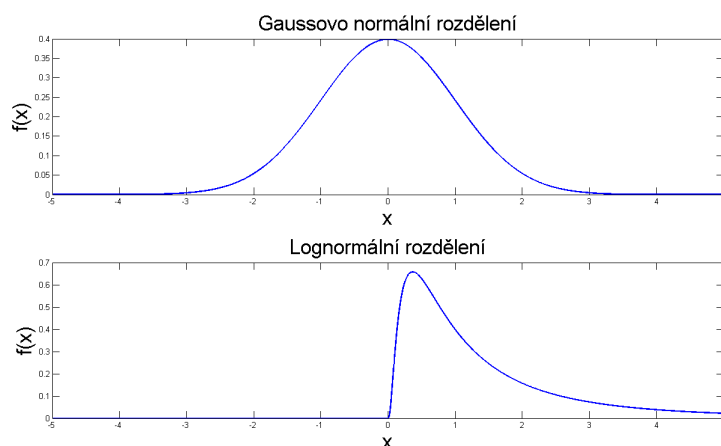
Obrázek 2.5: Histogram četností velikostí průměru buňky polyurethanové pěny, převzato z [3]

Aby bylo možné teoreticky popsat dané statistické rozdělení, je potřeba znát alespoň nějaké jeho parametry. V článku [3] se autor zmiňuje o střední hodnotě pro velikost průměru buňky, která činí 0.75 mm, informace o rozptylu velikosti průměru buňky ve článku chybí. Tento údaj byl použit jako výchozí informace pro hledání vhodného rozložení pravděpodobnosti.

Z pohledu na obr. 2.5 je zřejmé, že se jedná o takový typ pravděpodobnostního rozdělení, které má hodnoty rozloženy nesymetricky kolem střední hodnoty a zároveň takové, jenž je definováno pouze pro kladné hodnoty náhodné veličiny. Tato skutečnost vychází z předpokladu, že se v případě průměru buňky jedná o délkový rozměr a tedy nabývá pouze kladných hodnot. Budeme tedy hledat a uvažovat jedno

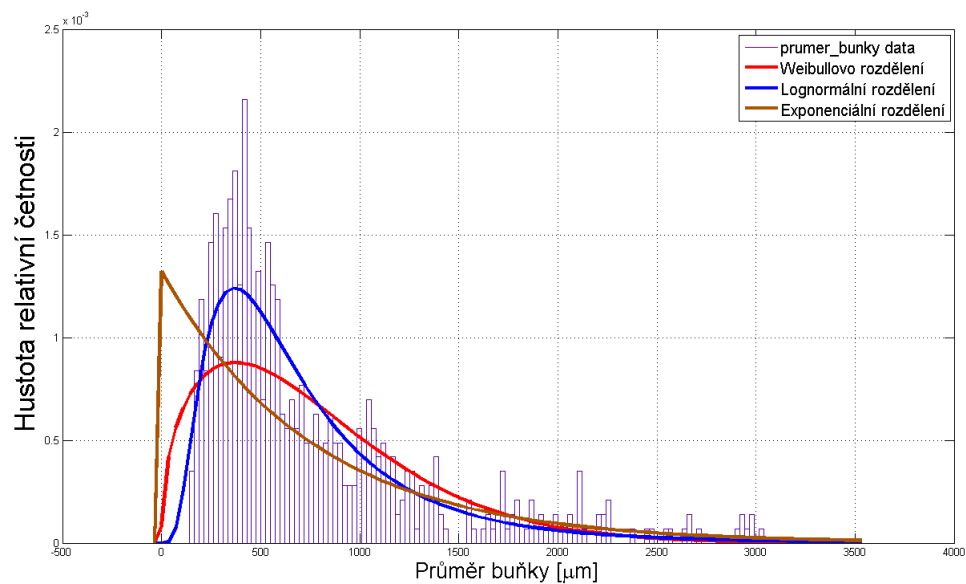
z rozdělení pravděpodobnosti, které tuto podmínku splňuje. Není možné použít například Gaussovo normální rozdělení, které se díky své symetrii a jednoduchosti pro popis spojité náhodné veličiny používá nejčastěji, protože pro něj neplatí omezení definičního oboru a navíc je jeho průběh symetrický vzhledem k jeho střední hodnotě. Z pohledu na zmíněný histogram četností a jeho průběh se nabízí podobnost například s rozdělením Weibulloým, Logaritmicko-normálním nebo exponenciálním. Pro rozhodnutí o jaké typ rozdělení se jedná byl použit toolbox softwaru Matlab, uzpůsobený pro regresi dat daným teoretickým rozdělením pravděpodobnosti.

Zatímco Weibullovo rozdělení je v praxi nejčastěji užíváno pro modelování spolehlivosti a bezporuchovosti součástí, je založeno na empirické volbě parametrů, jejichž přepočítání ze známé střední hodnoty a rozptylu náhodné veličiny není triviální úkol, jak dokládá například [5]. Naproti tomu Lognormální rozdělení, které je odvozeno z Gaussova rozdělení normálního, je pro možnost jednoduššího výpočtu svých parametrů vhodnější. Existuje totiž vztah pro přepočítání střední hodnoty a rozptylu dané veličiny na parametry tohoto rozdělení. Normální a lognormální rozdělení se liší především tím, že zatímco normální rozdělení popisuje pravděpodobnost náhodné veličiny, lognormální popisuje pravděpodobnost jejího přirozeného logaritmu, z čehož vychází její typický zesílený průběh daný omezením definičního oboru, jak je patrné z následující obr. 2.6. Zde byla pro názornost sešikmeného průběhu funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti zobrazena tato funkce pro stejné hodnoty jejích parametrů $\mu = 0$ a $\sigma = 1$. Jak dokládá například [6], lognormální rozdělení se pro popis náhodné veličiny používá například v biomedicíně, kde popisuje koncentraci určité látky v těle, počet bakterií nebo velikost buněk určité látky v daném prostředí. Na základě tohoto faktu se jeví i pro náš případ popisu velikosti buněk v materiálu jako vhodné řešení. V případě regrese dat lognormálním rozdělením navíc vyšel přibližně stejná střední hodnota pro průměr buňky, jež je uvedena v [3].

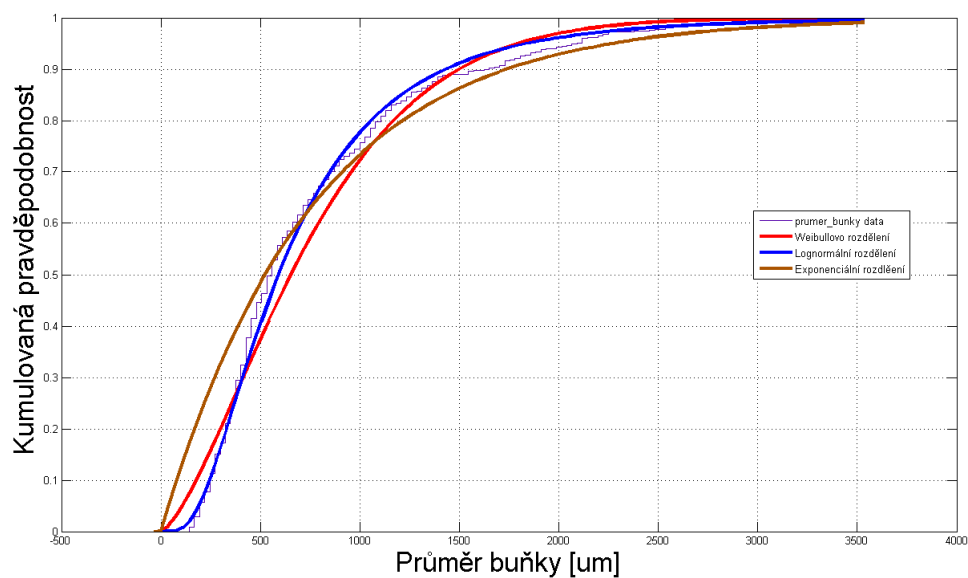


Obrázek 2.6: Příklad rozdílu v průběhu Gaussova normálního a lognormálního rozdělení pro $\mu = 0$ a $\sigma = 1$

Z následujících grafů funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti na obr. 2.7 je zřetelná vhodnost volby daného rozdělení.



Obrázek 2.7: Regrese funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti



Obrázek 2.8: Regrese funkce kumulované hustoty rozdělení pravděpodobnosti

Z pohledu na regresní křivku je patrné, že pro popis charakteru původních dat z histogramu je nejvhodnější použít lognormální rozdělení. Děje se tomu jak v případě funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti tak i v případě distribuční funkce kumulované pravděpodobnosti. Lognormální rozdělení je navíc výhodné, protože lze spočítat jeho parametry ze známých hodnot střední hodnoty m a rozptylu v dané veličiny, což je užitečné z hlediska volby parametrů modelu. Protože o ostatních veličinách, které vystupují v popsaném modelu, statisticky naměřené údaje chybí, budeme při jejich generování předpokládat, že funkce popisující jejich pravděpodobnostní rozdělení je stejná jako v případě velikosti průměru buňky. Pro generování náhodných hodnot parametrů popisujících vlastnosti pěny bude tedy využito lognormálního rozdělení pravděpodobnosti.

2.3 Logaritmicko-normální rozdělení pravděpodobnosti

Pro generování náhodných hodnot parametrů modelu je potřeba znát parametry náhodnému rozdělení nutné pro výpočet funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $f(x)$ a distribuční funkce $F(x)$. Vzhledem k tomu, že se jedná dvouparametrické rozdělení závislé na parametrech μ a σ , je potřeba najít vztah pro přepočítání na tyto parametry ze zadané střední hodnoty m a rozptylu v .

Obecně slouží pro popis rozdělení náhodné veličiny podle daného rozdělení její funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti. Za její pomoci budou generovány hodnoty náhodných veličin. V případě lognormálního rozdělení je definována ve tvaru:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.1)$$

Hustota pravděpodobnosti je definována jen pro kladné hodnoty náhodné veličiny x , pro $x \leq 0$ platí, že $f(x) = 0$.

Pro distribuční funkci lognormálního rozdělení platí následující vztah:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right] \quad (2.2)$$

Příčemž pro chybovou funkci erf platí:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.3)$$

Pro potřeby generování parametrů v pozdějším výpočtu bylo potřeba získat parametry rozdělení μ a σ ze známé zadané střední hodnoty m a v pro náhodnou veličinu $x = m \pm v$. Pro přepočítání parametrů vycházíme nejdříve ze známých parametrů μ a

σ .

Pro střední hodnotu a rozptyl platí následující vztahy:

Střední hodnota:

$$m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.4)$$

Rozptyl:

$$v = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2\mu + \sigma^2} = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot m^2 \quad (2.5)$$

Úpravou vztahu (2.5) získáme vztah pro inverzní výpočet σ jako:

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(\frac{v}{m^2}\right) + 1} \quad (2.6)$$

Po dosazení do (2.4) a úpravě získáme vztah pro inverzní výpočet μ :

$$\mu = \ln\left(\frac{m}{\sqrt{\frac{v}{m^2} + 1}}\right) \quad (2.7)$$

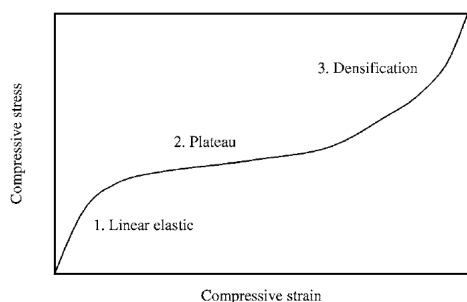
Pozn.: *Algoritmus pro generování náhodných veličin za pomoci funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je uveden ve zdrojovém kódu přiloženém v příloze.*

Kapitola 3

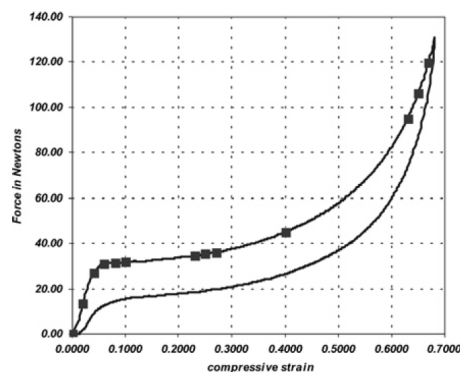
Mechanické vlastnosti pěnového materiálu

Mechanické vlastnosti pěnového materiálu velmi závisí na tom, o jaký typ a strukturu pěnového materiálu se jedná, tedy na vlivech, jako je pórovitost struktury, poměrná hustota materiálu a to, jestli se jedná z hlediska deformace o pěnu elastomerickou nebo elasto-plastickou. O rozdílech mezi elastomerickým a elasto-plastickým pěnovým materiálem pojednává například [7]. Silová odezva závisí též na uskupení vnitřní struktury a na tom, jakým způsobem struktura vznikla a jakým směrem jsou orientovány strukturní jednotky jednotlivých buněk. Záleží totiž na tom, jestli jsou buňky struktury zatěžovány ve směru vypěnění materiálu nebo ve směru kolmém na tento směr, jak dokládá například [2].

I přes různé typy pěnových materiálů existují podobnosti v jejich mechanických vlastnostech a silové odezvě. Protože bude pozdější simulační model vycházet z reologického modelu popisujícího vlastnosti pružné polyuretanové pěny, jakožto zástupce elastomerických pěn s otevřenými póry, bude při popisu kladen nejvyšší důraz právě na její vlastnosti. Polyuretanová pěna se jako materiál řadí obecně mezi visko-elastické materiály s nelineárním charakterem silové odezvy na deformaci, neplatí pro ni tedy Hookeův zákon a tudíž přímá úměrnost mezi napětím a deformací. Hlavním typem zatěžování pro pěnu přichází v úvahu především jednoosé zatěžování tlakové, pro jehož aplikaci jsou pěny většinou využívány například ve formě autosedaček, polstrování a podobně. Všechny polymerní pěny vykazují při tomto typu zatížení podobnou závislost mezi napětím a deformací se svými třemi fázemi, které mají svůj typický průběh a které budou postupně popsány. Při experimentálně měřeném průběhu silové odezvy pěnového materiálu jde navíc upozornit jeho tlumící vlastnosti. Platí, že nelze od sebe oddělit účinek tlumící a vratné síly, jako to dokládá například [1], silová odezva vykazuje hysterezi mezi zatěžováním a odlehčováním, jako je patrné například z následujícího grafu 3.2.



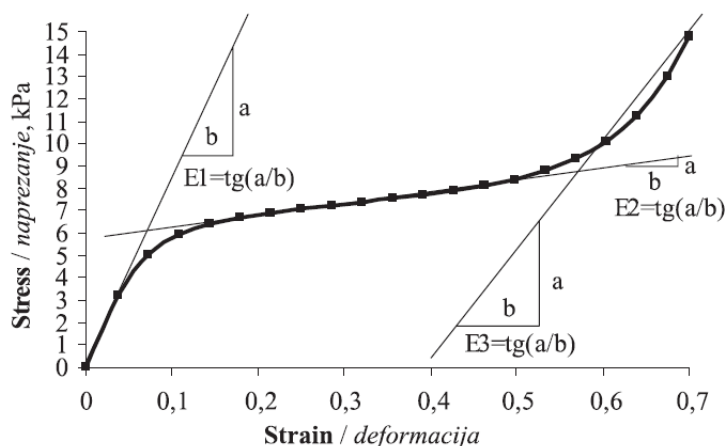
Obrázek 3.1: Skeletní křivka zatěžovací charakteristiky, převzato z [3]



Obrázek 3.2: Hysterezní křivka zatěžovací charakteristiky, převzato z [3]

Protože mechanismus deformace vnitřní struktury pěny je velmi komplexní problém, vznikají různé metody, jak tyto mechanismy popsat pomocí modelů, které by dané experimentálně změřitelné průběhy zatěžování vhodně simulovaly a existují též různé přístupy, jak tyto modely vytvořit.

Ze zmíněných grafů závislosti mezi napětím a poměrnou deformací je na první pohled patrná nelinearita silové odezvy a skutečnost, že Youngův modul pružnosti jakožto tečna ke grafu průběhu křivky v daném bodě je funkčně závislá na poměrné deformaci. Graf na obr. 3.3 slouží pouze pro ilustraci nelineární silové odezvy, nejdná se pokus o její linearizaci. V průběhu zatěžování pěny se tedy mění hodnota jejího Youngova modulu pružnosti.



Obrázek 3.3: Průběh proměnného Youngova modulu pružnosti, převzato z [8]

Vzhledem ke změnám, ke kterým ve vnitřní struktuře během zatěžování dochází je zatěžování z hlediska deformace rozděleno na 3 fáze, o níž takto mluví i literatura [3].

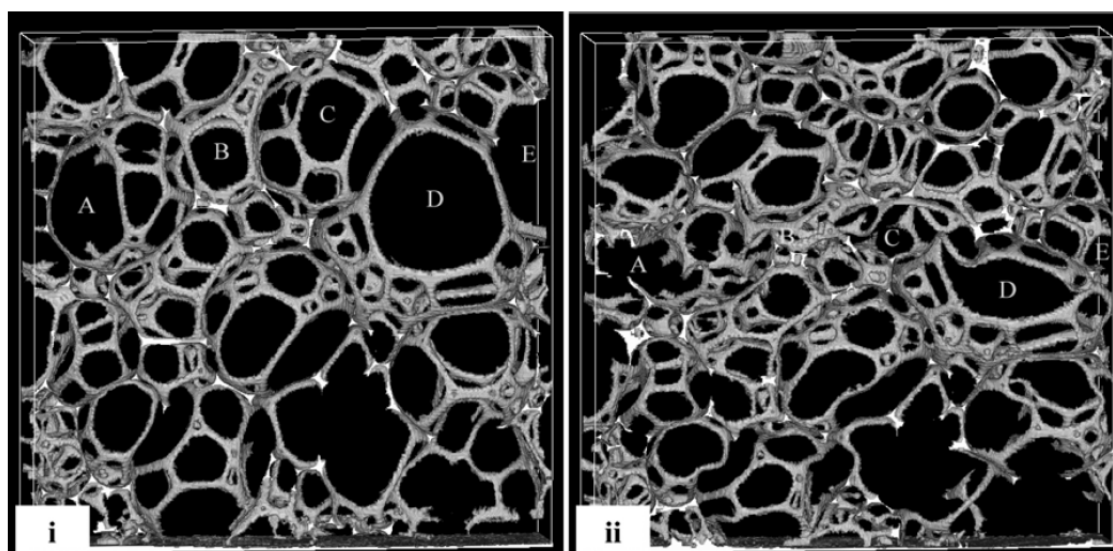
3.1 Typické fáze silové odezvy při zatížení

První fáze-borcení vnitřní struktury

První fáze zatěžování má téměř lineární průběh silové odezvy na deformaci, generovaná vratná síla je téměř přímo úměrná deformaci a deformace je elastická, takže při odlehčení pěna nabude svého původního tvaru. V uvedené literatuře [3] se tato fáze popisuje uložením deformační energie ve vratném ohybu jednotlivých nosných elementů pěnové struktury orientovaných ve směru paralelním ke směru zatěžování. Deformace v této počáteční fázi zatěžování je považována za elastickou, protože po odlehčení materiál nabude svého původního tvaru.

Plateau fáze zatěžování

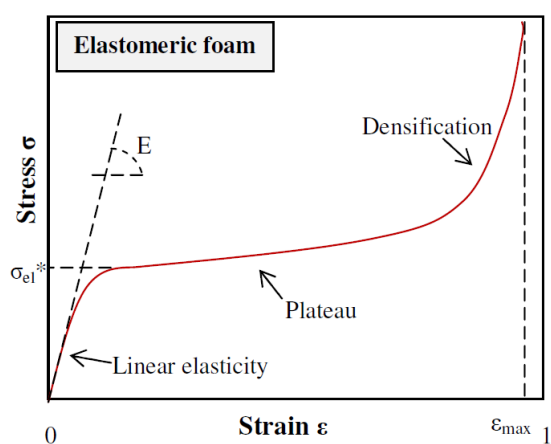
V další fázi zatěžování, v literatuře běžně označované plateau, roste generovaná síla v závislosti na deformaci velmi pomalu pro větší oblast deformací. Opačně by se dalo říci, že malý nárůst zatěžující síly vede k velkému nárůstu deformace. Někdy je tento rychlý nárůst poměrné deformace při malé změně vnějšího napětí označován jako ztráta stability vnitřní struktury a oblast lokalizace napětí, jak popisuje [9]. To jestli dojde k heterogennímu nebo homogennímu charakteru deformace ovlivňuje například relativní hustota nebo pórovitost pěnového materiálu a to, jestli se jedná o strukturu s uzavřenými či otevřenými buňkami. Tato lokalizace se může někdy projevit až pásmy s vyšší hodnotou poměrné deformace a například na tomografických snímcích se dá tento jev zpozorovat, jak dokládá následující snímek 3.4 z článku [3].



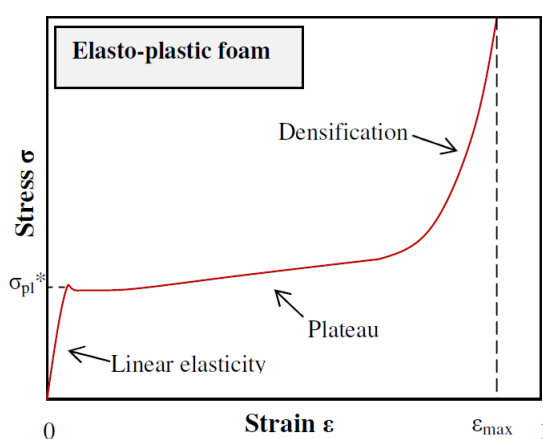
Obrázek 3.4: Pásky lokalizace deformace vnitřní struktury, převzato z [3]

Jev lokalizace pásem deformace je znázorněn na vyznačených buňkách A až E. Pro případ elasto-plastomerické pěny dojde v této oblasti zatěžování již k plastické deformaci a zatěžovací charakteristika má tak odlišný tvar než v případě elastomerické pěny, jak dokládá například snímek 3.7. Jevu ztráty stability a lokalizace deformace bude brána v další kapitole pozornost a bude zahrnut i do výpočetního modelu a označován jako vliv ztráty stability buněk. Deformace vnitřní struktury je pro tuto fázi zatěžování popisována jako kombinace ohybu a tahu vláken.

Vliv rozdílu mezi elastomerickou a elastoplastickou pěnou při plateau fázi zatěžování je patrný z následujících grafů 3.7:



Obrázek 3.5: Elastomerická pěna



Obrázek 3.6: Elastoplastická pěna

Obrázek 3.7: Rozdíl v zatěžování pro elastomerickou a elastoplastickou pěnu, převzato z [7]

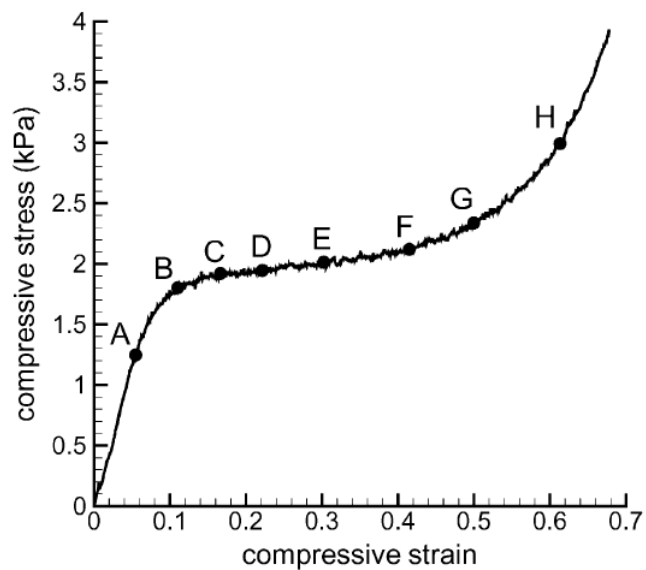
Zhušťovací fáze zatěžování

Při další fázi zatěžování přejde plateau fáze plynule do takzvané zhušťovací fáze, kdy dojde při pomalém nárůstu poměrně deformace k rychlému nárůstu napětí a tedy i k poměrně vysokému nárůstu poměrné hustoty a Youngova modulu pružnosti, jejichž hodnota se v této fázi blíží takové hodnotě, kterou by měl pěnový materiál ve své pevné fázi v nezpěněné formě. Z hlediska deformačního mechanismu si můžeme tuto fázi představit tak, že deformované buňky struktury postupně dosedají na sebe a zmenšuje se prostor mezi nimi, materiál taky nabývá vlastností materiálu ve své pevné nevpěněné fázi.

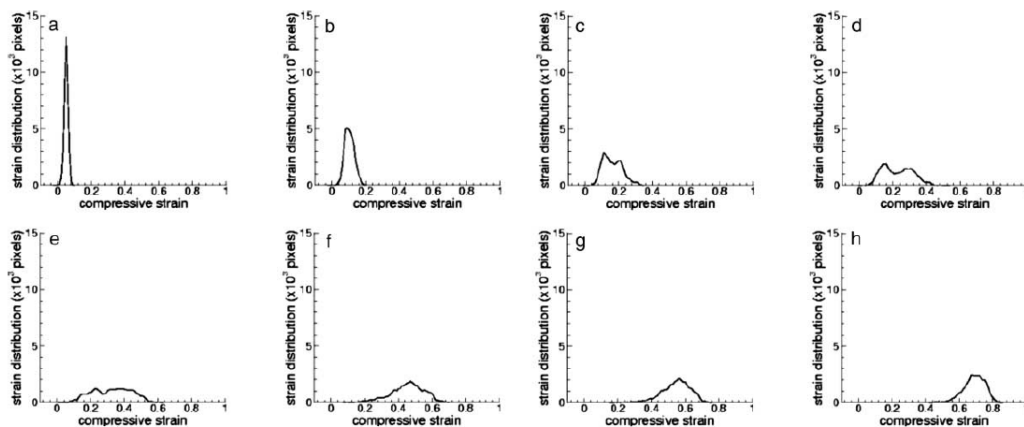
3.2 Heterogenní charakter deformace vnitřní struktury

Během druhé, neboli plateau fáze zatěžování dojde ke ztrátě stability této struktury a záleží na daném materiálu, zdali si silová odezva zachová i při této fázi svůj rostoucí průběh s proměnlivou hodnotou směrnice a tedy Youngova modulu pružnosti jako zobrazeno například na obr. 3.1 nebo zdali dojde nejdříve k dosažení lokálního maxima v silové odezvě, poté k pozvolnému poklesu Youngova modulu a tedy i klesajícímu charakteru silové odezvy, která ve zhušťovací fázi zatěžování přejde opět do rostoucího charakteru. Graf silové odezvy v tomto případě tedy vykazuje ve svém průběhu dvě hodnoty lokálních extrémů, jak je v dalším textu znázorněno například na obr. 3.16. Tento jev je spojován se ztrátou stability vnitřní struktury materiálu a její projev byl zjištěn jako lokalizování pásem nebo oblastí s vyšší hodnotou deformace.

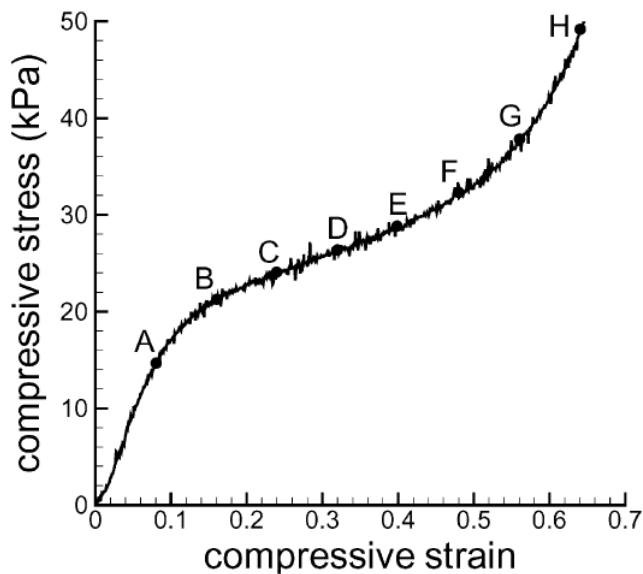
Změřením a zaznamenáním těchto pásem lokalizované deformace se zabývá článek [9], v němž je popsán postup jak tento jev zaznamenat za pomoci digitální korelace rastrových obrazů. Jak je ve zmíněném článku popisováno, největší vliv na heterogenní projev deformace má hustota daného pěnového materiálu. Zmíněná metoda je v článku [9] užitá při experimentu na dvou charakteristických hodnotách hustoty materiálu, v prvním případě pro poměrně malou hodnotu hustoty $\rho = 21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, ve druhém případě pro relativně vysokou hodnotu hustoty $\rho = 72 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Z měření jsou poté vyhodnoceny jednak diagramy silové odezvy pro oba případy a také sestavení polygonů četností poměrných deformací pro danou hodnotu poměrné deformace vzorku.



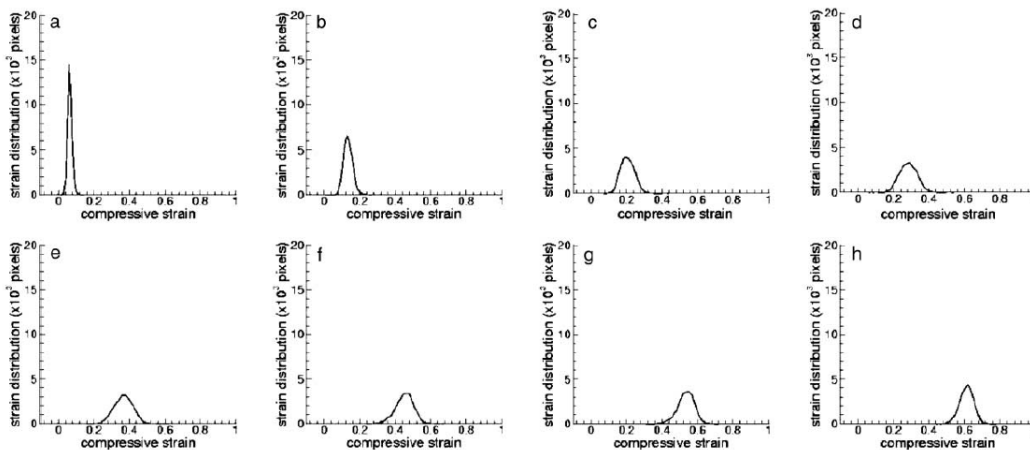
Obrázek 3.8: Zatěžovací diagram pro vzorek pěny s nízkou hustotou, převzato z [9]



Obrázek 3.9: Polygon četností poměrných deformací pro vzorek pěny s nízkou hustotou, převzato z [9]



Obrázek 3.10: Zatěžovací diagram pro vzorek pěny s vysokou hustotou, převzato z [9]

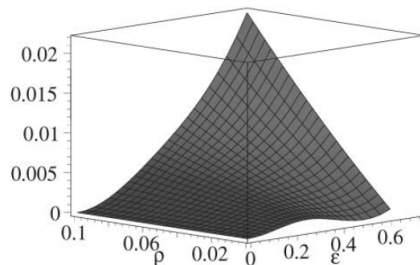


Obrázek 3.11: Polygon četností poměrných deformací pro vzorek pěny s vysokou hustotou, převzato z [9]

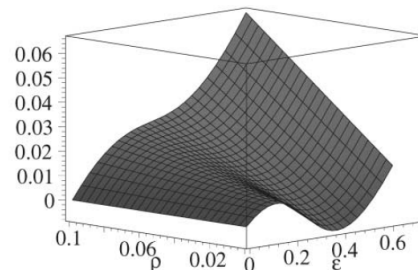
Z přiložených polygonů četností poměrné deformace je patrné pro plateau zatěžovací fázi pro vzorek s malou hustotou, že poměrná deformace má bimodální charakter, to znamená, že poměrná deformace je kombinací dvou hodnot, nízké a vysoké hodnoty poměrné deformace. Ostatní dvě fáze zatěžování mají charakter

unimodální, tedy hodnota poměrné deformace má svoji jednu dominantní hodnotu. Cílem pozdějšího simulačního výpočtu bylo získat při zobrazení relativní četnosti poměrně deformace zobrazené v histogramu obrazec připomínající tyto polygony četností poměrné deformace. Písmenům A-H odpovídají k nim příslušné zatěžovací stavy ve grafu silové odezvy. Ukazuje se, že zatímco pro pěnu s nízkou hodnotou relativní hustoty je velmi patrná skoro konstantní plateau fáze zatěžování, pro pěnu s vysokou hustotou tato konstantní plateau fáze zaniká a křivka průběhu silové odezvy si zachovává rostoucí charakter po celou dobu zatěžování. Z příslušných histogramů pro pěnu s vysokou hustotou je patrné, že vůbec nedojde k bimodálnímu charakteru poměrné deformace, deformace si tedy zachovává homogenní charakter.

V článku [9] se též nachází odvození vztahu pro přírůstek deformační energie od ohybu a od tahu nosných elementů struktury pěnového materiálu. Odvození těchto vztahů vychází z modelu, který geometrii vnitřní struktury vyjadřuje jako strukturu propojených nosníků připomínající svým tvarem krystalovou mřížku. Poměrná deformace ε je odvozena z natočení těchto nosníků vzhledem k počátečnímu úhlu, ve kterém se nosník nacházel před zatížením. V odvozených výpočetních vztazích jsou přírůstky deformační energie závislé na velikosti poměrné deformace a zároveň na poměrné hustotě materiálu, definované v tomto případě jako objem buňky ku objemu prostoru, který buňka zabírá. Z těchto vztahů je odvozen vztah pro výpočet celkové deformační energie jako součet energie od ohybu a od tahu. Při zobrazení celkové deformační energie a napětí v závislosti na poměrné deformaci a relativní hustotě vychází následující grafy:



Obrázek 3.12: Celková deformační energie

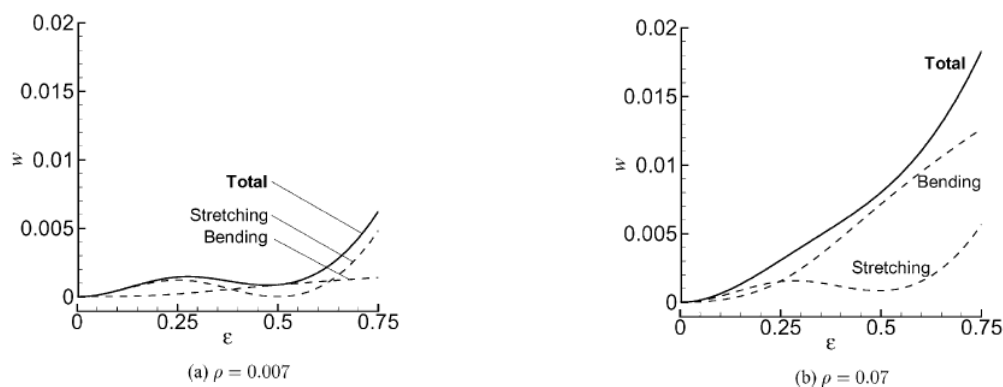


Obrázek 3.13: Napětí

Obrázek 3.14: Závislost deformační energie a napětí na relativní hustotě a poměrné deformaci, převzato z [9]

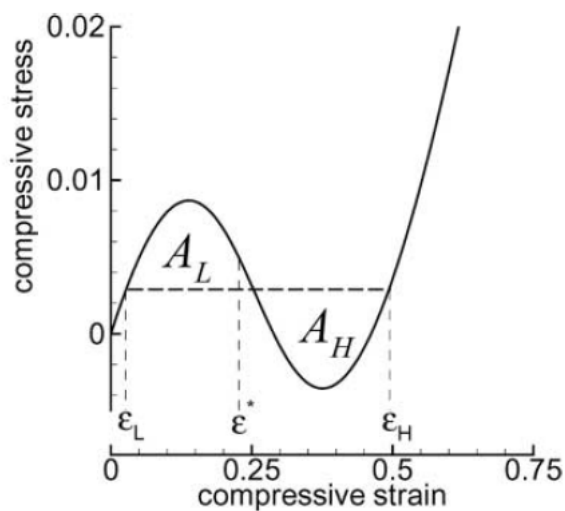
Pro názornost pro vybrané hodnoty relativních hustot přejdou grafy přírůstku deformační energie do následující podoby:

Tyto závislosti poté dávají představu o vlivu relativní hustoty materiálu na přírůstek celkové deformační energie a jakým podílem se na ní podepíše přírůstek deformační energie od tahového napětí a jakým od ohybového napětí. Tímto způsobem se dojde k závěru, že pro pěnu s malou hodnotou relativní hustoty je přírůstek energie



Obrázek 3.15: Závislost deformační energie na relativní hustotě a poměrné deformaci, převzato z [9]

od ohybu zanedbatelný, což je způsobeno pravděpodobně právě onou ztrátou stability při plateau fázi zatěžování, což má za následek, že průběh přírůstku celkové energie je konvexní. Naproti tomu u pěny s vysokou hustotou je tento přírůstek energie od ohybu dominantní a celkový průběh deformační energie má nekonvexní průběh. Popsané skutečnosti slouží k odvození následující napěťové odezvy na obr. 3.16 pro pěnový materiál s vlivem ztráty stability vnitřní struktury:

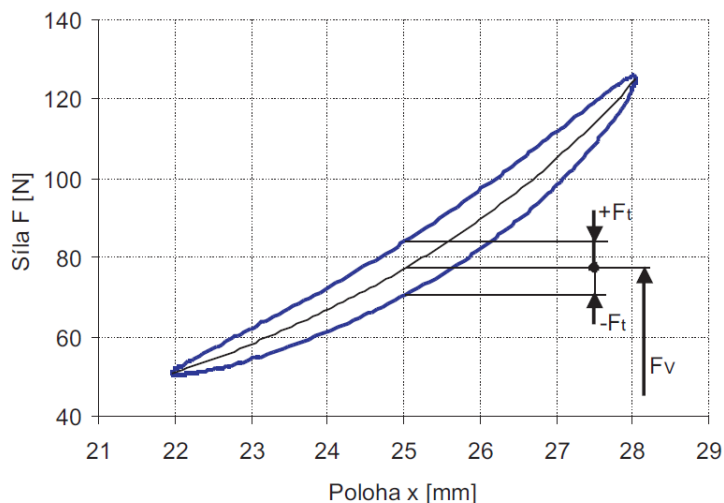


Obrázek 3.16: Zatěžovací diagram pro pěnu s heterogenním způsobem deformace [9]

V simulačním výpočtu bude na tento jev kladen důraz a bude provedena simulace při kvazistatickém typu zatěžování pro model uvažující ztrátu stability a tedy heterogenní charakter deformace a pro model bez uvažování tohoto vlivu a tedy homogenní charakter deformace.

3.3 Hystereze napětí a práce tlumící síly

Vzhledem k tomu, že silová odezva pěnového materiálu vykazuje během periodického zatěžování jinou silovou odezvu při stlačování a jinou při odlehčování, mluví se o takzvané hysterezi. Při experimentálních měřeních v [1] bylo pro polyuretanovou pěnu zjištěno, že při periodickém kinematickém buzení má celková silová odezva v závislosti na deformaci následující průběh:



Obrázek 3.17: Vliv tlumící síly na celkovou silovou odezvu, převzato z [1]

Tento jev je způsoben útlumem materiálu, které způsobuje během jednoho pracovního cyklu energetické ztráty. Vratná síla působí v celkové silové odezvě jako jakási skeletová křivka, kolem které je symetricky rozložena síla tlumící, která má odlišný průběh při stlačování vzorku a při jeho odlehčování a způsobuje právě onu zmíněnou hysterezi. Na základě tohoto poznatku je definována takzvaná disipační energie jako práce tlumící síly za jeden pracovní zatěžovací cyklus, tedy plocha ohraničená hysterezní křivkou. Autor článku [1] došel na základě experimentů k závěru, že hodnota velikosti disipační energie způsobená prací tlumící síly je v případě harmonického a trojúhelníkového budícího signálu lineárně závislá na hodnotě budící frekvence. Tomuto poznatku bude v dále popisovaném strukturním modelu věnována

těž pozornost a bude snaha dosáhnout pro práci tlumící síly simulačního modelu také lineární závislosti. Práce tlumící síly je definována takto:

$$W_d = \oint F_t dx \quad (3.1)$$

Kapitola 4

Simulační model polyurethanové pěny

V případě simulačního mechanického modelu byl převzat reologický model pěnového materiálu z disertační práce doc., Ing. Cirkla, Ph.D. [1] a doplněn o některé další skutečnosti, o níž bude v dalším popisu řeč. Přesný popis převzatého modelu polyuretanové pěny je uveden v příloze A.

Reologie je vědní obor zabývající se deformací a tečením látek a v případě polyurethanové pěny popisuje její deformační vlastnosti, protože pěna, jakožto nelineární materiál vykazuje vysoké hodnoty poměrných deformací a visko-elastické vlastnosti.

Uvažovaný simulační model spočívá v nahrazení těchto vlastností pěny jakožto kontinua soustavou pružin a tlumičů s nelineární zatěžovací charakteristikou. Pružiny zde zastupují elastické vlastnosti pěny a jejich silová odezva odpovídá svým průběhem průběhu silové odezvy pěnového materiálu, popsáno v kapitole 3 a zobrazeného například na obr. 3.1 se svými typickými zatěžovacími fázemi. Tlumiče v modelu zastupují tlumící vlastnosti materiálu vzhledem k předpokladu, že celková silová odezva vykazuje hysterezní průběh. Jednotlivé složky sil jsou popsány analytickými vztahy tak, aby výsledný průběh, získaný jejich kombinací co nejlépe odpovídal skutečnému průběhu celkové silové odezvy.

4.1 Budící funkce

Ve všech případech simulace byl jako typ zatěžování zvolen předepsaný pohyb jako funkce času, tedy kinematické buzení základny. V případě kvazistatického režimu zatěžování byla uvažována funkce buzení základny jako lineární funkce času při co nejnižší rychlosti deformace, v dynamickém režimu se jednalo o budící periodickou funkci pro trojúhelníkové a harmonické buzení.

Kvazistatický režim

Tak jako v praxi nelze u polyurethanové pěny oddělit účinky tlumící a vratné síly i v případě simulačního modelu vychází oba režimy zatěžování ze stejného výpočtu. Aby se však jednalo o kvazistatický režim, musí být způsob zatěžování volen tak, aby rychlost zatěžování byla co nejnižší a konstantní, aby se pokud možno zamezilo vlivu tlumící síly. Za tímto účelem byla pro závislost změny deformace v čase při kvazistatickém zatěžování volena lineární závislost deformace v čase.

$$z(t) = v \cdot t \quad (4.1)$$

Přičemž $v = konst$

Dynamický režim

V dynamickém režimu byl již uvažován jak účinek vratné, tak i tlumící síly. Pro tyto účely bylo kinematické buzení dáno jako periodická funkce pro zvolenou frekvenci buzení.

Harmonický polohový signál

V prvním případě periodické funkce se jedná o harmonickou funkci sinus zadanou v následující podobě:

$$z(t) = Z_0 + Z \sin[\omega(t - t_n)] \quad (4.2)$$

Pro rychlost tedy platí:

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = Z\omega \cos[\omega(t - t_n)] \quad (4.3)$$

Pro úhlovou rychlost ω při zadané frekvenci f platí:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (4.4)$$

Konstanta Z_0 vyjadřuje střední polohu výchylky základny a Z amplitudu výchylky, popisující kmitání kolem této polohy. Konstanta t_n vyjadřuje dobu lineárního náběhu do této střední polohy výchylky. Je třeba zajistit plynulý nájezd z polohy $z(t = 0) = 0$ mm na střední polohu $z(t = t_n) = Z_0$, čehož se docílí lineární funkcí. Spojitého přechodu mezi oběma průběhy se docílí z předpokladu, že směrnice tečny v čase t_n jakožto doby náběhu musí být stejnou hodnotu jako pro sinusoidu v tomto čase. Platí tedy:

$$z(t = t_n) = Z_0 \quad (4.5)$$

$$v_z(t = t_n) = Z \cdot \omega \quad (4.6)$$

Lineární funkce má předpis:

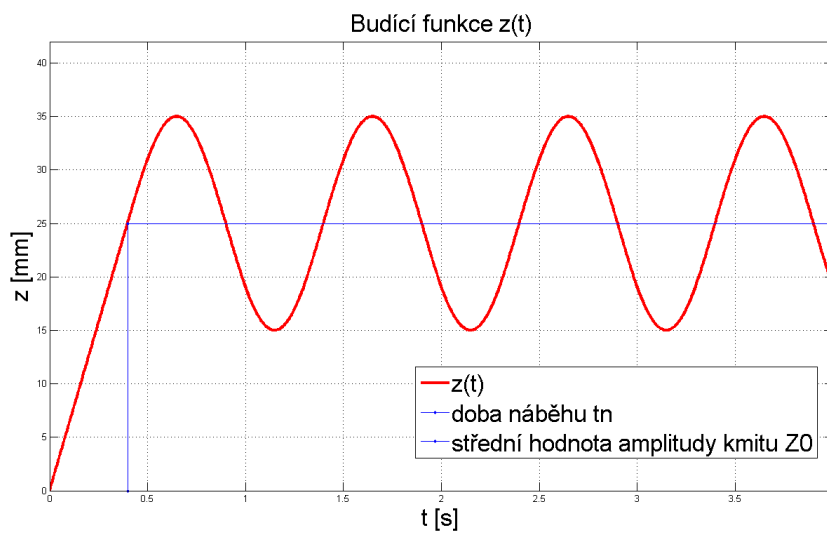
$$z(t) = v \cdot t \quad (4.7)$$

Pro rychlost náběhu tedy platí:

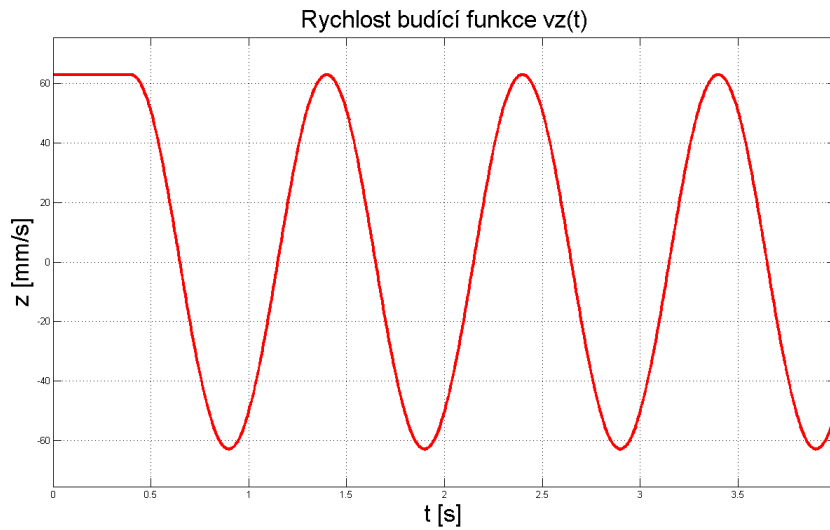
$$v = \frac{Z_0}{t_n} = Z \cdot \omega \quad (4.8)$$

Úpravou předchozího vztahu vyjde pro čas náběhu:

$$t_n = \frac{Z_0}{Z \cdot \omega} \quad (4.9)$$



Obrázek 4.1: Harmonická budící funkce s lineárním náběhem v závislosti na čase



Obrázek 4.2: Průběh rychlosti buzení harmonické buzení funkce

Trojúhelníkový buzení signál

Při zadané amplitudě Z platí pro výchylku buzení funkce:

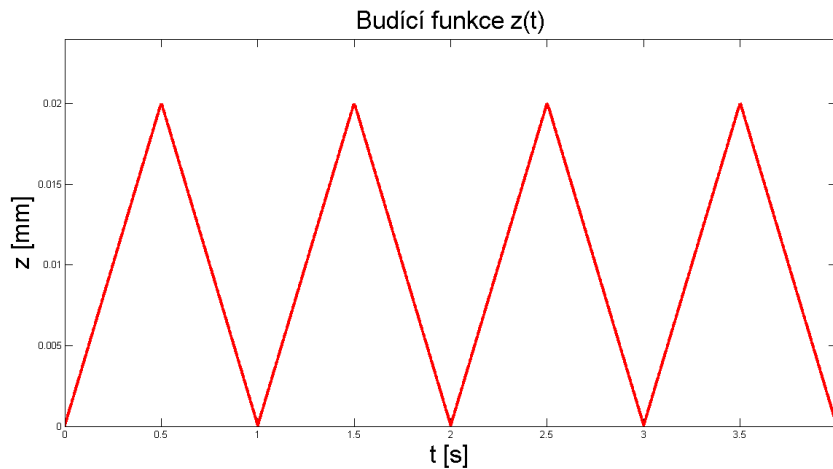
$$z(t) = \begin{cases} \frac{2Z_0}{T} (t - nT) & \text{pro } t \in \langle nT, nT + T/2 \rangle \\ \frac{-2Z_0}{T} [t - (n+1)T] & \text{pro } t \in \langle nT + T/2, (n+1)T \rangle \end{cases} \quad (4.10)$$

Doba periody T je tedy definována jako doba, za kterou signál dosáhne z nulové polohy požadovanou amplitudu Z_0 a vrátí se zpět do nulové polohy.

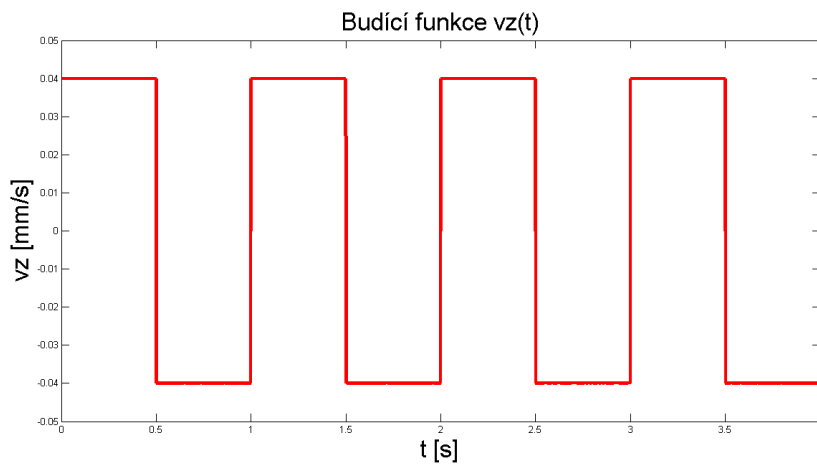
Pro rychlost platí:

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \begin{cases} \frac{2Z}{T} & \text{pro } t \in \langle nT, nT + T/2 \rangle \\ \frac{-2Z}{T} & \text{pro } t \in \langle nT + T/2, (n+1)T \rangle \end{cases} \quad (4.11)$$

Na následujícím obr. 4.3 je zobrazena buzení funkce pro dobu periody $T = 1$ s.



Obrázek 4.3: Časový průběh trojúhelníkové budící funkce



Obrázek 4.4: Časový průběh trojúhelníkové budící funkce

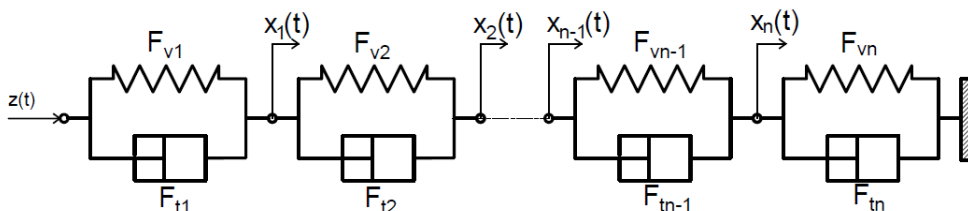
4.2 Strukturální simulační model pěny

Smyslem strukturálního modelu je nahradit pěnu jakožto kontinuum s rozloženými parametry diskretní soustavou s parametry soustředěnými do jednotlivých buněk struktury. V případě pěny se jedná o nahrazení soustavou pružin a tlumičů, jež slouží jako vyjádření visko-elastických vlastností jednotlivých buněk materiálu. Nepravidelnosti vnitřní struktury se docílí za pomoci toho, že tyto zmíněné soustředěné parametry budou považovány za náhodnou veličinu a generovány podle postupu popsaného v kapitole 2.

Cílem modelu je získat představu o silové odezvě sil přenášených jednotlivými buňkami v závislosti na daném způsobu zatěžování. Dále bylo smyslem dokázat heterogenní charakter deformace na základě zvoleného průběhu vratné síly. Je očekáváno získat při zobrazení četností poměrných deformací buněk pro jednotlivé zatěžovací

stavy podobné histogramy četností, které jsou uvedené v kapitole 3 na obr.3.9 a 3.11. Model má též sloužit k ověření lineární závislosti práce tlumící síly na budící frekvenci při periodickém způsobu kinematického buzení.

Ve všech případech zatěžování bude model koncipován tak, že jednotlivé elementy jsou schopné přenášet osová napětí ve směru zatěžování, což je jedno ze zjednodušení oproti skutečné napjatosti pěnového materiálu. Sestavený model vychází alespoň z hlediska vratné síly ze simulačního modelu se soustředěnými parametry z disertační práce doc., Ing. Cirkla, Ph.D. [1]. V jeho případě se jedná o model se soustředěnými parametry, který nahrazuje visko-elastické vlastnosti pěny jednou soustavou nelineárních pružin a tlumičů z hlediska materiálu jako celku a ne soustředěné v jednotlivých buňkách. Navíc zohledňuje i přírůstek síly od smykového tření, jakožto vliv přechování stěn buněk pěnového materiálu při stlačování. Tlumící síla je v případě buněčného modelu též zjednodušená z hlediska lineární závislosti na rychlosti zatěžování, což nemusí odpovídat skutečnosti a tomuto jevu bude též věnována pozornost. Oproti původnímu modelu se též změnilo řazení pružin a tlumičů. Zatímco původní model vychází z reologického modelu pro visko-elastické materiály známého jako Maxwellův, kdy pružina a tlumič jsou řazeny sériově, zde jde o řazení paralelní, známé jako Kelvin-Voightův model [11].



Obrázek 4.5: Reologický strukturální model zohledňující jednotlivé buňky

Takovéto uskupení paralelně spojené pružiny s tlumičem zastupují v modelu jednu buňku a takto vytvořené buňky jsou sériově spojeny do řetězce, vyjadřující celkovou výšku vzorku pěny. V případě pružiny v modelu se jedná o pružinu s nelineární zatěžovací charakteristikou sestavenou z matematických elementárních funkcí tak, aby průběh této charakteristiky odpovídal co nejlépe změřitelné silové odezvě vratné síly na deformaci a blížil se tak průběhu odezvy zobrazené například na obr. 3.1. Tlumící síla je v případě buněčného modelu zlinearizovaná, což se později může jevit jako moc velké zjednodušení oproti skutečné silové odezvě pěnového materiálu. Průběh generované síly celkové jakožto součtu složek síly vratné a tlumící by měl vykazovat hysterezní chování zobrazené například na obr. 3.2.

4.2.1 Vratná síla

Aby bylo dosaženo průběhu vratné síly a tím skeletové křivky průběhu celkové síly generované pěnou, je potřeba najít funkční závislost, která by takovému průběhu odpovídala. Celkový průběh vratné síly vznikne jako součet složek této síly, vyjadřující jednotlivé fáze zatěžování.

První fáze zatěžování

Složka síly F_u , zastupující první fázi zatěžování způsobuje v celkovém průběhu téměř lineární náběh na hodnotu síly, označenou jako mez únosnosti a ve grafu průběhu vratné síly tvoří tato hodnota horizontální asymptotu. Konstanta únosnosti k_u v exponentu závislosti F_u ovlivňuje tvar křivky v místě náběhu na hodnotu meze únosnosti m_u , udávající polohu horizontální asymptoty. Silová odezva pružin je závislá na jejich deformaci, proto bude velikost této složky generované síly závislá na relativním posuvu mezi členy vyjadřující sousední buňky. Relativní posuv je v tomto případě dán jako rozdíl posuvů mezi i -tým a $i+1$ členem řetězce:

$$F_{ui}(x_i - x_{i+1}) = m_{ui} \cdot [1 - \exp^{-k_{ui} \cdot (x_i - x_{i+1})}] \quad (4.12)$$

Fáze plateau a zhušťovací fáze

Pro popis plateau fáze zatěžování a jejího přechodu do zhušťovací fáze poslouží polytropická závislost. Vertikální asymptota této závislosti je dána konstantou h_{pi} , jež vyjadřuje velikost buňky i -tého členu a zároveň tak volnou délku dané pružiny. Takováto závislost je podobná polytropické závislosti stlačování ideálního plynu a ve své podstatě vyjadřuje i skutečnost, že pokud deformace buňky dosáhne hodnoty 100%, vzroste hodnota síly pro tuto hodnotu deformace nade všechny meze, což ve skutečném průběhu silové odezvy pěny vyjadřuje právě ona zhušťovací fáze. Exponent polytropické závislosti n_{pi} ovlivňuje strmost přechodu do zhušťovací fáze. Polytropická závislost je dána tímto předpisem:

$$F_{pi}(x_i - x_{i+1}) = p_{pi} S_{pi} \left[\left(\frac{h_{pi}}{h_{pi} - (x_i - x_{i+1})} \right)^{n_{pi}} - \left(\frac{h_{pi}}{h_{pi} + (x_i - x_{i+1})} \right)^{n_{pi}} \right] \quad (4.13)$$

Celková vratná síla i -tého prvku je potom součtem složek síly F_{ui} a F_{pi} :

$$F_{Vi}(x_i - x_{i+1}) = F_{ui} + F_{pi} \quad (4.14)$$

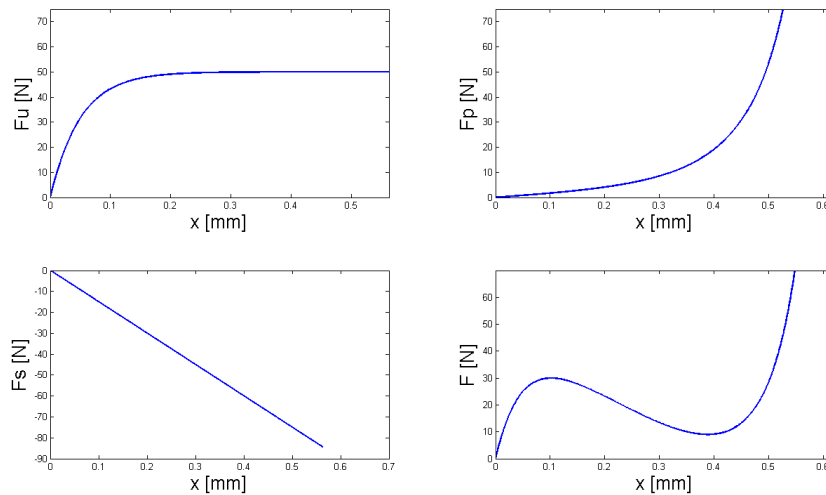
Při výpočtu budeme však uvažovat i vliv ztráty stability buněk a heterogenní charakter deformace v plateau fázi zatěžování tak, abychom získali podobnou závislost jako je ve grafu 3.16 v kapitole 3. Toho se dosáhne tak, že se k původnímu průběhu přičte funkce s lineární závislostí a se zápornou směrnici k_s .

$$F_{si}(x_i - x_{i+1}) = -k_{si}(x_i - x_{i+1}) \quad (4.15)$$

Celková síla modelu s uvažováním ztráty stability potom bude dána součtem těchto 3 složek síly jako:

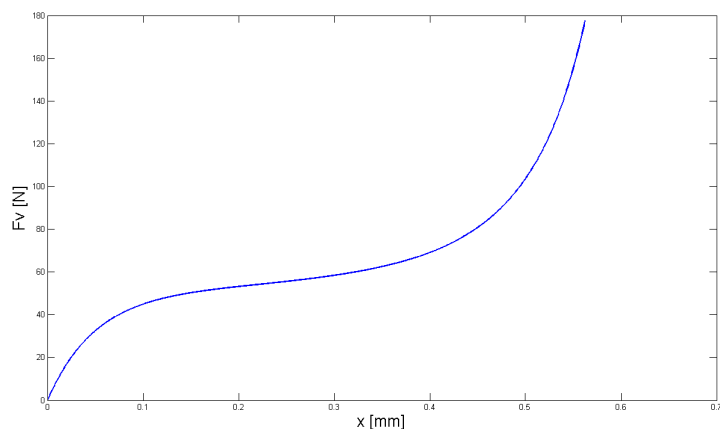
$$F_{Vi}(x_i - x_{i+1}) = F_{ui} + F_{pi} + F_{si} \quad (4.16)$$

Na následujícím grafu je zřetelný vliv složky síly F_s na původní zatěžovací charakteristiku polyuretanové pěny. Tato závislost má docílit podobný průběh jako je zobrazeno na 3.16 v kapitole 3.



Obrázek 4.6: vliv složky síly F_{si} na celkový průběh F_{Vi}

Pro srovnání graf pro stejné hodnoty parametrů a $k_s = 0$ a tedy zachování progresivní silové odezvy. :



Obrázek 4.7: Vratná síla bez vlivu ztráty stability

4.2.2 Lineární tlumící síla

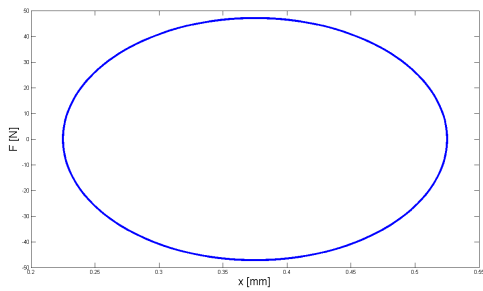
Jak již bylo řečeno, tlumící síla je oproti původnímu převzatému modelu zjednodušena a slouží tak spíše k prvotnímu přiblížení danému problému disipace energie a hystereze při odlehčování. Vychází ze vztahu:

$$F_t = c\dot{x} \quad (4.17)$$

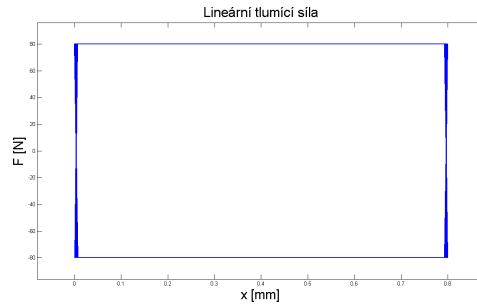
Díky sériovému zapojení a relativnímu pohybu mezi buňkami je tlumící síla opět přímo úměrná relativní rychlosti mezi i -tým a $i+1$ prvkem. Proto pro tlumící sílu i -té buňky platí:

$$F_{ti}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) = c(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \quad (4.18)$$

Na následujícím grafu je zobrazen průběh této tlumící síly v závislosti na výchylce. V dalším textu bude možnost porovnat tuto závislost s nelineární závislostí tlumící síly.



Obrázek 4.8: Tlumící síla při harmonickém buzení



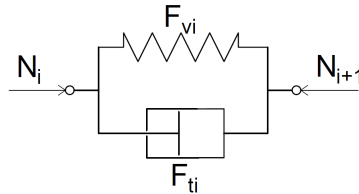
Obrázek 4.9: Tlumící síla při trojúhelníkovém buzení

Obrázek 4.10: Průběh lineární tlumící síly

4.2.3 Metoda uvolnění a sestavení rovnic

Při sestavování rovnic se vychází ze skutečnosti, že uskupení pružina-tlumič jsou mezi sebou propojeny sériově a přenášená osová síla mezi nimi je dána silovou rovnováhou mezi nimi, známou z Newtonova zákona akce a reakce. Pro přenášenou osovou sílu mezi prvky i -tým a $i+1$ prvkem řetězce tedy platí:

$$N_i = N_{i+1} \quad (4.19)$$



Obrázek 4.11: Schéma uvolnění i -té buňky

Pro přehlednost a odvození soustavy pohybových rovnic pro libovolný počet prvků použijeme nejdříve soustavu 4 buněk a tedy 3 neznámých posuvů. Bude platit následující soustava pohybových rovnic:

$$\begin{aligned} F_{V1}(z(t) - x_1) + c(v_2(t) - \dot{x}_1) &= F_{V2}(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ F_{V2}(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F_{V3}(x_2 - x_3) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ F_{V3}(x_2 - x_3) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= F_{V4}(x_3) + c\dot{x}_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pozn.: Kvůli možnosti řešit soustavu diferenciálních rovnic numericky v Matlabu v řešiči ODE15s převedeme soustavu do maticového tvaru, do tzv.: Mass Matrix Form. Řešič ODE15s je přizpůsoben na řešení takzvaných stiff problémů a řešení problému se soustavou diferenciálních algebraických rovnic, založených na metodě zpětné diferenciacce a Gearově metodě.

Soustava diferenciálních pohybových rovnic bude v maticové podobě ve tvaru:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (4.21)$$

Matice soustavy \mathbf{M} obsahuje tedy koeficienty vektoru derivací neznámých posuvů $[x_1, x_2, x_3]^\top$ a sloupcový vektor \mathbf{F} složený ze součtu sil vratných tvoří vektor pravé strany soustavy.

Pro 4 buňky má soustava diferenciálních rovnic v maticovém tvaru tedy podobu:

$$\begin{bmatrix} -2c & 1c & 0 \\ 1c & -2c & 1c \\ 0 & 1c & -2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{V2} - F_{V1} - cv_z(t) \\ F_{V3} - F_{V2} \\ F_{V4} - F_{V3} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Vzhledem k rovnováze mezi sousedními členy a tedy návaznosti neznámých funkcí posuvů x_i lze soustavu diferenciálních rovnic zobecnit pro libovolný počet p buněk. V tomto případě se bude jednat o soustavu n diferenciálních rovnic, přičemž platí, že $n = p - 1$ vzhledem k tomu, že časová výchylka první buňky je dána budící funkcí $z(t)$. Matice soustavy M bude mít vždy na hlavní diagonále $-2c$ a na vedlejších diagonálách $1c$.

Obecná soustava diferenciálních pohybových rovnic pro libovolný počet prvků má tedy podobu:

$$\begin{aligned} F_{V1}(z(t) - x_1) + c(v_z(t) - \dot{x}_1) &= F_{V2}(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ F_{V2}(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F_{V3}(x_2 - x_3) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ &\dots \\ F_{V_{n-1}}(x_{n-1} - x_n) + c(x_{n-1} - \dot{x}_n) &= F_{Vn}(x_n) + c\dot{x}_n \end{aligned} \quad (4.23)$$

Soustava pohybových diferenciálních rovnic v maticovém tvaru pro libovolný počet buněk má tedy tuto podobu:

$$\begin{bmatrix} -2c & 1c & \dots & 0 \\ 1c & -2c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1c \\ 0 & \dots & 1c & -2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{V2} - F_{V1} - cv_z(t) \\ F_{V3} - F_{V2} \\ \vdots \\ F_{Vn} - F_{V_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Řešením soustavy je vektor posuvů $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, ze kterých jsou podle odvozených vztahů zpětně počítány síly přenášené jednotlivými buňkami. Počáteční podmínky pro danou soustavu jsou nulové, což vychází z předpokladu, že před počátkem zatěžování jsou všechny buňky v klidové pozici a jejich deformace je tedy nulová. Ze zpětně spočítaných sil vratných a tlumících ze vztahů 4.16 a 4.17 přenášené i -tým členem řetězce je zpětně spočítána celková síla na dané buňce z předpokladu, že pružina tlumič jsou řazeny paralelně a platí tedy:

$$F_{ci} = F_{Vi} + F_{ti} \quad (4.25)$$

4.3 Kvazistatický model výpočtu pro jednotlivé buňky

Kvazistatický model uvažující bez vlivu ztráty stability buněk

Pro výpočet kvazistatického režimu zatěžování byl použit stejný výpočet jako pro dynamický režim, pouze byla budící funkce $z(t)$ upravena na lineární závislost, popsanou v kapitole 5 vztahem (4.7) a koeficient tlumení c byl volen tak, aby tlumící síla F_{ti} co nejméně ovlivnila průběh celkové síly F_{ci} . Řídicím parametrem pro generování náhodných parametrů pro jednotlivé buňky je střední hodnota těchto veličin a jejich rozptyl, ze kterých je podle vztahů uvedených v kapitole 2 počítáno funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti pro logaritmicko-normální rozdělení a z něho pak generovány hodnoty náhodné veličiny. Střední hodnoty a rozptyly pro simulaci byly voleny následovně:

Parametr	Střední hodnota	Rozptyl	Fyzikální jednotka
m_u	35	5	[N]
k_u	40	1	[N/mm]
h_p	0.75	0.03	[mm]
n_p	4	0.05	[1]
$k_5 = S_p p_p$	3	0.05	[N]

Tabulka 4.1: Volené hodnoty pro výpočet parametrů náhodným rozdělením bez vlivu ztráty stability

Pozn.: V přiloženém zdrojovém kódu jsou tyto konstanty označeny po řadě k_1 až k_5 , konstanta ztráty stability je označena k_7 .

Velikost maximální deformace je počítána z celkové délky řetězce h_c . Ta je dána

součtem délek jednotlivých elementů, tedy součtem volných délek jednotlivých pružin, jejichž hodnotu pro i -tou buňku řetězce a vyjadřuje konstanta h_{pi} . Pro celkovou délku řetězce tedy platí:

$$h_c = \sum_{i=1}^p h_{pi} \quad (4.26)$$

Velikost maximální hodnoty budící funkce $z(t)$ je volena tak, aby pro celkovou poměrnou deformaci řetězce vyšla hodnota $\varepsilon_c = 80\%$. Proto platí:

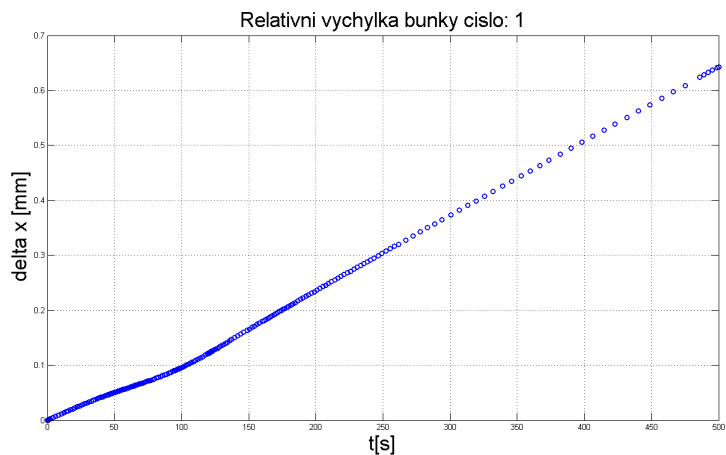
$$Z_0 = 0.8h_c \quad (4.27)$$

Koeficient tlumení c byl zvolen na hodnotu $c = 0.1$ kg/s. Z důvodu co nejmenšího vlivu tlumící síly F_{ti} byla volena co nejvyšší doba simulace tak, aby pro směrnicí lineární funkce $z(t)$ vyšla co nejnižší hodnota a tím co nejnižší hodnota rychlosti zatěžování $v_z(t)$. Proto byla tato hodnota času simulace volena na hodnotu $t_n = 500$ s. Vzhledem k lineární budící funkci $z(t)$ je možno očekávat, že spočítané výchylky jednotlivých členů řetězce budou budou přibližně lineárně závislé na čase. Vstupní parametry budící funkce vypadaly následovně:

Parametr	Hodnota	Fyzikální jednotka
Z_0	$0.8 \cdot h_c$	[mm]
t_n	500	[s]
c	0.1	[kg/s]

Tabulka 4.2: Vstupní parametry pro výpočet budící funkce pro kvazistatický režim zatěžování bez vlivu ztráty stability

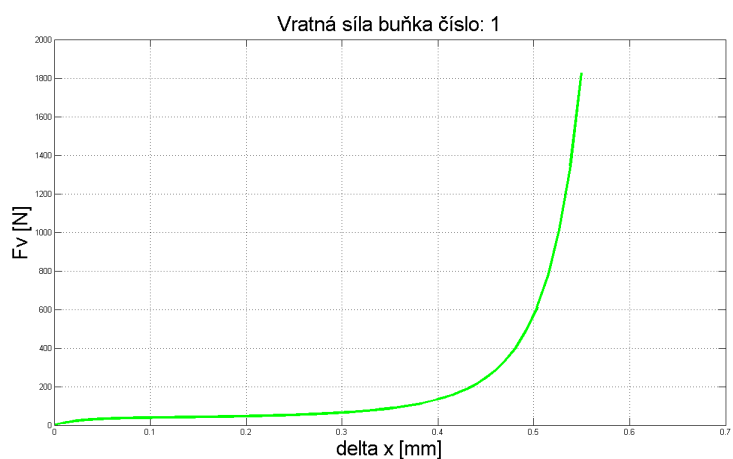
Pro časovou závislost výchylky prvního členu vyšel tento, přibližně lineární průběh:



Obrázek 4.12: Průběh relativní výchylky na první členu řetězce při kvazistatické zatěžování

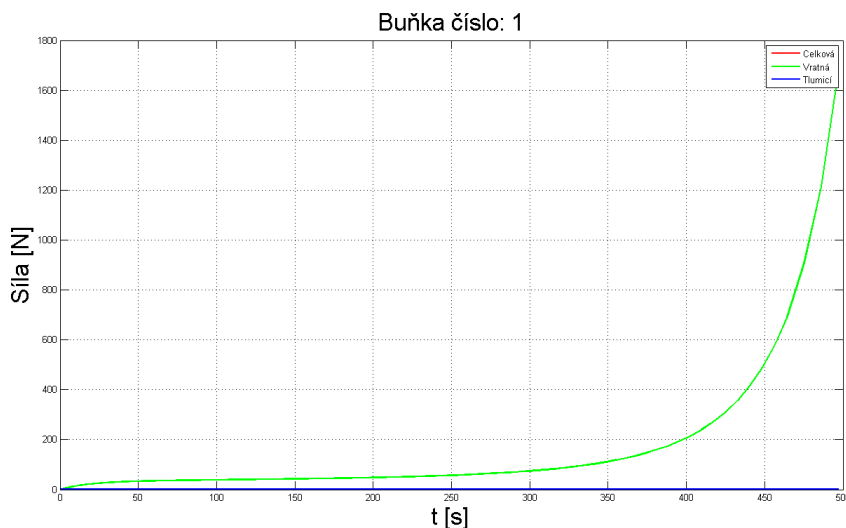
Průběhy ostatních výchylek vycházely podobně a zachovávaly si také přibližně lineární průběh.

Graf průběhu vratné síly generované první buňkou a závislé na relativní výchylce předpokládaný průběh:



Obrázek 4.13: Vratná síla první buňky v závislosti na deformaci

Z časové závislosti jednotlivých složek sil je potom patrné, že parametry jsou zvoleny tak, že tlumící síla F_{ti} má vůči celkové síle buňky F_{ci} zanedbatelný vliv.



Obrázek 4.14: Složky síly v časové závislosti při kvazistatickém režimu zatěžování pro $c = 10 \text{ kg/s}$

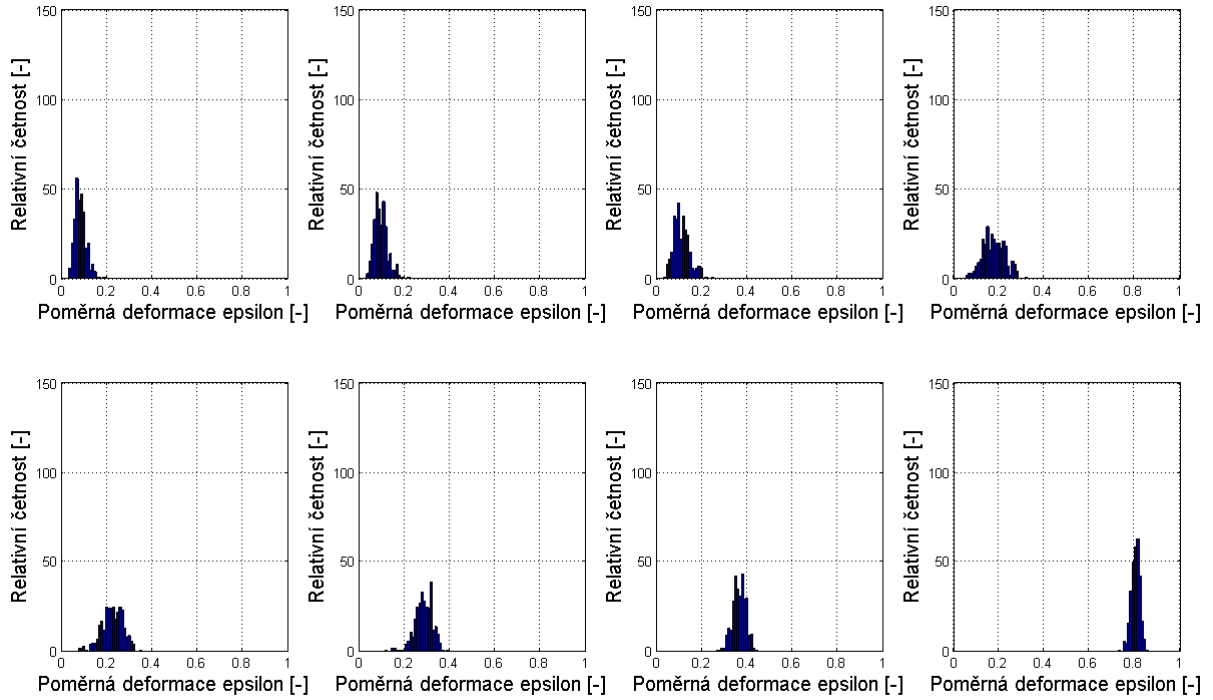
Pro sestavení histogramů relativní četnosti poměrné deformace buněk bylo potřeba nejdříve poměrnou deformaci spočítat z předpokladu, že volná délka pružiny je zároveň velikost buňky h_{pi} . Pro absolutní deformaci i -té buňky platí:

$$\Delta_i = x_i - x_{i+1} \quad (4.28)$$

Proto pro poměrnou deformaci ε_i i -tého prvku řetězce platí:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta_i}{h_{pi}} \quad (4.29)$$

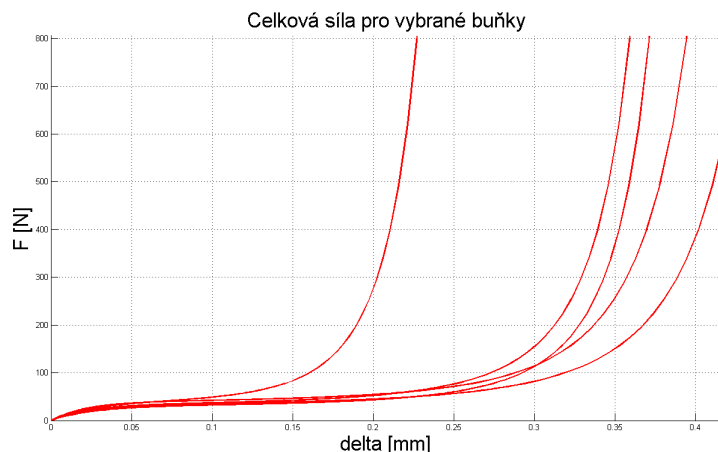
Relativní četnost takto získaných poměrných deformací byla zobrazena v histogramu a byla získány následující obrazce:



Obrázek 4.15: Histogram rozdělení četností poměrných deformací buněk

Při sestavování histogramů byla snaha získat podobné obrazce jako je tomu v případě obr. 3.11 v kapitole 3 a demonstrovat na nich, že pokud do modelu není započítána ztráta stability buňky, poměrná deformace si zachovává unimodální charakter a sestavené histogramy mají tak podobný tvar jako je tomu ve zmíněných histogramech v kapitole 3. Vlivem volby velikosti Z_0 v závislosti na délce řetězce je relativní deformace ε_i skutečně v poslední fázi zatěžování rozmístěna kolem hodnoty $\varepsilon_i = 0.8$ tedy 80% délky řetězce h_c .

Pro demonstrativní účely vlivu náhodného rozdělení parametrů náhodně vybraných buněk přikládám grafy závislostí celkové síly na deformaci. Patrný vliv generování náhodné veličiny je z grafů zřejmý zejména pro konstantu h_{pi} , vyjadřující velikost i -té buňky a v průběhu síly její vertikální asymptotu.



Obrázek 4.16: Vliv rozdělení náhodné veličiny na průběh celkové síly

Kvazistatický režim zatěžování uvažující vliv ztráty stability buněk

Při výpočtu uvažujícím ztrátu stability jednotlivých buněk byla mezi vstupní parametry pro generování náhodných veličin zahrnuta konstanta k_s a závislost vratné síly se u některých buněk změnila na vztah (4.16). Vstupní hodnoty pro výpočet náhodných parametrů pak vypadaly následovně:

Parametr	Střední hodnota	Rozptyl	Fyzikální jednotka
m_u	35	5	[N]
k_u	40	1	[N/mm]
h_p	0.75	0.03	[mm]
n_p	4	0.05	[1]
$k_5 = S_p p_p$	3	0.05	[N]
k_s	100	5	[N/mm]

Tabulka 4.3: Volené hodnoty pro výpočet parametrů náhodným rozdělením pro model uvažující ztrátu stability

Pro konstantu k_s platí, že její výskyt a tedy výskyt ztráty stability na i -tém prvku řetězce se volí též náhodně. Její projev je řízen jako generovaná náhodná veličina z uniformního rozdělení pravděpodobnosti a je generována tak, že ztráta stability se projeví u přibližně 40% buněk. Na silové odezvě první buňky se neprojeví nikdy, ve výpočtu je konstanta k_{s1} vždy rovna 0.

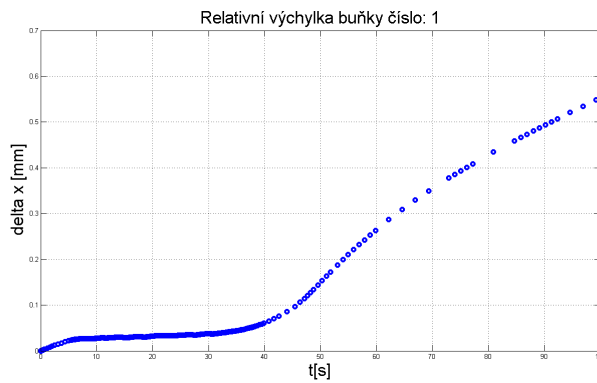
Parametry pro výpočet budící funkce byly následující:

Parametr	Hodnota	Fyzikální jednotka
Z_0	$0.8h_c$	$[mm]$
t_n	200	$[s]$
c	10	$[kg/s]$

Tabulka 4.4: Vstupní parametry pro výpočet budící funkce pro kvazistatický režim zatěžování s vlivem ztráty stability

Pozn.: Původní záměr bylo volit parametry buzení stejné jako v předchozím případě, objevily se však problémy s výpočtním čase a parametry tak byly změněny.

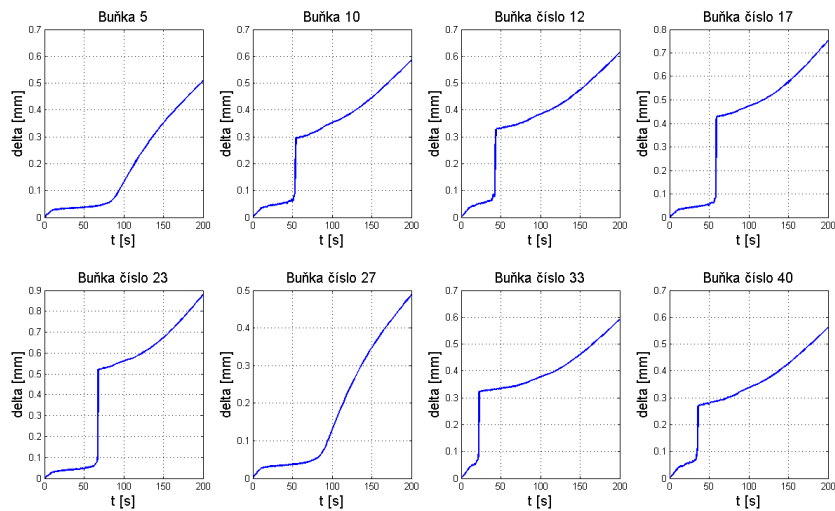
Pro relativní výchylku prvního členu vyšla následující časová závislost:



Obrázek 4.17: Histogram rozdělení četností poměrných deformací buněk pro heterogenní deformaci

Zatímco v předchozím režimu zatěžování vyšla pro relativní výchylku v čase přibližně lineární závislost, jak dokládá obr. 4.12, došlo v tomto případě k narušení této lineární závislosti, z čehož by se dalo pravděpodobně usuzovat, že pokud ztratí stabilitu jedna buňka řetězce, projeví se to nejen na ní samotné, ale na ztrátě stability celého systému.

Graf relativní výchylky v čase pro vybrané buňky řetězce vypadá následovně:



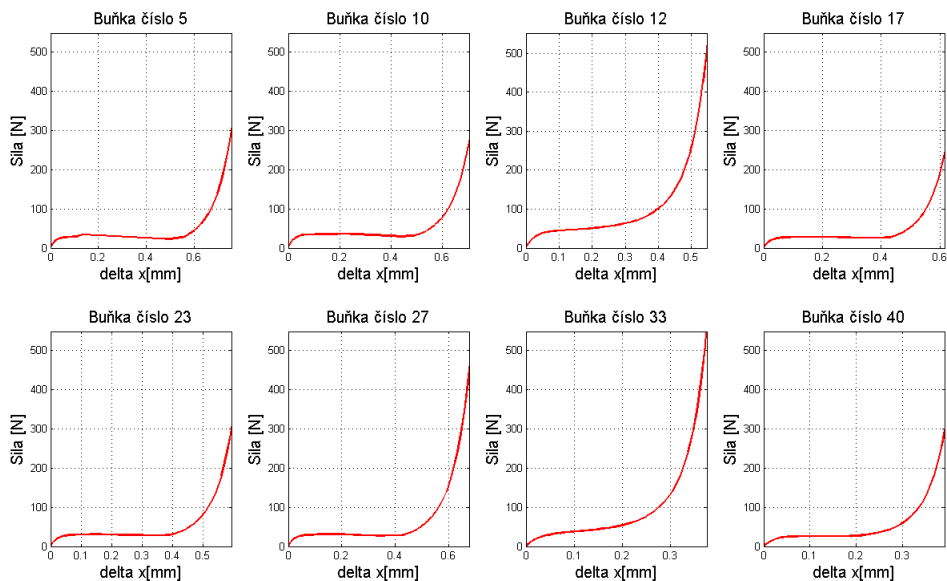
Obrázek 4.18: Vliv ztráty stability na vybrané buňky řetězce systému

Graf síly vratné pro první buňku vykazuje stejný průběh jako je tomu v předchozím případě.



Obrázek 4.19: Vratná síla první buňky při kvazistatickém zatěžování a vlivu ztráty stability

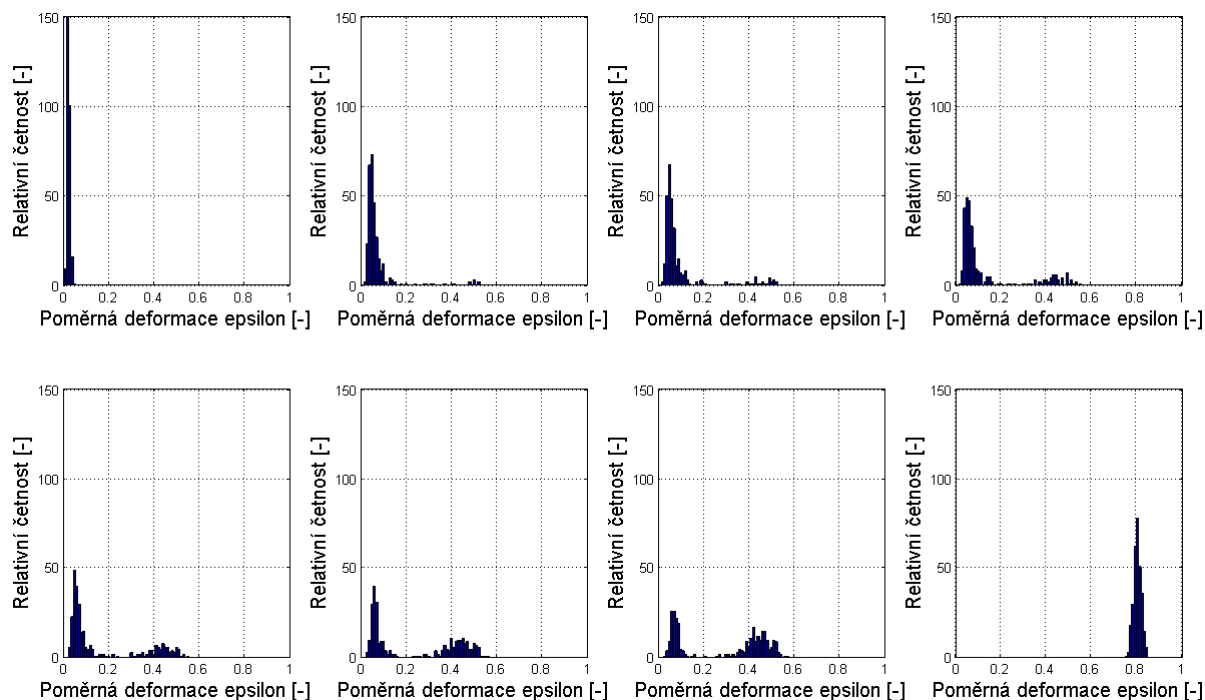
Pozn.: Ztráta stability se na silové odezvě projeví pouze u vybraných buněk, první buňka vykazuje vždy stejnou závislost vratné síly.



Obrázek 4.20: Vliv ztráty stability na celkovou silovou odezvu vybraných buněk

Pro přehlednost je měřítko grafů upraveno tak, aby byla změna průběhu funkce se ztrátou stability patrná.

Při sestavení histogramů relativní četnosti poměrných deformací jednotlivých buněk je patrný vliv stability a tedy vliv heterogenního charakteru deformace. Platí navíc skutečnost, že k rozdělení poměrných deformací na dvě dominantní dochází postupně. Nejdříve si deformace v první části zatěžování zachovává unimodální charakter. Tento pak plynule přechází v bimodální a v posledních fázích zatěžování získává opět unimodální charakter. V tomto případě tedy platí teorie popsaná v [9], že k rozdělení poměrné deformace na dvě dominantní hodnoty dochází teprve až ve fázi plateau zatěžovací charakteristiky, tedy na těchto histogramech mezi hodnotami ε_i přibližně 0.1 až 0.5.



Obrázek 4.21: Histogram rozdělení četností poměrných deformací buněk

4.4 Dynamický režim - harmonické buzení

Pro výpočet dynamického režimu byly voleny stejné hodnoty pro generování náhodných veličin, jež jsou uvedeny v tabulce 4.3. Budící funkce $z(t)$ nejprve dosáhne za pomoci lineární závislosti střední hodnoty kmitu $Z_0 = 0.5h_c$ a poté kmitá harmonicky kolem této polohy s amplitudou kmitu $Z = 0.2h_c$. Harmonický budící signál je dán vztahem (4.2) a k němu příslušná rychlost jako časová derivace podle (4.3). Dalším vstupním parametrem je frekvence buzení periodického signálu f . Z ní pak snadno určit dobu jedné periody jako $T = 1/f$. Čas náběhu na harmonický signál je určen vztahem (4.9). Horní integrační meze pro dobu simulace je dána v závislosti na zvoleném počtu zatěžovacích pracovních cyklů n_c jako:

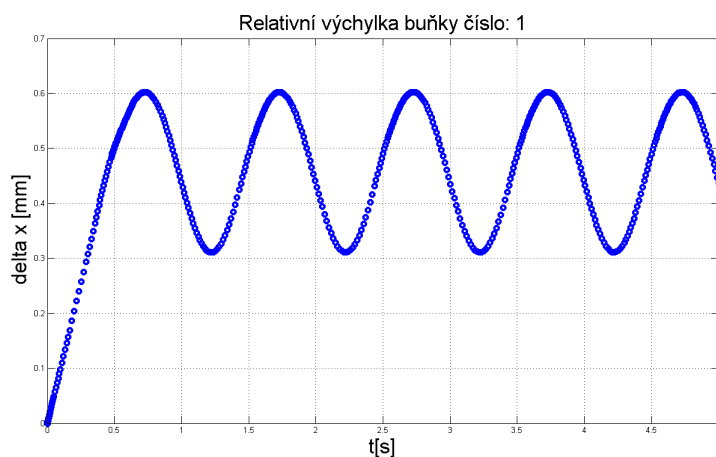
$$t_k = n_c T \quad (4.30)$$

Vstupní parametry pro výpočet budící funkce byly pro typ buzení harmonickým signálem voleny následovně:

Parametr	Hodnota	Fyzikální jednotka
Z_0	$0.5h_c$	$[mm]$
Z	$0.2h_c$	$[mm]$
f	1	$[Hz]$
c	50	$[kg/s]$
n_c	5	$[-]$

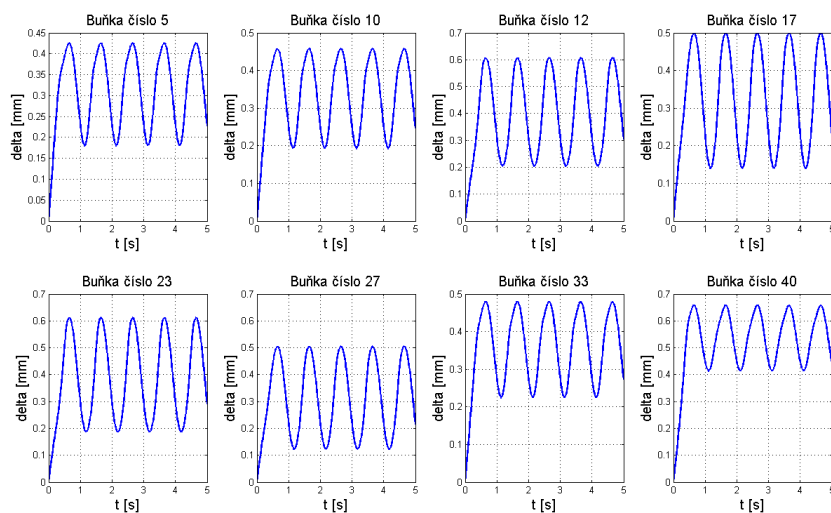
Tabulka 4.5: Vstupní parametry pro výpočet budící funkce pro dynamický režim zatěžování

Pro první člen řetězce vyšla následující časová závislost relativní výchylky:



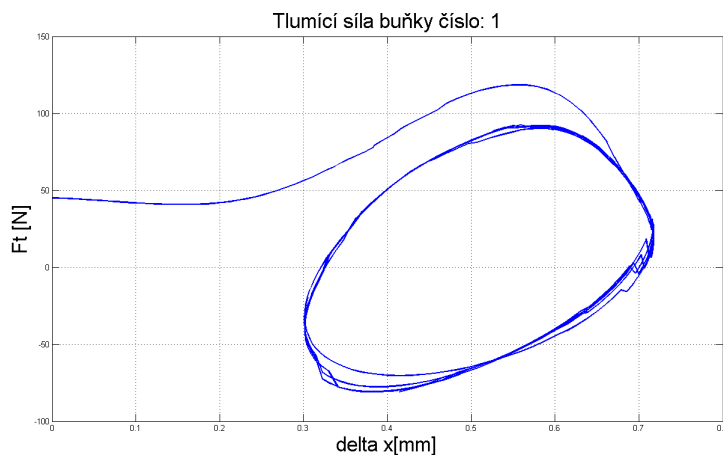
Obrázek 4.22: Časová závislost relativní výchylky první buňky pro harmonický režim zatěžování

Tato skutečnost odpovídá předpokladu, že budící funkce má sinusový průběh, ostatní časové závislosti relativní výchylky vychází opět podobně:



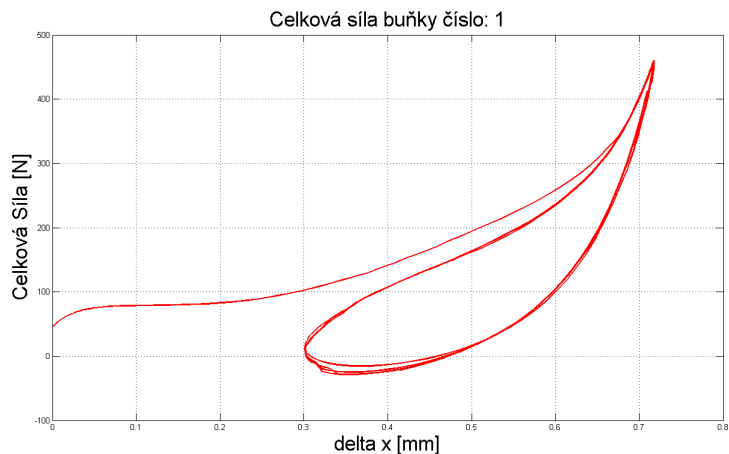
Obrázek 4.23: Relativní výchylka vybraných buněk při harmonickém budícím signálu

Vzhledem k tomu, že tlumení v tomto typu zatěžování hraje roli, projeví se na průběhu celkové síly v závislosti na dráze vliv hystereze při odlehčování, jak dokládá graf závislosti celkové síly na relativní výchylce. Graf samotné tlumící síly F_{ti} poukazuje následující závislost. První část celkové síly připomíná průběh samotné síly vratné F_V , protože budící funkce $z(t)$ je v této oblasti ve své části lineárního náběhu.



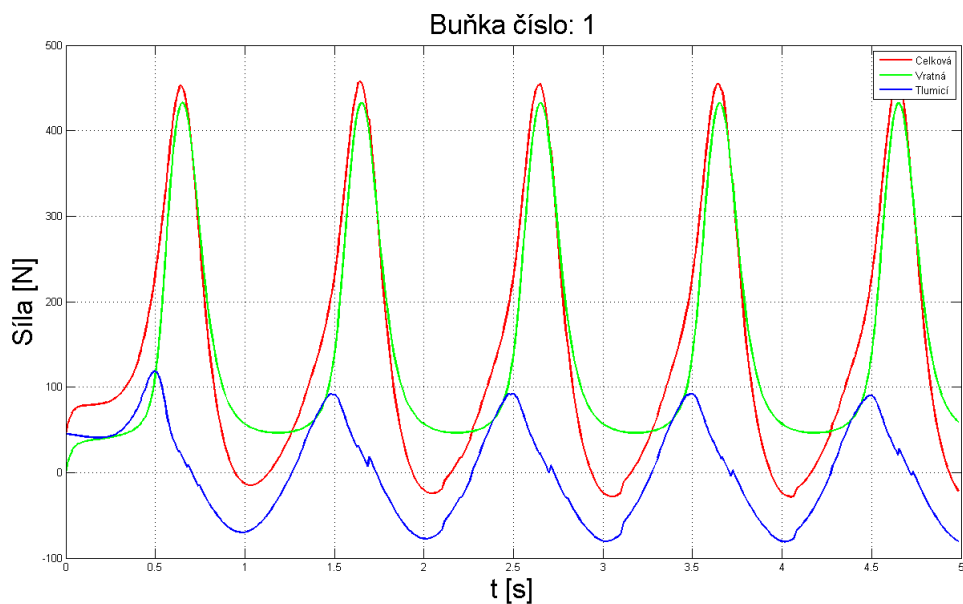
Obrázek 4.24: Závislost celkové síly přenášené první buňkou v závislosti výchylce

Součtem složek síly tlumicí F_{ti} a vratné F_{Vi} vznikne síla celková:



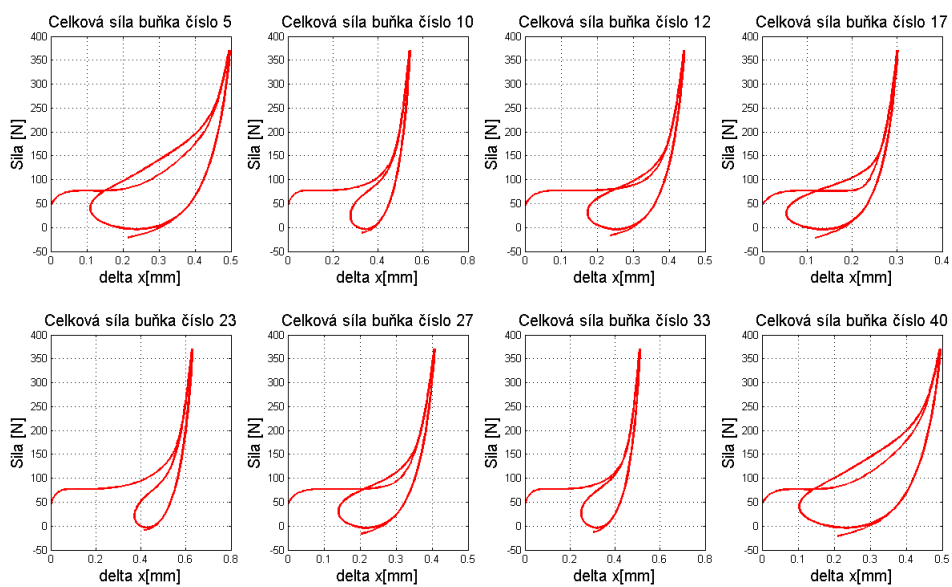
Obrázek 4.25: Závislost celkové síly přenášené první buňkou v závislosti výchylce

Při vynesení průběhů silové odezvy první buňky do grafů v časové závislosti vyjde následující závislost:



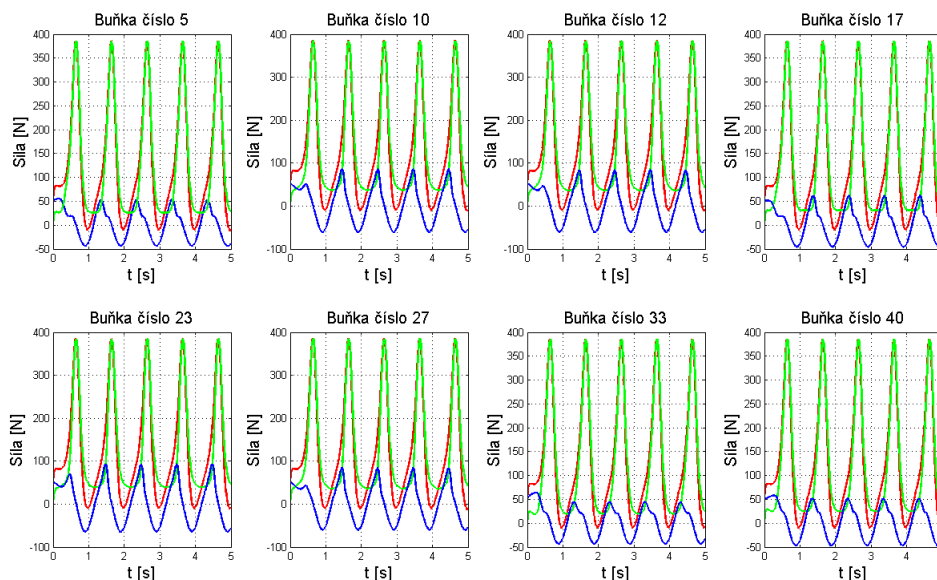
Obrázek 4.26: Časová závislost celkové síly přenášené první buňkou pro budící frekvenci $f = 1$ Hz a harmonický budící signál

Při zobrazení silové odezvy vybraných buněk při harmonickém buzení je opět patrný vliv náhodného rozdělení na tvar hysterezní křivky:



Obrázek 4.27: Vliv náhodného rozdělení na tvar hysterezní křivky silové odezvy při harmonickém buzení

Stejná situace nastává v případě časové závislosti jednotlivých složek síly:



Obrázek 4.28: Silová odezva vybraných buněk při harmonickém buzení v závislosti na čase

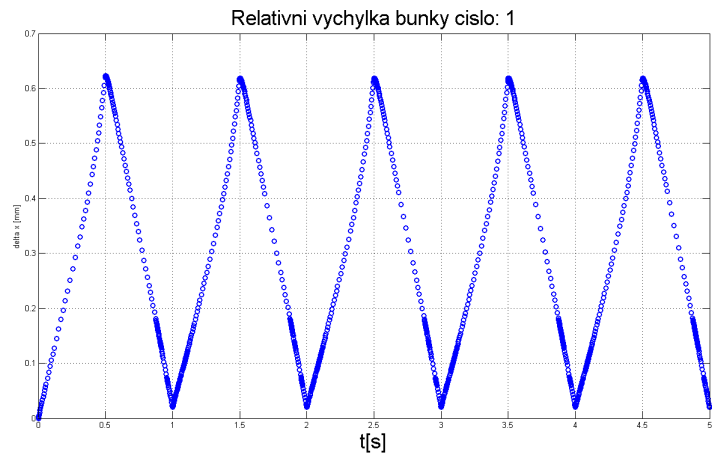
4.5 Dynamický režim - trojúhelníkové buzení

Pro výpočet dynamického režimu zatěžování při buzení trojúhelníkovým signálem byly voleny tyto parametry:

Parametr	Hodnota	Fyzikální jednotka
Z_0	$0.7h_c$	$[mm]$
f	1	$[Hz]$
c	50	$[kg/s]$
n_c	5	$[-]$

Tabulka 4.6: Vstupní parametry pro výpočet budící funkce pro dynamický režim zatěžování bez vlivu ztráty stability

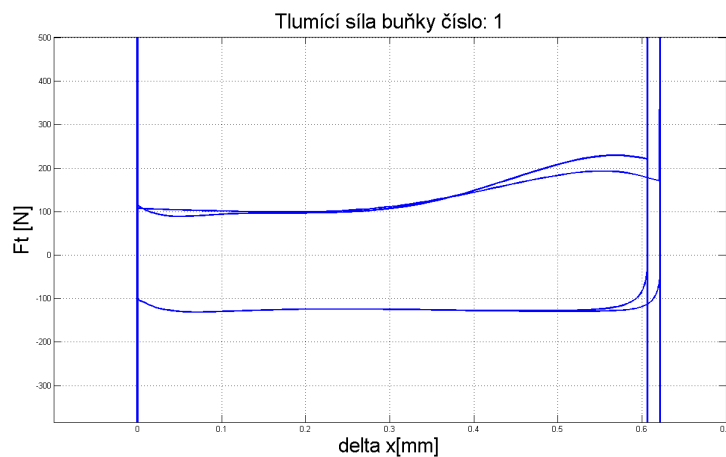
Pro výchylku první buňky v závislosti vyšla následující časová závislost:



Obrázek 4.29: Výchylka první buňky v čase

Na základě této skutečnosti se dá usuzovat, že průběh relativní výchylky opět re-
spektuje průběh kinematického buzení.

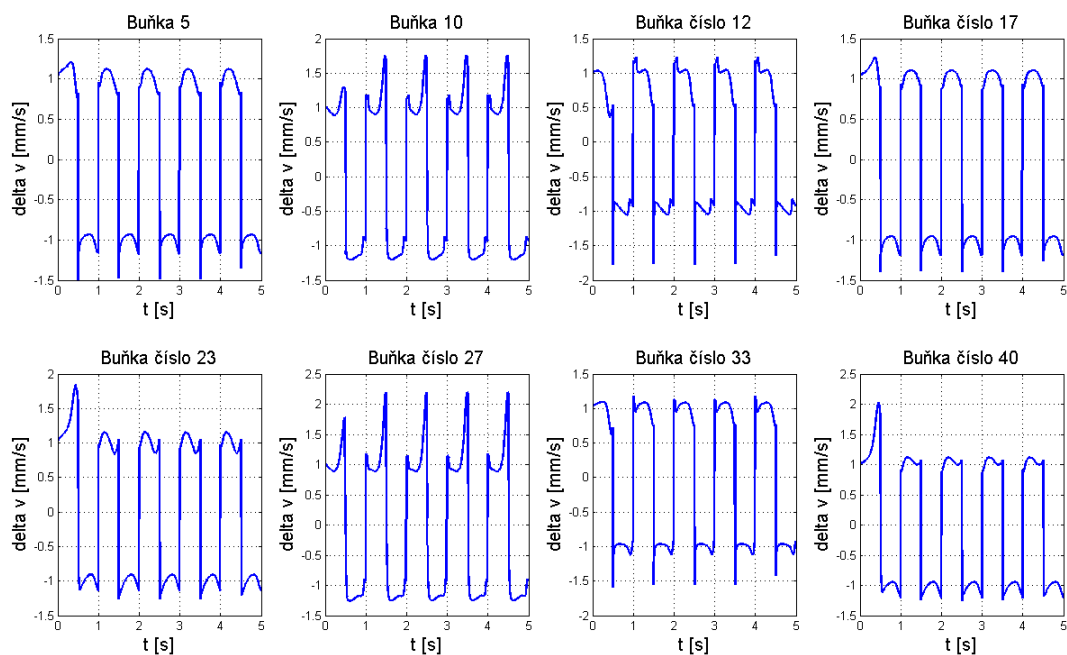
Pro tlumící sílu v případě trojúhelníkového buzení vychází následující průběh.:



Obrázek 4.30: Závislost celkové síly přenášené první buňkou v závislosti výchylce

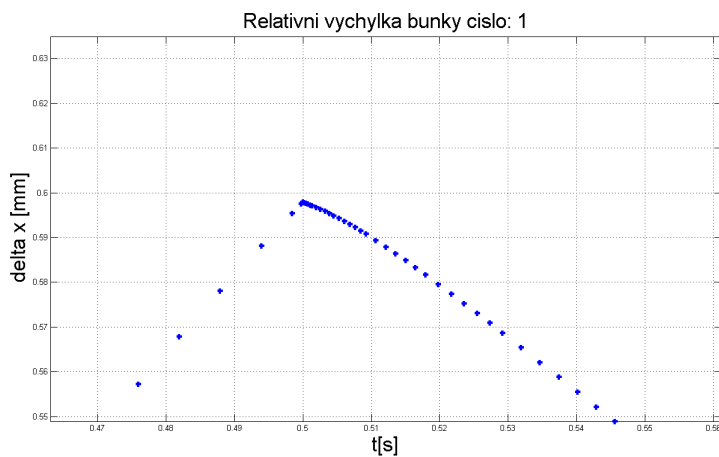
Tlumící síla má sice hysterezní průběh, avšak hodnoty síly na koncích definičního
oboru a tedy odpovídající amplitudě výchylky vykazují skokovou změnu v průběhu
síly. Tato skutečnost je způsobená pravděpodobně problémem s derivováním výsled-
ných posuvů buněk získaných numerickým řešením soustavy diferenciálních rovnic.

Vzhledem k tomu, že řešič diferenciálních rovnic softwaru Matlab ODE15s stejně jako ostatní ODE řešiče je řešičem s proměnlivým integračním krokem, není možno dosáhnout konstantní vzorkovací frekvence výsledného průběhu. Skoková změna v derivaci poté vzniká vždy v místě změny směru zatěžování, jak je patrné z následujícího snímku:



Obrázek 4.31: Relativní rychlost vybraných buněk

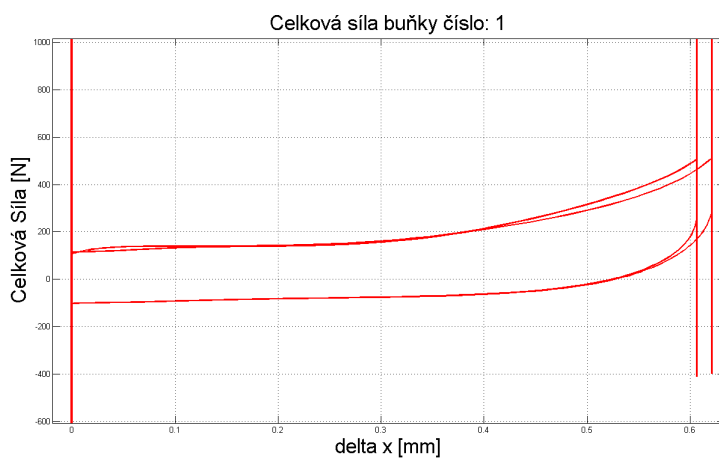
Nerovnoměrnost vzorkování je znázorněna na následujícím detailním snímku z grafu relativního posuvu první buňky:



Obrázek 4.32: Nerovnoměrné vzorkování řešení

V termínu odevzdání práce se bohužel nepodařilo tuto skokovou změnu v derivaci odstranit.

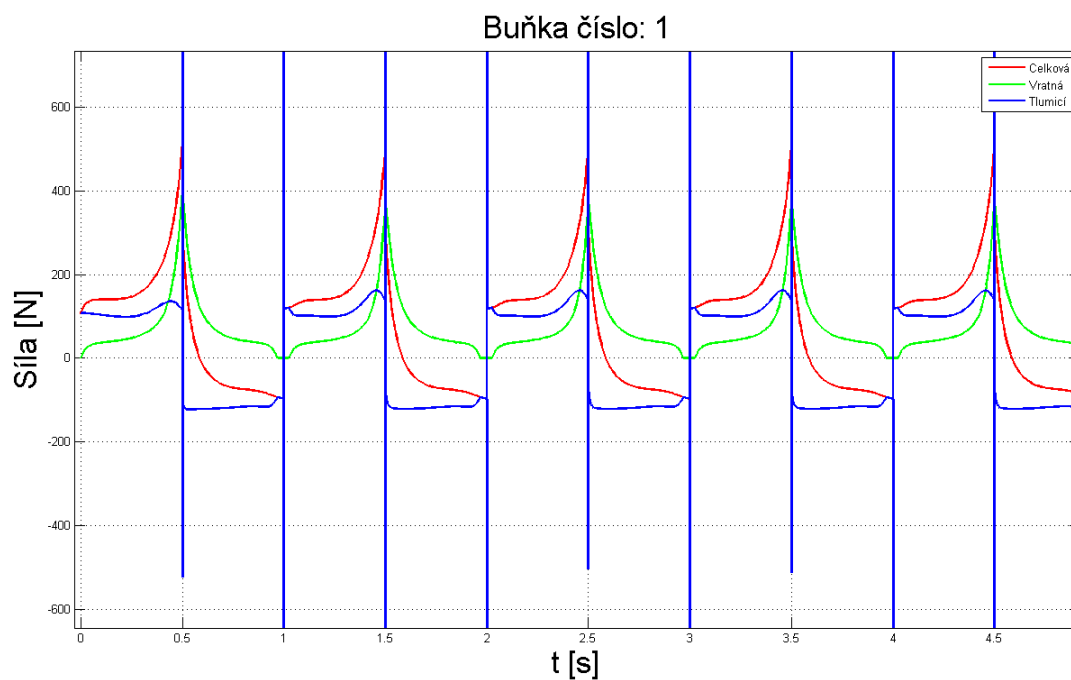
Průběh celkové silové odezvy v závislosti na deformaci je poté následující:



Obrázek 4.33: Celková silová odezva první buňky

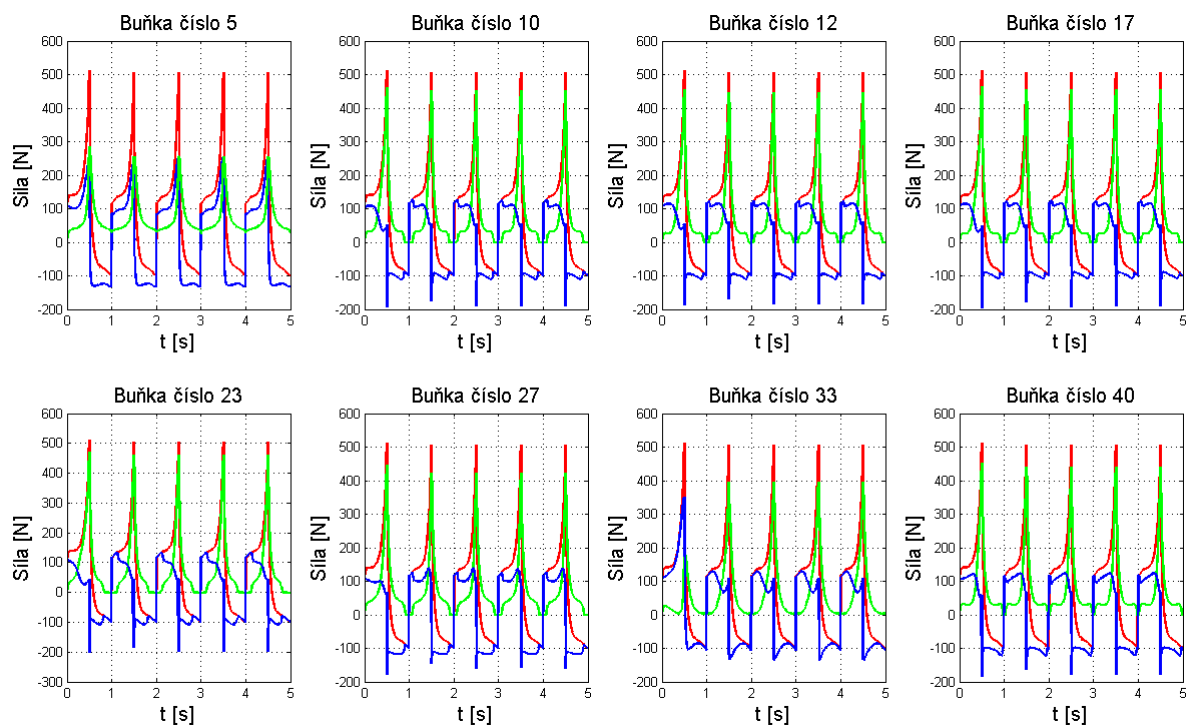
Při zobrazení složek síly v časové závislosti je patrné, že si vratná složka celkové silové odezvy zachovává podobný průběh, jako v předchozím případě s harmonickým

buzením. Tlumicí síla respektuje obdélníkový průběh, jakožto derivaci trojúhelníkového průběhu relativní výchylky.



Obrázek 4.34: Celková silová odezva první buňky v závislosti na čase

Vliv náhodného rozložení parametrů buněk na celkovou silovou odezvu v časové závislosti je patrný z následujících grafů:



Obrázek 4.35: Celková silová odezva vybraných buněk v časové závislosti při trojúhelníkovém buzení

Kapitola 5

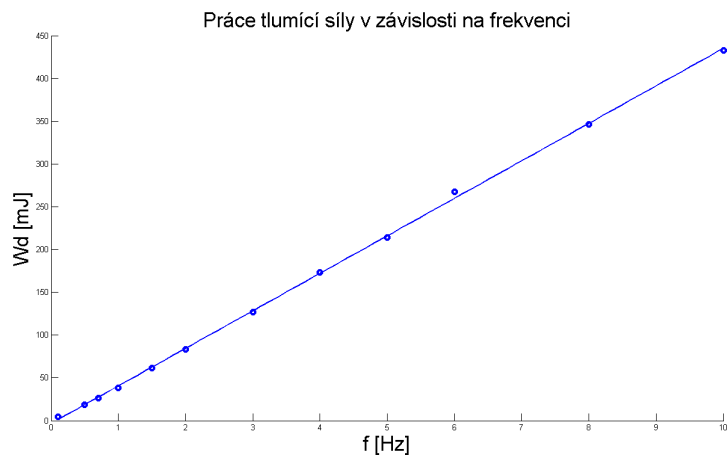
Práce tlumící síly

Jak již bylo zmíněno, v článku [1] bylo zjištěno a experimentálně dokázáno, že disipační energie a tedy energie zmařená tlumící silou za jeden pracovní oběh je dána plochou hysterezní smyčky, kterou tlumící síla v závislosti na dráze ohraničuje a závisí lineárně na hodnotě frekvence budícího signálu. Byla tedy snaha tuto vlastnost verifikovat i na tomto simulačním modelu. Tato skutečnost byla vyzkoušena na první buňce, kdy byla počítána práce tlumící síly za jeden pracovní oběh daného signálu. Byla tedy nutnost toto ověřit pro oba typy periodického kinematického buzení, u kterých vzniká hystereze mezi stlačováním a odlehčováním. Pro typy tedy platil vztah:

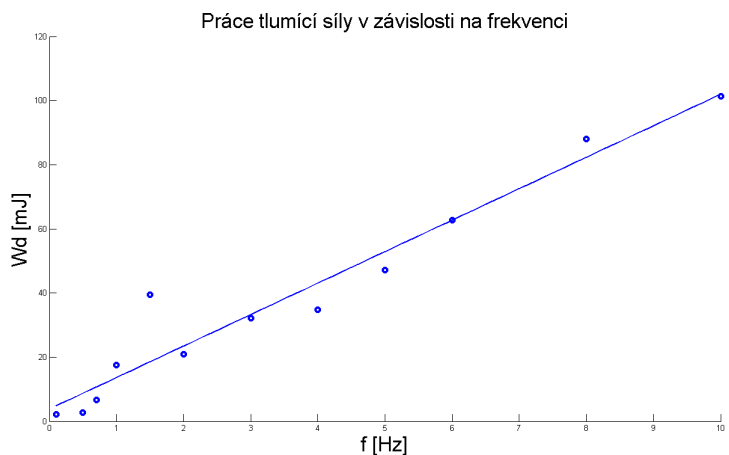
$$W_d = \oint F_{t1} d\Delta_1 \quad (5.1)$$

Pozn.: Pro výpočet byla použita numerická integrace pomocí lichoběžníkového pravidla, v Matlabu se jedná o příkaz TRAPZ.

Zmíněná práce budící síly byla pro oba případy periodického buzení počítána pro vektor hodnot budících frekvencí $f = \{0.1, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ Hz.



Obrázek 5.1: Práce tlumící síly pro harmonický budící signál



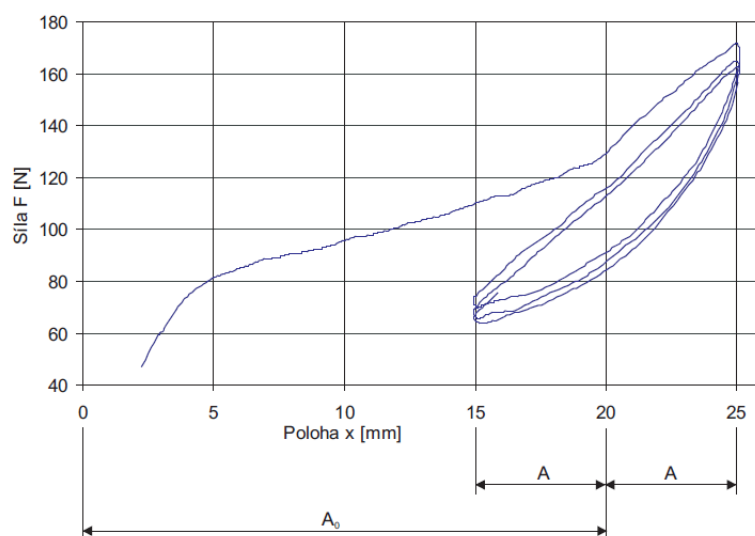
Obrázek 5.2: Práce tlumící síly pro trojúhelníkový budící signál

V případě harmonického buzení a tedy obr. 5.1 je lineární závislost patrná, vypočítané hodnoty velmi dobře sledují lineární závislost. V případě obr. 5.2 a trojúhelníkového buzení je situace horší, pro budící frekvence $f = 4$ a $f = 5$ Hz se hodnoty práce tlumící síly velmi vzdalují lineárnímu průběhu. Tato skutečnost může být způsobena i problémy ve skokové změně průběhu sil při trojúhelníkovém buzení, jak bylo znázorněno v předchozí kapitole.

Kapitola 6

Porovnání a zhodnocení výsledků

Za účelem ověření modelu a tedy porovnání výsledných simulovaných průběhů sil poslouží experimentálně změřené průběhy silové odezvy skutečného vzorku polyuretanové pěny, které byly naměřeny a popsány v [1]. Silová odezva celkové síly v závislosti na deformaci zde pro harmonický signál vycházela následovně:

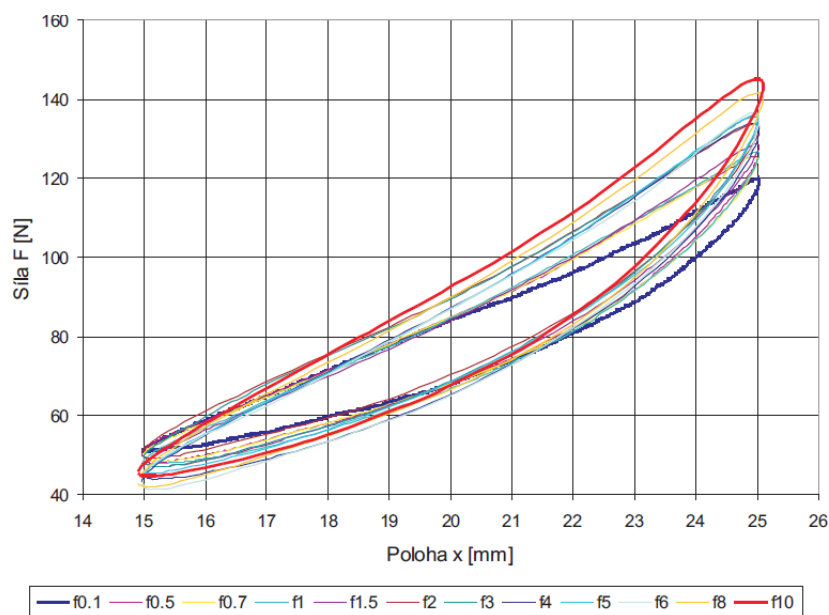


Obrázek 6.1: Silová odezva na harmonický budící signál skutečného vzorku polyuretanové pěny, převazato z [1]

Při porovnání této skutečné silové odezvy s odezvou modelu na obr. 4.25 lze dojít k závěru, že model sice vykazuje nejdříve podobnou silovou odezvu v oblasti lineárního náběhu a hysterezi v oblasti periodického signálu, tato hystereze se svým

charakterem od modelu liší. V simulačním modelu totiž hystereze vykazuje zužující se charakter v oblasti vyšších deformací, což neodpovídá skutečnosti, znamenalo by to totiž, že tlumení v oblasti vyšších hodnotách poměrných deformací přestává mít vliv na průběh celkové silové odezvy na deformaci.

Podobná situace nastává i pro trojúhelníkový budící signál, kdy skutečná silová odezva pro různé hodnoty budících frekvencí vykazuje průběh zobrazený na následujícím obr. 6.2.



Obrázek 6.2: Silová odezva na trojúhelníkový budící signál skutečného vzorku polyuretanové pěny, převazato z [1]

Při porovnání s průběhem získaným simulačním modelem při trojúhelníkovém buzení je sice situace v ohledu hystereze při vyšších deformacích lepší, hysterezní křivka svým tvarem neodpovídá experimentálně změřitelnému průběhu. Tyto skutečnosti vedou k úvaze, že náhrada tlumící síly jednotlivých buněk lineární závislostí síly na rychlosti zatěžování je nedostačující.

Kapitola 7

Možnost zlepšení chování modelu zavedením nelineární tlumící síly

V literatuře [1] bylo dokázáno, že skutečná tlumící síla polyuretanové pěny závisí nejen na rychlosti zatěžování, ale i na výchylce. Technický průvodce [10] uvádí, že tuto závislost tlumící síly na výchylce poddajných prvků popisuje výraz:

$$F_t(x, \dot{x}) = c|x|^a \dot{x} \quad (7.1)$$

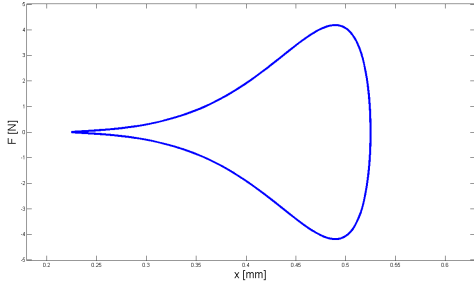
Vzhledem k tomu, že jsou uvažovány pouze deformace tlakové, přejde vztah 7.1 do podoby:

$$F_t(x, \dot{x}) = cx^a \dot{x} \quad (7.2)$$

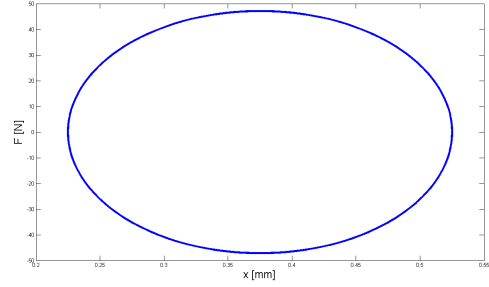
Pro tlumící sílu v řetězci buněk bude vzhledem k relativním posuvům mezi buňkami pro i -tý člen řetězce platit:

$$F_{ti}(x_i - x_{i+1}, \dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) = c(x_i - x_{i+1})^a (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \quad (7.3)$$

Následující grafy znázorňují rozdíl mezi lineární a nelineární charakteristikou tlumící síly pro koeficient tlumení $c = 50 \text{ kg/s}$, frekvenci zatěžování při harmonickém signálu $f = 1 \text{ Hz}$ a v nelineárním případě $a = 3$.



Obrázek 7.1: Nelineární tlumící síla



Obrázek 7.2: Lineární tlumící síla

Obrázek 7.3: Porovnání lineární a nelineární tlumící síly při harmonickém buzení

Soustava pohybových rovnic v případě nelineární tlumící síly

Pro odvození pohybových rovnic vycházíme pro přehlednost opět z případu 4 buněk. Na základě Newtonova zákona akce a reakce a tedy rovnováhy sil mezi sousedními členy:

$$F_{V1}(z(t) - x_1) + c(z(t) - x_1)^a (v_z(t) - \dot{x}_1) = F_{V2}(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_2)^a (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$F_{V2}(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_2)^a (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_{V3}(x_2 - x_3) + c(x_2 - x_3)^a (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$F_{V3}(x_2 - x_3) + c(x_2 - x_3)^a (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = F_{V4}(x_3) + cx_3^a \dot{x}_3 \quad (7.4)$$

Úpravou (7.4) do maticové podoby získáme soustavu maticových rovnic v následující podobě. Tato se od původního případu s lineární tlumící silou liší především tím, že matice $M(t, \mathbf{x}(t))$ není konstantní, nýbrž je funkcí času a jednotlivých posuvů:

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (7.5)$$

Matice soustavy $\mathbf{M}(t, \mathbf{x}(t))$ pro 4 buňky má tedy tuto podobu:

$$\begin{bmatrix} -c[(z(t) - x_1)^a + (x_1 - x_2)^a] & c(x_1 - x_2)^a & 0 \\ c(x_1 - x_2)^a & -c[(x_1 - x_2)^a + (x_2 - x_3)^a] & c(x_2 - x_3)^a \\ 0 & c(x_2 - x_3)^a & -c[(x_2 - x_3)^a + x_3^a] \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Vektor pravé strany $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ je ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} F_{V2} - F_{V1} - c(z(t) - x_1)^a v_z(t) \\ F_{V3} - F_{V2} \\ F_{V4} - F_{V3} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Opět můžeme využít návaznosti mezi sousedními členy a pro p prvků řetězce získáme tedy následující zobecněnou soustavu pohybových rovnic:

$$F_{V1}(z(t) - x_1) + c(z(t) - x_1)^a (v_z(t) - \dot{x}_1) = F_{V2}(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_2)^a (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$F_{V2}(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_2)^a (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_{V3}(x_2 - x_3) + c(x_2 - x_3)^a (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

...

$$F_{V_{n-1}}(x_{n-1} - x_n) + c(x_{n-1} - x_n)^a (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) = F_{Vn}(x_n) + cx_n^a \dot{x}_n \quad (7.8)$$

Tuto soustavu diferenciálních rovnic můžeme opět přepsat do maticové podoby. Prvky hlavní diagonály jsou pro přehlednost označeny f_i a vychází následovně:

$$f_i = -c[(x_i - x_{i+1})^a + (x_{i+1} - x_{i+2})^a] \quad (7.9)$$

Prvky vedlejších diagonál pro přehlednost značeny jako g_i jsou dány ve tvaru:

$$g_i = c(x_i - x_{i+1})^a \quad (7.10)$$

Maticová soustava diferenciálních rovnic pro nelineární tlumící sílu v zobecněné podobě pro p prvků řetězce má tedy podobu:

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & \cdots & 0 \\ g_1 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & g_{n-1} \\ 0 & \cdots & g_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{V2} - F_{V1} - c(z(t) - x_1)^a v_z(t) \\ F_{V3} - F_{V2} \\ \vdots \\ F_{Vn} - F_{V_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Pozn.: V době odevzdání práce se nepodařilo simulační výpočet touto formou uvést do provozu a jeho použitelnost zůstává nezodpovězena.

Kapitola 8

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit zjednodušený reologický strukturní model pěnového visko-elastického materiálu. Jednalo se o soustavu sériově řazených pružin a tlumičů, známou z literatury jako Kelvin-Voightův model. Tento model měl simulovat silovou odezvu jednotlivých strukturních buněk materiálu a umožnit tak získat představu o jeho deformačních a silových poměrech.

Pro vyjádření nepravidelnosti vnitřní pěnové struktury byl nalezen algoritmus pro generování jednotlivých parametrů modelu za pomoci zvoleného statistického rozdělení pravděpodobnosti. Byly zvoleny způsoby zatěžování vhodným typem kinematického buzení. Pro kvazistatický režim zatěžování se jednalo o lineární závislost výchylky v čase a v případě dynamického režimu zatěžování se jednalo postupně o harmonickou a trojúhelníkovou periodickou budící funkci.

Za pomoci metody uvolnění vznikla z vytvořeného modelu soustava diferenciálních rovnic, kterou se podařilo zobecnit pro libovolný počet buněk struktury. Matematický popis silové odezvy v závislosti na deformaci pěnového materiálu byl volen na základě poznatků o mechanickém chování a silové odezvě polyuretanové pěny při jednoosém tlakovém zatížení a jeho typických fázích z hlediska silové odezvy. Vhodnou volbou závislosti pro vratnou sílu vznikla navíc možnost simulovat heterogenní způsob deformace vnitřní struktury, popsany v [9]. Simulace touto formou vykazovala dobré výsledky a bylo skutečně dosaženo podobných výsledků, jakých dosáhl autor článku [9] během měření a zaznamenávání četnosti poměrné deformace pomocí korelace rastrových snímků.

Při periodickém budícím signálu a tedy dynamickém režimu zatížení se již projevil účinek tlumící síly. Pro její popis byla nejdříve zvolena lineární závislost na rychlosti zatěžování, tato úvaha se však ukázala jako nedostačující. Nedostatečnost této úvahy se projevila především na tvaru hysterezní smyčky v celkové silové odezvě, která vzniká mezi stlačováním a odlehčováním vzorku. Tvar hysterezní křivky totiž při daných zvolených silových závislostech neodpovídal experimentálně změřeným průběhům.

Možnou nadějí ke zlepšení chování modelu dává nelineární závislost tlumící síly na deformaci, popsaná v literatuře [10]. Zatím byl však pouze odvozen postup výpočtu, simulace výpočtu touto formou však stále zůstává nedořešena.

Na simulačním modelu byla dále zkoumána ještě další vlastnost a tou byla lineární závislost velikosti práce tlumící síly na velikosti frekvence budícího signálu. Tato linearita se na simulovaném modelu projevila, přičemž lepších hodnot bylo dosaženo v případě harmonického budícího signálu.

Je třeba říci, že se jedná o zjednodušenou formu reologického modelu pěnového materiálu, který sice popisuje silovou odezvu jednotlivých buněk, opomíjí však některé z důležitých vlastností, které v původním modelu vystupují. Je jimi například třecí síla způsobená smykovým třením buněk při přechování materiálu během deformace. Účinek smykového tření a tedy třecí síly by též mohl vést ke zlepšení chování modelu z hlediska tvaru hysterezní smyčky. Ve fázi dalšího vývoje by mohl tedy být do modelu zaveden účinek třecí síly a nelineární závislost síly tlumící. V neposlední řadě by měl být v simulaci trojúhelníkovým signálem odstraněn problém s derivací výsledných posuvů, způsobující nežádoucí skok ve výsledné silové odezvě. Dále by mohl tento model porovnán s mikromechanickými modely, zkoumajícími skutečné deformační mechanismy strukturních jednotek vnitřní struktury materiálu.

Literatura

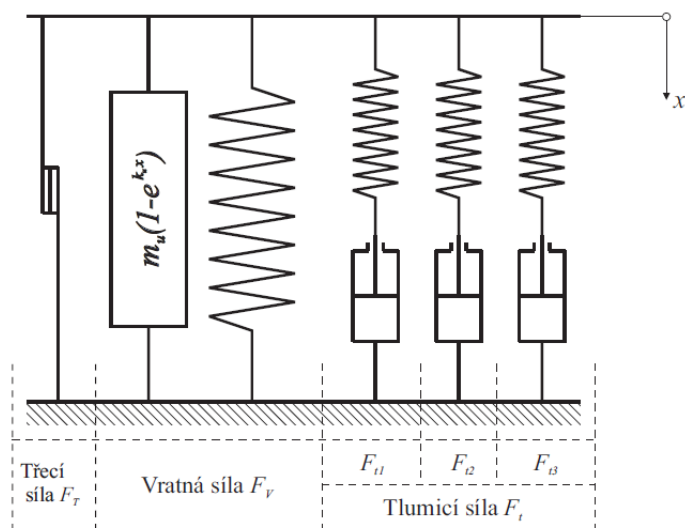
- [1] Cirkl, David: *Mechanické vlastnosti polyurethanové pěny*, Liberec 2006, Disertační práce, Fakulta strojní Technické univerzity v Liberci
- [2] Mills, N., J.: *Micromechanics of polymeric foams*. 3rd nordic meeting on Materials and Mechanics, Aalborg, Denmark 2000, 45-76
- [3] Elliot, J.,A at.al.: *In-Situ deformation of open-cell flexible polyurethane foam characterised by 3D computed microthomography*, Journal of Material Science 37, 2002 1547-1555.
- [4] Krebsová, M.: *Nauka o polymerech, skripta, VŠST v Liberci, Liberec 1978*
- [5] BALAKRISHNAN, N. a M. KATERI.: *On the maximum likelihood estimation of parameters of Weibull distribution based on complete and censored data* Statistics & Probability Letters [online]. 2008, 78(17), 2971-2975 [cit. 2016-06-14]. DOI: 10.1016/j.spl.2008.05.019. ISSN 01677152. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167715208002514>
- [6] Eckhard Limpert, Werner A. Stahel, and Markus Abbt *Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues*, BioScience (2001) 51 (5): 341-352
- [7] De Vries: *Characterization of polymeric foams*, 2009, Diplomová práce, Eindhoven University of Technology,
- [8] Smardzewski, J., Grbac, I., Prekrat, S.: *Nonlinear mechanics of hyper elastic polyurethane furniture foams* Drvna industrija : Znanstveni časopis za pitanja drvne tehnologije Znanstveni časopis za pitanja drvne tehnologije, (2008) 59(1), 23-28
- [9] Yu Wang, Cuitino, A., M.: *Full-field measurements of heterogenous deformation patterns of polymeric foam using digital image correlation* International Journal of Solids and Structures 39, 2002

- [10] Brebta, R., Půst, L., Turek, F.: *Mechanické kmitání*, Sobotáles, Praha 1987, ISBN 80-901684-8-5
- [11] Roylance, David: *Engineering Viscoelasticity* (2001), Cambridge, MA 02139: Massachusetts Institute of Technology. pp. 8–11.

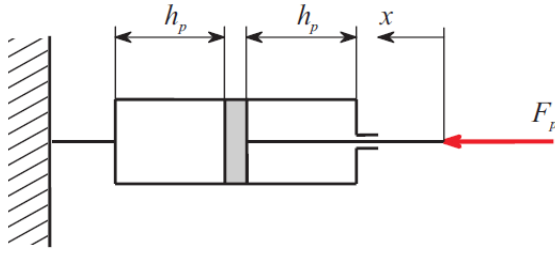
Příloha A

Simulační model polyurethanové pěny

V případě převzatého modelu z disertační práce doc. Ing. Cirkla [1] se jedná o reologický model se soustředěnými parametry. Reologický model proto, že zohledňuje visko-elastické vlastnosti polyurethanové pěny. Výsledná síla generovaná pěnou je totiž kombinací vratných (elastických) a tlumících (viskózních) účinků síly, jež jsou v modelu od sebe odděleny a vyjádřeny soustavou pružin a tlumičů. V modelu je zastoupen i účinek třecí síly. Výsledná síla vznikne jako součet těchto účinků. Jednotlivé složky jsou vyjádřeny analytickými předpisy tak, aby jejich celková kombinace co nejlépe odpovídala experimentálně změřitelným průběhům zatěžování.



Obrázek A.1: Schéma pro jedno-hmotový model, převzato z [1]



Obrázek A.2: Stlačování pneumatického válce, převzato z [1]

Vratná síla

Počáteční fáze - borcení struktury materiálové matrice

V první části zatěžování odolávají buňky materiálu deformaci, dokud nepřekročí svojí danou mez únosnosti, vyjádřenou konstantou m_u . Tato konstanta slouží jako horizontální asymptota v průběhu vratné síly. Koefficient exponentu k_u vyjadřuje zakřivení průběhu při náběhu do meze únosnosti buňky. Tento průběh náběhu do meze únosnosti právě popisuje již ve 3. kapitole zmíněnou lineární část zatěžovací charakteristiky. Deformace v této fázi má elastický charakter.

$$F_u(x) = m_u \cdot (1 - \exp^{-k_u \cdot x}) \quad (\text{A.1})$$

Fáze plateau a zhušťovací fáze - přechování materiálu

V další části průběhu vratné síly je tato síla podobná polytropické charakteristice vyjadřující stlačování ideálního plynu. Dochází přitom k dosedání jednotlivých vláken buněk materiálové matrice a její kompresi. Průběh této složky síly je ovlivněn velikostí vzorku h_p , která tvoří v průběhu vertikální asymptotu.

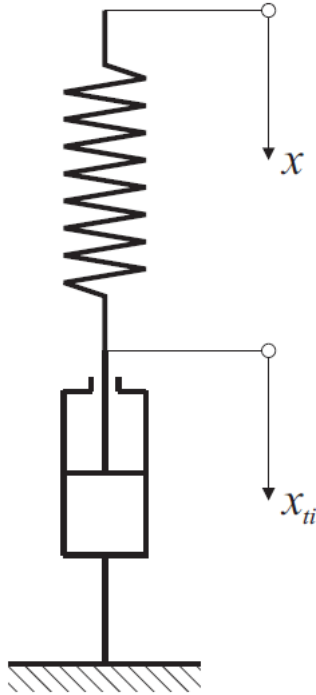
$$F_p(x) = p_p S_p \left[\left(\frac{h_p}{h_p - x} \right)^{n_p} - \left(\frac{h_p}{h_p + x} \right)^{n_p} \right] \quad (\text{A.2})$$

Součtem síly F_u a F_p vznikne celková vratná síla v závislosti na deformaci jako:

$$F_V(x) = F_u + F_p \quad (\text{A.3})$$

Tlumící a třecí síla

Při zatěžování periodickým polohovým signálem dochází k hysterezi, celková síla generovaná pěnou má tedy rozdílný průběh při zatěžování a odlehčování pěny a dochází tak k disipaci energie. Proto je potřeba do modelu zavést tlumící sílu. Ta je



Obrázek A.3: Maxwellův člen, převzato z [1]

vyjádřena tkzv.: Maxwellovým členem, což je kombinace zapojení nelineární plynové pružiny a nelineárního tlumiče, vyjadřující visko-elastické vlastnosti pěny.

Plynová pružina má opět polytropickou charakteristiku:

$$F_{ti} = p_{0i} S_{0i} \left[\left(\frac{h_i}{h_i - (x - x_{ti})} \right)^{n_{0i}} - \left(\frac{h_i}{h_i - (x + x_{ti})} \right)^{n_{0i}} \right] \quad (\text{A.4})$$

Pro nelineární tlumič platí vztah:

$$F_{ti} = c_i v_{ti}^{n_i}, i = 1..m \quad (\text{A.5})$$

Vzhledem k tomu, že jsou tyto dva členy zapojeny sériově, platí mezi nimi následující rovnost sil:

$$p_{0i} S_{0i} \left[\left(\frac{h_i}{h_i - (x - x_{ti})} \right)^{n_{0i}} - \left(\frac{h_i}{h_i - (x + x_{ti})} \right)^{n_{0i}} \right] = c_i v_{ti}^{n_i} \quad (\text{A.6})$$

Úpravou získáme:

$$\frac{dx_{ti}}{dt} = \frac{p_{0i} S_{0i}}{c_i} \left[\left(\frac{h_i}{h_i - (x - x_{ti})} \right)^{n_{0i}} - \left(\frac{h_i}{h_i - (x + x_{ti})} \right)^{n_{0i}} \right]^{\frac{1}{n_i}} \quad (\text{A.7})$$

Řešením této diferenciální rovnice (A.7) je neznámý posuv nelineárního tlumiče x_{ti} , jehož dosazením do vztahu (A.4) získáme velikosti tlumící síly F_t

Zároveň v modelu je uvažován účinek třecí síly vzhledem k tomu, že při stlačování a dosedání buněk na sebe dochází ke smykovému tření mezi stěnami buněk. Z toho důvodu je v modelu zastoupen pasivní odpor a zároveň průběh koeficientu smykového tření f_T popsán funkcí arctan v kombinaci s mocninou funkcí kvůli předpokladu nulové smykové síly při nulové rychlosti, což sice nemusí odpovídat skutečnosti, ale z hlediska modelu je to výhodné. Pro koeficient smykového tření tedy platí:

$$f_T = \frac{2f_{T0}}{\pi} \arctan(k_1 v) + k_2 |v| \operatorname{sign}(v) \quad (\text{A.8})$$

Pro stanovení třecí síly je nejdříve třeba znát součet vratné a tlumící síly:

$$F_{Vt} = F_v + \sum_{i=1}^m F_{ti} \quad (\text{A.9})$$

Pro sílu smykového tření poté platí:

$$F_T = f_T F_{Vt} \quad (\text{A.10})$$

Pro celkovou silovou odezvu polyurethanové pěny platí:

$$F = F_{Vt} + F_T \quad (\text{A.11})$$

Příloha B

Zdrojový kód simulačního výpočtu

B.1 Kvazistatický režim výpočtu

```
%soubor ode_kvazistatika.m pro generování soustavy diferenciálních rovnic
%musí být uložen ve stejném adresáři jako je hlavní výpočet
%
function dx=ode_kvazistatika(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,z0,n,p,tn)

if t<=tn
    zt=z0/tn*t;
    vz=z0/tn;
end

F=zeros(p,1);
if (zt-x(1))>0
F(1)=k1(1).*(1-exp(-k2(1).*(zt-x(1))))
+k5(1).*((k3(1)./(k3(1)-(zt-x(1))))).^k4(1)
-(k3(1)./(k3(1)+(zt-x(1))))).^k4(1))
-k7(1)*(zt-x(1));
else
F(1)=k6(1).*(zt-x(1));
end

for ii=2:p-1
    if (x(ii-1)-x(ii))>0
F(ii)=k1(ii).*(1-exp(-k2(ii).*(x(ii-1)-x(ii))))
+k5(ii).*((k3(ii)./(k3(ii)
-(x(ii-1)-x(ii))))).^k4(ii)
-(k3(ii)./(k3(ii)+(x(ii-1)-x(ii))))).^k4(ii))
-k7(ii)*(x(ii-1)-x(ii));
```

```

else
    F(ii)=k6(ii).*(x(ii-1)-x(ii));
end
end

if x(p-1)>0
    F(p)=k1(p).*(1-exp(-k2(p).*x(p-1)))
    +k5(p).*((k3(p)./(k3(p)-x(p-1))).^k4(p)
    -(k3(p)./(k3(p)+x(p-1))).^k4(p))
    -k7(p)*x(p-1);
else
    F(p)=k6(p).*(x(p-1));
end

dx=zeros(n,1);
%akce a reakce, rovnost sil na prvni a druhe bunce
dx(1)=F(2)-F(1)-c*vz;
%vektor prave strany soustavy diferencialnich rovnic, spocitany z rovnosti
%na i a i+1 clenu retezce
    dx(1)=F(2)-F(1)-c*vz;
for jj=2:n
    dx(jj)=F(jj+1)-F(jj);
end

end

%%Hlavní výpočet:
clc;
clear all;
close all;

p=300; %pocet bunek
n=p-1; %pocet rovnic

% mez unosnosti bunky mu [N]
m1=35; %strední hodnota
v1=5; %rozptyl
mu1 = log((m1^2)/sqrt(v1+m1^2));
sigma1 = sqrt(log(v1/(m1^2)+1));
k1 = lognrnd(mu1,sigma1,p,1);

% konstanta exponentu ku [Nmm-1]
m2=40; %strední hodnota

```

```

v2=1; %rozptyl
mu2 = log((m2^2)/sqrt(v2+m2^2));
sigma2 = sqrt(log(v2/(m2^2)+1));
k2 = lognrnd(mu2,sigma2,p,1);

% prumer bunky hp [mm]
m3=0.75; %strední hodnota
v3=0.03; %rozptyl
mu3 = log((m3^2)/sqrt(v3+m3^2));
sigma3 = sqrt(log(v3/(m3^2)+1));
k3 = lognrnd(mu3,sigma3,p,1);

% exponent polytropy np [1]
m4=4; %strední hodnota
v4=0.05; %rozptyl
mu4 = log((m4^2)/sqrt(v4+m4^2));
sigma4 = sqrt(log(v4/(m4^2)+1));
k4 = lognrnd(mu4,sigma4,p,1);

% k5=Sp*Pp [N]
m5=3; %strední hodnota
v5=0.05; %rozptyl
mu5 = log((m5^2)/sqrt(v5+m5^2));
sigma5 = sqrt(log(v5/(m5^2)+1));
k5 = lognrnd(mu5,sigma5,p,1);

% linearni funkce pro pripad prechodu
%v tah a tím zaporne hodnoty
% deformaci,pouze pro kontrolu
m6=10; %stredni hodnota
v6=0.05; %rozptyl
mu6 = log((m6^2)/sqrt(v6+m6^2));
sigma6 = sqrt(log(v6/(m6^2)+1));
k6 = lognrnd(mu6,sigma6,p,1);

% parametr pro ztratu stability ks [N/mm]
m7=100;
v7=5;
mu7=log((m7^2)/sqrt(v7+m7^2));
sigma7 = sqrt(log(v7/(m7^2)+1));
koef=(rand(p,1)<0.6);
%uniformni rozdeleni generujici, ktere bunky ztrati stabilitu
k7=lognrnd(mu7,sigma7,p,1).*koef;

```



```

k7(1)=0; %První bunka beze ztráty stability
%procentualni podíl bunek se ztratou stability
procento=(1-sum(koef)/p)*100;

h=sum(k3); %delka retezce [mm]
z0=0.8*h; %strední hodnota amplitudy buzení, kontrola:
%relativní deformace na konci zatěžování musí vyjít 80%
c=10; %konstanta tlumeni
tn=100; %čas nájezdu je zároveň interval pro lineární funkci buzení

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
M=zeros(n,n); %Mass matrix, koeficienty jsou sestaveny z tlumici konstanty
for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj
            M(ii,jj)=-2.*c;
        end
    end
end

for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj-1 || ii==jj+1
            M(ii,jj)=1.*c;
        end
    end
end

tspan=[0 tn]; %integracni meze pro cas
x0=zeros(n,1); %pocatecni podminky
%nastaveni vypoctu pro ode, mass matrix a tolerance, vypocet ODE
options = odeset('Mass',M,'MassSingular','on','BDF','on','RelTol',1e-3);
[t,x]=ode15s(@t,x)ode_kvazistatika(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,z0,n,p,tn)
,tspan,x0,options);

% Vypocet drahy a rychlosti 1. bunky
L=length(t);
zt=zeros(1,L);
vz=zeros(1,L);

for i=1:L
    if t(i)<=tn
        zt(i)=z0/tn*t(i);
    end
end

```

```

        vz(i)=z0/tn;
    end
end

zt=zt';
vz=vz';

figure;
plot(t,zt); %zobrazení budici funkce prvni bunky v casove zavislosti
grid on;
xlabel('t [s]', 'FontSize',15);
ylabel('z[mm]', 'FontSize',15);
title('Prubeh budici funkce z(t)', 'FontSize',15)

figure;
plot(t,vz);
grid on;
xlabel('t [s]', 'FontSize',15);
ylabel('vz[mm/s]', 'FontSize',15);
title('Prubeh rychlosti budici funkce vz(t)', 'FontSize',15)

% deformace bunek delta=xi-xi+1
zx=[zt x];
delt=-diff(zx,1,2); %relativni deformace delta=xi-xi+1
delta=[delt zx(:,p)];

for k=1:p
    figure;
    plot(t,delta(:,k), 'o', 'LineWidth',2);
    grid on;
    xlabel('t[s]', 'FontSize',25);
    ylabel('delta x [mm]', 'FontSize',25);
    str1=sprintf('Relativni vychylka bunky cislo: %i', k);
    title(str1, 'FontSize',25);
end
%%
%vypocet rychlosti:
dx=diff(x,1,1); %delta x
dt=diff(t,1,1); %delta t
vx=zeros(size(dx));
for i=1:n
    vx(:,i)=dx(:,i)./dt(:); %rychlost bunek
end;

```

```

%relativni rychlost delta v = vi -vi+1 posledni bunka absolutni rychlost
v=[vz(1:end-1) vx];
delv=-diff(v,1,2);
deltav=[delv vx(:,n)];

F1b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F2b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F3b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
Fcv=zeros(length(vz(1:end-1)),n);

%sila na obecne bunce:
for j=1:p
    for i=1:length(vx(:,1))
        if (delta(i,j))>0
            F1b=k1(j)*(1-exp(-k2(j)*(delta(i,j))));
            F2b=k5(j)*((k3(j)/(k3(j)-(delta(i,j))))).^k4(j)
                -(k3(j)/(k3(j)+(delta(i,j))))).^k4(j)
                -k7(j)*delta(i,j);
            Fcv(i,j)=F1b+F2b;
        else
            Fcv(i,j)=k6(j).*(delta(i,j));
        end
        F3b(i,j)=c*(deltav(i,j));
        Fc=Fcv+F3b;
    end
end

Grafy
for i = 1:p
    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),Fcv(:,i),'g','LineWidth',2); %vratna sila
    xlabel('delta x [mm]','FontSize',25);
    ylabel('Sila [N]','FontSize',25);
    grid on;
    str=sprintf('Vratna sila bunka cislo: %i',i);
    title(str,'FontSize',25);
    axis([0 0.95*max(delta(:,i)) 0.8*min(Fcv(:,i)) 0.65*max(Fcv(:,i))]);

    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),F3b(:,i),'b','LineWidth',2); %tlumici sila
    grid on;
    xlabel('delta x[mm]','FontSize',25);

```

```

ylabel('Ft [N]', 'FontSize', 25);
str=sprintf('Tlumici sila bunky cislo: %i', i);
title(str, 'FontSize', 25);

figure;
plot(delta(1:end-1, i), Fc(:, i), 'r', 'LineWidth', 2); % celkova sila
xlabel('delta x [mm]');
ylabel('Celkova Sila [N]');
grid on;
str=sprintf('Celkova sila bunky cislo: %i', i);
title(str, 'FontSize', 25);

end

for i=1:p
    figure;
    %casova zavislost slozek sily
    plot(t(1:end-1), Fc(:, i), 'r', 'LineWidth', 2); hold on;
    plot(t(1:end-1), Fcv(:, i), 'g', 'LineWidth', 2);
    plot(t(1:end-1), F3b(:, i), 'b', 'LineWidth', 2);
    grid on;
    xlabel('t [s]', 'FontSize', 25);
    ylabel('Sila [N]', 'FontSize', 25);
    legend('Celkova', 'Vratna', 'Tlumici');
    str=sprintf('Bunka cislo: %i', i);
    title(str, 'FontSize', 25);
    axis([min(t) max(t) min(F3b(:, i)) 1.2*max(Fc(:, i))]);
end

%Pomerne deformace a zobrazení v histogramu:
epsilon=zeros(size(zx));
for i=1:p
    epsilon(:, i)=delta(:, i)/k3(i);
end

%Zobrazeni histogramu pomernych deformaci
Lc=length(epsilon(:, 1)); %Pocet zatezovacich stavu

figure;
subplot(2, 4, 1)
hist(epsilon(floor(0.1*Lc), :), 0:0.01:1);
axis([0 1 0 0.5*p]);
xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);

```

```

        ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
grid on;
subplot(2,4,2)
hist(epsilon(floor(0.2*Lc),:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerná deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);
    ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
subplot(2,4,3)
hist(epsilon(floor(0.3*Lc),:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);
    ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
subplot(2,4,4)
hist(epsilon(floor(0.4*Lc),:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);
    ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
subplot(2,4,5)
hist(epsilon(floor(0.5*Lc),:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);
    ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
subplot(2,4,6)
hist(epsilon(floor(0.7*Lc),:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);
    ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
subplot(2,4,7)
hist(epsilon(floor(0.8*Lc),:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);
    ylabel('Relativni cetnost [-]', 'FontSize', 15);
subplot(2,4,8)
hist(epsilon(Lc,:),0:0.01:1);
    axis([0 1 0 0.5*p]);
    grid on;
    xlabel('Pomerna deformace epsilon [-]', 'FontSize', 15);

```

```
ylabel('Relativni cetnost [-]','FontSize',15);
```

B.2 Dynamický režim výpočtu harmonické buzení

%soubor ode_sinus.m pro generování soustavy diferenciálních rovnic,
%musí být uložen ve stejném adresáři jako hlavní výpočet.

```
function dx=ode_sinus(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,f,z0,n,p,z,tn)
```

```
omega=2*pi*f;
```

```
%
```

```
%Budící funkce, sinus s lineárním náběhem do času tn
```

```
if t<=tn
```

```
    zt=z0/tn*t;
```

```
    vz=z0/tn;
```

```
else
```

```
    zt=z0+z.*sin(omega*(t-tn));
```

```
    vz=z.*omega.*cos(omega*(t-tn));
```

```
end;
```

```
F=zeros(p,1);
```

```
if (zt-x(1))>0
```

```
F(1)=k1(1).*(1-exp(-k2(1).*(zt-x(1))))
```

```
+k5(1).*((k3(1)./(k3(1)-(zt-x(1))))).^k4(1)
```

```
-(k3(1)./(k3(1)+(zt-x(1))))).^k4(1)
```

```
-k7(1)*(zt-x(1));
```

```
else
```

```
F(1)=k6(1).*(zt-x(1));
```

```
end
```

```
for ii=2:p-1
```

```
    if (x(ii-1)-x(ii))>0
```

```
        F(ii)=k1(ii).*(1-exp(-k2(ii).*(x(ii-1)-x(ii))))
```

```
+k5(ii).*((k3(ii)./(k3(ii)
```

```
-(x(ii-1)-x(ii))))).^k4(ii)
```

```
-(k3(ii)./(k3(ii)+(x(ii-1)-x(ii))))).^k4(ii)
```

```
-k7(ii)*(x(ii-1)-x(ii));
```

```
    else
```

```
        F(ii)=k6(ii).*(x(ii-1)-x(ii));
```

```
    end
```

```
end
```

```
if x(p-1)>0
```

```
F(p)=k1(p).*(1-exp(-k2(p).*x(p-1)))
```

```

+k5(p).*((k3(p)./(k3(p)-x(p-1))).^k4(p)
-(k3(p)./(k3(p)+x(p-1))).^k4(p))
-k7(p)*x(p-1);
else
F(p)=k6(p).*(x(p-1));
end

dx=zeros(n,1);
%akce a reakce, rovnost sil na prvni a druhe bunce
dx(1)=F(2)-F(1)-c*vz;
%vektor prave strany soustavy diferencialnich rovnic, spocitany z rovnosti
%na i a i+1 clenu retezce
dx(1)=F(2)-F(1)-c*vz;
for jj=2:n
dx(jj)=F(jj+1)-F(jj);
end

end

%%Hlavní výpočet:

clc;
clear all;
close all;

p=300; %pocet bunek
n=p-1; %pocet rovnic

% mez unosnosti bunky mu [N]
m1=35; %strední hodnota
v1=5; %rozptyl
mu1 = log((m1^2)/sqrt(v1+m1^2));
sigma1 = sqrt(log(v1/(m1^2)+1));
k1 = lognrnd(mu1,sigma1,p,1);

% konstanta exponentu ku [Nmm-1]
m2=40; %strední hodnota
v2=1; %rozptyl
mu2 = log((m2^2)/sqrt(v2+m2^2));
sigma2 = sqrt(log(v2/(m2^2)+1));
k2 = lognrnd(mu2,sigma2,p,1);

```



```

% prumer bunky hp [mm]
m3=0.75; %strední hodnota
v3=0.03; %rozptyl
mu3 = log((m3^2)/sqrt(v3+m3^2));
sigma3 = sqrt(log(v3/(m3^2)+1));
k3 = lognrnd(mu3,sigma3,p,1);

% exponent polytropy np [1]
m4=4; %strední hodnota
v4=0.05; %rozptyl
mu4 = log((m4^2)/sqrt(v4+m4^2));
sigma4 = sqrt(log(v4/(m4^2)+1));
k4 = lognrnd(mu4,sigma4,p,1);

% k5=Sp*Pp [N]
m5=3; %strední hodnota
v5=0.05; %rozptyl
mu5 = log((m5^2)/sqrt(v5+m5^2));
sigma5 = sqrt(log(v5/(m5^2)+1));
k5 = lognrnd(mu5,sigma5,p,1);

% linearni funkce pro pripad prechodu
%v tah a tím zaporne hodnoty
% deformaci,pouze pro kontrolu
m6=10; %stredni hodnota
v6=0.05; %rozptyl
mu6 = log((m6^2)/sqrt(v6+m6^2));
sigma6 = sqrt(log(v6/(m6^2)+1));
k6 = lognrnd(mu6,sigma6,p,1);

% parametr pro ztratu stability ks [N/mm]
m7=100;
v7=5;
mu7=log((m7^2)/sqrt(v7+m7^2));
sigma7 = sqrt(log(v7/(m7^2)+1));
koef=(rand(p,1)<0.6);
%uniformni rozdeleni generujici, ktere bunky ztrati stabilitu
k7=lognrnd(mu7,sigma7,p,1).*koef;
k7(1)=0; %První bunka beze ztraty stability
%procentualni podíl bunek se ztratou stability
procento=(1-sum(koef)/p)*100;

f=1; %frekvence buzení

```

```

T=1/f; %doba periody [s]
nc=5; %počet zatěžovacích cyklů
z0=0.70*h; %amplituda buzení
c=100; %konstanta tlumení
omega=2*pi*f; %uhlova rychlost buzení

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
M=zeros(n,n); %Mass matrix, koeficienty jsou sestaveny z tlumicí konstanty
for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj
            M(ii,jj)=-2.*c;
        end
    end
end

for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj-1 || ii==jj+1
            M(ii,jj)=1.*c;
        end
    end
end

tspan=[0 tn]; %integracní meze pro čas
x0=zeros(n,1); %počáteční podmínky
%nastavení výpočtu pro ode, mass matrix a tolerance, výpočet ODE
options = odeset('Mass',M,'MassSingular','on','BDF','on','RelTol',1e-3);
[t,x]=ode15s(@(t,x)ode_sinus(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,f,z0,n,p,z,tn)
,tspan,x0,options);

% Výpočet dráhy a rychlosti 1. bunky
L=length(t);
zt=zeros(1,L);
vz=zeros(1,L);

for i=1:L
    if t(i)<tn
        zt(i)=z0/tn*t(i);
        vz(i)=z0/tn;
    else
        zt(i)=z0+z.*sin(omega*(t(i)-tn));
        vz(i)=z.*omega.*cos(omega*(t(i)-tn));
    end
end

```

```

    end;
end;
zt=zt';
vz=vz';

figure;
plot(t,zt); %zobrazení budici funkce prvni bunky v casove zavislosti
grid on;
xlabel('t [s]', 'FontSize',15);
ylabel('z[mm]', 'FontSize',15);
title('Prubeh budici funkce z(t)', 'FontSize',15)

figure;
plot(t,vz);
grid on;
xlabel('t [s]', 'FontSize',15);
ylabel('vz[mm/s]', 'FontSize',15);
title('Prubeh rychlosti budici funkce vz(t)', 'FontSize',15)

% deformace bunek delta=xi-xi+1
zx=[zt x];
delt=-diff(zx,1,2); %relativni deformace delta=xi-xi+1
delta=[delt zx(:,p)];

for k=1:p
    figure;
    plot(t,delta(:,k), 'o', 'LineWidth',2);
    grid on;
    xlabel('t[s]', 'FontSize',25);
    ylabel('delta x [mm]', 'FontSize',25);
    str1=sprintf('Relativni vychylka bunky cislo: %i', k);
    title(str1, 'FontSize',25);
end
%%
%vypocet rychlosti:
dx=diff(x,1,1); %delta x
dt=diff(t,1,1); %delta t
vx=zeros(size(dx));
for i=1:n
    vx(:,i)=dx(:,i)./dt(:); %rychlost bunek
end;

%relativni rychlost delta v = vi -vi+1 posledni bunka absolutni rychlost

```

```

v=[vz(1:end-1) vx];
delv=-diff(v,1,2);
deltav=[delv vx(:,n)];

F1b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F2b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F3b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
Fcv=zeros(length(vz(1:end-1)),n);

%silna na obecne bunce:
for j=1:p
    for i=1:length(vx(:,1))
        if (delta(i,j))>0
            F1b=k1(j)*(1-exp(-k2(j)*(delta(i,j))));
            F2b=k5(j)*((k3(j)/(k3(j)-(delta(i,j))))).^k4(j)
                -(k3(j)/(k3(j)+(delta(i,j))))).^k4(j)
                -k7(j)*delta(i,j);
            Fcv(i,j)=F1b+F2b;
        else
            Fcv(i,j)=k6(j).*(delta(i,j));
        end
        F3b(i,j)=c*(deltav(i,j));
        Fc=Fcv+F3b;
    end
end

Grafy
for i = 1:p
    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),Fcv(:,i),'g','LineWidth',2); %vratna sila
    xlabel('delta x [mm]','FontSize',25);
    ylabel('Sila [N]','FontSize',25);
    grid on;
    str=sprintf('Vratna sila bunka cislo: %i',i);
    title(str,'FontSize',25);
    axis([0 0.95*max(delta(:,i)) 0.8*min(Fcv(:,i)) 0.65*max(Fcv(:,i))]);

    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),F3b(:,i),'b','LineWidth',2); %tlumici sila
    grid on;
    xlabel('delta x[mm]','FontSize',25);
    ylabel('Ft [N]','FontSize',25);
    str=sprintf('Tlumici sila bunky cislo: %i',i);

```

```

title(str,'FontSize',25);

figure;
plot(delta(1:end-1,i),Fc(:,i),'r','LineWidth',2);% celkova sila
xlabel('delta x [mm]');
ylabel('Celkova Sila [N]');
grid on;
str=sprintf('Celkova sila bunky cislo: %i',i);
title(str,'FontSize',25);

end

for i=1:p
figure;
%casova zavislost slozek sily
plot(t(1:end-1),Fc(:,i),'r','LineWidth',2); hold on;
plot(t(1:end-1),Fcv(:,i),'g','LineWidth',2);
plot(t(1:end-1),F3b(:,i),'b','LineWidth',2);
grid on;
xlabel('t [s]','FontSize',25);
ylabel('Sila [N]','FontSize',25);
legend('Celkova','Vratna','Tlumici');
str=sprintf('Bunka cislo: %i',i);
title(str,'FontSize',25);
axis([min(t) max(t) min(F3b(:,i)) 1.2*max(Fc(:,i))]);
end

```

B.3 Dynamický režim výpočtu trojúhelníkové buzení

```
% Soubor ode_trojuhelnik.m pro generování soustavy diferenciálních rovnic,
%nutno uložit samostatně
%do stejného adresáře jako hlavní výpočet.
%
function dx=ode_trojuhelnik(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,z0,n,p,T,f)

%výpočet budícího signálu
u=mod(t+T,T); %pocita zbytek po deleni intervalu
zt=(u<=T/2).*u.*z0./(T/2)+(u>T/2).*(T-u).*2*z0./T;
vz=(2*z0/T)*square(2*pi*f*t);

F=zeros(p,1);
if (zt-x(1))>0
F(1)=k1(1).*(1-exp(-k2(1).*(zt-x(1))))
+k5(1).*((k3(1)./(k3(1)-(zt-x(1)))).^k4(1)
-(k3(1)./(k3(1)+(zt-x(1))))).^k4(1))
-k7(1)*(zt-x(1));
else
F(1)=k6(1).*(zt-x(1));
end

for ii=2:p-1
if (x(ii-1)-x(ii))>0
F(ii)=k1(ii).*(1-exp(-k2(ii).*(x(ii-1)-x(ii))))
+k5(ii).*((k3(ii)./(k3(ii)
-(x(ii-1)-x(ii))))).^k4(ii)
-(k3(ii)./(k3(ii)+(x(ii-1)-x(ii))))).^k4(ii))
-k7(ii)*(x(ii-1)-x(ii));
else
F(ii)=k6(ii).*(x(ii-1)-x(ii));
end
end

if x(p-1)>0
F(p)=k1(p).*(1-exp(-k2(p).*x(p-1)))
+k5(p).*((k3(p)./(k3(p)-x(p-1)))).^k4(p)
-(k3(p)./(k3(p)+x(p-1))))).^k4(p))
-k7(p)*x(p-1);
else
F(p)=k6(p).*(x(p-1));
```

```

end

dx=zeros(n,1);
%akce a reakce, rovnost sil na prvni a druhe bunce
dx(1)=F(2)-F(1)-c*vz;
%vektor prave strany soustavy diferencialnich rovnic, spocitany z rovnosti
%na i a i+1 clenu retezce
    dx(1)=F(2)-F(1)-c*vz;
for jj=2:n
    dx(jj)=F(jj+1)-F(jj);
end

end

%% Samostatný soubor pro spuštění výpočtu:
clc;
clear all;
close all;

p=300; %pocet bunek
n=p-1; %pocet rovnic

% mez unosnosti bunky mu [N]
m1=35; %strední hodnota
v1=5; %rozptyl
mu1 = log((m1^2)/sqrt(v1+m1^2));
sigma1 = sqrt(log(v1/(m1^2)+1));
k1 = lognrnd(mu1,sigma1,p,1);

% konstanta exponentu ku [Nmm-1]
m2=40; %strední hodnota
v2=1; %rozptyl
mu2 = log((m2^2)/sqrt(v2+m2^2));
sigma2 = sqrt(log(v2/(m2^2)+1));
k2 = lognrnd(mu2,sigma2,p,1);

% prumer bunky hp [mm]
m3=0.75; %strední hodnota
v3=0.03; %rozptyl
mu3 = log((m3^2)/sqrt(v3+m3^2));
sigma3 = sqrt(log(v3/(m3^2)+1));
k3 = lognrnd(mu3,sigma3,p,1);

```

```

% exponent polytropy np [1]
m4=4; %strední hodnota
v4=0.05; %rozptyl
mu4 = log((m4^2)/sqrt(v4+m4^2));
sigma4 = sqrt(log(v4/(m4^2)+1));
k4 = lognrnd(mu4,sigma4,p,1);

% k5=Sp*Pp [N]
m5=3; %strední hodnota
v5=0.05; %rozptyl
mu5 = log((m5^2)/sqrt(v5+m5^2));
sigma5 = sqrt(log(v5/(m5^2)+1));
k5 = lognrnd(mu5,sigma5,p,1);

% linearni funkce pro pripad prechodu
%v tah a tím zaporne hodnoty
% deformaci,pouze pro kontrolu
m6=10; %stredni hodnota
v6=0.05; %rozptyl
mu6 = log((m6^2)/sqrt(v6+m6^2));
sigma6 = sqrt(log(v6/(m6^2)+1));
k6 = lognrnd(mu6,sigma6,p,1);

% parametr pro ztratu stability ks [N/mm]
m7=100;
v7=5;
mu7=log((m7^2)/sqrt(v7+m7^2));
sigma7 = sqrt(log(v7/(m7^2)+1));
koef=(rand(p,1)<0.6);
%uniformni rozdeleni generujici, ktere bunky ztrati stabilitu
k7=lognrnd(mu7,sigma7,p,1).*koef;
k7(1)=0; %První bunka beze ztraty stability
%procentualni podíl bunek se ztratou stability
procento=(1-sum(koef)/p)*100;

f=1; %frekvence buzení
T=1/f; %doba periody [s]
nc=5; %počet zatěžovacích cyklů
z0=0.70*h; %amplituda buzení
c=100; %konstanta tlumeni
omega=2*pi*f; %uhlova rychlost buzení

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```



```

M=zeros(n,n); %Mass matrix, koeficienty jsou sestaveny z tlumici konstanty
for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj
            M(ii,jj)=-2.*c;
        end
    end
end

for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj-1 || ii==jj+1
            M(ii,jj)=1.*c;
        end
    end
end

tspan=[0 tn]; %integracni meze pro cas
x0=zeros(n,1); %pocatecni podminky
%nastaveni vypoctu pro ode, mass matrix a tolerance, vypocet ODE
options = odeset('Mass',M,'MassSingular','on','BDF','on','RelTol',1e-3);
[t,x]=ode15s(@t,x)ode_trojuhelnik(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,z0,n,p,T,f)
,tspan,x0,options);

% Vypocet drahy a rychlosti 1. bunky
L=length(t);
zt=zeros(1,L);
vz=zeros(1,L);

%vypocet budiciho signalu
u=mod(t+T,T); %pocita zbytek po deleni intervalu
zt=(u<=T/2).*u.*z0./(T/2)+(u>T/2).*(T-u).*2*z0./T;
vz=(2*z0/T)*square(2*pi*f*t);

zt=zt';
vz=vz';

figure;
plot(t,zt); %zobrazení budici funkce prvni bunky v casove zavislosti
grid on;
xlabel('t [s]', 'FontSize',15);
ylabel('z[mm]', 'FontSize',15);
title('Prubeh budici funkce z(t)', 'FontSize',15)

```

```

figure;
plot(t,vz);
grid on;
xlabel('t [s]','FontSize',15);
ylabel('vz[mm/s]','FontSize',15);
title('Prubeh rychlosti budici funkce vz(t)','FontSize',15)

% deformace bunek delta=xi-xi+1
zx=[zt x];
delt=-diff(zx,1,2); %relativni deformace delta=xi-xi+1
delta=[delt zx(:,p)];

for k=1:p
    figure;
    plot(t,delta(:,k),'o','LineWidth',2);
    grid on;
    xlabel('t[s]','FontSize',25);
    ylabel('delta x [mm]','FontSize',25);
    str1=sprintf('Relativni vychylka bunky cislo: %i', k);
    title(str1,'FontSize',25);
end
%%
%vypocet rychlosti:
dx=diff(x,1,1); %delta x
dt=diff(t,1,1); %delta t
vx=zeros(size(dx));
for i=1:n
    vx(:,i)=dx(:,i)./dt(:); %rychlost bunek
end;

%relativni rychlost delta v = vi -vi+1 posledni bunka absolutni rychlost
v=[vz(1:end-1) vx];
delv=-diff(v,1,2);
deltav=[delv vx(:,n)];

F1b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F2b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F3b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
Fcv=zeros(length(vz(1:end-1)),n);

%sila na obecne bunce:
for j=1:p

```

```

for i=1:length(vx(:,1))
    if (delta(i,j))>0
        F1b=k1(j)*(1-exp(-k2(j)*(delta(i,j))));
        F2b=k5(j)*((k3(j)/(k3(j)-(delta(i,j))))).^k4(j)
        -(k3(j)/(k3(j)+(delta(i,j))))).^k4(j)
        -k7(j)*delta(i,j);
        Fcv(i,j)=F1b+F2b;
    else
        Fcv(i,j)=k6(j).*(delta(i,j));
    end
    F3b(i,j)=c*(deltav(i,j));
    Fc=Fcv+F3b;
end
end

Grafy
for i = 1:p
    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),Fcv(:,i),'g','LineWidth',2); %vratna sila
    xlabel('delta x [mm]','FontSize',25);
    ylabel('Sila [N]','FontSize',25);
    grid on;
    str=sprintf('Vratna sila bunka cislo: %i',i);
    title(str,'FontSize',25);
    axis([0 0.95*max(delta(:,i)) 0.8*min(Fcv(:,i)) 0.65*max(Fcv(:,i))]);

    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),F3b(:,i),'b','LineWidth',2); %tlumici sila
    grid on;
    xlabel('delta x[mm]','FontSize',25);
    ylabel('Ft [N]','FontSize',25);
    str=sprintf('Tlumici sila bunky cislo: %i',i);
    title(str,'FontSize',25);

    figure;
    plot(delta(1:end-1,i),Fc(:,i),'r','LineWidth',2);% celkova sila
    xlabel('delta x [mm]');
    ylabel('Celkova Sila [N]');
    grid on;
    str=sprintf('Celkova sila bunky cislo: %i',i);
    title(str,'FontSize',25);
end

```

```

for i=1:p
    figure;
    %casova zavislost slozek sily
    plot(t(1:end-1),Fc(:,i),'r','LineWidth',2); hold on;
    plot(t(1:end-1),Fcv(:,i),'g','LineWidth',2);
    plot(t(1:end-1),F3b(:,i),'b','LineWidth',2);
    grid on;
    xlabel('t [s]','FontSize',25);
    ylabel('Sila [N]','FontSize',25);
    legend('Celkova','Vratna','Tlumici');
    str=sprintf('Bunka cislo: %i',i);
    title(str,'FontSize',25);
    axis([min(t) max(t) min(F3b(:,i)) 1.2*max(Fc(:,i))]);
end

```

B.4 Výpočet práce tlumící síly

```
%soubor wd_sinus.m nutno uložit do stejného adresáře jako hlavní výpočet,  
%slouží ke generování tlumící síly pro různé frekvence  
%dále nutno uložit soubor ode_trojuhelnik.m  
%z dynamického výpočtu trojúhelníkového buzení  
%do stejného adresáře pro generování  
% soustavy diferenciálních rovnic
```

```
function Wd=wd_trojuhelnik(f)  
global k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 p  
n=p-1; %pocet rovnic  
  
% mez únosnosti buňky [N]  
m1=35; %střední hodnota  
v1=5; %rozptyl  
mu1 = log((m1^2)/sqrt(v1+m1^2));  
sigma1 = sqrt(log(v1/(m1^2)+1));  
k1 = lognrnd(mu1,sigma1,p,1);  
%k1(1:p)=5;  
  
% konstanta exponentu [Nmm-1]  
m2=40; %střední hodnota  
v2=1; %rozptyl  
mu2 = log((m2^2)/sqrt(v2+m2^2));  
sigma2 = sqrt(log(v2/(m2^2)+1));  
k2 = lognrnd(mu2,sigma2,p,1);  
%k2(1:p)=100;  
  
%průměr buňky [mm]  
m3=0.75; %střední hodnota  
v3=0.03; %rozptyl  
mu3 = log((m3^2)/sqrt(v3+m3^2));  
sigma3 = sqrt(log(v3/(m3^2)+1));  
k3 = lognrnd(mu3,sigma3,p,1);  
% k3(1:p)=1;  
  
% exponent polytropy [1]  
m4=4; %střední hodnota  
v4=0.05; %rozptyl  
mu4 = log((m4^2)/sqrt(v4+m4^2));  
sigma4 = sqrt(log(v4/(m4^2)+1));  
k4 = lognrnd(mu4,sigma4,p,1);
```

```

k4(1:p)=3;

% k5=Sp*Pp [N]
m5=3; %střední hodnota
v5=0.05; %rozptyl
mu5 = log((m5^2)/sqrt(v5+m5^2));
sigma5 = sqrt(log(v5/(m5^2)+1));
k5 = lognrnd(mu5,sigma5,p,1);
%k5(1:p)=3;

% linearni funkce
m6=10; %střední hodnota
v6=0.05; %rozptyl
mu6 = log((m6^2)/sqrt(v6+m6^2));
sigma6 = sqrt(log(v6/(m6^2)+1));
k6 = lognrnd(mu6,sigma6,p,1);
%k6(1:p)=10;
k7(1:p)=0;

h=sum(k3); %delka retezce [mm]

%frekvence buzeni
T=1/f; %doba periody [s]
z0=0.7*h; %amplituda buzeni
c=10; %konstanta tlumeni
nc=1; %pocet zatezovacich cyklu

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
M=zeros(n,n); %Mass matrix, koeficienty jsou sestaveny z tlumici konstanty
for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj
            M(ii,jj)=-2.*c;
        end
    end
end

for jj=1:n
    for ii=1:n
        if ii==jj-1 || ii==jj+1
            M(ii,jj)=1.*c;
        end
    end
end

```

```

end

tspan=[0 nc*T]; %integracni meze pro cas
x0=zeros(n,1); %pocatecni podminky
options = odeset('Mass',M,'MassSingular','on','BDF','on','RelTol',1e-10);
[t,x]=ode15s(@(t,x)ode_trojuhelnik(t,x,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,c,z0,n,p,T,f),
tspan,x0,options); %vypocet ODE

%% Výpočet dráhy a rychlosti 1. buňky

%vypocet budiciho signalu
u=mod(t+T,T); %pocita zbytek po deleni intervalu
zt=(u<=T/2).*u.*z0./(T/2)+(u>T/2).*(T-u).*2*z0./T;
vz=(2*z0/T)*square(2*pi*f*t);

%% deformace buněk delta=xi-xi+1
zx=[zt x];
delt=-diff(zx,1,2); %relativni deformace delta=xi-xi+1
% delta=[delta x(1:end-1,p)]; %posledni bunka ma absolutni deformaci
delta=[delt zx(:,p)];

% %%%%%%%%%%%
%
%vypocet rychlosti:
dx=diff(x,1,1); %delta x
dt=diff(t,1,1); %delta t

vx=zeros(size(dx));
for i=1:n
    vx(:,i)=dx(:,i)./dt(:); %rychlost bunek
end;
%relativni rychlost delta v = vi -vi+1
v=[vz(1:end-1) vx];
delv=-diff(v,1,2);
deltav=[delv vx(:,n)];

nv=length(deltav(:,1));

F1b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F2b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
F3b=zeros(length(vz(1:end-1)),n);
Fcv=zeros(length(vz(1:end-1)),n);

```

```

%sila na obecne bunce:
for j=1:p %od prvni bunky
    for i=1:length(vx(:,1))
        if (delta(i,j))>0
            F1b=k1(j)*(1-exp(-k2(j)*(delta(i,j))));
            F2b=k5(j)*((k3(j)/(k3(j)-(delta(i,j))))).^k4(j)
            -(k3(j)/(k3(j)
            +(delta(i,j))))).^k4(j));
            Fcv(i,j)=F1b+F2b;
        else
            Fcv(i,j)=k6(j).*(delta(i,j));
        end
        F3b(i,j)=c*(deltav(i,j));
        Fc=Fcv+F3b;
    end
end

%%Poměrné deformace a zobrazení v histogramu:
epsilon=zeros(size(zx));
for i=1:p
    epsilon(:,i)=delta(:,i)/k3(i);
end

%%
%%Prace tlumici sily na prvni bunce
delta1=delta(1:end-1, 1);
delta1=delta1';

Ft1=F3b(:,1)';

Wd=trapz(delta1, Ft1);

end

%% hlavní soubor pro spuštění výpočtu:

clc;
clear all;
close all;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```



```

%%
global k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 p
p=200;

% mez únosnosti buňky mu [N]
m1=35; %střední hodnota
v1=5; %rozptyl
mu1 = log((m1^2)/sqrt(v1+m1^2));
sigma1 = sqrt(log(v1/(m1^2)+1));
k1 = lognrnd(mu1,sigma1,p,1);

% konstanta exponentu ku [Nmm-1]
m2=40; %střední hodnota
v2=1; %rozptyl
mu2 = log((m2^2)/sqrt(v2+m2^2));
sigma2 = sqrt(log(v2/(m2^2)+1));
k2 = lognrnd(mu2,sigma2,p,1);

%průměr buňky hp [mm]
m3=0.75; %střední hodnota
v3=0.03; %rozptyl
mu3 = log((m3^2)/sqrt(v3+m3^2));
sigma3 = sqrt(log(v3/(m3^2)+1));
k3 = lognrnd(mu3,sigma3,p,1);

% exponent polytropy n [1]
m4=4; %střední hodnota
v4=0.05; %rozptyl
mu4 = log((m4^2)/sqrt(v4+m4^2));
sigma4 = sqrt(log(v4/(m4^2)+1));
k4 = lognrnd(mu4,sigma4,p,1);

% k5=Sp*Pp [N]
m5=3; %střední hodnota
v5=0.05; %rozptyl
mu5 = log((m5^2)/sqrt(v5+m5^2));
sigma5 = sqrt(log(v5/(m5^2)+1));
k5 = lognrnd(mu5,sigma5,p,1);

m6=10; %střední hodnota
v6=0.05; %rozptyl
mu6 = log((m6^2)/sqrt(v6+m6^2));
sigma6 = sqrt(log(v6/(m6^2)+1));

```

```

k6 = lognrnd(mu6,sigma6,p,1);

%parametr pro ztratu stability ks [N/mm]
m7=100;
v7=5;
mu7=log((m7^2)/sqrt(v7+m7^2));
sigma7 = sqrt(log(v7/(m7^2)+1));
koef=(rand(p,1)<0.6);
k7=lognrnd(mu7,sigma7,p,1).*koef;
k7(1)=0;

procento=(1-sum(koef)/p)*100;

%[Hz]
f=[0.1, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10];
nf=length(f);

Wd=zeros(nf, 1);
% Výpočet tlumicí síly a její práce pro jednotlivé frekvence
for i = 1:nf
    Wd(i)=wd_trojuhelnik(f(i)) ;
end

figure;
plot(f, Wd,'o', 'LineWidth', 2); grid on;
xlabel('f [Hz]', 'FontSize', 25);
ylabel('Wd [mJ]', 'FontSize', 25);
title('Práce tlumicí síly v závislosti na frekvenci', 'FontSize', 25);
Wd=Wd';

%%
%linearni regrese
p=polyfit(f, Wd, 1);
x1=linspace(min(f),max(f), 100);
y1=polyval(p, x1);
a=num2str(p(1));
b=num2str(p(2));

figure;
hold on;
plot(f, Wd,'o', 'LineWidth', 3);
plot(x1, y1, 'LineWidth', 2);
xlabel('f [Hz]', 'FontSize', 25);

```

```
ylabel('Wd [mJ]', 'FontSize', 25);  
title('Práce tlumící síly v závislosti na frekvenci', 'FontSize', 25);  
% legend(a, b);
```