



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
ENERGY INSTITUTE

# NESTACIONÁRNÍ POHYB TUHÉHO TĚLESA V KAPALINĚ

UNSTEADY MOVEMENT OF A STIFF BODY IN A LIQUID

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. MIROSLAV KUBO

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. SIMONA FIALOVÁ, Ph.D.

BRNO 2011



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Bc. Miroslav Kubo

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

**Nestacionární pohyb tuhého tělesa v kapalině**

v anglickém jazyce:

**Unsteady movement of a stiff body in a liquid**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Řešení nestacionárního pohybu tuhého tělesa v kapalině s vlivem stacionárního průtoku, bez vlivu stacionárního průtoku a za předpokladu neviskozni kapaliny.

Cíle diplomové práce:

Stanovení tenzorů přídavných hmotností a přídavného tlumení pro zadaný tvar tělesa.

Seznam odborné literatury:  
přednášky Základy hydroelasticity, Pochylý  
Výzkumné zprávy OFI V.K.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 19.11.2010

L.S.

---

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato diplomová práce se zabývá výpočtem přídatných účinků na zadané tuhé těleso od proudu ideální kapaliny. Jsou zde odvozeny rovnice pro výpočet účinků při translačním, nebo torzním kmitání a následný výpočet složek jejich tenzorů.

## **Klíčová slova**

Laplaceova rovnice, okrajové podmínky, ideální kapalina, stacionární proudění, přídatné účinky

## **Abstract**

This diploma thesis deals with computing of edit influences on assigned stiff body from the flow of inviscid liquid. There are derived equations for computation of the influences during translational or torsional wobble and follow-up calculation of the units of their tensors.

## **Key words**

Laplace's equation, border conditions, inviscid liquid, steady flow, edit influences

Bibliografická citace:

KUBO, M. Nestacionární pohyb tuhého tělesa v kapalině. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 57 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Simona Fialová, Ph.D..



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

25. května 2011

---

Bc. Miroslav Kubo





## **Poděkování**

Rád bych poděkoval panu prof. Ing. Františkovi Pochylému, CSc., panu doc. Ing. Miloslavovi Haluzovi, CSc. a pánům Bc. Michalovi Černákovi a Bc. Romanovi Kantorovi za cenné rady a připomínky při tvorbě této práce.



## Obsah

Úvod.....	12
1 Pohyb tuhého telesa v kvapaline - odvozenie rovníc .....	13
1.1 Súradnicové systémy .....	13
1.2 Pohybová rovnica makroskopickej častice .....	13
1.3 Zákon o zachovaní hmotnosti makroskopickej častice .....	15
1.4 Pohybový stav kvapaliny .....	16
1.5 Ideálna kvapalina.....	16
1.6 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v ideálnej kvapaline - translačný pohyb .....	17
1.7 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v ideálnej kvapaline - rotačný pohyb.....	21
1.8 Reálna kvapalina .....	24
1.9 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v reálnej kvapaline - translačný pohyb .....	25
1.10 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v reálnej kvapaline - rotačný pohyb.....	28
2 Zadanie úlohy.....	30
3 Numerické metódy .....	31
3.1 Derivácie podľa polohy .....	31
3.2 Využitie derivácií .....	32
3.3 Integrály po krivke .....	34
4 Výpočet prúdenia .....	36
4.1 Výpočet počiatkovej rýchlosti .....	36
4.2 Výpočet funkcie $h$ a jej derivácií - translačný pohyb.....	39
4.3 Výpočet funkcie $h$ a jej derivácií - rotačný pohyb .....	42
5 Výpočet prídavných účinkov .....	45
5.1 Prídavná hmotnosť .....	45
5.2 Prídavné tlmenie.....	46
5.3 Nelineárne prídavné tlmenie .....	47
5.4 Statická vztlaková sila.....	48
5.5 Prídavný polárny moment zotrvačnosti.....	49
5.6 Prídavné torzné tlmenie.....	50
5.7 Nelineárne prídavné torzné tlmenie .....	50
5.8 Statický krútiaci moment .....	51
6 Návod k programom.....	52
6.1 Iteračné programy .....	52
6.2 Prídavné programy .....	52
Záver.....	53
Zoznam použitých zdrojov .....	54
Zoznam použitých symbolov a skratiek.....	55

## Úvod

Voda má na objekty, ktoré s ňou prídu do kontaktu veľmi špecifické vplyvy. Okrem chemických je v strojárstve nutné sa zaoberať hlavne fyzikálnymi účinkami pôsobiacimi na telesá vystavované prúdeniu vody, prípadne iných kvapalín. Pri vysokých rýchlostiach prúdenia vznikajú sily, ktoré môžu mať nežiadúce deštruktívne následky. U mechanizmov, ktorých funkčnosť je úzko spojená s vysokými rýchlosťami kvapalín (turbíny, čerpadlá, lodné šroby, ...) je preto veľmi dôležité precízne odhadnúť všetky možné riziká. V dôsledku nesprávnych úvah pri konštrukcii môže dôjsť napríklad k poškodzovaniu povrchu, trhlinám, únavovým lomom a iným. V snahe obmedziť tieto prípady sa kladie stále väčší dôraz na výpočty a merania v návrhovej fáze konštrukcie.

Niektoré typy nežiadúcich účinkov môžu byť spôsobované takzvanými prídavnými účinkami, ktoré hrajú v pohybových rovniciach ponorených telies nemalú úlohu. Z nich sa dajú za najdôležitejšie považovať prídavná hmotnosť (prípadne prídavný polárny moment zotrvačnosti pre rovnice rotačného pohybu) a prídavné tlmenie. Prídavná hmotnosť môže nezanedbateľne zvýšiť zotrvačné sily a následne aj kinetickú energiu telesa bez ohľadu na to, či kvapalina v jeho blízkosti prúdi alebo nie. V závislosti na prúdení sa môže zvyšovať alebo znižovať tlmenie telesa. Túto zmenu spôsobuje prídavné tlmenie, ktoré v prípade, že má záporné hodnoty, vyvoláva u telesa samobudené kmitanie. Tento jav môže spieť napríklad k únavovému lomu, v najhorších prípadoch môže mať za následok okamžité odtrhnutie v namáhanom mieste. Z tohto dôvodu by možnosť samobudeného kmitania pri jednotlivých úlohách nemala byť podceňovaná a mala by sa vždy zväžiť.

Výpočet prídavných účinkov numerickými metódami je hlavne s uvažovaním viskózne kvapaliny pomerne komplikovaný a bežne sa zatiaľ nevyužíva. Ich určovanie neobsahuje napr. ani program *Ansys - Fluent*, ktorý je z *CFD* výpočtových programov najrozšírenejší. Táto práca je zameraná na teoretickú demonštráciu numerického výpočtu prídavných účinkov pre jednoduchú dvojrozmernú úlohu s obtekaným telesom, ktoré v prúdiacej kvapaline kmitá buď translačne alebo torzne.

# 1 Pohyb tuhého telesa v kvapaline - odvodenie rovníc

Táto kapitola vychádza z konzultácií a prednášok. Uvedené sú všetky rovnice potrebné pre výpočet prídavných účinkov telesa všeobecného tvaru v uzavretom priestore bez voľnej hladiny. Vo vzťahoch je používaná Einsteinova sumačná symbolika.

## 1.1 Súradnicové systémy

Uvažujme Karteziánsky súradnicový systém pevne spojený so zemou a nezávislú premennú  $x_i$  vyjadrujúcu polohu. Kontinuum môžeme popisovať dvomi spôsobmi:

a) Lagrangeovo pojmie kontinua predpokladá, že v čase  $t_0$ , od ktorého sledujeme pohyb častice je známa počiatočná poloha  $x_{0j}$  každej častice v obore  $V$ , v ktorom vyšetrujeme (jej pohybový stav). Polohový vektor  $x_i$  častice závisí teda na počiatočnej polohe  $x_{0j}$  a čase  $t$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i = \frac{du_i}{dt}; \quad (1.1.1)$$

kde  $u_i$  je malé posunutie častice. To znamená, že Lagrangeovo pojmie je založené na sledovaní pohybu každej častice po jej trajektórii. Pre zrýchlenie  $a_i$  teda platí:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} = a_i. \quad (1.1.2)$$

b) Eulerovo pojmie kontinua vychádza z predstavy poľa fyzikálnej veličiny (napríklad rýchlosti alebo tlaku) závislej na polohe  $x_i$  a čase  $t$ . Pri tomto pojmie sa pri výpočte zrýchlenia  $a_i$  deriváciou rýchlosti  $v_i$  podľa času  $t$  vyskytne v rovnici konvektívny člen:

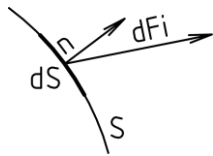
$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j. \quad (1.1.3)$$

## 1.2 Pohybová rovnica makroskopickej častice

Pri odvodení pohybovej rovnice makroskopickej častice budeme využívať Gauss-Ostrogradského vetu (ďalej G-O veta), pomocou ktorej sa môže objemový integrál previesť na plošný (a naopak):

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_j} dV = \int_S f n_j dS; \quad (1.2.1)$$

kde  $f$  je všeobecná funkcia a objem  $V$  je ohraničený plochou  $S$  s normálovým vektorom  $n_j$ .



Ďalej budeme vychádzať z Newtonovej definície povrchovej sily  $F_i^S$  pôsobiacej na krivú plochu:

$$dF_i^S = \sigma_{ij} n_j dS. \quad (1.2.2)$$

Tenzor napätia  $\sigma_{ij}$  môžeme rozložiť na vratnú časť  $\tau_{ij}$  a nevratnú časť  $\Pi_{ij}$ . Vratný tenzor napätia  $\tau_{ij}$  sa dá pre kvapaliny vyjadriť pomocou tlaku  $p$  vzťahom:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (1.2.3)$$

Nevratný tenzor napätia  $\Pi_{ij}$  pre kvapaliny závisí na tenzore rýchlosti deformácie  $e_{ij}$ :

$$\Pi_{ij} = 2\eta e_{ij} + b\delta_{ij} e_{kk}; \quad (1.2.4)$$

kde  $\eta$  reprezentuje dynamickú viskozitu a  $b$  je takzvaná druhá viskozita. Pre vodu majú hodnoty:

$$\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}; \quad b = 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}. \quad (1.2.5)$$

Pre tenzor rýchlosti deformácie  $e_{ij}$  platí:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow e_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad (1.2.6)$$

Z týchto rovníc je zrejmé, že druhá viskozita  $b$  súvisí iba so stlačiteľnosťou kvapaliny a určuje fyzikálny odpor častice kvapaliny voči zmene objemu. Dynamická (šmyková) viskozita  $\eta$  potom vyjadruje odpor častice voči zmene tvaru.

Uvažujme teda makroskopickú časticu s objemom  $V$  ohraničenú povrchom  $S$ , ktorý je orientovaný vektorom  $n_j$ . Na túto časticu s hmotnosťou  $m$  pôsobí sila zotrvačná, sila od vonkajšieho prostredia  $F_i^P$  a sila povrchová  $F_i^S$ . Pre rovnováhu týchto síl platí rovnica:

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_i^P + F_i^S; \quad (1.2.7)$$

kde v prípade, že vonkajšie prostredie pôsobí len gravitačnými silami, platí:

$$F_i^P = mg_i. \quad (1.2.8)$$

Povrchové sily sa podľa (1.2.2) dajú vyjadriť integrálom:

$$F_i^S = \int_S \sigma_{ij} n_j dS. \quad (1.2.9)$$

Element hmotnosti môžeme pomocou hustoty  $\rho$  rozložiť:

$$m = \rho V. \quad (1.2.10)$$

Po dosadení rovníc (1.2.8) až (1.2.10) do rovnice (1.2.7) získame s využitím G-O vety (1.2.1) tvar:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \rho g_i. \quad (1.2.11)$$

Ak považujeme objem  $V$  za dostatočne malý, môžeme pohybovú rovnicu zapísať v tvare:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho g_i. \quad (1.2.12)$$

Rovnica (1.2.12) platí v každom bode oboru  $\bar{V}$  (bez hraníc) a pre každý makroskopický systém (teda pre pružné telesá, kvapaliny aj plyny). Ďalšie úpravy závisia iba na dosadení príslušných vzťahov za  $\sigma_{ij}$  (podľa druhu prostredia) a dosadení správneho vzťahu za  $\frac{dv_i}{dt}$  (podľa toho, či uvažujeme Lagrangeovo (1.1.2) alebo Eulerovo pojmie kontinua (1.1.3)).

### 1.3 Zákon o zachovaní hmotnosti makroskopickej častice

Zákon o zachovaní hmotnosti vychádza z predpokladu, že hmotnosť  $m$  makroskopickej častice je nemenná:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (1.3.1)$$

Po dosadení rovnice (1.2.10) dostaneme:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} V + \rho \frac{dV}{dt} = 0. \quad (1.3.2)$$

Keďže platí:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{dV}{dtV} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}; \quad (1.3.3)$$

môžeme vydelením vzťahu (1.3.2) veličinou  $V$  získať výraz:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.3.4)$$

Ak vyjadríme deriváciu  $\rho$  v Eulerových súradniciach, získame:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0. \quad (1.3.5)$$

Budeme uvažovať, že tlak  $p$  závisí iba na hustote  $\rho$  a absolútnej teplote  $T$  (tzv. barotropná kvapalina). Túto závislosť môžeme potom vyjadriť v tvare Taylorovej rady a koeficienty určiť z experimentu. Ak sa však obmedzíme len na izotermické deje a lineárnu závislosť tlaku na hustote, môžeme písať:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = c^2 d\rho, \quad (1.3.6)$$

kde  $c$  nazývame rýchlosťou zvuku alebo rýchlosťou šírenia tlakovej vlny. Vzťah sa nazýva stavovou rovnicou pre kvapaliny a keď ho dosadíme do rovnice (1.3.4), získame vyjadrenie:

$$\frac{dp}{dt} + c^2 \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.3.7)$$

Touto rovnicou je určený zákon o zachovaní hmotnosti makroskopickej častice pre kvapalinu. Nazýva sa rovnicou kontinuity (ďalej RK).

#### 1.4 Pohybový stav kvapaliny

Pohybový stav kvapaliny určujeme spravidla v Eulerových súradniciach. Po dosadení vzťahov (1.2.3) až (1.2.6) za  $\sigma_{ij}$  v rovnici (1.2.12) dostaneme zápis:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - b \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i. \quad (1.4.1)$$

Sústava troch rovníc (1.4.1) sa nazýva Navier-Stokesovými rovnicami (ďalej N-S rovnice) a obsahuje štyri neznáme (zložky rýchlosti  $v_i$  a tlak  $p$ ). Sústavu je preto nutné doplniť o štvrtú rovnicu vyjadrujúcu zákon zachovania hmotnosti, čiže RK (1.3.7). Rovnice (1.4.1) a (1.3.7) tvoria uzavretý systém, ku ktorému stačí zadať počiatočné a okrajové podmienky. Okrajové podmienky treba určovať na základe ďalších predpokladov o kvapaline.

#### 1.5 Ideálna kvapalina

Za ideálnu kvapalinu považujeme kvapalinu, ktorej dynamická a zároveň druhá viskozita sa rovná nule:

$$\eta = 0 \text{ Pa} \cdot \text{s}; \quad b = 0 \text{ Pa} \cdot \text{s}. \quad (1.5.1)$$

Po zanedbaní viskozít v sústave N-S rovníc (1.4.1) získame sústavu Eulerových rovníc, pre ktoré platí:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i. \quad (1.5.2)$$



Tieto rovnice je taktiež potrebné doplniť o RK (1.3.7). Takto získame sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámých (zložky rýchlosti a tlak), ku ktorým je nutné zadať počiatočné a okrajové podmienky.

Počiatočné podmienky sa zadávajú v každom bode oboru  $V$  pre zvolený čas  $t_0$ , ako pre rýchlosť  $v_i(x_j, t_0)$ , tak aj pre tlak  $p(x_j, t_0)$ . Pre okrajové podmienky na rozhraní kvapaliny a kontaktných telies platí, že normálové zložky ich rýchlostí sa musia rovnať:

$$v_i n_i = u_i^* n_i. \quad (1.5.3)$$

U ideálnej kvapaliny nezadáme dotyčné zložky rýchlosti, keďže tu nepôsobí šmykové napätie kvôli nulovej viskozite. Okrajové podmienky na hraniciach kde kvapalina do oboru  $V$  vteká, alebo z neho vyteká zadávajúme v tvare:

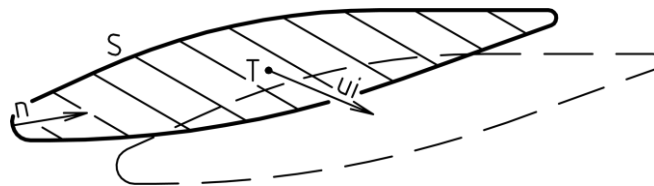
$$v_i n_i = v_{n(N)}. \quad (1.5.4)$$

## 1.6 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v ideálnej kvapaline - translačný pohyb

Predpokladajme, že sa tuhé telo nachádza v ideálnej, nestlačiteľnej kvapaline. Ďalej predpokladajme, že vykonáva malé kmity okolo rovnovážnej polohy translačným pohybom o rýchlosti  $u_i^*$  (viz. Obr. 1.1). Na povrch tohto telesa  $S$  pôsobí tlaková sila od kvapaliny ((1.2.9) a (1.2.3)), takže jeho pohybovú rovnicu píšeme v tvare:

$$m_{ij} u_j^* + b_{ij} u_j^* + k_{ij} u_j - \int_S p n_i dS = f_i, \quad (1.6.1)$$

kde  $f_i$  je vonkajšie zaťaženie telesa závislé na čase (tzv. budiaca sila).



Obr. 1.1 Translačný pohyb

Pre nestlačiteľnú kvapalinu sa v RK (1.3.4) zanedbá derivácia hustoty  $\rho$  a môžeme ju písať v tvare:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.6.2)$$

Pohybová rovnica ideálnej kvapaliny (1.5.2) za predpokladu, že zanedbáme vplyv gravitácie, bude mať tvar:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0_i. \quad (1.6.3)$$

Obmedzíme sa len na nevírivé prúdenie, ktoré je definované nulovým vektorom víru rýchlosti  $\Omega_i$  (častica kvapaliny vykonáva iba translačný pohyb). V takom prípade je nulový aj tenzor rýchlosti rotácie  $\omega_{ij}$  a platí:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0_{ij} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (1.6.4)$$

Ak vezmeme do úvahy rovnosť (1.6.4), získame po dosadení do Eulerovej rovnice (1.6.3) vyjadrenie:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0_i \Rightarrow \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v_j v_j \rho + p \right) = 0_i. \quad (1.6.5)$$

V prípade, že označíme:

$$\frac{1}{2} v_j v_j \rho + p = U; \quad (1.6.6)$$

dostaneme z výrazu (1.6.5) zjednodušený tvar Eulerovej rovnice:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0_i \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (1.6.7)$$

Po dosadení do RK pre nestlačiteľnú kvapalinu (1.6.2), ktorú môžeme zderivovať podľa času, zistíme, že  $U$  musí spĺňať Laplaceovu rovnicu:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_i} = 0 = \Delta U. \quad (1.6.8)$$

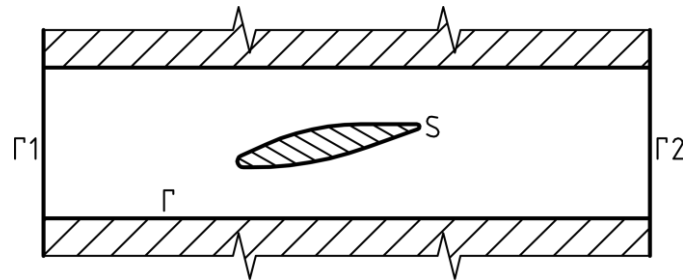
Ak by sa jednalo o úlohu, v ktorej by kvapalina okolo telesa neprúdila alebo prúdila veľmi malou rýchlosťou, mohol by sa v rovnici (1.6.3) zanedbať konvektívny člen  $\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$  a substitúcia  $U$  by mala len zložku tlaku  $p$ . Ďalší postup riešenia by to však neovplyvnilo.

Budeme predpokladať, že teleso je vystavené účinkom stacionárneho prúdenia kvapaliny. V čase  $t_0$  je teleso pod vplyvom stacionárneho prietoku v pokoji. Uvažujeme taktiež, že je teleso zavesené na pružinách a tlmičoch, ktoré mu umožňujú len translačný pohyb. Za uvedených predpokladov o nevírovom prúdení (1.6.4) môžeme tvrdiť, že platí rovnica (1.6.8). Túto rovnicu doplníme o počiatočné podmienky v čase  $t_0$ :

$$v_i(x_j, t_0) = v_{0i}; \quad p(x_j, t_0) = p_0; \quad u_i(x_j, t_0) = 0_i; \quad u_i^*(x_j, t_0) = 0_i; \quad (1.6.9)$$

a o okrajové podmienky podľa vzťahov (1.5.3) a (1.5.4) (značenie povrchov podľa Obr. 1.2):

$$\Gamma_1: v_i n_i = v_{n(1)}; \quad \Gamma_2: v_i n_i = v_{n(2)}; \quad \Gamma: v_i n_i = 0; \quad S: v_i n_i = u_i^* n_i. \quad (1.6.10)$$



Obr. 1.2 Označenie povrchov

Zderivovaním podmienok (1.6.10) podľa času a dosadením vyjadrenia z rovnice (1.6.7) obdržime upravené okrajové podmienky, pre ktoré platí:

$$\Gamma_1: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = 0; \quad \Gamma_2: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = 0; \quad \Gamma: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = 0; \quad S: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = -\rho u_i^{**} n_i. \quad (1.6.11)$$

Rovnice (1.6.8) a (1.6.11), spolu s pohybovou rovnicou telesa (1.6.1), predstavujú zviazaný systém, ktorého riešenie môže byť dosť zložitý. Riešenie teda zjednodušíme predpokladom, kedy funkciu  $U$  vyjadríme v závislosti na zrýchlení telesa  $u_j^{**}$ , pomocou čoho sa dá odstrániť člen zrýchlenia z okrajovej podmienky (1.6.11). Preto zavedieme substitúciu:

$$U(x_i, t) = -\rho h_j(x_i) u_j^{**}(t); \quad (1.6.12)$$

kde  $h_j$  je nová, neznáma funkcia. Na základe tohto vzťahu upravíme Laplaceovu rovnicu (1.6.8) a okrajové podmienky (1.6.11):

$$\frac{\partial^2 h_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0_j = \Delta h_j; \quad (1.6.13)$$

$$\Gamma_1: \frac{\partial h_j}{\partial x_i} n_i = 0_j; \quad \Gamma_2: \frac{\partial h_j}{\partial x_i} n_i = 0_j; \quad \Gamma: \frac{\partial h_j}{\partial x_i} n_i = 0_j; \quad S: \frac{\partial h_j}{\partial x_i} n_i = n_j. \quad (1.6.14)$$

Funkciu  $h_j$  je možné vypočítať z rovníc (1.6.13) a (1.6.14). Následne určíme zložky rýchlosti  $v_i$ . Využijeme k tomu upravenú Eulerovu rovnicu (1.6.7):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (h_j u_j^{**}); \quad (1.6.15)$$

z čoho po integrácii podľa času získame:

$$v_i(x_k, t) = \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_k) u_j^\bullet(t) + C_i(x_k). \quad (1.6.16)$$

Vzniknutú integračnú funkciu  $C_i$  určíme z počiatočných podmienok (1.6.9). Po ich dosadení do predošlej rovnice dostaneme rovnosť:

$$v_{0i} = C_i. \quad (1.6.17)$$

Tento vzťah je odvodený z podmienky pre čas  $t_0$ , ale platí pre ľubovoľný čas  $t$  a vo všeobecnosti môžeme po dosadení do (1.6.16) písať:

$$v_i = \frac{\partial h_j}{\partial x_i} u_j^\bullet + v_{0i}. \quad (1.6.18)$$

Keďže už poznáme zložky  $h_j$  a rýchlosti  $v_i$ , môžeme rozpísaním rovnice (1.6.6) stanoviť tlak  $p$ :

$$p = -\rho h_j u_j^\bullet - \frac{1}{2} \rho \left( v_{0i} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i} u_j^\bullet \right) \left( v_{0i} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i} u_j^\bullet \right). \quad (1.6.19)$$

Po roznásobení dostaneme:

$$p = -\rho h_j u_j^\bullet - \frac{1}{2} \rho v_{0i} v_{0i} - \rho \frac{\partial h_j}{\partial x_i} v_{0i} u_j^\bullet - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial h_j}{\partial x_i} u_j^\bullet \frac{\partial h_k}{\partial x_i} u_k^\bullet. \quad (1.6.20)$$

Keď dosadíme vzťah (1.6.20) do pohybovej rovnice telesa (1.6.1), získame po úpravách:

$$\begin{aligned} m_{ij} u_j^\bullet + \rho \int_S h_j n_i dS u_j^\bullet + b_{ij} u_j^\bullet + \rho \int_S \frac{\partial h_j}{\partial x_k} v_{0k} n_i dS u_j^\bullet + \frac{1}{2} \rho \int_S \frac{\partial h_j}{\partial x_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_l} n_i dS u_j^\bullet u_k^\bullet = \\ = f_i - \frac{1}{2} \rho \int_S v_{0j} v_{0j} n_i dS. \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

Z tejto rovnice sa dajú jednoducho vyjadriť prídavné účinky od kvapaliny spojené s translačným pohybom telesa. Označíme preto:

$$M_{ij} = \rho \int_S h_j n_i dS \quad - \text{tenzor prídavných hmotností}; \quad (1.6.22)$$

$$B_{ij} = \rho \int_S \frac{\partial h_j}{\partial x_k} v_{0k} n_i dS \quad - \text{tenzor prídavného tlmenia}; \quad (1.6.23)$$

$$B_{Nijk} = \frac{1}{2} \rho \int_S \frac{\partial h_j}{\partial x_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_l} n_i dS \quad - \text{tenzor nelineárneho prídavného tlmenia}; \quad (1.6.24)$$

$$F_{0i} = -\frac{1}{2} \rho \int_S v_{0j} v_{0j} n_i dS \quad - \text{statická vztlaková sila.} \quad (1.6.25)$$

Pohybovú rovnicu môžeme potom zapísať v skrátenej tvare:

$$(m_{ij} + M_{ij}) u_j'' + (b_{ij} + B_{ij}) u_j' + B_{Nijk} u_j' u_k' + k_{ij} u_j = f_i + F_{0i}. \quad (1.6.26)$$

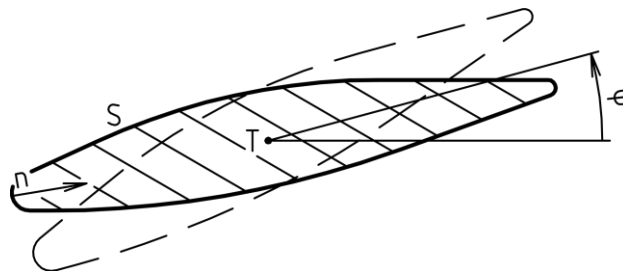
Veľkosti zložiek tenzorov prídavných účinkov závisia na tvare telesa a tvare oblasti, ktorá ho obklopuje. Vplyv má aj voľná hladina, ak sa teleso pohybuje v jej blízkosti. Z rovnice je zrejmé, že účinok kvapaliny sa prejaví znížením vlastných frekvencií kmitajúceho telesa kvôli zdanlivému zvýšeniu hmotnosti o  $M_{ij}$ , ktorá je závislá len na hustote kvapaliny, nie na rýchlosti jej prúdenia. Má teda rovnaké hodnoty aj v prípade, že kvapalina neprúdi. Prídavné tlmenie  $B_{ij}$  je závislé na hustote aj rýchlosti kvapaliny. V prípade, že má niektorý jeho člen zápornú hodnotu, dochádza k samobudenému kmitaniu. Pre odstránenie tohto javu je preto dôležité vhodne voliť tvar telesa v závislosti na očakávanej rýchlosti tečúceho média. Z rovnice nelineárneho tlmenia  $B_{Nijk}$  vyplýva, že zmenou rýchlosti toku nedosiahneme zmenu veľkosti jeho zložiek. Narozdiel od prídavnej hmotnosti sa však v prípade úplného zastavenia kvapaliny môže zanedbať. Statická vztlaková sila  $F_{0i}$  je závislá na rýchlosti a hustote kvapaliny a znižuje účinok budiacej sily  $f_i$ .

### 1.7 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v ideálnej kvapaline - rotačný pohyb

Uvažujme teleso, ktoré je umiestnené v ideálnej, nestlačiteľnej kvapaline a môže vykonávať len rotačný pohyb. V prípade, že sa obmedzíme na 2D úlohu, môžeme predpokladať, že existuje len jedna možná os rotácie. Z uhlovej rýchlosti telesa tak získame skalárnu veličinu, keďže platí:

$$\varphi_i' = (0, 0, \varphi_3' = \varphi'). \quad (1.7.1)$$

Súradnicový systém volíme tak, aby os rotácie telesa prechádzala jeho počiatkom a splynula s osou  $x_3$ .



Obr. 1.3 Rotačný pohyb

Pre rýchlosť na povrchu telesa môžeme potom v rovinných úlohách písať:

$$u_i' = \varepsilon_{ijk} \varphi_j' x_k = \varepsilon_{i3k} \varphi' x_k. \quad (1.7.2)$$

Pre povrchovú silu  $F_i^S$  platí rovnica (1.2.9), z ktorej pre ideálnu kvapalinu dostaneme zápis momentu na povrchu telesa  $dM_i^S$ :

$$dM_i^S = \varepsilon_{ijk} x_j dF_k^S = \varepsilon_{ijk} x_j p n_k dS; \quad (1.7.3)$$

čiže pre 2D úlohy:

$$M^S = M_3^S = \varepsilon_{3jk} \int_S x_j p n_k dS; \quad (1.7.4)$$

kde  $S$  je povrch telesa. S uvažovaním rotačného pohybu môžeme pre 2D úlohy písať pohybovú rovnicu v tvare:

$$J\varphi'' + b\varphi' + k\varphi - \varepsilon_{3jk} \int_S x_j p n_k dS = M_K. \quad (1.7.5)$$

$M_K$  je budiaci krútiaci moment závislý na čase.

Ďalej predpokladáme nevírivé prúdenie, takže platia rovnosti (1.6.4). Rovnaká ako pri translačnom pohybe ostáva aj upravená Eulerova rovnica (1.6.7), čím z RK pre nestlačiteľnú kvapalinu (1.6.2) opäť dostaneme Laplaceovu rovnicu pre funkciu  $U$  (1.6.8).

Pre počiatkové podmienky v čase  $t_0$  tiež predpokladáme, že teleso bolo do tohoto momentu v kľude:

$$v_i(x_j, t_0) = v_{0i}; \quad p(x_j, t_0) = p_0; \quad \varphi(x_j, t_0) = 0; \quad \varphi'(x_j, t_0) = 0. \quad (1.7.6)$$

Okrajové podmienky sú odvodené z rovnakého predpokladu, ako pri translačnom pohybe. Na povrchu  $S$  dosadíme za rýchlosť telesa  $u_i^*$  výraz (1.7.2) (označenie povrchov platí podľa Obr. 1.2):

$$\Gamma_1: v_i n_i = v_{n(1)}; \quad \Gamma_2: v_i n_i = v_{n(2)}; \quad \Gamma: v_i n_i = 0; \quad S: v_i n_i = \varepsilon_{i3k} x_k \varphi' n_i. \quad (1.7.7)$$

Oproti translačnému pohybu je teda rozdielna iba podmienka na ploche  $S$ . Ďalej preto môžeme postupovať rovnako, ako v predošlom prípade a po zderivovaní (1.7.7) podľa času  $t$  do podmienok dosadíme rovnicu (1.6.7). Deriváciou normálového vektoru  $n_i$  na okraji telesa

získame člen  $\frac{\partial n_i}{\partial t}$ , ktorý (narozdiel od translačného pohybu) nie je nulový. V prípade, že budeme uvažovať len malé torzné kmity však bude tento člen natoľko malý, že ho môžeme zanedbať. S týmto predpokladom získame po úpravách okrajové podmienky v tvare:

$$\Gamma_1: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = 0; \quad \Gamma_2: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = 0; \quad \Gamma: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = 0; \quad S: \frac{\partial U}{\partial x_i} n_i = -\rho \varepsilon_{i3k} x_k \varphi'' n_i. \quad (1.7.8)$$

Podobne ako v predošlom prípade budeme musieť v tejto úlohe z okrajových podmienok odstrániť veličinu  $\varphi^{**}$ . Zavedieme preto substitúciu:

$$U(x_i, t) = -\rho h(x_i) \varphi^{**}(t), \quad (1.7.9)$$

kde  $h$  je nová neznáma funkcia závislá na polohe. Po dosadení do Laplaceovej rovnice (1.6.8) a okrajových podmienok (1.7.8) získame po úpravách:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_i} = 0; \quad (1.7.10)$$

$$\Gamma_1: \frac{\partial h}{\partial x_i} n_i = 0; \quad \Gamma_2: \frac{\partial h}{\partial x_i} n_i = 0; \quad \Gamma: \frac{\partial h}{\partial x_i} n_i = 0; \quad S: \frac{\partial h}{\partial x_i} n_i = \varepsilon_{i3k} x_k n_i. \quad (1.7.11)$$

Z rovníc (1.7.10) a (1.7.11) sa dá jednoznačne určiť funkcia  $h$  a môžeme vypočítať prídavné účinky v pohybovej rovnici telesa. Po dosadení rovnice (1.7.9) do vzťahu (1.6.7) a následným zintegrovaním podľa času dostaneme rovnicu pre výpočet rýchlostí  $v_i$ :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{**} \Rightarrow v_i = \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{\bullet} + C_i; \quad (1.7.12)$$

kde  $C_i$  je integračná funkcia závislá na  $x_j$ . Určíme ju tak, že do predošlej rovnice dosadíme počiatkové podmienky (1.7.6), čím dostaneme:

$$v_{0i} = C_i. \quad (1.7.13)$$

Aj keď je odvodená z času  $t_0$ , platí pre akýkoľvek čas  $t$  a môžeme ju dosadiť do rovnice (1.7.12):

$$v_i = \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{\bullet} + v_{0i}. \quad (1.7.14)$$

Pomocou rovníc (1.6.6), (1.7.9) a (1.7.14) vyjadríme tlak  $p$ :

$$\begin{aligned} p &= -\rho h \varphi^{**} - \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{\bullet} + v_{0i} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{\bullet} + v_{0i} \right) = \\ &= -\rho h \varphi^{**} - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{\bullet 2} - \rho \frac{\partial h}{\partial x_i} \varphi^{\bullet} v_{0i} - \frac{1}{2} \rho v_{0i} v_{0i}. \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

Toto vyjadrenie tlaku použijeme v pohybovej rovnici (1.7.5) a obdržíme vzťah:

$$\begin{aligned} J \varphi^{**} + \varepsilon_{3jk} \rho \int_S x_j h n_k dS \varphi^{**} + b \varphi^{\bullet} + \varepsilon_{3jk} \rho \int_S x_j v_{0i} \frac{\partial h}{\partial x_i} n_k dS \varphi^{\bullet} + \\ + \varepsilon_{3jk} \frac{1}{2} \rho \int_S x_j \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} n_k dS \varphi^{\bullet 2} + k \varphi = M_K - \varepsilon_{3jk} \frac{1}{2} \rho \int_S v_{0i} v_{0i} x_j n_k dS. \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

Označme:

$$J_P = \varepsilon_{3jk} \rho \int_S x_j h n_k dS \quad - \text{prídavný polárny moment zotrvačnosti;} \quad (1.7.17)$$

$$B = \varepsilon_{3jk} \rho \int_S x_j v_{0i} \frac{\partial h}{\partial x_i} n_k dS \quad - \text{súčiniteľ prídavného torzného tlmenia;} \quad (1.7.18)$$

$$B_N = \varepsilon_{3jk} \frac{1}{2} \rho \int_S x_j \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} n_k dS \quad - \text{súč. nelineárneho príd. torzného tlmenia;} \quad (1.7.19)$$

$$M_{KS} = -\varepsilon_{3jk} \frac{1}{2} \rho \int_S v_{0i} v_{0i} x_j n_k dS \quad - \text{statický krútiaci moment.} \quad (1.7.20)$$

Pohybovú rovnicu (1.7.16) môžeme následne zapísať v skrátenej tvare:

$$(J + J_P) \varphi'' + (b + B) \varphi' + B_N \varphi'^2 + k\varphi = M_K + M_{KS}. \quad (1.7.21)$$

Výsledná pohybová rovnica je podobná ako v prípade translačného pohybu a plynú z nej aj podobné závery. Prídavný polárny moment zotrvačnosti  $J_P$  má na pohyb telesa rovnaký efekt ako prídavná hmotnosť  $M_{ij}$ . Zvyšuje jeho zotrvačné sily a znižuje vlastné frekvencie kmitania. Taktiež platí, že vplyvom rýchlosti prúdenia, ktorá speje k záporným hodnotám prídavného torzného tlmenia  $B$ , dochádza k samobudenému kmitaniu. Analogický význam ako pri translačnom pohybe majú aj nelineárne prídavné torzné tlmenie  $B_N$  a statický krútiaci moment  $M_{KS}$  (obdoba statickej vztlakovej sily  $F_{0i}$ ).

## 1.8 Reálna kvapalina

Ak uvažujeme reálnu kvapalinu, nemôžeme zanedbať vplyv viskozity (1.2.5) v sústave N-S rovníc (1.4.1). Musíme preto počítať aj s trecími zložkami povrchových síl  $F_i^S$  (1.2.9).

Počiatkové podmienky sa zadávajú rovnako ako pri ideálnej kvapaline pre zvolený čas  $t_0$ , ako pre rýchlosť  $v_i(x_j, t_0)$ , tak aj pre tlak  $p(x_j, t_0)$ . Pre okrajové podmienky na rozhraní kvapaliny a telesa platí, že rýchlosť kvapaliny sa musí rovnať rýchlosti steny (kvapalina nemôže kĺzať po povrchu):

$$v_i = u_i. \quad (1.8.1)$$

Okrajové podmienky na hraniciach, kde kvapalina do oboru  $V$  vteká, alebo z neho vyteká zadávame v tvare:

$$v_i = v_{(N)i}. \quad (1.8.2)$$



## 1.9 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v reálnej kvapaline - translačný pohyb

Teleso je opäť obtekané stacionárnym prietokom. Predpokladáme taktiež, že v čase  $t_0$  je teleso v pokoji, takže pre počiatkové podmienky opäť platí:

$$v_i(x_j, t_0) = v_{0i}; \quad p(x_j, t_0) = p_0; \quad u_i(x_j, t_0) = 0_i; \quad u_i^*(x_j, t_0) = 0_i. \quad (1.9.1)$$

Keďže uvažujeme reálnu kvapalinu, na povrchu telesa a stien bude kvapalina usadať, z čoho plynú okrajové podmienky podľa rovníc (1.8.1) a (1.8.2) (značenie - viz. Obr. 1.2):

$$\Gamma_1: v_i = v_{(1)i}; \quad \Gamma_2: v_i = v_{(2)i}; \quad \Gamma: v_i = 0_i; \quad S: v_i = u_i^*. \quad (1.9.2)$$

Pre ďalší postup výpočtu je potrebné rozdeliť rýchlosť kvapaliny  $v_i$  na stacionárnu zložku  $v_{0i}$  a nestacionárnu zložku  $w_i$ :

$$v_i(x_j, t) = v_{0i}(x_j) + w_i(x_j, t). \quad (1.9.3)$$

Rovnako treba na stacionárnu zložku  $p_0$  a nestacionárnu zložku  $\sigma$  rozdeliť aj tlak  $p$ :

$$p(x_j, t) = p_0(x_j) + \sigma(x_j, t). \quad (1.9.4)$$

Po rozložení rýchlosti a tlaku sa dajú N-S rovnice (1.4.1), RK (1.3.7) a okrajové podmienky (1.9.2) rozdeliť na rovnice pre stacionárne (členy obsahujúce len stacionárne zložky) a nestacionárne prúdenie (členy obsahujúce aspoň jednu z nestacionárnych zložiek):

a) Rovnice pre stacionárne prúdenie:

Navier-Stokesova rovnica

$$\rho \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} v_{0j} - \eta \left( \frac{\partial^2 v_{0i}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_{0j}}{\partial x_j \partial x_i} \right) - b \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} = 0_i \quad (1.9.5)$$

Rovnica kontinuity

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_i} v_{0i} + \rho c^2 \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.9.6)$$

Okrajové podmienky

$$\Gamma_1: v_{0i} = v_{(1)i}; \quad \Gamma_2: v_{0i} = v_{(2)i}; \quad \Gamma: v_{0i} = 0_i; \quad S: v_{0i} = 0_i \quad (1.9.7)$$

b) Rovnice pre nestacionárne prúdenie:

Navier-Stokesova rovnica

$$\rho \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} w_j + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_{0j} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j \right) - \eta \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - b \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0, \quad (1.9.8)$$

Rovnica kontinuity

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} w_i + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} v_{0i} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} w_i + \rho c^2 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.9.9)$$

Okrajové podmienky

$$\Gamma_1: w_i = 0_i \quad \Gamma_2: w_i = 0_i \quad \Gamma: w_i = 0_i \quad S: w_i = u_i^* \quad (1.9.10)$$

Na teleso pôsobia okrem tlakových síl aj účinky viskozity. Pre rovnicu celkovej sily pôsobiacej od kvapaliny (1.2.9) na povrch telesa  $S$  preto po rozpísaní platí:

$$F_i^S = \int_S (pn_i - \Pi_{ij} n_j) dS. \quad (1.9.11)$$

Keďže uvažujeme reálnu kvapalinu, musíme o trecie zložky tejto sily rozšíriť aj pohybovú rovnicu pre translačný pohyb (1.6.1). Dosadením rovníc (1.2.4) a (1.2.6) do vyjadrenia povrchovej sily (1.9.11) teda získame pohybovú rovnicu telesa v tvare:

$$m_{ij} u_j^{\bullet\bullet} + b_{ij} u_j^{\bullet} + k_{ij} u_j - \int_S \left[ pn_i - \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} n_i \right] dS = f_i. \quad (1.9.12)$$

Rovnicami (1.9.8) až (1.9.10) a (1.9.12) je jednoznačne určený nestacionárny pohyb tuhého telesa v reálnej kvapaline. V ďalšom riešení sa ale obmedzíme len na lineárny problém, takže v rovnicach zanedbáme nelineárne členy  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j$  a  $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} w_i$ . Dostaneme tak upravenú N-S

rovnica a RK:

$$\rho \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} w_j + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_{0j} \right) - \eta \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - b \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0_i; \quad (1.9.13)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} w_i + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} v_{0i} + \rho c^2 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.9.14)$$

Aj napriek zanedbaniu nelineárnych členov bude riešenie v tomto prípade podstatne zložitejšie než za predpokladu ideálnej kvapaliny. Podobne ako v predošlých prípadoch bude potrebné zaviesť substitúciu, pomocou ktorej sa vylúči člen  $u_i^*$  z okrajových podmienok. Predpokladajme teda, že existujú zovšeobecnené funkcie  $\alpha_{ij}(x_k, t)$  a  $\beta_i(x_j, t)$ , pre ktoré v čase  $t_0$  platia počiatočné podmienky:

$$\alpha_{ij}(x_k, t_0) = 0_{ij}; \quad \beta_i(x_j, t_0) = 0_i. \quad (1.9.15)$$

Za tohto predpokladu vyjadríme zložky rýchlosti a tlaku pre nestacionárne prúdenie vzt'ahmi:

$$w_i = \int_t \alpha_{ik}(t-\tau) u_k^*(\tau) d\tau; \quad \sigma = \int_t \beta_k(t-\tau) u_k^*(\tau) d\tau; \quad (1.9.16)$$

kde  $\tau$  je element času  $t$ . Pri dosadení do N-S rovníc a RK použijeme vetu o derivácii integrálu podľa parametru, kde pre dve všeobecné spojité funkcie  $f(x, y)$  a  $g(y)$ , definované vzt'ahom:

$$g(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx; \quad (1.9.17)$$

platí:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \varphi_2'(y) f(\varphi_2(y), y) - \varphi_1'(y) f(\varphi_1(y), y). \quad [1] \quad (1.9.18)$$

Pomocou tejto vety získame po úpravách nové tvary rovníc (1.9.13) a (1.9.14):

$$\rho \left( \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \alpha_{jk} + \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_j} v_{0j} \right) - \eta \left( \frac{\partial^2 \alpha_{ik}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \alpha_{jk}}{\partial x_j \partial x_i} \right) - b \frac{\partial^2 \alpha_{jk}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i} = 0_{ik}; \quad (1.9.19)$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \alpha_{ik} + \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i} v_{0i} + \rho c^2 \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_i} = 0_k. \quad (1.9.20)$$

Okrajové podmienky (1.9.10) taktiež vyjadríme pomocou funkcie  $\alpha_{ik}$ :

$$\Gamma_1: \alpha_{ik} = 0_{ik}; \quad \Gamma_2: \alpha_{ik} = 0_{ik}; \quad \Gamma: \alpha_{ik} = 0_{ik}; \quad S: \alpha_{ik} = \delta_{ik} \delta; \quad (1.9.21)$$

kde  $\delta$  vyjadruje Diracovu funkciu závislú na čase (tzv. jednotkový impulz). Pre túto funkciu a funkciu  $\alpha_{ik}$  platí vzájomný vzt'ah:

$$\int_t \delta(t-\tau) \alpha_{ik}(\tau) d\tau = \alpha_{ik}(t). \quad [2] \quad (1.9.22)$$

Rovnice (1.9.19) až (1.9.21) už nezávisia na veličine  $u_i^*$  a dajú sa z nich určiť funkcie  $\alpha_{ik}(x_j, t)$  a  $\beta_k(x_j, t)$ . Následne môžeme napísať pohybovú rovnicu telesa (1.9.12) v tvare:

$$\begin{aligned}
 m_{ij} \ddot{u}_j + b_{ij} \dot{u}_j - \int_t \int_S \beta_j n_i dS \dot{u}_j d\tau + \int_t \int_S \eta \left( \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial x_i} \right) n_k dS \dot{u}_j d\tau + \\
 + \int_t \int_S b \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial x_k} n_i dS \dot{u}_j d\tau + k_{ij} u_j = f_i.
 \end{aligned} \tag{1.9.23}$$

Z rovnice (1.9.23) vyplýva, že prídavné účinky od reálnej kvapaliny nie sú v čase  $t$  konštantné. Okrem času  $t$  sú závislé aj na frekvencii odozvy. Výpočet je teda oveľa náročnejší, než za predpokladu ideálnej kvapaliny.

### 1.10 Výpočet malých kmitov tuhého telesa v reálnej kvapaline - rotačný pohyb

Pri rotačnom pohybe budeme taktiež uvažovať, že je v čase  $t_0$  teleso v pokoji, obtekané stacionárnym prietokom. Počiatočné podmienky sa teda nemenia (1.7.6). Celkovú rýchlosť a tlak je treba rozdeliť na stacionárnu a nestacionárnu zložku rovnako ako pri translačnom pohybe (1.9.3) a (1.9.4). Pre stacionárne zložky platia rovnaké rovnice a rovnaké okrajové podmienky (1.9.5) až (1.9.7). Rovnaké vzťahy platia aj pre N-S rovnicu (1.9.13) a RK (1.9.14) nestacionárnych zložiek. Keďže teleso už nekoná translačný pohyb, nahradíme člen  $u_i$  podľa vzťahu (1.7.2), vďaka čomu bude okrajová podmienka na povrchu telesa pre nestacionárne zložky rýchlosti závislá na rýchlosti natáčania  $\varphi^*$ . Túto veličinu môžeme za predpokladu 2D úlohy považovať za skalár. Pre okrajové podmienky nestacionárnych zložiek následne podľa (1.9.10) platí (viz. Obr. 1.2):

$$\Gamma_1: w_i = 0_i; \quad \Gamma_2: w_i = 0_i; \quad \Gamma: w_i = 0_i; \quad S: w_i = \varepsilon_{i3k} x_k \varphi^*. \tag{1.10.1}$$

Povrchové sily od kvapaliny vyvolávajúce moment  $M_i^S$  (v rovinných úlohách taktiež nahraditeľný jednou hodnotou) pôsobiaci na teleso obsahujú okrem tlakovej aj trecie zložky. Po dosadení rozpísanej rovnice (1.2.9) do (1.7.4) získame vzťah:

$$M^S = M_3^S = \varepsilon_{3jk} \int_S x_j (pn_k - \Pi_{kl} n_l) dS. \tag{1.10.2}$$

Rozpísaním a dosadením obdržíme rozšírenú pohybovú rovnicu (1.7.5) z momentovej rovnováhy:

$$J\varphi^{\ddot{\phantom{*}}} + b\varphi^{\dot{\phantom{*}}} + k\varphi - \varepsilon_{3jk} \int_S x_j \left[ pn_k - \eta \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) n_l - b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} n_k \right] dS = M_K. \tag{1.10.3}$$

Rovnako ako pri translačnom pohybe sa obmedzíme len na lineárny problém a nelineárne členy zanedbáme. Ďalej zavedieme funkcie  $\alpha_i(x_j, t)$  a  $\beta(x_i, t)$ , pre ktoré v čase  $t_0$  platí:

$$\alpha_i(x_j, t_0) = 0_i; \quad \beta(x_i, t_0) = 0. \tag{1.10.4}$$

Pomocou nich vyjadríme nestacionárne zložky rýchlosti a tlaku:

$$w_i = \int_t \alpha_i(t-\tau) \varphi^\bullet(\tau) d\tau; \quad \sigma = \int_t \beta(t-\tau) \varphi^\bullet(\tau) d\tau. \quad (1.10.5)$$

Dosadením do N-S rovníc (1.9.13) a RK (1.9.14) získame s využitím vety o derivácii integrálu podľa parametru (1.9.17) a (1.9.18):

$$\rho \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \alpha_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} v_{0j} \right) - \eta \left( \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - b \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \beta}{\partial x_i} = 0; \quad (1.10.6)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \alpha_i + \frac{\partial \beta}{\partial x_i} v_{0i} + \rho c^2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.10.7)$$

Pre okrajové podmienky teraz platia vzťahy, ktoré už nie sú závislé na veličine  $\varphi^\bullet$ :

$$\Gamma_1: \alpha_i = 0; \quad \Gamma_2: \alpha_i = 0; \quad \Gamma: \alpha_i = 0; \quad S: \alpha_i = \varepsilon_{i3k} x_k \delta. \quad (1.10.8)$$

$\delta$  opäť vyjadruje Diracovu funkciu a platí pre ňu:

$$\int_t \delta(t-\tau) \alpha_i(\tau) d\tau = \alpha_i(t). \quad [2] \quad (1.10.9)$$

Po vypočítaní funkcií  $\alpha_i(x_j, t)$  a  $\beta(x_i, t)$  z rovníc (1.10.6) až (1.10.8) môžeme vyjadriť pohybovú rovnicu (1.10.3) v tvare:

$$J \varphi^{\bullet\bullet} + b \varphi^\bullet - \varepsilon_{3jk} \int_t \int_S x_j \beta n_k dS \varphi^\bullet d\tau + \varepsilon_{3jk} \int_t \int_S x_j \eta \left( \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \alpha_l}{\partial x_k} \right) n_l dS \varphi^\bullet d\tau + \varepsilon_{3jk} \int_t \int_S x_j b \frac{\partial \alpha_l}{\partial x_l} n_k dS \varphi^\bullet d\tau + k \varphi = M_K. \quad (1.10.10)$$

Podobne ako pri translačnom pohybe sú prídavné účinky závislé na čase  $t$  a frekvencii odozvy. To znamená, že ich hodnota nie je konštantná, a teda výsledkom ich výpočtu bude funkcia (narozdiel od prídavných účinkov ideálnej kvapaliny).

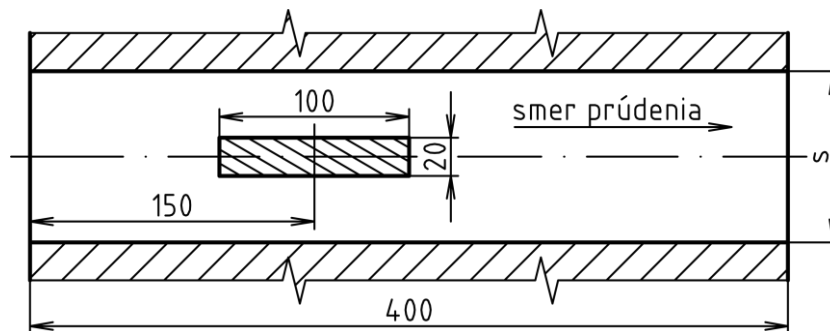
[3]

## 2 Zadanie úlohy

S ohľadom na predošlé odvodenia pohybových rovníc budeme uvažovať ideálnu nestlačiteľnú kvapalinu. Táto kvapalina prúdi tunelom, v ktorom sa nachádza konkrétne teleso zvoleného tvaru. Uvažujeme potenciálne rovinné prúdenie. Teleso môže pod jeho vplyvom kmitať translačným (dva stupne voľnosti) alebo rotačným pohybom (jeden stupeň voľnosti).

Pôvodný zámer vypočítať prídavné účinky konkrétnej lopatky pomocou programu *Ansys - Fluent* sa ukázal ako nesmierne náročný. V tomto *CFD* programe mali byť vypočítané hodnoty počiatkovej rýchlosti  $v_{0i}$  a funkcie  $h_j$  (z Eulerovej rovnice, RK a okrajových podmienok). Kvôli výpočtu funkcie  $h_j$  by však bolo potrebné k základným algoritmom doprogramovať nové funkcie. Z dôvodu vysokej náročnosti tohto kroku je celá úloha počítaná v programe *Matlab*.

Keďže je odvodenie numerických výpočtov pre ľubovoľný tvar siete pomerne komplikované, budeme sa zaoberať len úlohami rozdeliteľnými rovnobežnou sieťou (zloženou z priamok). Za týchto podmienok môžeme pracovať len s telesami nespojitých obvodov zložených z úsečiek zvierajúcich pravé uhly. Uvažujme teda teleso s obdĺžnikovým tvarom. Zvolené rozmery tunelu, telesa (a jeho umiestnenia) a zvolený smer prúdenia sú znázornené na *Obr. 2.1*.



*Obr. 2.1* Rozmerové zadanie úlohy (1:4)

Výška tunelu  $s$  má zadané tri hodnoty. Pomocou zmeny tejto hodnoty bude demonštrovaná závislosť prídavných účinkov telesa na vzdialenosti od steny tunelu. Výpočet prebiehal pre hodnoty  $s = 40, 90$  a  $140$  mm. Pri výpočte rotačného pohybu volíme os otáčania v ťažisku telesa.

Rýchlosť prúdenia  $v_{0i}$  je definovaná vstupnou rýchlosťou, ktorá má konštantnú hodnotu  $1$  m/s po celom priereze  $\Gamma_1$  (viz. *Obr. 1.2*). Potrebné hodnoty počiatkovej rýchlosti  $v_{0i}$  na hranici telesa a kvapaliny treba dopočítať.

Za zadaných predpokladov treba určiť hodnoty prídavných účinkov pre translačný ( $M_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $B_{Nijk}$  a  $F_{0i}$ ) aj rotačný pohyb ( $J_P$ ,  $B$ ,  $B_N$  a  $M_{KS}$ ).

### 3 Numerické metódy

Pri numerických náhradách odvodených rovníc budeme využívať rovnobežnú sieť. Treba vyjadriť závislosti jednotlivých uzlov buniek na susedných uzloch. Z takto nadefinovaných vzťahov sa následne dajú potrebné veličiny určiť výpočtom iteračného charakteru. Dôležité je odvodiť numerické náhrady derivácií podľa polohy a integrálov po krivke (dvojrozmerné zobrazenie povrchu). Nasledujúce vzťahy sú odvodené na základe konzultácií.

#### 3.1 Derivácie podľa polohy

Derivácia podľa polohy sa vyskytuje v mnohých rovniciach výpočtu. Má využitie hlavne v Laplaceových rovniciach a okrajových podmienkach. Potrebujeme preto odvodiť náhradu prvej aj druhej derivácie. Odvodenia sa budú vzťahovať k všeobecnej funkcii  $f$  závislej na polohe  $x_i$ . Uvažujme karteziánsky súradnicový systém, v ktorom platí, že vzájomná poloha dvoch susedných uzlov musí mať nenulovú len jednu zložku vektoru  $x_i$ . V prípade dvojrozmernej úlohy sa teda sieť môže skladať len z obdĺžnikových útvarov, ktorých hrany musia byť rovnobežné s osami súradnicového systému. Na základe týchto predpokladov môžeme vyjadriť hodnotu funkcie  $f$  susedných buniek v kladnom aj zápornom smere osi  $x_1$  pomocou Taylorovho rozvoja:

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{1}{1!} \Delta x_1 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \frac{1}{2!} \Delta x_1^2 + \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} \frac{1}{3!} \Delta x_1^3 + \dots ; \quad (3.1.1)$$

$$f(x_1 - \Delta x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{1}{1!} \Delta x_1 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \frac{1}{2!} \Delta x_1^2 - \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} \frac{1}{3!} \Delta x_1^3 + \dots . \quad (3.1.2)$$

V tomto rozvoji sa nachádzajú derivácie podľa polohy, ktoré sa dajú jednoducho vyňať.

Pre určenie prvej derivácie teda od seba odčítame predošlé rovnice a po úpravách získame numerický vzťah prvej derivácie podľa osi  $x_1$  (z rozvoja použijeme len prvé tri členy, ostatné môžeme kvôli rádovo nižším hodnotám zanedbať):

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1 - \Delta x_1, x_2)}{2\Delta x_1} . \quad (3.1.3)$$

Rovnakým spôsobom sa dá odvodiť aj derivácia v smere  $x_2$ :

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2 - \Delta x_2)}{2\Delta x_2} . \quad (3.1.4)$$

Táto náhrada derivácie sa nazýva centrálnou metódou, ktorá sa však nedá použiť v prípade, že sa nachádzame na okraji domény a nepoznáme rozvoj funkcie na obe strany. V takom prípade ju musíme nahradiť jednou z dvoch menej presných metód:

a) Dopredná metóda je definovaná vzťahom, ktorý využíva len nasledujúci uzol buniek:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}; \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2}. \quad (3.1.6)$$

b) Spätná metóda je podobná, ale využíva predošlý uzol buniek:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1 - \Delta x_1, x_2)}{\Delta x_1}; \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2 - \Delta x_2)}{\Delta x_2}. \quad (3.1.8)$$

Druhú deriváciu podľa osi  $x_1$  môžeme z rovníc (3.1.1) a (3.1.2) získať ich sčítaním. Rovnako sa dá odvodiť aj druhá derivácia podľa osi  $x_2$ . Po úpravách dostaneme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - 2f(x_1, x_2) + f(x_1 - \Delta x_1, x_2)}{\Delta x_1^2}; \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - 2f(x_1, x_2) + f(x_1, x_2 - \Delta x_2)}{\Delta x_2^2}. \quad (3.1.10)$$

### 3.2 Využitie derivácií

Prvá derivácia je v zadanej úlohe potrebná hlavne pri definovaní okrajových podmienok. Existujú dva typy okrajových podmienok:

a) Dirichletova okrajová podmienka sa môže použiť v prípade, že poznáme rozloženie hodnôt počítanej veličiny na povrchu média. V takom prípade sa hodnoty na povrchu počas iterácií nemenia, čo môže mať za následok napríklad rýchlejšiu konvergenciu. Ak je aspoň jeden bod v počítanej doméne zadaný Dirichletovou podmienkou, existuje v prípade správne zvolenej sústavy rovníc len jedno správne riešenie.

b) Neumanovou okrajovou podmienkou býva určená derivácia počítanej veličiny podľa polohy. V numerike je teda na povrchu určená len závislosť na susedných uzloch, nie konkrétna hodnota. V prípade, že sú okrajové podmienky zadané podľa Neumana, musíme uzly na okraji iterovať spolu s ostatnými uzlami v doméne. Numericky je počítaná pomocou



rovníc (3.1.5) až (3.1.8). Ak nepoznáme výslednú hodnotu v žiadnom uzle a všetky steny sú nedefinované touto okrajovou podmienkou, neexistuje jednoznačné riešenie. Riešenia sú v takom prípade závislé na inicializácii a môžu sa líšiť o konštantnú hodnotu  $k$ .

Druhá derivácia má využitie hlavne v Laplaceovej rovnici:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0. \quad (3.2.1)$$

Do Laplaceovej rovnice (3.2.1) dosadíme vzťahy (3.1.9) a (3.1.10). Po úprave získame:

$$\begin{aligned} \frac{2f(x_1, x_2)}{\Delta x_1^2} + \frac{2f(x_1, x_2)}{\Delta x_2^2} &= \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) + f(x_1 - \Delta x_1, x_2)}{\Delta x_1^2} + \\ &+ \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) + f(x_1, x_2 - \Delta x_2)}{\Delta x_2^2}; \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

z čoho sa dá jednoducho vyjadriť vzťah pre hodnotu všeobecnej funkcie  $f$  v závislosti na okolných hodnotách:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\Delta x_2^2}{2(\Delta x_2^2 + \Delta x_1^2)} (f(x_1 + \Delta x_1, x_2) + f(x_1 - \Delta x_1, x_2)) + \\ &+ \frac{\Delta x_1^2}{2(\Delta x_2^2 + \Delta x_1^2)} (f(x_1, x_2 + \Delta x_2) + f(x_1, x_2 - \Delta x_2)). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Toto vyjadrenie reprezentuje numerickú náhradu rovnice (3.2.1) a platí pre ľubovoľné dĺžky  $\Delta x_1$  a  $\Delta x_2$  v karteziánskom súradnicovom systéme. V prípade, že by sa dĺžky  $\Delta x_1$  a  $\Delta x_2$  v celej výpočtovej doméne rovnali:

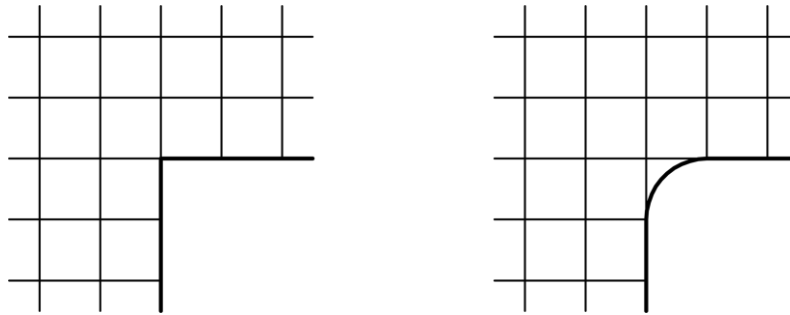
$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta; \quad (3.2.4)$$

čo by znamenalo, že bunky budú štvorce s konštantnou hranou (rovnomerná sieť), dajú sa vzťahy (3.1.3) až (3.1.8) a (3.2.3) zjednodušiť. Laplaceovu rovnicu (3.2.1) môžeme v takom prípade nahradiť aritmetickým priemerom okolných uzlov:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4} (f(x_1 + \Delta, x_2) + f(x_1 - \Delta, x_2) + f(x_1, x_2 + \Delta) + f(x_1, x_2 - \Delta)). \quad (3.2.5)$$

Z uvedených numerických náhrad vyplýva, že ak existuje veličina, pre ktorú platí Laplaceova rovnica (3.2.1), a poznáme pre ňu zároveň okrajové podmienky na celom povrchu kvapaliny, dajú sa jej hodnoty numericky vypočítať metódou sietí v celom objeme. V takom prípade sa do uzlov inicializujú ľubovoľné hodnoty, ktoré sú následne upravované iteráciami. Iterácie prebiehajú postupnou úpravou hodnôt v uzloch podľa rovnice (3.2.5) a následnou úpravou na okrajoch podľa zadaných okrajových podmienok. Za jednu iteráciu sa považuje úprava všetkých uzlov vrátane tých na okraji.

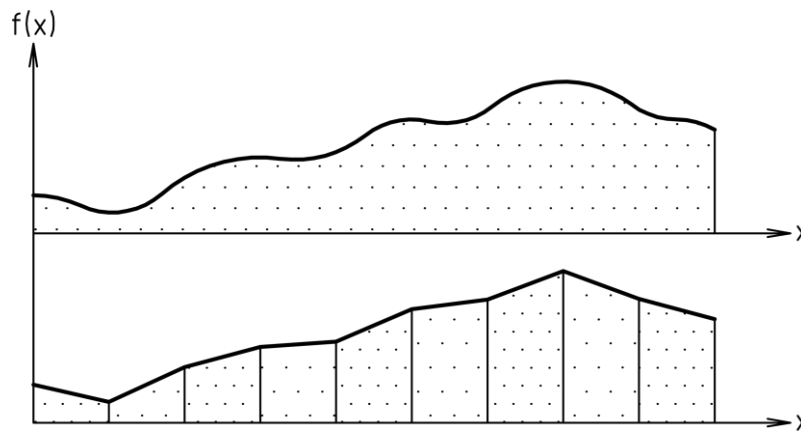
Problém konvergenzie by mohol nastať v rohoch telesa. Kvôli nespojitosti povrchu platia v týchto bodoch dve okrajové podmienky zároveň. Treba preto vždy počítať aritmetický priemer hodnôt, ktoré by sme získali jednotlivými okrajovými podmienkami. V prípade, že by úloha skutočne divergovala, mohli by byť hodnoty v rohoch počítané pomocou Laplaceovej rovnice. V takom prípade by bol roh obtekaného telesa nahradený rádiusom o hodnote dĺžky jednej bunky  $\Delta$  a dal by sa považovať za spojitý (Obr. 3.1). Pomocou tejto úpravy by nemalo dochádzať k divergencii výpočtu.



Obr. 3.1 Roh telesa a jeho náhrada rádiusom

### 3.3 Integrály po krivke

Povrch sa v dvojrozmerných úlohách premieta do krivky. Pre výpočet plošných integrálov bude preto stačiť odvodenie integrálu po krivke. Určitým integrálom ľubovoľnej 2D funkcie  $f(x)$  získame obsah plochy "pod" grafom tejto funkcie. Numerický výpočet určitého integrálu tak získame rozdelením funkcie na konštantné úseky, ktoré nahradíme úsečkami a následným sčítaním obsahov lichobežníkov "pod" nimi (Obr. 3.2).



Obr. 3.2 Numerická náhrada určitého integrálu

Keďže všetky plochy v zadanej úlohe sú vyjadrené úsečkami, môžeme pre určité integrály písať:

$$\int_{x_{(1)}}^{x_{(2)}} f(x_1, x_2) dx_1 = \sum_{x_1=x_{(1)}}^{x_{(2)}-\Delta x_1} \Delta x_1 \frac{f(x_1, x_2) + f(x_1 + \Delta x_1, x_2)}{2}; \quad (3.3.1)$$

$$\int_{x_2(1)}^{x_2(2)} f(x_1, x_2) dx_2 = \sum_{x_2=x_2(1)}^{x_2(2)-\Delta x_2} \Delta x_2 \frac{f(x_1, x_2) + f(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{2}. \quad (3.3.2)$$

Uvažujeme rovnomernú sieť a teda platí rovnosť (3.2.4). Predošlé vzťahy teda môžeme zovšeobecniť do tvaru:

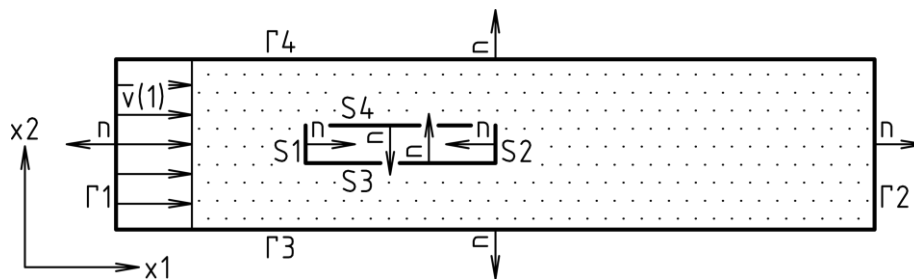
$$\int_{x_1(1)}^{x_1(2)} f(x_1, x_2) dx_1 = \sum_{x_1=x_1(1)}^{x_1(2)-\Delta} \Delta \frac{f(x_1, x_2) + f(x_1 + \Delta, x_2)}{2}; \quad (3.3.3)$$

$$\int_{x_2(1)}^{x_2(2)} f(x_1, x_2) dx_2 = \sum_{x_2=x_2(1)}^{x_2(2)-\Delta} \Delta \frac{f(x_1, x_2) + f(x_1, x_2 + \Delta)}{2}. \quad (3.3.4)$$

[4]

## 4 Výpočet prúdenia

Z odvodených vzorcov pre určenie prídavných účinkov na teleso (1.6.22) až (1.6.25) (prípadne (1.7.17) až (1.7.20) pre rotačný pohyb) vyplýva, že prvým krokom musí byť výpočet rozloženia počiatkovej rýchlosti  $v_{0i}$  a neznámej funkcie  $h_j$  (prípadne jednorozmernej  $h$ ) a jej derivácií po povrchu telesa. Kvôli ich výpočtu je potrebné rozdeliť kvapalinu v objeme na bunky. S ohľadom na numerické rovnice odvodené v kapitole 3 je zrejmé, že vytvorením rovnomernej siete dosiahneme najjednoduchšieho možného výpočtu. Vysieťujeme preto zadanú doménu s obtakaným telesom na štvorcové bunky s hranou  $\Delta$  o dĺžke 1 mm. Pre konkrétnejšie definície okrajových podmienok, ktoré sú v tomto prípade vždy vyjadrené na základe normálových vektorov rozložíme povrchy na jednotlivé steny (Obr. 4.1). Okrem toho je na obrázku znázornená vstupná rýchlosť  $v_{(1)i}$ .



Obr. 4.1 Rozdelenie stien (1:4)

Podľa Obr. 4.1 pre normálové vektory na jednotlivých stenách s ohľadom na zvolenú orientáciu osí  $x_1$  a  $x_2$  platí:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: n_1 = -1, n_2 = 0; \quad \Gamma_2: n_1 = 1, n_2 = 0; \quad \Gamma_3: n_1 = 0, n_2 = -1; \quad \Gamma_4: n_1 = 0, n_2 = 1; \\ S_1: n_1 = 1, n_2 = 0; \quad S_2: n_1 = -1, n_2 = 0; \quad S_3: n_1 = 0, n_2 = 1; \quad S_4: n_1 = 0, n_2 = -1. \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

Znázornenie osí  $x_1$  a  $x_2$  na Obr. 1.4 vyjadruje len ich smer a orientáciu. Výpočet translačného pohybu síce nie je závislý na polohe počiatku súradnicového systému, pri výpočte torzných kmitov však vychádzame z podmienky, že os  $x_3$  a os rotácie sú totožné. Počiatok sa teda nachádza v ťažisku telesa.

### 4.1 Výpočet počiatkovej rýchlosti

Rovnicou (1.6.4) bolo stanovené nevírivé prúdenie. Pre tento typ prúdenia existuje potenciál rýchlosti  $\phi$ , z ktorého sa dá deriváciou vypočítať rýchlosť:

$$v_{0i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (4.1.1)$$

Výpočet rýchlosti pomocou potenciálu  $\phi$  je jednoduchší vďaka tomu, že sa jedná o skalárnu funkciu. Stačí teda vypočítať hodnoty potenciálu  $\phi$  počiatkovej rýchlosti  $v_{0i}$ , vďaka čomu by bolo známe aj rozloženie samotnej rýchlosti. Keďže uvažujeme nestlačiteľnú kvapalinu, platí

RK v tvare (1.6.2). Keď do nej dosadíme vyjadrenie počiatkovej rýchlosti z potenciálu (4.1.1), získame Laplaceovu rovnicu:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = 0 = \Delta \phi. \quad (4.1.2)$$

Jej numerický zápis platí podľa (3.2.5) v tvare:

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{4} (\phi(x_1 + \Delta, x_2) + \phi(x_1 - \Delta, x_2) + \phi(x_1, x_2 + \Delta) + \phi(x_1, x_2 - \Delta)). \quad (4.1.3)$$

Pre počiatkovú rýchlosť platia rovnaké okrajové podmienky ako v rovnicach (1.6.10). Po vyjadrení pomocou potenciálu (4.1.1) teda získame:

$$\Gamma_1: \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = v_{n(1)}; \quad \Gamma_2: \phi = 0; \quad \Gamma: \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = 0; \quad S: \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = 0. \quad (4.1.4)$$

Na výstupe  $\Gamma_2$  bol potenciál nadefinovaný Dirichletovou podmienkou, lebo rozloženie rýchlosti nemusí byť konštantné ako na vstupe. S uvažovaním vzťahov (4.0.1) platí na jednotlivých stenách (za vstupnú rýchlosť  $v_{n(1)}$  bola dosadená hodnota  $-1$  m/s, lebo je orientovaná proti smeru normálového vektoru):

$$\Gamma_1: \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 1; \quad \Gamma_2: \phi = 0; \quad \Gamma_3: \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0; \quad \Gamma_4: \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0; \quad (4.1.5)$$

$$S_1: \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0; \quad S_2: \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0; \quad S_3: \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0; \quad S_4: \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0; \quad (4.1.6)$$

z čoho vyplýva numerický zápis:

$$\Gamma_1: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1 + \Delta, x_2) - \Delta; \quad \Gamma_2: \phi(x_1, x_2) = 0; \quad (4.1.7)$$

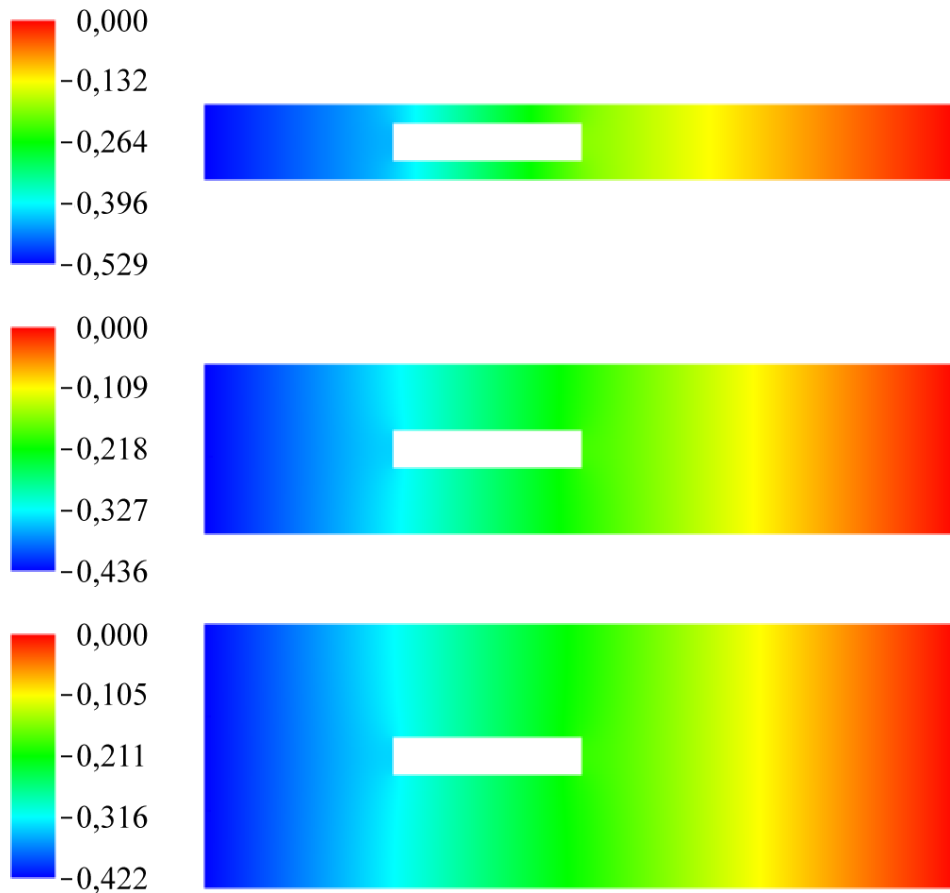
$$\Gamma_3: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2 + \Delta); \quad \Gamma_4: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2 - \Delta);$$

$$S_1: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1 - \Delta, x_2); \quad S_2: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1 + \Delta, x_2); \quad (4.1.8)$$

$$S_3: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2 - \Delta); \quad S_4: \phi(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2 + \Delta).$$

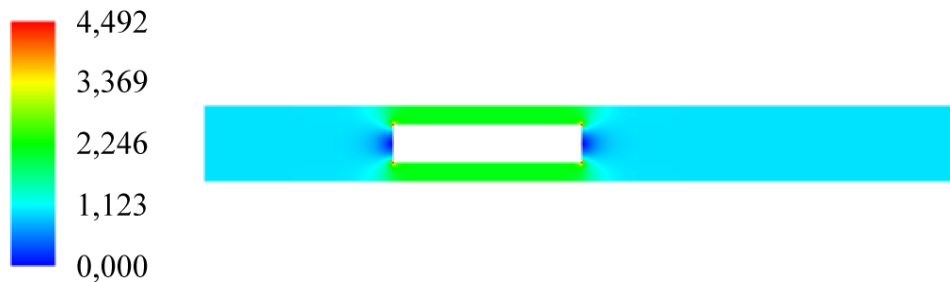
Pomocou rovníc (4.1.3), (4.1.7) a (4.1.8) bolo vypočítané rozloženie potenciálu  $\phi$  počiatkovej rýchlosti  $v_{0i}$  pre všetky tri zadané hodnoty výšky tunela  $s$ . Vďaka tomu, že bola na výstupe nadefinovaná Dirichletova okrajová podmienka, existuje len jedno správne riešenie. Rozloženie potenciálu bolo skonvergované na 2 500 000 iterácií. Výsledné hodnoty mali byť symetrické podľa osi  $x_1$  (vyplýva to z okrajových podmienok), a keďže úprava hodnôt  $\phi$  na uzloch počas iterácie prebieha odhora nadol, symetria bola dosiahnutá až pri konečnom výsledku. Vďaka splneniu podmienky symetrie na 9 desatinných miest bola odhadnutá aj presnosť výpočtu. To znamená, že nespojitosti v rohoch telesa nemali žiadny

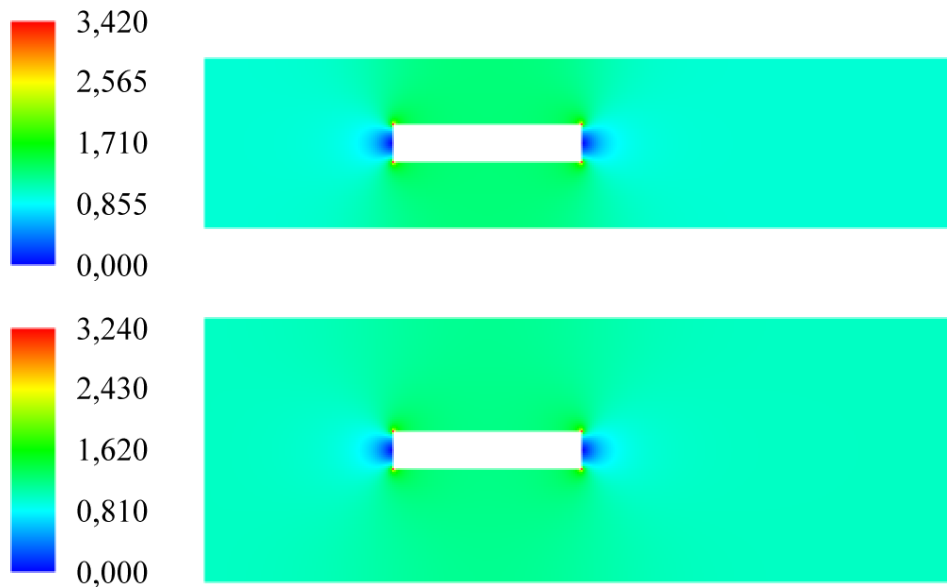
negatívny vplyv na konvergenciu, takže hodnoty v týchto miestach v podstate splňujú okrajové podmienky. Pre vizualizáciu vyplnených kontúr bol navrhnutý krátky program priradujúci hodnotám konkrétne farby (Obr. 4.2).



Obr. 4.2 Potenciál počiatocnej rýchlosti [ $m^2/s$ ] (1:4)

Následne boli vypočítané derivácie potenciálu  $\phi$  podľa polohy (t.j. počiatocné rýchlosti  $v_{0i}$ ). Kde to bolo možné, bola použitá centrálna derivačná metóda (3.1.3), (3.1.4). Z výsledku rýchlosti sa dala jednoducho určiť správnosť výpočtu, keďže rýchlostné pole splňuje okrajové podmienky na všetkých stenách. Okrem toho sú výsledky vektorov počiatocnej rýchlosti rozložené podľa predpokladov. Najnázornejšie sú kontúry veľkosti vektorov rýchlosti  $|v_{0i}|$  (Obr. 4.3).





Obr. 4.3 Velkosť vektoru počiatocnej rýchlosti [m/s] (1:4)

## 4.2 Výpočet funkcie $h$ a jej derivácií - translačný pohyb

Funkcia  $h_j$  má v translačnom pohybe dve zložky, ktoré boli počítané zvlášť. Laplaceova rovnica platí pre každú zložku rovnako (1.6.13) a podľa (3.2.5) teda platí:

$$h_j(x_1, x_2) = \frac{1}{4} (h_j(x_1 + \Delta, x_2) + h_j(x_1 - \Delta, x_2) + h_j(x_1, x_2 + \Delta) + h_j(x_1, x_2 - \Delta)). \quad (4.2.1)$$

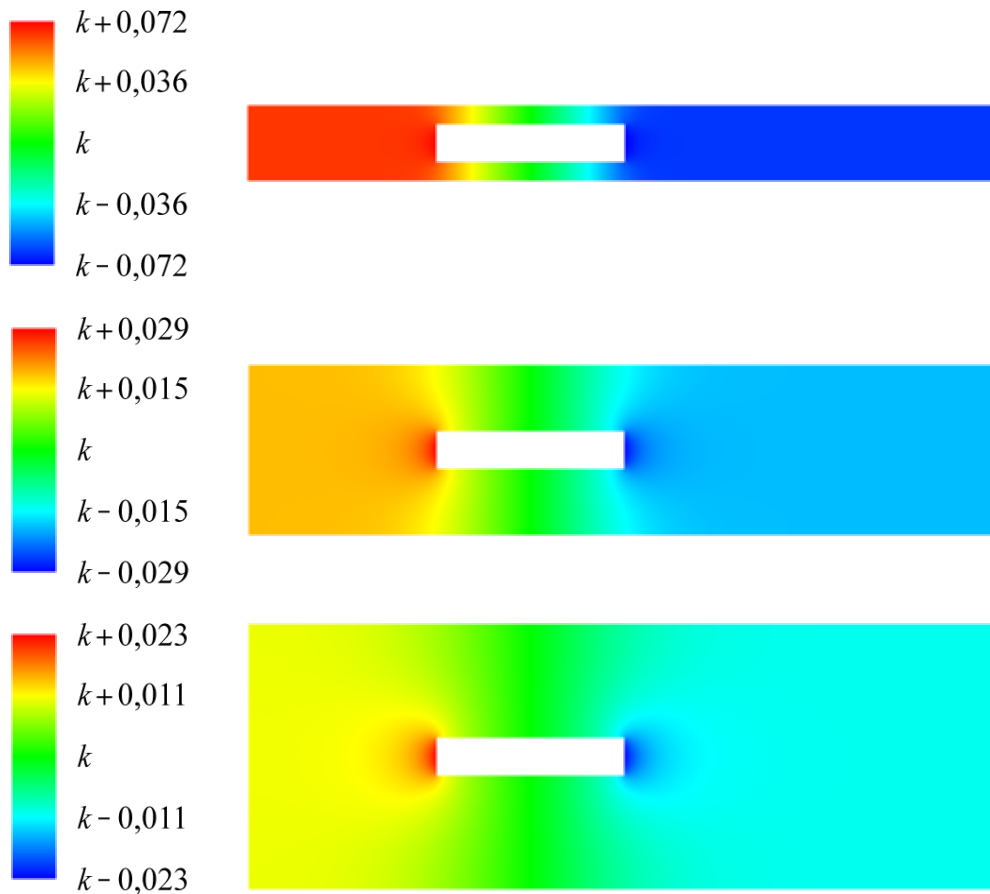
Podmienky na okraji výpočtovej domény sú taktiež zhodné pre obidve zložky a sú odvodené z rovníc (1.6.14) a (4.0.1):

$$\begin{aligned} \Gamma_1: h_j(x_1, x_2) &= h_j(x_1 + \Delta, x_2); & \Gamma_2: h_j(x_1, x_2) &= h_j(x_1 - \Delta, x_2); \\ \Gamma_3: h_j(x_1, x_2) &= h_j(x_1, x_2 + \Delta); & \Gamma_4: h_j(x_1, x_2) &= h_j(x_1, x_2 - \Delta). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Rozdiel jednotlivých zložiek sa prejaví kvôli normálovým vektorom určujúcim okrajovú podmienku na povrchu obtekaného telesa. Z (1.6.14) a (4.0.1) pre zložku  $h_1$  platí:

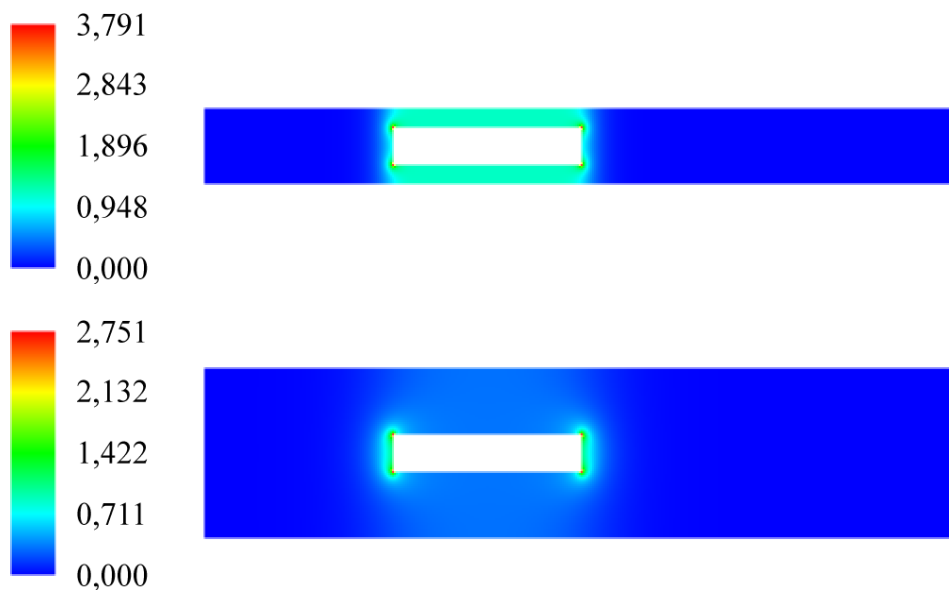
$$\begin{aligned} S_1: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1 - \Delta, x_2) + \Delta; & S_2: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1 + \Delta, x_2) - \Delta; \\ S_3: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1, x_2 - \Delta); & S_4: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1, x_2 + \Delta). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Zložka  $h_1$  bola taktiež vyiterovaná na 2 500 000 iterácií (pomocou rovníc (4.2.1), (4.2.2) a (4.2.3)), čo spelo k presnosti na deväť desatinných miest (zistené na základe symetrie podľa osi  $x_1$ ), takže nespojitosti v rohu opäť nemali vplyv na konvergenciu. Správnosť mohla byť jednoducho overená, keďže hodnoty na okraji domény aj telesa sa buď rovnajú, alebo sú zmenené o konštantnú hodnotu. Vzhľadom k tomu, že žiadna okrajová podmienka nie je zadaná podľa Dirichleta, môže byť k výsledku pripočítaná ľubovoľná konštanta  $k$ . Výsledky pre všetky tri výšky tunelu  $s$  sú znázornené na (Obr. 4.4).

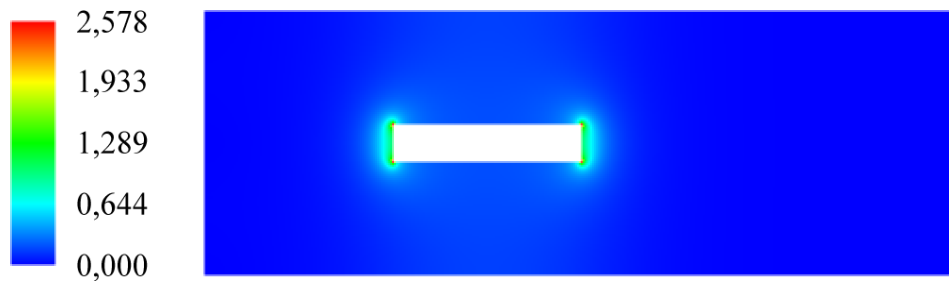


Obr. 4.4 Funkcia  $h_1$  (translacia) [m] (1:4)

Vo výpočtoch prídavných účinkov je potrebná okrem funkcie  $h_j$  aj jej derivácia podľa polohy. Z výsledkov sú opäť najnázornejšie kontúry veľkosti vektoru derivácie podľa  $x_i$  (Obr. 4.5). Hodnoty derivácií splňovali okrajové podmienky, čo sa dá považovať za ďalší dôkaz správneho výpočtu.





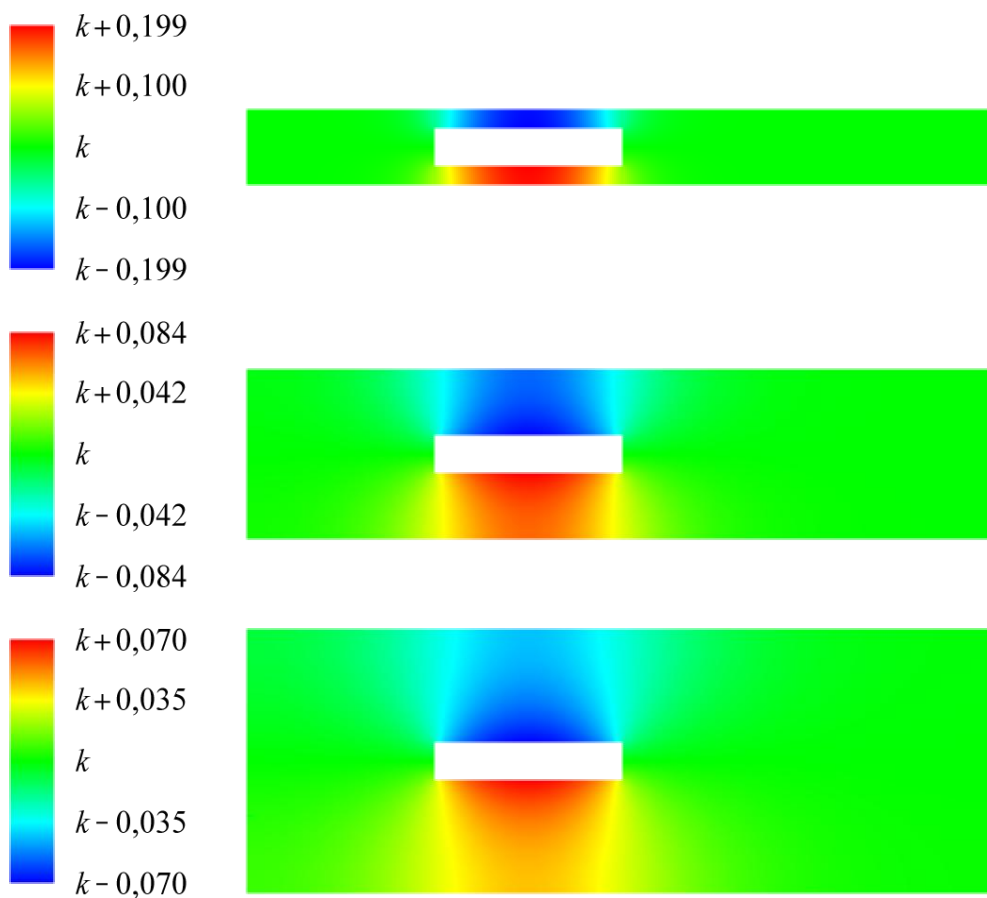


Obr. 4.5 Veľkosť vektoru derivácie  $h_1$  podľa  $x_i$  (translácia) [-] (1:4)

Pre zložku  $h_2$  taktiež platí na okraji telesa podmienka (1.6.14). Kvôli rozdielnosti normálových vektorov podľa (4.0.1) však dostaneme od (4.2.3) rozdielne rovnice:

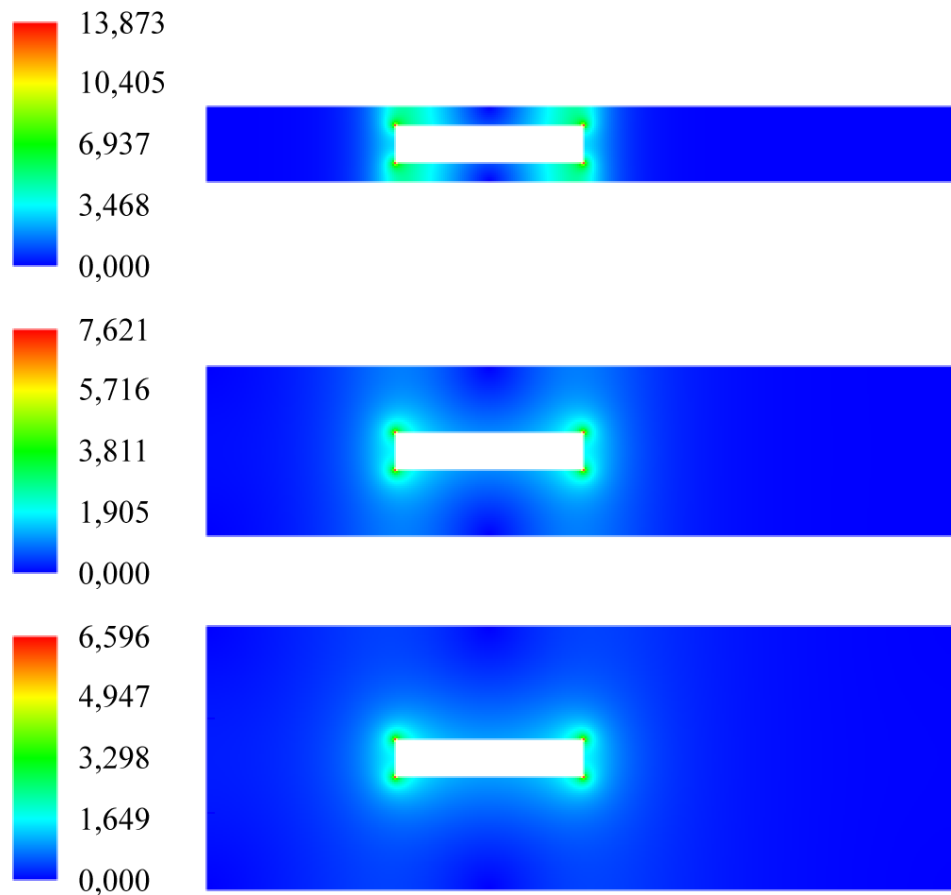
$$\begin{aligned}
 S_1: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1 - \Delta, x_2); & S_2: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1 + \Delta, x_2); \\
 S_3: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1, x_2 - \Delta) + \Delta; & S_4: h_1(x_1, x_2) &= h_1(x_1, x_2 + \Delta) - \Delta.
 \end{aligned}
 \tag{4.2.4}$$

Na základe tejto zmeny musela byť druhá zložka funkcie  $h_j$  počítaná zvlášť (z rovníc (4.2.1), (4.2.2) a (4.2.4)). Počet iterácií bol zanechaný a správnosť riešenia sa dala overiť podobne ako u prvej zložky. Z výsledku je však zrejmé, že matica má byť dokonale antisymetrická podľa osi  $x_1$ . Konvergencia prebiehala vo všetkých troch prípadoch bez problémov a výsledky sa opäť môžu líšiť o konštantu  $k$ . Výsledok je zobrazený na Obr. 4.6.



Obr. 4.6 Funkcia  $h_2$  (translácia) [m] (1:4)

Z nej bola takisto vypočítaná derivácia podľa  $x_i$ . Veľkosti týchto vektorov sú znázornené na *Obr. 4.7*. Aj v tomto prípade splňoval výsledok okrajové podmienky, takže výpočet sa dá považovať za správny.



*Obr. 4.7* Veľkosť vektoru derivácie  $h_2$  podľa  $x_i$  (translácia) [-] (1:4)

### 4.3 Výpočet funkcie $h$ a jej derivácií - rotačný pohyb

Rotačný pohyb dáva v dvojrozmernom priestore telesu k dispozícii len jeden stupeň voľnosti. Z toho plynie dôsledok, že funkcia  $h$  má len jednu zložku a jedná sa tak o skalárnu veličinu. Narozdiel od translačného pohybu sa teda nemusí iterovať viac zložiek zvlášť, z čoho vyplýva, že výpočet prídavných účinkov pri torznom kmitaní je v 2D menej náročný na čas. Laplaceova rovnica a podmienky na okraji domény sú rovnaké ako pri translačnom pohybe, čo vyplýva z rovníc (1.7.10) a (1.7.11):

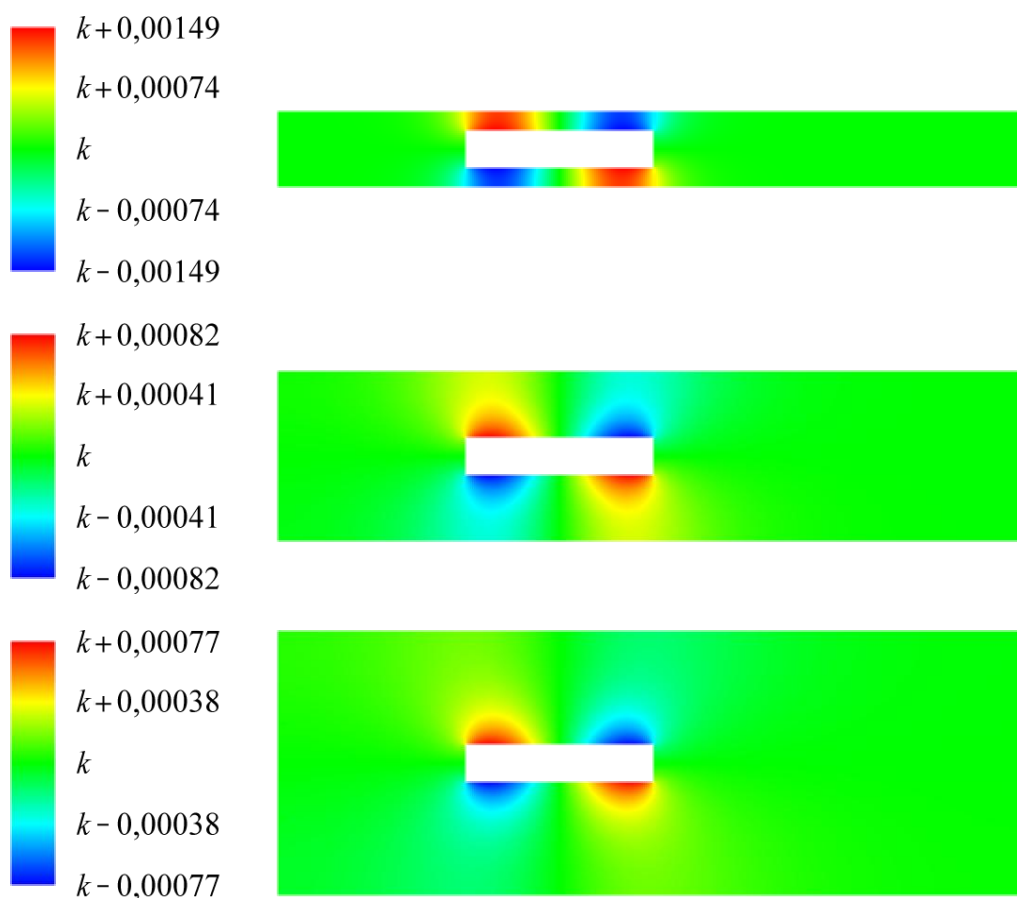
$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{4} (h(x_1 + \Delta x_1, x_2) + h(x_1 - \Delta x_1, x_2) + h(x_1, x_2 + \Delta x_2) + h(x_1, x_2 - \Delta x_2)); \quad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1: h(x_1, x_2) &= h(x_1 + \Delta, x_2); & \Gamma_2: h(x_1, x_2) &= h(x_1 - \Delta, x_2); \\ \Gamma_3: h(x_1, x_2) &= h(x_1, x_2 + \Delta); & \Gamma_4: h(x_1, x_2) &= h(x_1, x_2 - \Delta). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Na povrchu telesa platia po zväžení vyjadrení (4.0.1) v podmienke (1.7.11):

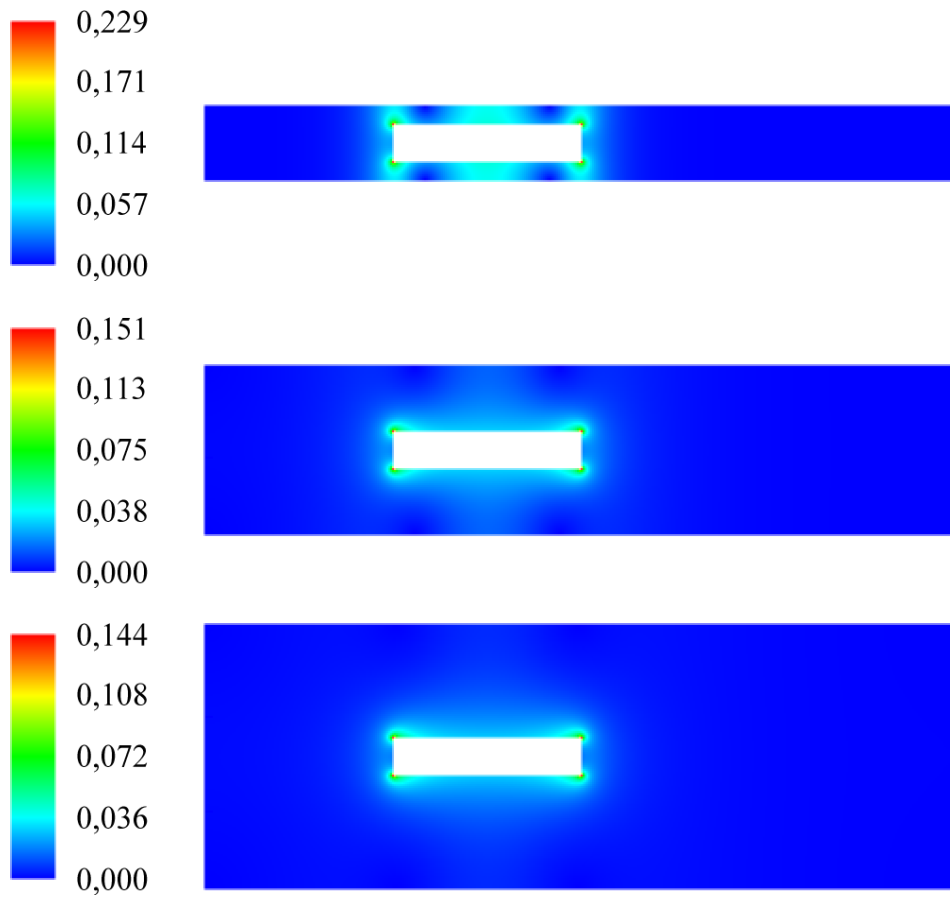
$$\begin{aligned}
 S_1: h(x_1, x_2) &= h(x_1 - \Delta, x_2) - x_2 \Delta; & S_2: h(x_1, x_2) &= h(x_1 + \Delta, x_2) + x_2 \Delta; \\
 S_3: h(x_1, x_2) &= h(x_1, x_2 - \Delta) + x_1 \Delta; & S_4: h(x_1, x_2) &= h(x_1, x_2 + \Delta) - x_1 \Delta.
 \end{aligned}
 \tag{4.3.3}$$

Na základe týchto predpokladov bol vypočítaný priebeh funkcie  $h$  opäť na 2 500 000 iterácií bez nejakých problémov pri konvergencii. Z výsledku je vidieť, že matica má tendenciu byť antisymetrická podľa osi  $x_1$ , vďaka čomu sa dala overiť správnosť výpočtu. Riešenia sa opäť môžu líšiť o konštantu  $k$ , ktorá je závislá na inicializácii. Kontrola na povrchu telesa bola náročnejšia ako pri translačnom pohybe, pretože funkcia  $h$  sa tu v závislosti na susedných uzloch nemení o konštantnú hodnotu (mení sa o násobok dĺžky ramena). Výsledky sú znázornené vyplnenými kontúrami na *Obr. 4.8*. Rozdiely maxima a minima sa v tomto prípade líšili o rádovo menšie hodnoty ako v predošlom prípade (preto je stupnica zaokrúhlená na viac desatinných miest).



*Obr. 4.8* Funkcia  $h$  (rotácia) [ $m^2$ ] (1:4)

Následne boli vypočítané derivácie funkcie  $h$  podľa polohy, na ktorých sa dala jednoduchšie overiť správnosť, keďže derivácia na okraji telesa sa mala rovnať dĺžke ramena  $x_k$ . Veľkosti týchto vektorov sú znázornené na *Obr. 4.9*.



Obr. 4.9 Velkosť vektoru derivácie  $h$  podľa  $x_i$  (rotácia) [m] (1:4)

## 5 Výpočet prídavných účinkov

Rovnice pre výpočet prídavných účinkov sú vyjadrené v kapitolách 1.6 ((1.6.22) až (1.6.25)) a 1.7 ((1.7.17) až (1.7.20)). Pre ich výpočet boli vytvorené samostatné programy, ktoré využívajú hodnoty vypočítané v predchádzajúcej kapitole. Ukázalo sa, že konkrétne rovnice na výpočet jednotlivých zložiek sú pomerne dlhé. Niektoré sú uvedené v skrátenej tvare.

### 5.1 Prídavná hmotnosť

Tensor prídavnej hmotnosti počítaný pomocou rovnice (1.6.22) má numerické vyjadrenie:

$$M_{11} = \rho \sum_{x_2=x_2^{s_3}}^{x_2^{s_4}-\Delta} \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( h_1(x_1^{s_1}, x_2) + h_1(x_1^{s_1}, x_2 + \Delta) \right) - \left( h_1(x_1^{s_2}, x_2) + h_1(x_1^{s_2}, x_2 + \Delta) \right) \right]; \quad (5.1.1)$$

$$M_{12} = \rho \sum_{x_2=x_2^{s_3}}^{x_2^{s_4}-\Delta} \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( h_2(x_1^{s_1}, x_2) + h_2(x_1^{s_1}, x_2 + \Delta) \right) - \left( h_2(x_1^{s_2}, x_2) + h_2(x_1^{s_2}, x_2 + \Delta) \right) \right]; \quad (5.1.2)$$

$$M_{21} = \rho \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( h_1(x_1, x_2^{s_3}) + h_1(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right) - \left( h_1(x_1, x_2^{s_4}) + h_1(x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right) \right]; \quad (5.1.3)$$

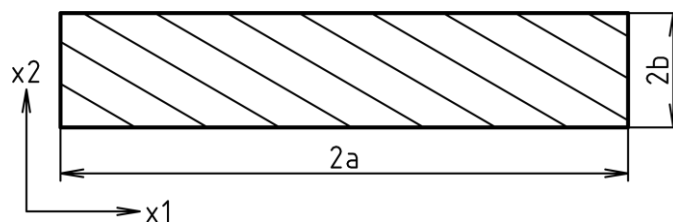
$$M_{22} = \rho \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( h_2(x_1, x_2^{s_3}) + h_2(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right) - \left( h_2(x_1, x_2^{s_4}) + h_2(x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right) \right]. \quad (5.1.4)$$

Podľa rovníc (5.1.1) až (5.1.4) boli vypočítané všetky zložky tenzorov  $M_{ij}$  pre  $s = 40, 90$  a 140 mm. Okrem toho sa dá vypočítať prídavná hmotnosť tuhého obdĺžnikového telesa v neobmedzenom priestore. V prípade, že pomer strán  $a/b = 5$  (viz. Obr. 5.1), platia pre zložky prídavných hmotností rovnice:

$$M_{11} = 1,98\rho\pi b^2; \quad (5.1.5)$$

$$M_{22} = 1,21\rho\pi a^2; \quad (5.1.6)$$

a zložky  $M_{12}$  a  $M_{21}$  sa rovnajú nule.



Obr. 5.1 Tuhé teleso v neobmedzenom priestore

Výsledky výpočtov (5.1.1) až (5.1.6) sú znázornené v *Tab. 5.1*. Hodnoty  $M_{12}$  a  $M_{21}$  sa blížili nule pre všetky výšky  $s$ , dajú sa preto považovať za zanedbateľné. Člen  $M_{11}$  vyjadruje prídavnú hmotnosť pre kmitanie v smere osi  $x_1$  a člen  $M_{22}$  v smere osi  $x_2$ . Vo výsledkoch je jasne vidieť zvyšovanie prídavnej hmotnosti s približujúcou sa stenou.

$s$ [mm]	40	90	140	-
$M_{11}$ [kg]	2,787	1,077	0,848	0,622
$M_{12}$ [kg]	$977 \cdot 10^{-12}$	$669 \cdot 10^{-12}$	$629 \cdot 10^{-12}$	0
$M_{21}$ [kg]	$835 \cdot 10^{-15}$	$5,66 \cdot 10^{-12}$	$2,14 \cdot 10^{-12}$	0
$M_{22}$ [kg]	30,505	13,916	11,629	9,503

*Tab. 5.1 Zložky tenzorov prídavnej hmotnosti*

## 5.2 Prídavné tlmenie

Z rovnice (1.6.23) získame pomocou (3.3.3) a (3.3.4) numerické vyjadrenia zložiek tenzoru prídavného tlmenia  $B_{ij}$ :

$$B_{11} = \rho \sum_{x_2=x_2^{S_3}}^{x_2^{S_4}-\Delta} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1^{S_1}, x_2) v_k(x_1^{S_1}, x_2) + \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) v_k(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) \right) - \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1^{S_2}, x_2) v_k(x_1^{S_2}, x_2) + \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) v_k(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) \right) \right]; \quad (5.2.1)$$

$$B_{12} = \rho \sum_{x_2=x_2^{S_3}}^{x_2^{S_4}-\Delta} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1^{S_1}, x_2) v_k(x_1^{S_1}, x_2) + \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) v_k(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) \right) - \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1^{S_2}, x_2) v_k(x_1^{S_2}, x_2) + \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) v_k(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) \right) \right]; \quad (5.2.2)$$

$$B_{21} = \rho \sum_{x_1=x_1^{S_1}}^{x_1^{S_2}-\Delta} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1, x_2^{S_3}) v_k(x_1, x_2^{S_3}) + \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1 + \Delta, x_2^{S_3}) v_k(x_1 + \Delta, x_2^{S_3}) \right) - \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1, x_2^{S_4}) v_k(x_1, x_2^{S_4}) + \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x_1 + \Delta, x_2^{S_4}) v_k(x_1 + \Delta, x_2^{S_4}) \right) \right]; \quad (5.2.3)$$

$$B_{22} = \rho \sum_{x_1=x_1^{S_1}}^{x_1^{S_2}-\Delta} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1, x_2^{S_3}) v_k(x_1, x_2^{S_3}) + \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1 + \Delta, x_2^{S_3}) v_k(x_1 + \Delta, x_2^{S_3}) \right) - \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1, x_2^{S_4}) v_k(x_1, x_2^{S_4}) + \frac{\partial h_2}{\partial x_k}(x_1 + \Delta, x_2^{S_4}) v_k(x_1 + \Delta, x_2^{S_4}) \right) \right]. \quad (5.2.4)$$

Výsledky počítané pre všetky tri prípady výšky  $s$  sú uvedené v *Tab. 5.2*. Výsledky majú v porovnaní s prídavnou hmotnosťou rádovo nižšie absolútne hodnoty a je preto kvôli numerike ťažšie určiť, kde sa jedná o veľmi malý výsledok a kde sa jedná o výsledok nulový. Hodnoty zložiek  $B_{12}$  a  $B_{21}$  však vždy mali absolútnu hodnotu pohybujúcu sa rádovo okolo  $10^{-8}$ , z čoho vznikol predpoklad, že sa môžu považovať za nulové.

$s$ [mm]	40	90	140
$B_{11}$ [kg/s]	$-2,66 \cdot 10^{-6}$	$-25,5 \cdot 10^{-6}$	$-1,80 \cdot 10^{-3}$
$B_{12}$ [kg/s]	$-13,8 \cdot 10^{-9}$	$-5,68 \cdot 10^{-9}$	$-5,37 \cdot 10^{-9}$
$B_{21}$ [kg/s]	$-2,74 \cdot 10^{-9}$	$-259 \cdot 10^{-12}$	$-209 \cdot 10^{-12}$
$B_{22}$ [kg/s]	$-14,6 \cdot 10^{-6}$	$-51,9 \cdot 10^{-3}$	$-271 \cdot 10^{-3}$

*Tab. 5.2 Zložky tenzorov prídavného tlmenia*

Hoci sa niektoré zložky blížia nule, všetky majú zápornú hodnotu. Z toho vyplýva, že za zadaných podmienok bude pri možnosti translačného pohybu vo všetkých troch prípadoch dochádzať k samobudenému kmitaniu telesa.

### 5.3 Nelineárne prídavné tlmenie

Numerické zápisy zložiek nelineárneho prídavného tlmenia  $B_{Nijk}$  získame vyjadrením rovnice (1.6.24) pomocou (3.3.3) a (3.3.4):

$$B_{N111} = \frac{1}{2} \rho \sum_{x_2=x_2^{S_3}}^{x_2^{S_4}-\Delta} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left\{ \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1^{S_1}, x_2) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1^{S_2}, x_2) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) \right)^2 \right] \right\}; \quad (5.3.1)$$

$$B_{N112} = B_{N121} = \frac{1}{2} \rho \sum_{x_2=x_2^{S_3}}^{x_2^{S_4}-\Delta} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_1}, x_2) + \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) \right) - \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_2}, x_2) + \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) \right) \right]; \quad (5.3.2)$$

$$B_{N122} = \frac{1}{2} \rho \sum_{x_2=x_2^{S_3}}^{x_2^{S_4}-\Delta} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left\{ \left[ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_1}, x_2) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_2}, x_2) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) \right)^2 \right] \right\}; \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned}
 B_{N211} = & \frac{1}{2} \rho \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left\{ \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1, x_2^{s_3}) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1, x_2^{s_4}) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l}(x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right)^2 \right] \right\};
 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

$$\begin{aligned}
 B_{N212} = B_{N221} = & \frac{1}{2} \rho \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1, x_2^{s_3}) + \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right) - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1, x_2^{s_4}) + \frac{\partial h_1}{\partial x_l} \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right) \right];
 \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

$$\begin{aligned}
 B_{N222} = & \frac{1}{2} \rho \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \sum_{l=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left\{ \left[ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1, x_2^{s_3}) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1, x_2^{s_4}) \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_l}(x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Z vypočítaných hodnôt sa za nulové a teda zanedbateľné dajú považovať zložky  $B_{N112}$ ,  $B_{N121}$ ,  $B_{N211}$  a  $B_{N222}$ . Výsledné hodnoty sú vyjadrené v *Tab. 5.3*. Vo výsledku členov  $B_{N212}$  a  $B_{N221}$  je vidieť, že ich hodnoty sa nemenia úmerne so zmenou výšky tunela  $s$ . Hodnoty ostatných členov ( $B_{N111}$  a  $B_{N122}$ ) s rastúcou výškou narastali.

$s$ [mm]	40	90	140
$B_{N111}$ [kg/m]	$3,54 \cdot 10^{-9}$	$11,8 \cdot 10^{-6}$	$859 \cdot 10^{-6}$
$B_{N112} = B_{N121}$ [kg/m]	$1,62 \cdot 10^{-9}$	$1,53 \cdot 10^{-9}$	$1,45 \cdot 10^{-9}$
$B_{N122}$ [kg/m]	$78,2 \cdot 10^{-6}$	$142 \cdot 10^{-3}$	$773 \cdot 10^{-3}$
$B_{N211}$ [kg/m]	$-392 \cdot 10^{-15}$	$-22,6 \cdot 10^{-12}$	$20,8 \cdot 10^{-12}$
$B_{N212} = B_{N221}$ [kg/m]	$9,45 \cdot 10^{-6}$	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$-170 \cdot 10^{-3}$
$B_{N222}$ [kg/m]	$-44,5 \cdot 10^{-9}$	$-19,4 \cdot 10^{-9}$	$-16,7 \cdot 10^{-9}$

*Tab. 5.3 Zložky tenzorov nelineárneho prídavného tlmenia*

## 5.4 Statická vztlaková sila

Pre silu  $F_{0i}$  (1.6.25) platia numerické vzťahy:



$$F_{01} = -\frac{1}{2}\rho \sum_{x_2=x_2^{s_3}}^{x_2^{s_4}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( v_{0j}^2(x_1^{s_1}, x_2) + v_{0j}^2(x_1^{s_1}, x_2 + \Delta) \right) - \left( v_{0j}^2(x_1^{s_2}, x_2) + v_{0j}^2(x_1^{s_2}, x_2 + \Delta) \right) \right]; \quad (5.4.1)$$

$$F_{02} = -\frac{1}{2}\rho \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( v_{0j}^2(x_1, x_2^{s_3}) + v_{0j}^2(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right) - \left( v_{0j}^2(x_1, x_2^{s_3}) + v_{0j}^2(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right) \right]. \quad (5.4.2)$$

Vo výsledkoch je vidieť, že zložka  $F_{02}$  sa blíži nulovej hodnote, čo spĺňa predpoklady. Sile v smere  $x_1$  sa absolútna hodnota zvyšovala s rastúcou hodnotou  $s$  (viz. Tab. 5.4).

$s$ [mm]	40	90	140
$F_{01}$ [N]	$-1,80 \cdot 10^{-6}$	$-13,8 \cdot 10^{-6}$	$-946 \cdot 10^{-6}$
$F_{02}$ [N]	$-5,18 \cdot 10^{-9}$	$-1,20 \cdot 10^{-9}$	$-1,14 \cdot 10^{-9}$

Tab. 5.4 Zložky statických vztlakových síl

## 5.5 Prídavný polárny moment zotrvačnosti

Prídavné účinky rotačného pohybu majú vždy len jednu zložku. Jedná sa teda o skaláry. Vyplýva to z faktu, že teleso má v 2D len jeden stupeň voľnosti. Numerický výpočet prídavného polárneho momentu zotrvačnosti  $J_p$  získame rozpísaním rovnice (1.7.17):

$$J_p = \rho \left\{ \sum_{x_2=x_2^{s_3}}^{x_2^{s_4}-\Delta} - \left[ x_2 h(x_1^{s_1}, x_2) + (x_2 + \Delta) h(x_1^{s_1}, x_2 + \Delta) \right] + \left[ x_2 h(x_1^{s_2}, x_2) + (x_2 + \Delta) h(x_1^{s_2}, x_2 + \Delta) \right] \right\} + \rho \left\{ \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \left[ x_1 h(x_1, x_2^{s_3}) + (x_1 + \Delta) h(x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right] - \left[ x_1 h(x_1, x_2^{s_4}) + (x_1 + \Delta) h(x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right] \right\}. \quad (5.5.1)$$

Výsledné hodnoty sú uvedené v Tab. 5.5, kde je jasne vidieť, že hodnota  $J_p$  sa s rozširujúcim tunelom znižuje podobne ako prídavná hmotnosť  $M_{ij}$ . Výsledky sa pohybujú v rádovo nižších hodnotách kvôli malým rozmerom telesa.

$s$ [mm]	40	90	140
$J_p$ [kg·m <sup>2</sup> ]	$6,08 \cdot 10^{-3}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$3,12 \cdot 10^{-3}$

Tab. 5.5 Prídavné polárne momenty zotrvačnosti

## 5.6 Prídavné torzné tlmenie

Z rovnice (1.7.18) dostaneme pre súčiniteľ prídavného torzného tlmenia  $B$  numerický výpočet:

$$\begin{aligned}
 B = & \rho \left\{ \sum_{x_2=x_2^{s_3}}^{x_2^{s_4}-\Delta} \sum_{i=1}^2 \left[ x_2 \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_1}, x_2) + (x_2 + \Delta) \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_1}, x_2 + \Delta) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ x_2 \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_2}, x_2) + (x_2 + \Delta) \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_2}, x_2 + \Delta) \right] \right\} + \\
 & + \rho \left\{ \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \sum_{i=1}^2 \left[ x_1 \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1, x_2^{s_3}) + (x_1 + \Delta) \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ x_1 \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1, x_2^{s_4}) + (x_1 + \Delta) \frac{v_{0i} \partial h}{\partial x_i} (x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Výsledky boli opäť určované pre tri výšky tunelu  $s$  a sú uvedené v *Tab. 5.6*.

$s$ [mm]	40	90	140
$B$ [kg · m <sup>2</sup> /s]	11,8 10 <sup>-9</sup>	32,3 10 <sup>-6</sup>	15,0 10 <sup>-3</sup>

*Tab. 5.6 Súčinitele prídavného torzného tlmenia*

Podobne ako v prípade translačného pohybu sa absolútna hodnota tlmenia zvyšovala s rozširujúcim sa tunelom. V tomto prípade boli však všetky hodnoty kladné. Pri možnosti rotačného pohybu okolo ťažiska by teda nedochádzalo k samobudenému kmitaniu, hoci sa jedná o tú istú úlohu. To znamená, že samobudené kmitanie nie je závislé len na tvare telesa a priestoru, ktorý ho obklopuje, ale aj na spôsobe uchytenia.

## 5.7 Nelineárne prídavné torzné tlmenie

Súčiniteľ nelineárneho prídavného torzného tlmenia  $B_N$  má podľa (1.7.19) vyjadrenie:

$$\begin{aligned}
 B_N = & \frac{1}{2} \rho \left\{ \sum_{x_2=x_2^{s_3}}^{x_2^{s_4}-\Delta} \sum_{i=1}^2 \left[ x_2 \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_1}, x_2) \right)^2 + (x_2 + \Delta) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_1}, x_2 + \Delta) \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ x_2 \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_2}, x_2) \right)^2 + (x_2 + \Delta) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1^{s_2}, x_2 + \Delta) \right)^2 \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \rho \left\{ \sum_{x_1=x_1^{s_1}}^{x_1^{s_2}-\Delta} \sum_{i=1}^2 \left[ x_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1, x_2^{s_3}) \right)^2 + (x_1 + \Delta) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1 + \Delta, x_2^{s_3}) \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ x_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1, x_2^{s_4}) \right)^2 + (x_1 + \Delta) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} (x_1 + \Delta, x_2^{s_4}) \right)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Výsledky  $B_N$  dosahujú absolútne hodnoty pohybujúce sa rádovo okolo hodnoty  $10^{-11}$ , čo sa s ohľadom na presnosť iterovaných veličín  $10^{-9}$  nedá považovať za relevantné. Všetky výsledky sú vyjadrené v *Tab. 5.7*, význam má však len výsledok pre  $s = 140$  mm.

$s$ [mm]	40	90	140
$B_N$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$-13,4 \cdot 10^{-12}$	$-8,07 \cdot 10^{-12}$	$-13,2 \cdot 10^{-6}$

*Tab. 5.7 Súčinitele nelineárneho prídavného torzného tlmenia*

## 5.8 Statický krútiaci moment

Statický krútiaci moment  $M_{KS}$ , ktorý znižuje vplyv budiaceho krútiaceho momentu  $M_K$  bol vypočítaný numerickým vyjadrením rovnice (1.7.20):

$$\begin{aligned}
 M_{KS} = & -\frac{1}{2} \rho \left\{ \sum_{x_2=x_2^{S_3}}^{x_2^{S_4}-\Delta} \sum_{i=1}^2 - \left[ x_2 v_{0i}^2(x_1^{S_1}, x_2) + (x_2 + \Delta) v_{0i}^2(x_1^{S_1}, x_2 + \Delta) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ x_2 v_{0i}^2(x_1^{S_2}, x_2) + (x_2 + \Delta) v_{0i}^2(x_1^{S_2}, x_2 + \Delta) \right] \right\} + \\
 & + \rho \left\{ \sum_{x_1=x_1^{S_1}}^{x_1^{S_2}-\Delta} \sum_{i=1}^2 \left[ x_1 v_{0i}^2(x_1, x_2^{S_3}) + (x_1 + \Delta) v_{0i}^2(x_1 + \Delta, x_2^{S_3}) \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ x_1 v_{0i}^2(x_1, x_2^{S_4}) + (x_1 + \Delta) v_{0i}^2(x_1 + \Delta, x_2^{S_4}) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.8.1}$$

Jeho výsledky dosahujú (podobne ako výsledky  $B_N$ ) veľmi malých hodnôt (viz. *Tab. 5.8*) a vzhľadom na presnosť iteračných výpočtov nemajú význam. S prihliadnutím k výsledkom statickej vztlakovej sily  $F_{0i}$  pri translačnom pohybe je zjavné, že  $M_{KS}$  musí mať rádovo nižšie hodnoty kvôli malým rozmerom telesa. Statický krútiaci moment sa teda v danej úlohe dá považovať za zanedbateľný.

$s$ [mm]	40	90	140
$M_{KS}$ [N · m]	$-65,7 \cdot 10^{-12}$	$-27,3 \cdot 10^{-12}$	$-28,9 \cdot 10^{-12}$

*Tab. 5.8 Statické krútiace momenty*

## 6 Návod k programom

Všetky výpočty prebiehali v programe *Matlab*, kde bolo vytvorených šesť výpočtových a jeden vykresľovací program. Každý z nich v sebe obsahuje popisky jednotlivých častí.

### 6.1 Iteračné programy

Boli vytvorené štyri iteračné programy pre výpočet potenciálu  $\phi$  a funkcií  $h_j$  (prípadne  $h$ ) a ich derivácií podľa polohy v úlohách tvarovo podobných zadaniu tejto práce. V každom programe je prvý odstavec venovaný zadaniu požadovaných rozmerov, vstupnej rýchlosti a počtu iterácií. Všetky rozmery sú zadávané od ľavého horného rohu domény. Zmena zadaných parametrov úlohy sa teda jednoducho dosiahne prepísaním týchto hodnôt v prvom odstavci. Programy po spustení automaticky rozdelia priestor rovnomernou sieťou s milimetrovými bunkami a iterujú funkciu, pre ktorej výpočet sú určené. Po dosiahnutí požadovaného počtu iterácií okamžite vypočítajú aj derivácie podľa polohy. Programy sú uvedené v prílohe a majú za účel vypočítať veličiny uvedené v *Tab. 6.1*.

Názov programu	Počítané veličiny
potencial_fi.m	$\phi, v_{0i}$
translacia_funkcia_h1.m	$h_1, \frac{\partial h_1}{\partial x_i}$
translacia_funkcia_h2.m	$h_2, \frac{\partial h_2}{\partial x_i}$
rotacia_funkcia_h.m	$h, \frac{\partial h}{\partial x_i}$

*Tab. 6.1 Počítané veličiny iteračných programov*

### 6.2 Prídavné programy

Ďalšie dva výpočtové programy sú určené pre výpočet prídavných účinkov:

a) *translacia\_pridavne\_ucinky.m* je program obsahujúci rovnice (5.1.1) až (5.1.4) a (5.2.1) až (5.4.2). Vypočíta prídavné účinky translačného pohybu pomocou výsledkov z programov *potencial\_fi.m*, *translacia\_funkcia\_h1.m* a *translacia\_funkcia\_h2.m*.

b) *rotacia\_pridavne\_ucinky.m* vypočíta prídavné účinky rotačného pohybu z rovníc (5.5.1) až (5.8.1). Používa pri tom hodnoty z programov *potencial\_fi.m* a *rotacia\_funkcia\_h.m*.

Okrem toho je priložený program *vykreslovac\_kontur.m*, ktorý vykresľuje vyplnené kontúry volenej veličiny. V prvom kroku nájde maximálnu a minimálnu hodnotu, podľa čoho vytvorí farebnú stupnicu. Následne každému uzlu domény priradí jeden farebný pixel podľa hodnoty volenej veličiny a vykreslí. Označenie požadovanej veličiny treba zadať namiesto podčiarkovníkov v piatich poznámkou zvýraznených riadkoch.

## Záver

Účelom diplomovej práce bola demonštrácia výpočtu prídavných účinkov na teleso vystavené rovinnému prúdeniu ideálnej kvapaliny. Teleso mohlo vykonávať buď translačný, alebo len rotačný pohyb. Realizácia výpočtov prídavných účinkov je závislá na rozložení hodnôt počiatkovej rýchlosti a umelo vytvorenej funkcie  $h_j$  po povrchu skúmaného telesa. Práve kvôli určeniu tejto funkcie nemohli byť hodnoty veličín na okraji počítané pomocou programu *Ansys - Fluent*, ako sa pôvodne zamýšľalo. Ich výpočet bol teda od základu nadefinovaný v programe *Matlab*.

Numerický iteračný výpočet požadovaných veličín na okraji telesa je založený na náhrade Laplaceovej rovnice a okrajových podmienok pomocou Taylorovho rozvoja. Odvodená iteračná metóda je obmedzená na pravouhlú sieť. Z toho vyplývajú tvarové obmedzenia telesa, ktorého prídavné účinky sa dajú určiť. V zadanej teoretickej úlohe sa metóda osvedčila rýchlou konvergenciou, čo má za následok možnosť rýchleho a presného výpočtu. Rovnice pre výpočet samotných prídavných účinkov obsahujú integrály iterovaných veličín po povrchu telesa. V 2D úlohách sa výpočty zjednodušia na integrály po krivke (v tomto prípade úsečkách), čo sa dá numericky nahradiť pomerne jednoduchým a presným spôsobom. Z vypočítaných hodnôt sa potvrdilo, že hodnoty prídavnej hmotnosti  $M_{ij}$  (prípadne  $J_p$ ) sa so zužujúcim sa okolným priestorom zvyšovali. Ďalej bolo pomocou vypočítaných hodnôt prídavného tlmenia zistené, že za rovnakých podmienok prúdenia a tvaru úlohy bude k samobudenému kmitaniu dochádzať len pri možnosti translačného pohybu. V prípade torzného kmitania závisia prídavné účinky na polohe osi otáčania. Ak sa však os nachádza v ťažisku zadaného telesa, pri zvolenej rýchlosti prúdenia k samobudenému kmitaniu dochádzať nebude.

Pre výpočet prídavných účinkov na teleso ľubovoľného tvaru by bolo potrebné hlavne zdokonalenie numerických náhrad Laplaceovej rovnice a okrajových podmienok. V prípade, že by bola navrhnutá metóda aplikovateľná na voliteľný tvar siete, bolo by možné výpočet s uvažovaním ideálnej kvapaliny využívať na približné odhady možnosti samobudeného kmitania v praxi.

## Zoznam použitých zdrojov

- [1] ANGOT, André. Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry. Preložil: TER-MANUELIANC, Antonín. 2. vyd. Praha: SNTL, 1971. 819 s.
- [2] REKTORYS, Karel, a spolupracovníci. Přehled užití matematiky I. 5. vyd. Praha: STNL, 1988. 607 s.
- [3] POCHYLÝ, František. prednášky Základy hydroelasticity. rukopisné poznámky a konzultácie
- [4] HALUZA, Miloslav. rukopisné poznámky a konzultácie

## Zoznam použitých symbolov a skratiek

$b$	- druhá viskozita [Pa · s]
$b$	- súčiniteľ torzného tlmenia [N · m · s] [kg · m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> ]
$b_{ij}$	- tenzor tlmenia [N · m <sup>-1</sup> · s] [kg · s <sup>-1</sup> ]
$B$	- súčiniteľ prídavného torzného tlmenia [N · m · s] [kg · m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> ]
$B_{ij}$	- tenzor prídavného tlmenia [N · m <sup>-1</sup> · s] [kg · s <sup>-1</sup> ]
$B_N$	- súčiniteľ nelineárneho prídavného torzného tlmenia [kg · m <sup>2</sup> ]
$B_{Nijk}$	- tenzor nelineárneho prídavného tlmenia [kg · m <sup>-1</sup> ]
$c$	- rýchlosť šírenia tlakovej vlny (zvuku) [m · s <sup>-1</sup> ]
$C_i$	- integračná funkcia [m · s <sup>-1</sup> ]
$e_{ij}$	- tenzor rýchlosti deformácie [s <sup>-1</sup> ]
$f$	- všeobecná funkcia
$f_i$	- budiaca sila [N]
$F_{0i}$	- statická vztlaková sila [N]
$F_i^P$	- sila od vonkajšieho prostredia [N]
$F_i^S$	- povrchová sila [N]
$g$	- všeobecná funkcia
$g_i$	- gravitačné zrýchlenie [m · s <sup>-2</sup> ]
$h$	- umelo vytvorená funkcia (pri ideálnej kvapaline, torzných kmitoch) [m <sup>2</sup> ]
$h_i$	- umelo vytvorená funkcia (pri ideálnej kvapaline, translačných kmitoch) [m]
$J$	- polárny moment zotrvačnosti [kg · m <sup>2</sup> ]
$J_P$	- prídavný polárny moment zotrvačnosti [kg · m <sup>2</sup> ]
$k$	- súčiniteľ torznej tuhosti [N · m]
$k_{ij}$	- tenzor tuhosti [N · m <sup>-1</sup> ]
$m$	- hmotnosť [kg]
$m_{ij}$	- tenzor hmotnosti [kg]
$M_{ij}$	- tenzor prídavnej hmotnosti [kg]
$M_K$	- budiaci krútiaci moment [N · m]
$M_{KS}$	- statický krútiaci moment [N · m]
$M^S$	- moment od povrchových síl [N · m]
$n_i$	- normálový vektor [-]
$N$	- poradové číslo [-]
$p$	- tlak [Pa]
$p_0$	- počiatkový tlak [Pa]
$s$	- výška tunelu [m]
$S$	- plocha, povrch telesa [m <sup>2</sup> ]
$S_N$	- povrch steny telesa [m <sup>2</sup> ]
$t$	- čas [s]

$t_0$	- počiatkový čas [s]
$u_i$	- posunutie [m]
$u_i^\bullet$	- rýchlosť (derivácia posunutia podľa času) [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$u_i^{\bullet\bullet}$	- zrýchlenie (druhá derivácia posunutia podľa času) [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ]
$U$	- substitučná funkcia [Pa]
$v_i$	- rýchlosť kvapaliny [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$v_{0i}$	- počiatková rýchlosť kvapaliny (stacionárna zložka rýchlosti) [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$v_{(N)i}$	- vstupná / výstupná rýchlosť [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$v_{n(N)}$	- normálová zložka vstupnej / výstupnej rýchlosti [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$V$	- objem [ $\text{m}^3$ ]
$\bar{V}$	- objem neuvažujúci povrch [ $\text{m}^3$ ]
$w_i$	- nestacionárna zložka rýchlosti [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$x$	- všeobecná premenná
$x_i$	- polohový vektor [m]
$x_{0i}$	- počiatková poloha [m]
$y$	- všeobecná premenná
$\alpha_i$	- umelo vytvorená funkcia (pri reálnej kvapaline, torzných kmitoch) [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$\alpha_{ij}$	- umelo vytvorená funkcia (pri reálnej kvapaline, translačných kmitoch) [ $\text{s}^{-1}$ ]
$\beta$	- umelo vytvorená funkcia (pri reálnej kvapaline, torzných kmitoch) [Pa]
$\beta_i$	- umelo vytvorená funkcia (pri reálnej kvapaline, translačných kmitoch) [ $\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$ ]
$\Gamma$	- povrch okolia [ $\text{m}^2$ ]
$\Gamma_N$	- povrch steny okolia [ $\text{m}^2$ ]
$\delta$	- Diracova funkcia (jednotkový impulz) [ $\text{s}^{-1}$ ]
$\delta_{ij}$	- Kroneckerove delta [-]
$\varepsilon_{ijk}$	- Levi-Civitov tenzor [-]
$\phi$	- potenciál počiatkovej rýchlosti [ $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$\varphi$	- uhol natočenia [rad]
$\varphi^\bullet$	- rýchlosť natočenia (derivácia uhlu natočenia podľa času) [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
$\varphi^{\bullet\bullet}$	- zrýchlenie natočenia (druhá derivácia uhlu natočenia podľa času) [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ ]
$\eta$	- dynamická (šmyková) viskozita [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]
$\Pi_{ij}$	- nevratná časť tenzoru napätia [Pa]
$\rho$	- hustota kvapaliny [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]
$\sigma$	- nestacionárna zložka tlaku [Pa]
$\sigma_{ij}$	- tenzor napätia [Pa]
$\tau$	- časový úsek [t]
$\tau_{ij}$	- vratná časť tenzoru napätia [Pa]
$\omega_{ij}$	- tenzor rýchlosti rotácie [ $\text{s}^{-1}$ ]
$\Omega_i$	- vektor víru rýchlosti [ $\text{s}^{-1}$ ]
$\Delta$	- dĺžka hrany štvorcovej bunky [m]





- CFD* - computational fluid dynamics (programy pre výpočet dynamiky kvapalín)
- G-O veta - Gauss-Ostrogradského veta
- N-S rovnica - Navier-Stokesova rovnica
- RK - rovnica kontinuity