

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Model kořist-dravec s impulzy



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Stanislav Škorňa**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2020

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Stanislav Škorňa

Název práce: Model kořist-dravec s impulzy

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2020

Abstrakt: Tato práce se zabývá zobecněným modelem kořist-dravec o impulzy, které představují opakovaný výlov části populace kořisti vždy ve chvíli, kdy je množství populace kořisti největší. Cílem bylo tento model zformulovat a následně zjistit a popsat, jak se chová. Zkoumáním tohoto modelu se ukázalo, že zde existuje periodické řešení, které je „stabilní“.

Klíčová slova: Dynamický systém, model kořist-dravec, model kořist-dravec s výlovem, nespojitý dynamický systém, impulzy.

Počet stran: 50

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Stanislav Škorňa

Title: A Predator-Prey model with impulses

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

The year of presentation: 2020

Abstract: This thesis deals with a generalized Predator-Prey model for impulses representing a recapture of a part of the prey population at any time when the prey population is at its largest. The aim was to formulate this model and then find out and describe how it behaves. Examination of this model has shown a periodic solution that is "stable" exists.

Key words: Dynamical system, Predator-Prey model, Predator-Prey model with recapture, discontinuous dynamical system, impulses.

Number of pages: 50

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne

.....

podpis

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 8 |
| 1 Dynamické systémy | 9 |
| 1.1 Spojité dynamické systémy | 10 |
| 1.2 Diskrétní dynamické systémy | 15 |
| 1.3 Nespojité dynamické systémy | 17 |
| 2 Lotka-Volterrův model | 20 |
| 2.1 Historie | 20 |
| 2.2 Předpoklady modelu | 21 |
| 2.3 Odvození rovnic | 22 |
| 2.4 Vyšetření fázového portréту | 24 |
| 3 Lotka-Volterrův model s výlovem | 32 |
| 3.1 Odvození modelu | 32 |
| 3.2 Řešení Lotka-Volterrova modelu s výlovem | 36 |
| 3.3 1-periodická orbita | 38 |
| Závěr | 49 |
| Literatura | 50 |

Seznam obrázků

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Bod $(0, 0)$ | 25 |
| 2.2 | Fázový portrét modelu pro $\alpha = 1; \beta = 0,03; \gamma = 1; \delta = 0,05$ | 28 |
| 2.3 | Směrové pole Lotka-Volterrova modelu | 30 |
| 2.4 | Jedna z orbit fázového portréту | 30 |
| 3.1 | Fázový portrét L-V modelu a množina Γ (červeně) | 33 |
| 3.2 | Graf funkce $g(x)$ pro $\frac{\gamma}{\delta} = 0,5$ | 37 |
| 3.3 | Graf funkce $g(x)$ pro $\frac{\gamma}{\delta} = 0,5$ se zvýrazněným případem, kdy se při výlovu dostaneme mimo množinu Γ a následně zpět do této množiny (červeně) | 38 |

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat panu doc. RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, za všechny poznámky, cenné rady a hlavně za trpělivost a čas, který mi věnoval jak při studiu dané problematiky, tak při psaní samotné práce.

Úvod

Model kořist-dravec je spojitý model populační dynamiky, která se zabývá změnou početnosti populace v čase. Je jedním z nejjednodušších modelů popisující vzájemnou interakci dvou druhů: dravců a jejich kořisti. Budeme se tedy zabývat vývojem počtu dravců a jejich kořisti.

Představme si situaci, kdy máme dvě populace, přičemž jedna z nich tvoří potravu té druhé. Ukázkový příklad je populace velkých dravých ryb a populace menších (ne jen dravých) ryb, konkrétně to mohou být štiky a okouni, kde štiky představují dravce a okouni kořist. Je zřejmé, že důsledkem lovu se množství všech ryb bude v čase neustále měnit.

Čím větší bude populace okounů, tím bude více potravy pro štiky. Vzájemnou interakcí dojde po určité době také k nárůstu populace dravců. Jaká je okamžitá změna růstu obou populací? Kdy a zda vůbec dochází k poklesu množství okounů popřípadě dravců? Může nastat situace, že štiky spotřebují veškerou svou potravu a začnou vymírat? Tuto situaci popisuje dynamický systém zvaný Lotka-Volterrův model neboli model kořist-dravec, který bych chtěl podrobněji popsat v první části mé bakalářské práce.

Co se ale stane s tímto ekosystémem, pokud uvažujeme situaci nějakého vnějšího zásahu? A to takového, kdy v určitém okamžiku dojde k prudkému poklesu kořisti. Tuto situaci si můžeme představit tak, že v určité chvíli rybáři vyloví nějakou část okounů. Povede neustálý výlov k vyhubení okounů a tím pádem i k zániku veškeré populace? Existuje nějaký rovnovážný stav, periodické řešení nebo začne docházet k nepředvídatelným výkyvům obou populací? Cílem mé práce bude zjistit, jak se tento model chová a do jakého stavu spěje.

Kapitola 1

Dynamické systémy

Matematické modely popisují v řeči matematiky systémy z reálného světa. Pomocí těchto modelů se snažíme daným systémům více porozumět, analyzovat jejich chování a zkoumat příčiny různých změn v jejich chování, což pak může vést i k tomu, že budeme schopni předpovídat, v jakém časovém horizontu k těmto změnám může nastat. S takovými modely se setkáváme ve všech vědních disciplínách. Ve fyzice například můžeme modelovat pohyb planet ve sluneční soustavě a nebo například v biologii můžeme modelovat vývoj jakékoli populace za nějakých blíže specifikovaných podmínek. Pokud zkoumáme vývoj či změny stavu nějakého systému v čase, hovoříme o dynamickém systému.

Dynamické systémy se člení na:

1. spojité,
2. diskrétní,
3. nespojité.

1.1. Spojité dynamické systémy

Spojité dynamické systémy jsou takové dynamické systémy, kde se čas mění spojitě.

Definice 1 Nechť G je otevřená podmnožina prostoru \mathbb{R}^n a vektorová funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ zobrazuje množinu $\mathbb{R} \times G$ do G . Dále nechť složky vektorové funkce φ jsou spojitě na množině $\mathbb{R} \times G$ a nechť má funkce φ následující vlastnosti:

1. $\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$ pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$;
2. $\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}^0))$;
3. pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje k zobrazení $\varphi(t, \cdot)$ inverzní zobrazení a je rovno $\varphi(-t, \cdot)$.

Potom zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ nazveme *tok*.

Pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ nazveme zobrazení

$$\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$$

dynamický systém v \mathbb{R}^n . Prostor \mathbb{R}^n nazveme *fázový prostor*.

Spojité dynamické systémy jsou často generovány soustavami autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu, které vyjadřují vztah mezi funkční hodnotou zkoumaných veličin a jejich změnou v čase t , která je vyjádřena derivací.

Jak spolu ale soustava diferenciálních rovnic a spojitý dynamický systém souvisí?

Nejprve uvažujme soustavu n autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases}$$

kteřou lze zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad (1.1)$$

kde $f(x) = (f_1, \dots, f_n)$ je vektorová funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dále musíme zavést podmínku, kterou jednotlivá řešení rovnice (1.1) specifikujeme, protože tato rovnice mívá obvykle nekonečně mnoho řešení.

Počáteční podmínku klademe ve tvaru

$$x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0,$$

kteřou lze zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (1.2)$$

kde bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *počáteční bod řešení*.

Rovnice (1.1) vytváří dynamický systém dle následující věty:

Věta 1 (Generování dynamického systému) *Nechť \mathbf{x}^0 je libovolný bod z otevřené množiny $G \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in C^1(G)$ a nechť $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je řešením úlohy (1.1) (1.2) na \mathbb{R} . Předpokládejme, že $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jako vektorová funkce $n+1$ proměnných t, x_1^0, \dots, x_n^0 zobrazuje množinu $\mathbb{R} \times G$ do G .*

Potom φ je tok. Dále pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ je zobrazení $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$ dynamický systém v \mathbb{R}^n .

Dále nás bude zajímat, jak popsat a charakterizovat dynamický systém, který rovnice (1.1) vytváří. K tomu slouží *fázový portrét*. K jeho definování nejdříve ale potřebujeme zavést pojem *orbity*.

Definice 2 *Orbita* řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (1.1), (1.2) je množina

$$\{\varphi(t, \mathbf{x}^0) : t \in I_{x^0}\},$$

kde $I_{x^0} \subset \mathbb{R}$ je maximální možný interval, na kterém má úloha (1.1), (1.2) jediné řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$.

Body orbity můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{kde } t \in I_{x^0}.$$

Pro pevně zvolené t pak dostáváme bod z prostoru \mathbb{R}^n . Platí, že orbita řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je křivka v prostoru \mathbb{R}^n s parametrickými rovnicemi

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), \quad t \in I_{x^0}.$$

Definice 3 *Fázový portrét rovnice* (1.1) je množina orbit všech řešení rovnice společně se šipkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ na orbitě pro rostoucí t . Prostor \mathbb{R}^n obsahující fázový portrét rovnice (1.1) nazveme *fázový prostor*.

Klíčovou roli při vyšetřování fázového portréту mají *kritické body*. Reprezentují *rovnovážné stavy*, což jsou stavy, které se v čase nemění.

Definice 4 *Kritickým bodem* rovnice (1.1) nazveme bod

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$$

splňující soustavu soustavu rovnic

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0. \end{cases}$$

Pokud bod $\bar{\mathbf{x}}$ není kritický, nazýváme ho *regulární bod*.

Velmi důležitou vlastností kritického bodu je jeho *stabilita*, které se věnuje následující text.

Definice 5 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ rovnice (1.1) nazveme *stabilní*, jestliže platí

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon$$

pro každé $t \geq 0$.

Jedná se tedy o takový bod, kde ke každému $\epsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ takové, že pro počáteční bod $\mathbf{x}^0 \in G \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{\mathbf{x}})$ platí, že $\varphi(t, \mathbf{x}^0) \in \mathcal{U}_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$ pro každé $t \geq 0$.

Definice 6 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ rovnice (1.1) nazveme *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc platí

$$\exists r > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$$

Takový bod musí tedy splňovat podmínku stability a navíc musí existovat okolí bodu $\bar{\mathbf{x}}$ takové, že pro každé $\mathbf{x}^0 \in G \cap \mathcal{U}_r(\bar{\mathbf{x}})$ platí, že $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ pro $t \rightarrow \infty$ konverguje k $\bar{\mathbf{x}}$.

K rozhodnutí, zda je kritický bod asymptoticky stabilní, slouží následující věta. Nejprve je ale potřeba zdefinovat *hyperbolický kritický bod*.

Definice 7 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ se nazývá *hyperbolický kritický bod*, má-li Jacobiho matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}$$

obě vlastní čísla s nenulovými reálnými složkami.

Věta 2 (Kritérium asymptotické stability) *Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je hyperbolický kritický bod rovnice (1.1). Jestliže vlastní čísla Jacobiho matice mají záporné reálné části, pak je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ asymptoticky stabilní.*

Definice 8 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ rovnice (1.1) nazveme *nestabilní*, pokud není stabilní. To znamená, že platí

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \wedge \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| \geq \epsilon$$

alespoň pro jedno $t > 0$.

Podmínka stability je v určitém časovém okamžiku porušena. To znamená, že existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ lze najít počáteční bod $\mathbf{x}^0 \in G \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{\mathbf{x}})$, pro který v určitém časovém okamžiku $t_1 > 0$ platí, že $\varphi(t_1, \mathbf{x}^0) \notin \mathcal{U}_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$.

Věta 3 (Kritérium nestability) *Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je hyperbolický kritický bod rovnice (1.1). Jestliže alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice má kladnou reálnou část, pak je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ nestabilní.*

Existuje několik typů kritických bodů, pro nás nejdůležitější budou kritické body typu *sedlo* a *střed*.

Definice 9 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ rovnice (1.1) se nazývá *sedlo*, pokud existují body $\mathbf{x}^0 \neq \bar{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{x}^1 \neq \bar{\mathbf{x}}$ takové, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}} \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}^1) = \bar{\mathbf{x}}.$$

Takový bod se vyznačuje tím, že existují orbity vedoucí jak k bodu $\bar{\mathbf{x}}$, tak i od něj.

Definice 10 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ nazveme *střed*, jestliže existuje okolí \mathcal{U} bodu $\bar{\mathbf{x}}$, které obsahuje pouze periodické orbity obíhající tento kritický bod.

[1][7]

1.2. Diskrétní dynamické systémy

Jedná se o takové dynamické systémy, kde se čas mění ve skocích, ať už pravidelných nebo nepravidelných.

U spojitých dynamických systémů se čas měnil spojitě a tyto systémy byly generovány soustavou diferenciálních rovnic. Diskrétní dynamické systémy popisují, jak se mění stav systému v jednotlivých krocích a tyto kroky jsou charakterizovány diferenčními rovnicemi. Diskrétní dynamické systémy jsou tedy generovány soustavou diferenčních rovnic.

V této práci se setkáme pouze se skalárními diferenčními rovnicemi. Ukážeme si tedy pouze skalární případ.

Uvažujme pouze jednu diferenční rovnici

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.3}$$

kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pokud se na rovnici podíváme „z druhého konce“ a začneme v počátečním bodě x_0 , můžeme generovat posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

přičemž zavedeme označení

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

Jednotlivé kroky nazýváme *iterace*. Například $f(x_0)$ je první iterace, $f(f(x_0))$ je druhá iterace atd.

Tato diferenční rovnice

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f[f^n(x_0)] = f(x_n)$$

potom generuje skalární diskrétní dynamický systém.

Při vyšetřování fázového portréту u spojitých dynamických systémů jsou důležité kritické body. U diskretních dynamických systémů nás také budou zajímat jisté význačné body, které zde budeme nazývat *ekvilibria*.

Definice 11 Bod \bar{x} nazveme *ekvilibriem* rovnice (1.3), jestliže je pevným bodem funkce f , tedy pokud platí, že:

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Jinými slovy, konstantní posloupnost $\{\bar{x}\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní řešení rovnice (1.3). Kdyby $x_0 = \bar{x}$ byl počáteční bod, potom by platilo, že $x_1 = f(\bar{x}) = \bar{x}$, $x_2 = f(x_1) = f(\bar{x}) = \bar{x}$ a tak dále. Graficky je ekvilibrium x -ovou souřadnicí bodu, kde graf funkce f protíná osu prvního a třetího kvadrantu $y = x$.

Důležitou vlastností ekvilibríů je jejich *stabilita*, které je věnován následující text.

Definice 12 Ekvilibrium \bar{x} rovnice (1.3) nazveme *stabilní*, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - \bar{x}| < \epsilon$$

pro každé $n > 0$.

Definice je velmi podobná jako u spojitého dynamického systému. Pro počáteční bod $x_0 \in \mathcal{U}_\delta(\bar{x})$ musí platit, že $f^n(x_0) \in \mathcal{U}_\epsilon(\bar{x})$ pro každé $n > 0$.

Definice 13 Ekvilibrium \bar{x} rovnice (1.3) nazveme *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc

$$\exists r > 0 : |x_0 - \bar{x}| < r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

Pokud je $r = \infty$, říkáme, že je \bar{x} *globálně asymptoticky stabilní*.

Asymptoticky stabilní bod musí být tedy stabilní a zároveň musí existovat okolí bodu $\mathcal{U}_r(\bar{x})$ takové, že x_n konverguje pro $n \rightarrow \infty$ k \bar{x} .

Definice 14 Ekvilibrium \bar{x} rovnice (1.3) nazveme *nestabilní*, pokud není stabilní. To znamená, že platí

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 : |x_0 - \bar{x}| < \delta \wedge |f^n(x_0) - \bar{x}| \geq \epsilon$$

pro alespoň jedno $n > 0$.

Podobně jako u spojitých dynamických systémů i zde dochází v určitém časovém okamžiku $n > 0$ k porušení podmínky stability.

Kritérium pro asymptotickou stabilitu (i nestabilitu) ekvilibria skalárního dynamického systému udává následující věta:

Věta 4 *Nechť je bod \bar{x} ekvibiem diferencní rovnice (1.3), kde funkce f je spojitě diferencovatelná v \bar{x} .*

1. *Jestliže $|f'(\bar{x})| < 1$, potom je \bar{x} asymptoticky stabilní.*
2. *Jestliže $|f'(\bar{x})| > 1$, potom je \bar{x} nestabilní.*

[8]

1.3. Nespojité dynamické systémy

Jak již bylo řečeno, spojitě dynamické systémy jsou generovány diferenciálními rovnicemi a diskrétní dynamické systémy zase diferencními rovnicemi. Nespojité dynamické systémy budou kombinací obou, tzn. budou vytvářeny v jistém smyslu jak diferenciálními rovnicemi tak diferencními.

Nespojitě dynamické systémy jsou takové dynamické systémy, které jsou generovány jistým typem *impulsních diferencálních rovnic*.

Nechť je dána funkce

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

množina

$$\Gamma \subset G$$

a funkce

$$I : \Gamma \rightarrow G.$$

Pak autonomní rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \notin \Gamma \quad (1.4)$$

s impulsní podmínkou

$$\Delta \mathbf{x} = I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.5)$$

generují nespojitý dynamický systém.

Definice 15 Řekneme, že funkce $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ je řešením impulsní rovnice (1.4), (1.5) na intervalu J , jestliže

- (1) \mathbf{x} je v každém bodě z J spojitá zleva (tzn. $\forall t \in J : \mathbf{x}(t-) = \mathbf{x}(t)$),
- (2) $\forall t \in J; \mathbf{x}(t) \notin \Gamma : \frac{dx}{dt}(t) = f(\mathbf{x}(t))$,
- (3) $\forall t \in J; \mathbf{x}(t) \in \Gamma : \mathbf{x}(t+) - \mathbf{x}(t) = I(\mathbf{x}(t))$.

Je tedy jasné, že neprotne-li řešení impulsní úlohy (1.4), (1.5) množinu Γ , jde o řešení diferenciální rovnice (1.4), tedy neimpulsní úlohy. V bodě, ve kterém dojde k průniku s množinou Γ dochází k „nespojitému skoku“.

Poznámka 1 Nyní definujeme nespojitý dynamický systém. Je-li $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ řešením úlohy (1.4), (1.5), pak zobrazení $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$ nazýváme *nespojité dynamický systém*. Bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ je počáteční bod řešení.

Poznámka 2 Terminologie u nespojitých dynamických systémů je velmi podobná jak u spojitých dynamických systémů.

Vlastností řešení úlohy (1.4), (1.5), kterou se později budeme zabývat, bude jeho *periodicita*. Pro nás konkrétně bude stěžejní *1-periodické řešení*.

Definice 16 Řekneme, že řešení x impulsní rovnice (1.4), (1.5) definované na intervalu $(0, \infty)$ je *1-periodické*, jestliže $\exists \omega > 0$ tak, že

$$\forall t \in (0, \infty) : x(t + \omega) = x(t)$$

a

$$\exists! \tau \in [0, \infty) : x(\tau) \in \Gamma.$$

Pak orbitu tohoto řešení nazveme *1-periodickou orbitu*.

Tedy 1-periodické řešení znamená, že řešení je periodické a protne množinu Γ právě jednou. Číslo 1 neznamenaá tedy periodu funkce x , jak se používá standardně.

[9]

Kapitola 2

Lotka-Volterrův model

2.1. Historie

Alfred James Lotka byl americký matematik, fyzik, biolog a chemik, který žil v letech 1880 až 1949. Původem byl z Rakouska-Uherska. Za svůj život napsal několik knih a spoustu odborných článků. Působil ve vysokých pozicích v několika vědeckých organizacích, například byl předseda Americké statistické organizace či předseda Unie národního výboru Spojených států. Zabýval se mnoha tématy, například tři z jeho knih se zabývají matematikou a pojišťovnictvím. V biologii se zabýval populací obecně, zejména rozložením věku, porodností a úmrtností. V chemii zkoumal mimo jiné teorii autokatalytických chemických reakcí, což byl odrazový můstek pro model kořist-dravec. Původně chemický model zobecnil a obecně popisoval vztahy v organických systémech, až přešel zcela do biologie, kde se nejdříve zabýval vztahem mezi rostlinou a býložravcem, až nakonec svou studii zobecnil na jakýkoli model kořist-dravec, který publikoval roku 1925 ve své knize *Základy fyzikální biologie* (v originále *Elements of Physical Biology*).^[5]

Vito Volterra byl italský matematik a fyzik, který žil v letech 1860 až 1940. V matematice se zabýval hlavně geometrií, integrálními, diferenciálními a parciálními diferenciálními rovnicemi, ve fyzice zejména hydrodynamikou a mechanikou. Přednášel mechaniku na univerzitě v Turíně a poté matematickou fyziku na univerzitě v Římě, kde se začal věnovat matematické biologii. Následně byl jmenován i po-

slancem parlamentu Italského království. Za první světové války sloužil v armádě u letectva. V roce 1925 provedl stejnou analýzu interakce kořisti a dravce jako A. J. Lotka, kterou následně také publikoval.[6]

Model kořist-dravec se stal nakonec známý jako Lotka-Volterrův model či Lotka-Volterrovy rovnice. Dalo by se říct, že tento model se stal základním kamenem matematické populační ekologie. Na jeho základě byly dovysvětleny a hlavně zjednodušeny populační regulace. Později byl model dále upravován, například aby zahrnoval i vnitrodruhovou konkurenci. Model byl přejímán i do dalších oblastí, v ekonomii má velké využití jako takzvaný Goodwinův model, kde vytváří vnitřní cykly hospodářské aktivity.[4]

2.2. Předpoklady modelu

Aby měl model smysl, musíme nejdříve formulovat předpoklady nezbytné k jeho vytvoření. Těmi jsou:

1. Kořist má vždy dostatek potravy. Nemůže tedy nastat situace, kdy by kořist začala nekontrolovatelně vymírat vlivem nedostatku přísunu potravy.
2. Množství potravy dravců zcela závisí na velikosti populace kořisti. Potravou dravců je výhradně jen kořist.
3. Míra změny celé populace je úměrná její velikosti.
4. Prostředí je stále stejné, nemění se ve prospěch jednoho či druhého druhu a genetické adaptace jsou zanedbatelné.
5. Nemůže nastat situace, kdy by dravci byli kořistí přesycení. Mají neomezenou chuť k jídlu.

[2][4]

2.3. Odvození rovnic

Označme

$x = x(t)$ jako množství kořisti v čase t ,

$y = y(t)$ jako množství dravců v čase t .

Dále označme

$\Delta x_P = \alpha x(t)\Delta t$ jako přirozený přírůstek kořisti v čase t ,

$\Delta x_L = \beta x(t)y(t)\Delta t$ jako úbytek kořisti vlivem lovu v čase t .

V čase $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) množství kořisti bude

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x_P - \Delta x_L = x(t) + \alpha x(t)\Delta t - \beta x(t)y(t)\Delta t.$$

Pro okamžitý přírůstek kořisti bude platit

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) + \alpha x(t)\Delta t - \beta x(t)y(t)\Delta t - x(t)}{\Delta t} = \\ &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t). \end{aligned}$$

Rovnice pro kořist má tedy tvar

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy. \quad (2.1)$$

Pokud by kořist nebyla předmětem lovu, rozmnožovala by se exponenciálně, což reprezentuje výraz αx . Míra lovu kořisti dravci je úměrná interakci mezi těmito druhy, což znázorňuje βxy . Celková rychlost změny populace kořisti v čase t je pak dána rozdílem její vlastní rychlosti růstu a mírou predátorství.

Analogicky uvažujeme

$\Delta y_L = \delta x(t)y(t)\Delta t$ jako přírůstek dravců v čase t , který přímo souvisí s lovem kořisti,

$\Delta y_P = \gamma y(t)\Delta t$ jako přirozený úbytek dravců v čase t , například smrtí nebo emigrací.

V čase $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) množství dravců bude

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta y_L - \Delta y_P = y(t) + \delta xy \Delta t - \gamma y \Delta t.$$

I zde nás bude zajímat okamžitý přírůstek, který je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} &= y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) + \delta x(t)y(t)\Delta t - \gamma y(t)\Delta t - y(t)}{\Delta t} = \\ &= \delta x(t)y(t) - \gamma y(t). \end{aligned}$$

Rovnice pro dravce má tedy tvar

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y. \quad (2.2)$$

Růst populace dravců souvisí s mírou konzumace kořisti, což znázorňuje δxy . Obecně ale platí, že rychlost růstu nemusí být stejná jako míra konzumace. Míru úbytku dravců představuje γy . Pokud by dravci neměli žádnou kořist k lovu, začalo by docházet k exponenciálnímu vymírání. Celková rychlost změny populace dravců v čase t je pak dána rozdílem rychlostí konzumace kořisti a vlastní mírou úbytku.

Výše uvedené vztahy (2.1) a (2.2) spolu tvoří soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y, \end{aligned}$$

kde x udává množství kořisti, y udává množství dravců, α , β , γ , δ jsou kladné parametry, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ určuje rychlost růstu či poklesu příslušné populace.

[2][3][4]

2.4. Vyšetření fázového portréту

K rovnováze v modelu dochází, pokud se množství populace nemění, to znamená, pokud

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy = x(\alpha - \beta y) = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y = y(\delta x - \gamma) = 0,$$

čemuž odpovídají body $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 0)$ a $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$.

Pro zjištění charakteru kritických bodů vyjdeme z Jacobiho matice parciálních derivací pravých stran soustavy, která má pro Lotka-Volterův model tvar

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}.$$

Jako první budeme zkoumat bod $(0, 0)$, který dosadíme do matice a dostaneme matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Následně vypočítáme vlastní čísla matice

$$(\alpha - \lambda)(-\gamma - \lambda) = 0,$$

což je splněno pro $\lambda_1 = \alpha$ a $\lambda_2 = -\gamma$. Víme, že α a γ jsou kladná čísla, platí tedy, že $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Z kritéria nestability kritického bodu (viz. věta 3) vyplývá, že kritický bod $(0, 0)$ je nestabilní.

Pro $x(0) = 0$ bude platit

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \forall t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y.$$

Pro $t > 0$ bude $\frac{dy}{dt} < 0$, takže y bude klesající. V případě, kdy $t < 0$ bude $\frac{dy}{dt} > 0$, y tudíž bude rostoucí. To znamená, že po ose y se blížíme vždy k bodu $(0, 0)$.

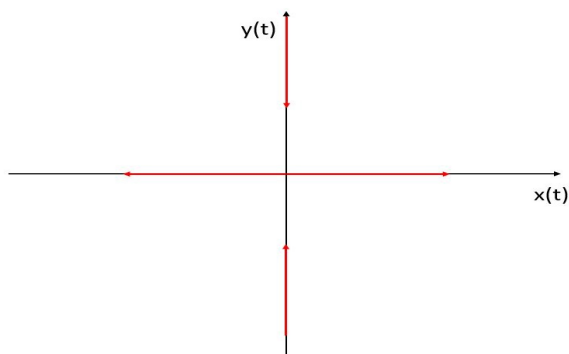
Pro $y(0) = 0$ bude platit

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \forall t.$$

Pro $t > 0$ tedy bude x rostoucí a pro $t < 0$ bude x klesající. V tomto případě se po ose x pohybujeme vždy od bodu $(0, 0)$.

Obě situace jsou zakresleny v Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Bod $(0, 0)$

Z Obrázku 2.1 je patrné, že kritický bod $(0, 0)$ je *sedlo* a již víme, že je nestabilní. Pokud by byl stabilní nebo případně asymptoticky stabilní, populace by k tomuto bodu směřovala. Protože je nestabilní, není možné žádné přirozené vyhynutí. I když se populace nachází blízko tohoto kritického bodu, vždy dojde k zotavení. K vymření populace by byl zapotřebí zásah zvenčí.

Vzhledem k jednoznačnosti jsou pak kvadranty tzv. *pozitivně invariantní*, to znamená, že řešení začínající v kvadrantu v něm také zůstane.

Ted' se zaměříme na druhý kritický bod $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, ležící v 1. kvadrantu, který rovněž dosadíme do Jacobiho matice a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta\frac{\gamma}{\delta} \\ \delta\frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět vypočítáme vlastní čísla matice

$$\lambda^2 - \left(\delta\frac{\alpha}{\beta} \left(-\beta\frac{\gamma}{\delta} \right) \right) = \lambda^2 + \alpha\gamma = 0.$$

Na první pohled je patrné, že tato rovnice nemá reálné kořeny. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\gamma}i$ a $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\gamma}i$. V tomto případě zatím nelze jednoznačně prohlásit nic o stabilitě a ani typu kritického bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$.

Nyní se zaměříme na řešení soustavy rovnic. Je jasné, že množství jakékoli populace nemůže být záporné a navíc předpokládáme, že je také nenulové. Při hledání řešení se tedy omezíme pouze na první kvadrant, tzn. $x > 0 \wedge y > 0$. Začneme tím, že rovnici (2.2) vydělíme rovnicí (2.1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y}.$$

Následnou úpravou dostaneme vztah

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\beta y - \alpha} \frac{\delta x - \gamma}{x}. \quad (2.3)$$

Označme

$$g(y) = -\frac{y}{\beta y - \alpha} \quad \text{a} \quad f(x) = \frac{\delta x - \gamma}{x}.$$

Jako první určíme definiční obory obou funkcí

$$\mathcal{D}(g) = (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \right\} \quad \text{a} \quad \mathcal{D}(f) = (0, \infty).$$

Řešení má tedy smysl hledat pouze na množině

$$\Omega = \mathcal{D}(f) \times \mathcal{D}(g),$$

která rozděluje rovinu na 2 souvislé množiny oddělené polopřímkou

$$\left\{ (x, y) : x > 0 \wedge y = \frac{\alpha}{\beta} \right\}.$$

Nejdříve se zaměříme na hledání konstantního řešení vyšetřením nulových bodů.

Položíme $g(y) = 0$ a $f(x) = 0$

$$-\frac{y}{\beta y - \alpha} = 0 \Leftrightarrow y = \bar{y} = 0,$$

$$\frac{\delta x - \gamma}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Při hledání nekonstantního řešení vyjdeme z původní diferenciální rovnice (2.3), kterou budeme řešit metodou separace proměnných. Rovnici upravíme na příslušný tvar

$$\int \left(\frac{\alpha}{y} - \beta \right) dy = \int \left(\delta - \frac{\gamma}{x} \right) dx$$

a dostáváme

$$\alpha \ln |y| - \beta y = \delta x - \gamma \ln |x| + c_1; \quad \text{kde } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Protože se pohybujeme v prvním kvadrantu, můžeme psát

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + c_1.$$

Navíc vidíme, že výsledný vztah má smysl i pro $y = \frac{\alpha}{\beta} \notin \mathcal{D}(g)$. Řešení dále ještě upravíme

$$c_2 = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y; \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Označíme-li

$$V(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y,$$

pak řešením soustavy je dvojice $(x(t), y(t))$, kde $x(t) > 0 \wedge y(t) > 0$ tak, že existuje $c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

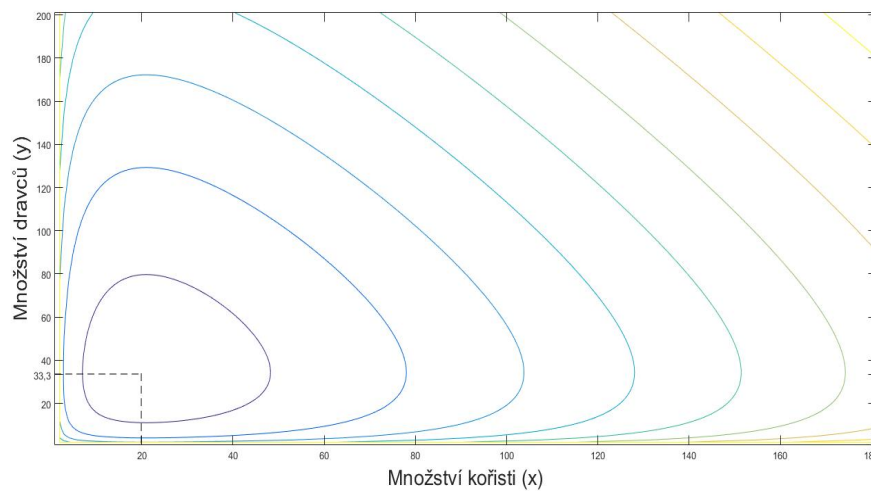
$$V(x(t), y(t)) = c_2 \quad \forall t.$$

To znamená, že orbity systému leží na hladinách funkce $V(x, y)$. Pak zřejmě

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0, \quad \forall t$$

pro každou dvojici (x, y) , která je řešením naší soustavy.

Fázový portrét je tedy tvořen vrstevnicemi funkce $V(x, y)$ a je vykreslen v Obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Fázový portrét modelu pro $\alpha = 1; \beta = 0,03; \gamma = 1; \delta = 0,05$

Všechny orbity obíhají periodicky kolem bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}) = (20; 33, 3)$. Protože V má v bodě $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ ostré lokální minimum a V je v tomto bodě spojitá, potom

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \mathcal{U}_\delta^* \left(\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) \right) : V \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) < V(x, y) < V \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) + \epsilon$$

pro všechna $t \geq 0$.

To znamená, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro jakýkoli bod (x, y) , který se nachází v deltovém okolí \mathcal{U} bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ bude platit, že řešení $V(x, y)$ s rostoucím časem t nikdy neopustí epsilonové okolí \mathcal{U} bodu $V(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Navíc víme, že všechny orbity obíhají periodicky kolem bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, takže kritický bod $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ je *středem*.

Dále je potřeba odvodit směr, kterým se po orbitách pohybujeme. Uvažujme t takové, že

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= 0, \\ \frac{dy}{dt}(t) &= \frac{\alpha}{\beta}(\delta x(t) - \gamma). \end{aligned}$$

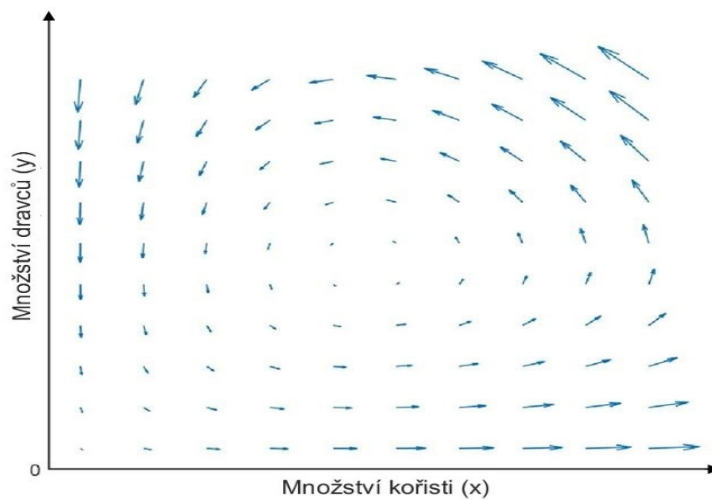
Pokud položíme $\frac{dy}{dt} = 0$, dostaneme

$$\frac{\alpha}{\beta}(\delta x(t) - \gamma) = 0 \Leftrightarrow x(t) = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Je tedy zřejmé, že v bodě $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ je $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Dále mohou nastat dvě situace:

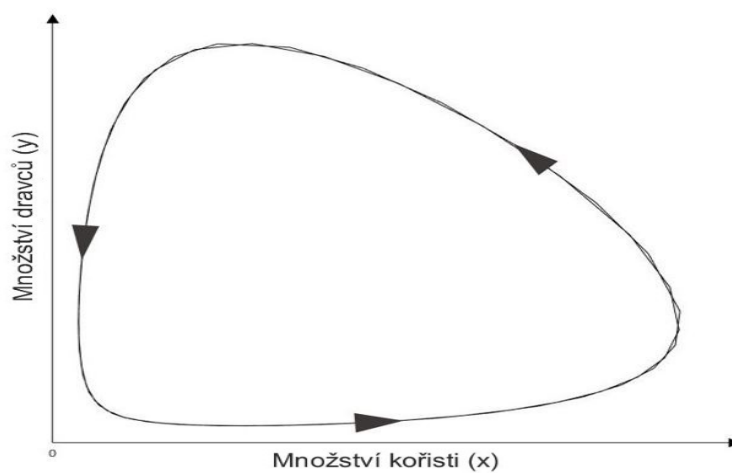
- a) $x(t) > \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) > 0$
- b) $x(t) < \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) < 0$

Na základě těchto informací lze odvodit směr pohybu po orbitách. Směrové pole znázorňuje Obrázek 2.3.



Obrázek 2.3: Směrové pole Lotka-Volterrova modelu

Všechny orbity obíhají stejným směrem kolem bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Uvažujme pouze jednu orbitu z fázového portréту tak, jak je znázorněno na Obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Jedna z orbit fázového portréту

Množství populace dravců závisí zcela na množství populace kořisti. S rostoucím množstvím kořisti budou mít dravci více potravy, začne tedy docházet nejdříve k mírnému nárůstu dravců. Po určité době se začne jejich nárůst zvětšovat, až nastane okamžik, kdy bude dravců takové množství, že úbytek kořisti vlivem lovu bude převažovat nad jejich přirozeným přírůstkem, kořisti tedy začne ubývat.

Pořád je jí ale dostatek, tudíž počet dravců stále roste. Tento růst ovšem po čase začne zpomalovat až dojde k situaci, kdy bude množství dravců natolik převyšovat množství kořisti, že pro dravce bude stále obtížnější nalézt potravu. V určité chvíli tedy začne přirozený úbytek dravců výrazně převažovat nad jejich přírůstkem a dojde k prudkému poklesu jejich množství.

Protože dravců rapidně ubývá, stává se prostředí pro kořist bezpečnější. Jejich přirozený přírůstek začne převažovat nad úbytkem a začne docházet k mírnému nárůstu až do chvíle, kdy dravců bude tak málo, že nebudou představovat téměř žádné nebezpečí. Tudíž dojde k prudkému růstu množství kořisti a celý cyklus znovu opakuje.

Celý děj se opakuje periodicky. V tom případě je jasné, že přirozené vyhynutí není možné, vždy dojde ke zotavení jedné i druhé populace. K zániku by bylo potřeba porušit případně změnit jeden či více předpokladů modelu a nebo by byl nezbytný zásah zvenčí.

[1][2][3][4]

Kapitola 3

Lotka-Volterrův model s výlovem

Již víme, množství dravců a kořisti se mění ve stálém a izolovaném prostředí. Nyní se zaměříme na to, jak se bude populace vyvíjet, když bude docházet k opakovanému vnějšímu zásahu formou výlovu.

3.1. Odvození modelu

Máme prostředí, ve kterém žije populace dravců a jejich kořisti. Jako ukázkový příklad uvažujme populaci velkých dravých ryb a menších (ne jen dravých) ryb. Konkrétně to mohou být štiky, které představují dravce, a okouni, kteří představují kořist, jak bylo zmíněno v úvodu. Z předchozí kapitoly víme, jak se vzájemnou interakcí těchto dvou druhů vyvíjí jejich množství a jak se takový model chová.

Nyní ale uvažujeme takový model, kdy v určitém okamžiku bude docházet k opakovanému výlovu.

Předpokládáme, že k výlovu dochází pouze v momentu, kdy je množství populace kořisti největší - najdeme chvíli, kdy k tomu dojde.

Nechť (x, y) je řešení Lotka-Volterrova modelu z předchozí kapitoly. Pro $x(t)$ tedy hledáme lokální maximum. Položíme $\frac{dx}{dt} = 0$ a z obecného modelu kořist-dravec již víme, že

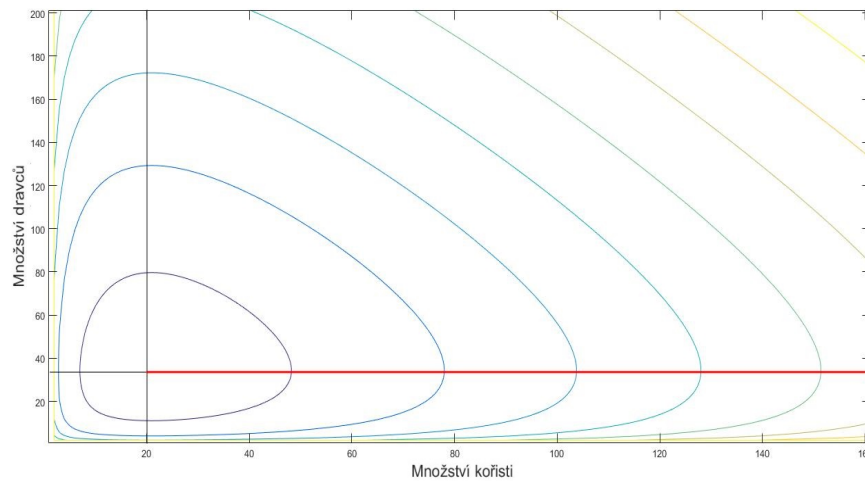
$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow y(t) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Víme už ale, že hodnotě $y(t) = \frac{\alpha}{\beta}$ přísluší dvě hodnoty $x(t)$. Z fázového portréту je zřejmé, že populace kořisti se nachází na svém maximu vždy, když je $x(t) > \frac{\gamma}{\delta}$.

K výlovu tedy bude docházet jedině tehdy, když se populace bude nacházet v bodě (x, y) z množiny

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(t) > \frac{\gamma}{\delta} \wedge y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \right\} = \Gamma,$$

která je znázorněna na Obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Fázový portrét L-V modelu a množina Γ (červeně)

Okamžik výlovu je pro řešení (x, y) tedy dán podmínkou $(x(t), y(t)) \in \Gamma$.

Dále předpokládáme, že předmětem lovu je jen a pouze kořist, množství populace dravců se vlivem vnějšího zásahu nijak nemění.

Množství kořisti, které je vyloveno, označíme jako

$$\Delta x(\tau) = -px(\tau), \quad \text{je-li } (x(\tau), y(\tau)) \in \Gamma,$$

kde $p \in (0, 1)$. Tato podmínka je záporná, protože udává počet, který byl vyloven z původního množství kořisti a je dána součinem parametru p a původního počtu

$x(\tau)$, což znamená, že je vyloveno vždy přesně dané stejné procento z aktuálního množství kořisti. Parametr p je reálný parametr udávající intenzitu výlovu.

Množství kořisti po výlovu označme jako

$$x(\tau+) := \lim_{t \rightarrow \tau+} x(t).$$

Platí, že

$$\Delta x(\tau) = x(\tau+) - x(\tau)$$

a z toho vyplývá, že

$$x(\tau+) = (1 - p)x(\tau). \quad (3.1)$$

Protože předpokládáme, že dravci nejsou předmětem lovu, bude jejich počet po výlovu pořád stejný. Platí tedy, že

$$\Delta y(\tau) = 0, \quad \text{je-li } (x(\tau), y(\tau)) \in \Gamma.$$

Tímto vznikají impulsní podmínky

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x(\tau) = -px(\tau) \\ \Delta y(\tau) = 0 \end{array} \right\} \text{pokud } (x(\tau), y(\tau)) \in \Gamma.$$

Všechny ostatní předpoklady Lotka-Volterrova modelu zůstávají zachovány.

Dohromady tedy dostáváme Lotka-Volterrův model

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y \end{aligned} \right\} (x(\tau), y(\tau)) \notin \Gamma \quad (3.2)$$

s impulsy

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(\tau) &= -px(\tau) \\ \Delta y(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\} (x(\tau), y(\tau)) \in \Gamma. \quad (3.3)$$

V dalším textu se zaměříme na to, jak se tento model chová a do jakého stavu spěje.

3.2. Řešení Lotka-Volterrova modelu s výlovem

Jak již víme z předchozí kapitoly, interakce mezi dravci a kořistí je charakterizována funkcí $V(x, y)$, jejíž vrstevnice tvoří fázový portrét modelu a množství populace se mění periodicky oběhem po příslušné vrstevnici.

Vždy, když dojde k výlovu, dojde k poklesu množství kořisti, ale vzájemnou interakcí obou druhů se opět spustí cyklus oběhu (proti směru hodinových ručiček) po jiné hladině stejné funkce $V(x, y)$, která je dána předpisem

$$V(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y.$$

Protože k výlovu dochází pouze tehdy, když se populace nachází v bodě (x, y) z množiny Γ , což je pro všechna $x(t) > \frac{\gamma}{\delta}$ vždy, když $y(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, bude nás zajímat, jak vypadá funkce $V(x, \frac{\alpha}{\beta})$, která má po dosazení a úpravě předpis

$$V\left(x, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \delta x - \gamma \ln x + \alpha \ln \frac{e\beta}{\alpha}.$$

Člen $\alpha \ln \frac{e\beta}{\alpha}$ ovlivňuje pouze posun grafu ve vertikálním směru, proto stačí uvažovat pouze funkci bez přidané konstanty. Zavedeme tedy funkci $g(x)$ s předpisem

$$g(x) = \delta x - \gamma \ln x$$

a vyšetříme průběh této funkce. Nejdříve určíme definiční obor:

$$\mathcal{D}(g) = (0, \infty).$$

Dále nás bude zajímat, jak se funkce chová v krajních bodech svého definičního oboru:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \delta x - \gamma \ln x = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \delta x - \gamma \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \delta x \left(1 - \frac{\gamma \ln x}{\delta x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \delta x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\gamma \ln x}{\delta x}\right) = \\ &= \infty \cdot \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma \ln x}{\delta x}\right) = \infty \cdot \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\gamma}{x}}{\delta}\right) = \infty \cdot 1 = \infty. \end{aligned}$$

V obou krajních bodech definičního oboru se funkce limitně blíží k nekonečnu. Nyní se zaměříme na vyšetření monotonie. Funkci nejprve zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule:

$$g'(x) = \delta - \frac{\gamma}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Bod $\frac{\gamma}{\delta}$ je stacionárním bodem funkce g . Abychom zjistili, zda je v něm lokální maximum či minimum, zderivujeme funkci ještě jednou

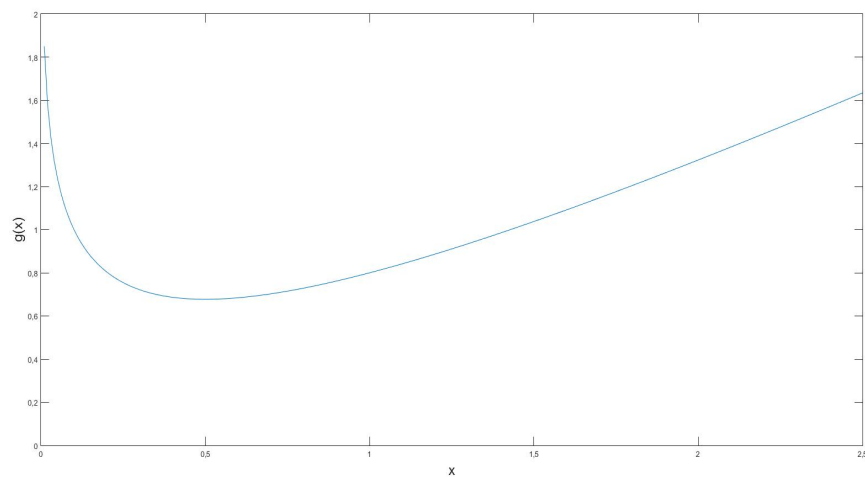
$$g''(x) = \frac{\gamma}{x^2}$$

a za x dosadíme bod $\frac{\gamma}{\delta}$. Dostáváme

$$g''\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \frac{\delta^2}{\gamma} > 0.$$

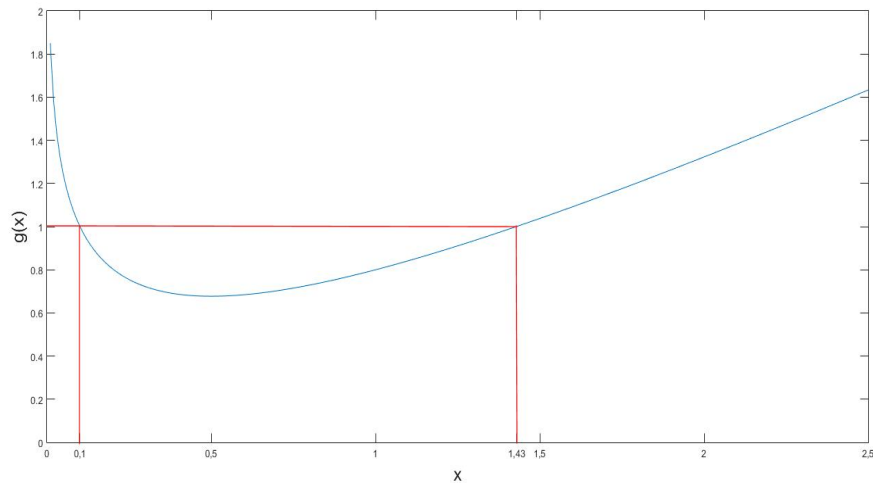
Protože je druhá derivace v bodě $\frac{\gamma}{\delta}$ kladná, má funkce v tomto bodě ostré lokální minimum. Funkce g je na intervalu $(0, \frac{\gamma}{\delta})$ klesající a na intervalu $(\frac{\gamma}{\delta}, \infty)$ je rostoucí.

Graf funkce g je na Obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Graf funkce $g(x)$ pro $\frac{\gamma}{\delta} = 0,5$

Bude nás zajímat především chování funkce v okolí bodu $\frac{\gamma}{\delta}$. Pokud totiž vylovíme takové množství kořisti, že se dostaneme mimo množinu Γ , dostaneme se po příslušné orbitě zpět do této množiny tak, jak je zvýrazněno na Obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Graf funkce $g(x)$ pro $\frac{\gamma}{\delta} = 0,5$ se zvýrazněným případem, kdy se při výlovu dostaneme mimo množinu Γ a následně zpět do této množiny (červeně)

Z toho vyplývá, že pokaždé, když bude vyloveno tolik kořisti, že se dostaneme do bodu mimo množinu Γ , dostaneme se do této množiny zpět po příslušné orbitě. Nějakým způsobem se tedy neustále budeme pohybovat kolem bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$.

3.3. 1-periodická orbita

Jestliže se kolem bodu $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ pořád pohybujeme, budeme se ptát na následující dvě otázky:

- Bude zde existovat 1-periodická orbita?
- Pokud 1-periodická orbita existuje, je stabilní, případně asymptoticky stabilní?

Uvažujme počáteční úlohu (3.2), (3.3),

$$x(\tau_0) = x_0, \quad y(\tau_0) = \frac{\alpha}{\beta},$$

kde $x_0 \in (0, \frac{\gamma}{\delta})$. Pak existuje $\tau_1 > \tau_0$ takové, že

$$\forall t \in (\tau_0, \tau_1) : y(t) < \frac{\alpha}{\beta} \quad \wedge \quad y(\tau_1) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dále označme

$$x(\tau_1) = x_1.$$

Zřejmě platí, že $x_1 > \frac{\gamma}{\delta}$. Pro každé řešení pak platí, že

$$V\left(x_0, \frac{\alpha}{\beta}\right) = V\left(x_1, \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

přičemž uvedený vztah platí právě tehdy, když

$$g(x_0) = g(x_1) : x_0 < \frac{\gamma}{\delta} < x_1.$$

Řešení (x, y) je 1-periodické právě tehdy, když

$$x_0 = x(\tau_1),$$

přičemž ze vztahu (3.1) vyplývá, že

$$x_0 = (1 - p)x_1,$$

což znamená, že pro 1-periodické řešení musí platit

$$g((1 - p)x_1) = g(x_1), \quad x_1 > \frac{\gamma}{\delta}.$$

Hledáme tedy řešení rovnice

$$g((1-p)x) = g(x)$$

v množině $(\frac{\gamma}{\delta}, \infty)$, kde parametr p nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$, přičemž

$$g(x) = \delta x - \gamma \ln x.$$

Dostáváme rovnici

$$\delta(1-p)x - \gamma \ln((1-p)x) = \delta x - \gamma \ln x.$$

Označme

$$1-p = \omega.$$

Rovnici přepíšeme a upravíme:

$$\delta\omega x - \gamma \ln(\omega x) = \delta x - \gamma \ln x$$

$$\delta\omega x - \delta x = \gamma \ln(\omega x) - \gamma \ln x$$

$$\delta x(\omega - 1) = \gamma(\ln(\omega x) - \ln x)$$

$$\delta x(\omega - 1) = \gamma \ln \frac{\omega x}{x}$$

$$x = \frac{\gamma \ln \omega}{\delta(\omega - 1)}.$$

Výsledek ještě upravíme a dostaneme

$$x = \frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta((1-p) - 1)} = -\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p} =: \bar{x}.$$

Dále je potřeba ověřit, zda je skutečně $\bar{x} > \frac{\gamma}{\delta}$ pro všechna $p \in (0, 1)$. Budeme řešit nerovnici

$$-\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p} > \frac{\gamma}{\delta}.$$

Po úpravách dostáváme výraz

$$\ln(1-p) + p < 0.$$

Nelze jednoznačně říct, zda je hodnota výrazu kladná nebo záporná. Vyšetříme proto průběh funkce s předpisem

$$\ln(1 - p) + p, \quad p \in (0, 1).$$

Jako první určíme limitu funkce pro p jdoucí k 0:

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \ln(1 - p) + p = 0.$$

Pokud by byla funkce klesající na celém svém definičním oboru, rozhodně by také na celém svém definičním oboru byla záporná. Proto funkci zderivujeme a vyšetříme její monotonii:

$$(\ln(1 - p) + p)' = \frac{-1}{1 - p} + 1 = \frac{-1 + 1 - p}{1 - p} = \frac{-p}{1 - p} < 0 \quad \forall p \in (0, 1).$$

To znamená, že

$$\ln(1 - p) + p < 0 \quad \forall p \in (0, 1).$$

a tím pádem platí, že

$$\bar{x} > \frac{\gamma}{\delta} \quad \wedge \quad g((1 - p)\bar{x}) = g(\bar{x}).$$

To znamená, že zde existuje jediná 1-periodická orbita, která prochází bodem

$$\left(-\frac{\gamma}{\delta} \frac{\ln(1 - p)}{p}, \frac{\alpha}{\beta} \right) \in \Gamma$$

Nyní se budeme zabývat stabilitou periodického řešení, kterou ale nejdříve musíme nadefinovat. Definice stability periodického řešení obecné impulsní rovnice (1.4), (1.5) je ale dosti komplikovaná. Zdefinujeme proto stabilitu a asymptotickou stabilitu 1-periodického řešení speciálně pro úlohu (3.2), (3.3) s ohledem na známý fázový portrét soustavy (3.2).

Definice 17 Necht (x, y) je 1-periodické řešení úlohy (3.2), (3.3). Řekneme, že 1-periodická orbita

$$\Phi = \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$$

je *orbitálně stabilní*, jestliže

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \geq 0 : \text{dist}((x^0, y^0), \Phi) < \delta \wedge y^0 < \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{dist}((x(t; x^0, y^0), y(t; x^0, y^0)), \Phi) < \epsilon. \end{aligned}$$

Orbitálně stabilní 1-periodická orbita Φ je tedy taková orbita, kdy ke každému $\epsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ takové, že pro libovolný počáteční bod (x^0, y^0) , jehož vzdálenost od orbity Φ je menší než δ (kde zároveň ale bereme v potaz, že $y^0 < \frac{\alpha}{\beta}$), platí, že vzdálenost orbity Φ od orbity, která vede z počátečního bodu (x^0, y^0) , je menší než ϵ a to pro všechna $t \geq 0$.

Definice 18 Necht (x, y) je 1-periodické řešení úlohy (3.2), (3.3). Řekneme, že 1-periodická orbita

$$\Phi = \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$$

je *orbitálně asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc platí, že

$$\begin{aligned} \exists b > 0 \quad \forall (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}((x^0, y^0), \Phi) < b \wedge y^0 < \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{dist}((x(t; x^0, y^0), y(t; x^0, y^0)), \Phi) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pro $t \rightarrow \infty$.

Orbitálně asymptoticky stabilní 1-periodická orbita Φ musí být stabilní a navíc musí existovat $b > 0$ takové, že pro libovolný počáteční bod (x^0, y^0) , jehož vzdálenost od orbity Φ je menší než b (a navíc platí, že $y^0 < \frac{\alpha}{\beta}$), bude platit, že orbita vedoucí z počátečního bodu (x^0, y^0) bude s rostoucím časem konvergovat k orbitě Φ .

Uvažujme interval

$$M = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta(1-p)} \right),$$

který představuje množinu všech bodů, pro které platí, že pokud výlov nastane v libovolném bodě z tohoto intervalu, vždy se dostaneme mimo množinu Γ . Následnou interakcí mezi dravci a kořistí se dostaneme zpět do tohoto intervalu, což je zřejmé z vlastnosti funkce $g(x)$. Tento mezikrok nás ale nezajímá. Zajímá nás, jak se mění hodnoty v rámci tohoto intervalu a zda se přibližují k bodu $\bar{x} \in M$.

Zavedeme funkce

$$g_1(x) = g(x), x \in \left(0, \frac{\gamma}{\delta} \right),$$
$$g_2(x) = g(x), x \in \left(\frac{\gamma}{\delta}, \infty \right).$$

Zadefinujeme diferenční rovnici

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{3.4}$$

s počáteční podmínkou

$$x_0 \in M,$$

kde f je funkce

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

s předpisem:

$$f(x) = g_2^{-1} \left(g_1((1-p)x) \right),$$

která každému číslu z intervalu M přiřadí reálné číslo ze stejného intervalu. Pomocí této diferenční rovnice a počáteční podmínky můžeme generovat posloupnost bodů

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots,$$

přičemž nás zajímá, zda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \bar{x}.$$

Protože bod \bar{x} tvoří periodické řešení, platí, že

$$f\left(-\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p}\right) = -\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p} = \bar{x}.$$

Bod \bar{x} je tedy *ekvilíbriem* diferenční rovnice (3.4) a podle kritéria pro asymptotickou stabilitu (viz. věta 4) budeme chtít ověřit, zda

$$\left|f'\left(-\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p}\right)\right| < 1.$$

Nastává zde ale problém. Protože funkce $g(x)$ není prostá, neexistuje k ní inverzní funkce. Museli jsme proto zavést funkce $g_1(x)$ a $g_2(x)$, které už prosté jsou. Neznáme ale předpis funkce $g_2^{-1}(x)$, tím pádem neznáme předpis ani funkce $f(x)$ a nelze odvodit její derivaci $f'(x)$. Potřebujeme ale zjistit hodnotu derivace pouze v bodě \bar{x} , což lze s použitím *Věty o derivaci inverzní funkce*.

Platí, že

$$\forall x \in \left(0, \frac{\gamma}{\delta}\right) : g'_1 = g'(x) = \delta - \frac{\gamma}{x} \quad \text{a} \quad \forall x \in \left(\frac{\gamma}{\delta}, \infty\right) : g'_2 = g'(x) = \delta - \frac{\gamma}{x}$$

a navíc

$$g_1((1-p)\bar{x}) = g_2(\bar{x}).$$

Aplikováním věty dostaneme:

$$\begin{aligned}
 f'(\bar{x}) &= \frac{1}{g_2'(g_2^{-1}(g_1(1-p)\bar{x}))} \cdot g_1'((1-p)\bar{x}) \cdot (1-p) = \\
 &= \frac{1}{g_2'(\bar{x})} \cdot g_1'((1-p)\bar{x}) \cdot (1-p) = \\
 &= \frac{1}{\delta - \frac{\gamma \ln(1-p)}{p}} \cdot \frac{\delta(1-p) \ln(1-p) + \delta p}{(1-p) \ln(1-p)} \cdot (1-p) = \\
 &= \frac{\ln(1-p)}{\delta \ln(1-p) + \delta p} \cdot \frac{\delta(1-p) \ln(1-p) + \delta p}{(1-p) \ln(1-p)} \cdot (1-p) = \\
 &= \frac{1}{\ln(1-p) + p} \cdot ((1-p) \ln(1-p) + p) = \frac{(1-p) \ln(1-p) + p}{\ln(1-p) + p}.
 \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že

$$f'\left(-\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p}\right) = \frac{(1-p) \ln(1-p) + p}{\ln(1-p) + p}.$$

Nyní je potřeba ověřit, zda je absolutní hodnota výrazu menší než 1. Zavedeme proto funkci

$$h(x) = \frac{(1-x) \ln(1-x) + x}{\ln(1-x) + x}; \quad x \in (0, 1).$$

Chceme dokázat, že

$$h(x) > -1 \quad \wedge \quad h(x) < 1 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Jako první budeme řešit nerovnici $h(x) > -1$. Nerovnici nejdříve upravíme

$$\begin{aligned}
 \frac{(1-x) \ln(1-x) + x}{\ln(1-x) + x} &> -1, \\
 \frac{(1-x) \ln(1-x) + x}{\ln(1-x) + x} + 1 &> 0, \\
 \frac{(1-x) \ln(1-x) + \ln(1-x) + 2x}{\ln(1-x) + x} &> 0, \\
 \frac{(2-x) \ln(1-x) + 2x}{\ln(1-x) + x} &> 0
 \end{aligned}$$

a vyjdeme z úvahy, kdy je hodnota výrazu kladná.

Musí platit alespoň jedna z následujících dvou větvi:

$$1. \quad (2 - x) \ln(1 - x) + 2x > 0 \quad \wedge \quad \ln(1 - x) + x > 0$$

nebo

$$2. \quad (2 - x) \ln(1 - x) + 2x < 0 \quad \wedge \quad \ln(1 - x) + x < 0.$$

Nejdříve se zaměříme na výraz $\ln(1 - x) + x$. Průběh naprosto stejné funkce jsme již vyšetřovali na straně 40, 41 pouze s tím rozdílem, že místo proměnné x zde byla použita proměnná p . Výsledek bude naprosto stejný, tudíž platí, že

$$\ln(1 - x) + x < 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

V tom případě nemá smysl uvažovat 1. větev nerovnice, protože výraz $\ln(1 - x) + x$ nebude nikdy kladný.

Zbývá tedy ověřit, zda je výraz $(2 - x) \ln(1 - x) + 2x$ záporný, což ovšem ani zde nelze jednoznačně říct. Budeme tedy muset prověřit průběh funkce s tímto předpisem.

Nejdříve určíme limitu funkce pro x jdoucí k 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((2 - x) \ln(1 - x) + 2x) = 0.$$

Dále vyšetříme monotonii:

$$\begin{aligned} ((2 - x) \ln(1 - x) + 2x)' &= -\ln(1 - x) - \frac{2 - x}{1 - x} + 2 = \\ &= -\ln(1 - x) - \left(1 + \frac{1}{1 - x}\right) + 2 = -\ln(1 - x) - \frac{1}{1 - x} + 1. \end{aligned}$$

Z tvaru první derivace nelze určit, zda je funkce rostoucí či klesající. Funkci proto zderivujeme ještě jednou a vyšetříme průběh druhé derivace:

$$\begin{aligned} \left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1-x} + 1 \right)' &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{(1-x) - 1}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{-x}{(1-x)^2} < 0 \quad \forall x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Druhá derivace je na celém intervalu $(0, 1)$ záporná, tím pádem bude první derivace klesající. Protože je první derivace klesající a platí, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1-x} + 1 \right) = 0,$$

budou i hodnoty první derivace na intervalu $(0, 1)$ záporné a tím pádem i samotná funkce $(2-x)\ln(1-x) + 2x$ bude klesající, což znamená, že

$$(2-x)\ln(1-x) + 2x < 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Tím pádem platí, že $h(x) > -1$, protože podmínky ve druhé větvi nerovnice jsou splněny.

Dále zbývá ověřit, zda je $h(x) < 1$. Nerovnici opět upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{\ln(1-x) + x} &< 1, \\ \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{\ln(1-x) + x} - 1 &< 0, \\ \frac{(1-x)\ln(1-x) - \ln(1-x)}{\ln(1-x) + x} &< 0, \\ \frac{-x\ln(1-x)}{\ln(1-x) + x} &< 0. \end{aligned}$$

Již víme, že

$$\ln(1-x) + x < 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Aby byla hodnota výrazu záporná, musí být zároveň

$$-x\ln(1-x) > 0,$$

což rozhodně platí, protože $-x < 0 \wedge \ln(1-x) < 0$ a tím pádem platí také, že

$$h(x) < 1 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Lze snadno ověřit, že je dokonce $h(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$.

Tímto je tedy dokázáno, že

$$\left| -\frac{\gamma \ln(1-p)}{\delta p} \right| < 1,$$

což znamená, že periodická orbita je asymptoticky stabilní.

Závěr

Obečný Lotka-Volterrův model popisuje vývoj počtu populace libovolných dravců a jejich kořisti, ne jen ryb, jak bylo ukázkově uvedeno v mé práci. Dalším příkladem mohou být například lišky a zajáci. Vývoj obou populací tvoří uzavřený, periodický cyklus, kde se množství dravců i kořisti mění pořád stejně. Nemůže nastat situace, aby za daných podmínek došlo k zániku některé z populací. Přirozené vyhynutí není možné, protože vždy dochází k zotavení jedné i druhé populace.

Pokud uvažujeme stejné prostředí s pravidelným vnějším zásahem - výlovem části počtu kořisti a to vždy v okamžiku, kdy je množství kořisti největší, tak ani zde nemůže dojít k vyhynutí jedné či druhé populace, jak by se na první pohled mohlo zdát. Při takovémto pravidelném výlovu sice již nikdy nedojde k úplnému zotavení populace do původního množství, jaké bylo v okamžiku výlovu, nedojde ale ani k jejímu zániku. Nechoází zde ani k žádným nepředvídatelným výkyvům, dokázali jsme, že zde existuje 1-periodický řešení, ke kterému se celá populace postupně přibližuje.

Literatura

- [1] Rachůnková, I., Fišer, J.: *Dynamické systémy 1*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2014.
- [2] Edelstein-Keshet, L.: *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
- [3] Borrelli, R. L., Coleman, C. S.: *Differential Equations: A Modeling Perspective (Second Edition)* Wiley, 2004.
- [4] *Lotka–Volterra equations*. [online]. 2019, [cit. 2019-03-11]. dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka–Volterra_equations.
- [5] *Alfred J. Lotka* [online]. 2019, [cit. 2019-03-11]. dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_J._Lotka.
- [6] *Vito Volterra* [online]. 2019, [cit. 2019-03-11]. dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Vito_Volterra.
- [7] POSPÍŠIL, Zdeněk. Dynamické systémy a systémová dynamika. In *Dynamika systémů a udržitelnost*. 1. vyd. Brno: Nadace Partnerství, 2007. s. 25–68, 44 s. Soubor učebních textů.
- [8] Elaydi, S.: *An Introduction to Difference Equations* Department of Mathematics, Trinity University, San Antonio, 2005.
- [9] Samoilenko, A. M., Perestyuk, N. A.: *Impulsive Differential Equations* Institute of Mathematics, National Academy of Science of Ukraine, Kiev 1995.