Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka nestandardních úloh z matematiky

Vypracoval: Karel Vágner

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma *Sbírka nestandardních úloh z matematiky* jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 7. července 2023 Karel Vágner

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce, panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., a sice za odborné vedení, za ochotu, vstřícnost, poskytování materiálů a v neposlední řadě za cenné rady při tvorbě této práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zaměřuje na problematiku nestandardních sbírek úloh v matematice a jejich význam pro rozvoj matematických dovedností u žáků základních škol. Nestandardní sbírky úloh představují takové soubory úloh, které vybočují z tradičních matematických scénářů a podporují žáky nejen k přemýšlení mimo zaběhnuté postupy, ale také k aplikaci matematických konceptů v nejrůznějších kontextech.

Abstraction

This bachelor thesis focuses on the issue of non-standard collections of mathematical problems and their importance for the development of mathematical skills in elementary school pupils. Non-standard collections of problems represent such collections of problems that deviate from traditional mathematical scenarios and encourage pupils not only to think outside the established procedures, but also to apply mathematical concepts in a variety of contexts.

Obsah

1 Úvod

Matematika je jednou z nejzásadnějších vědních oblastí, které ovlivňují mnoho aspektů našeho života. Přestože je často spojována s číselnými výpočty a standardními problémy, může rovněž nabídnout mnohem více než jen pouhé rutinní operace. V dnešní době je kladen důraz na rozvoj kritického myšlení, tvůrčího problémového řešení a komunikace, přičemž právě matematika může v tomto směru sehrát zcela klíčovou roli.

Tato bakalářská práce obsahuje sbírku nestandardních úloh v matematice, které mohou posloužit jako prostředek pro rozvoj kreativity, inovace a problémového myšlení u žáků. Tyto úlohy se od tradičních standardních úloh odlišují zejména tím, že primárně nevyužívají algoritmické postupy a pevně daná pravidla, jež jsou pro tradiční úlohy zcela běžná. Naopak kladou důraz na nekonvenční přístup, netradiční postupy a na přemýšlení.

V průběhu práce jsou představeny konkrétní příklady nestandardních úloh, které ilustrují rozmanitost a komplexnost této problematiky, některé z příkladů jsou převzaty či inspirovány ze zdrojů uvedených na konci práce. Součástí jednotlivých příkladů je kromě zadání i ukázkové řešení. Úlohy jsou zadány slovně, přičemž součástí některých zadání bývá také obrázek. Obrázky plní v rámci úlohy nejrůznější funkce – to je popsáno v teoretické části práce. V zadání jsou pak uvedeny potřebné informace k řešení; některé informace jsou vyjádřeny implicitně a explicitně, v některých úlohách jsou potřebné informace pro vyřešení zadány pro změnu ve formě obrázku.

Teoretická část popisuje matematiku a její problematiku v rámci rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání a rámcový vzdělávací program pro gymnázia (dále již jako RVP ZV, resp. RVP G). Je zde vysvětlena podstata RVP a jsou zde zmíněny jeho důležité body. V teoretické části práce je též uvedeno, jak by měla být úloha zadána, a také poukázáno na možná úskalí kontextu zadání, jež by mohlo žákům činit problémy.

Teoretická část

2 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Ve vzdělávání je matematika nedílnou a zcela zásadní součástí. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě. Dle RVP ZV (MŠMT, 2021) se ve vzdělávání v matematice klade především důraz na porozumění myšlenkovým pochodům, matematickým pojmům a jejich vzájemnému působení (MŠMT, 2021).

Matematiku a její aplikaci, jedná se o název vzdělávací oblasti RVP, lze rozčlenit na 4 tematické okruhy, a to na *Číslo a početní operace*; *Závislosti, vztahy a práce s daty*; *Geometrie v rovině a v prostoru* a *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* (MŠMT, 2021).

V prvním okruhu *Číslo a početní operace* se žáci seznamují s aritmetickými operacemi. Učí se operace používat v jednotlivých úlohách, snaží se porozumět, proč je úloha řešena daným způsobem, atd. Později umějí spojit operaci s reálnou situací – získávají tedy významové porozumění.

V okruhu druhém, a sice *Závislosti, vztahy a práce s daty*, by si žáci měli osvojit způsoby odlišení určitých typů změn a závislostí, zejména z reálného života. Tyto změny pozorují žáci na příkladech grafů a tabulek, jednoduché příklady by měli zvládat řešit sami na papír; příklady složitějšího rázu naopak pomocí grafických kalkulátorů či počítačových softwarů.

V rámci okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* se žáci zaměřují na znázornění jednotlivých geometrických útvarů a na geometrické modelování reálné situace. Zjišťují různé polohy u objektů v rovině, resp. v prostoru, zjišťují délky, úhly, obvody a obsahy, resp. povrchy a objemy, učí se práci s rýsovacími potřebami. V některých příkladech se k nalezení řešení se může používat i počítačový software, např. GeoGebra.

V případě posledního okruhu, *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, se pracuje s úlohami, u nichž je nezávislá míra znalostí a dovedností školské matematiky, tedy nejsou tolik důležité znalosti – pro úspěšné řešení je potřebné převážně logické uvažování, jež následně vede k úspěšnému řešení. Tato složka je nedílnou a velmi důležitou součástí školské matematiky. Ve sbírce, kterou tato práce přináší, jsou zastoupeny všechny výše jmenované okruhy a dochází k jejich vzájemnému prolínán

3 Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Prostřednictvím matematiky má na gymnáziích docházet k utváření schopnosti geometrického vhledu, tedy *„prohloubení chápaní prostorových vztahů reálného světa"* (RVP G, 2020). Mělo by u žáků docházet k provázání dílčích částí učiva matematiky a také k uvědomění si věcí z reálného světa. Důležitou podstatou ve výuce je určení problému a zvážení strategií pro jeho úspěšné vyřešení (RVP G, 2020).

Žáci by měli v průběhu studia poznat, že matematika je různorodá, a to především v praktickém využití, například v ekonomice či společenských vědách. Žák by měl být schopen individuálním způsobem docílit úspěšného řešení, přičemž by měl být rovněž schopen odůvodnit své řešení a vědět, proč lze problém právě tímto způsobem vyřešit.

4 Matematická slovní úloha

Slovní úloha jako taková obsahuje jeden či více úkolů. Je zadána slovním kontextem, jejž můžeme kategorizovat jako *reálný, pseudo-reálný* nebo *imaginární* (Vondrová, 2019). V kontextu s numerickými údaji mohou být tyto údaje jednak zčásti zadané a jednak nevyjádřené – je tedy potřeba je v rámci úlohy nacházet, objevovat.

Postupy u řešení praktického a akademického problému se mohou lišit a na problém jako takový můžeme nahlížet několika možnými způsoby.

Jedním z těchto způsobů může být přístup pomocí kognitivního hlediska, jež lze rozdělit do sedmi kroků (Vondrová, 2019). Na samotném začátku je nejprve potřeba odhalit, jaké povahy je daný problém. Následně si samotný problém definujeme, poté si uspořádáme nám známé informace o problému. Dále se zhodnotí zdroje pro řešení, načež přichází otázka, jak problém řešit – je namístě zvolit strategii. Po zvolení přichází na řadu proces monitorování výsledku, kdy se snažíme dostat k řešení. Po jeho získání zvážíme, zda je naše řešení reálné a zda je korektní, tedy výsledek řešení zhodnotíme.

Pro matematické účely je ovšem bližší klasický model řešení matematické úlohy podle Polyi, jak udává ve své knize Vondrová (2019). Na začátku je podstatné pochopení samotného problému, tedy se dostavují otázky typu: co hledáme, co známe apod. Jakmile zjistíme problém, můžeme pokračovat vytvořením plánu, jak budeme postupovat v řešení úlohy. Následně realizujeme námi vymyšlený plán, po němž bychom měli získat výsledek, a následuje poslední bod tohoto modelu, a sice učinit pohled zpět. Pohled zpět lze chápat jako kontrolu kroků, kterými jsme dospěli k řešení, ale také uvědomění, zda se řešení nedalo nalézt i jiným způsobem.

4.1 Zadání úlohy

Dle Vondrové (2019) musí být úloha srozumitelná po jazykové stránce, tedy by se v zadání měla objevit taková jazyková struktura, která by pro žaky, jimž je úloha věnovaná, měla být dostatečně pochopitelná. Zadání úlohy by nemělo obsahovat např. archaismy.

Dále by ze zadání mělo být zřejmé, co mají žáci spočítat. V určitých zadáních slovních úloh se používají personifikované perspektivy – nejedná se o objektivizovaný popis, ale o popis situace z pohledu určité osoby. Pozitivem je snazší představa pro děti s méně rozvinutým abstraktním myšlením. U úlohy často záleží také na pořadí informací. Objeví-li se v zadání informace postupně tak, jak je žák k vyřešení úlohy bude používat, vychází to z našeho mateřského jazyka a jeho specifik, na která jsme odmala zvyklí – číst a psát zleva doprava apod. Žák by měl chybovat méně, nežli za předpokladu jiného uspořádání informací.

„*V původní Mathesiově koncepci (přetrvávající ve zjednodušené podobě ve školské praxi dones) šlo o pouze ‚povrchový' slovosled, kdy se bezpříznakově postupuje od základu k jádru, kdežto ve výpovědích nějak příznakových se uvádí napřed jádro a základ až po něm* (Vondrová, 2019, str. 28).*"* Mathesiova koncepce zde popisuje problematiku skladby ve větě.

Problém pro žáky může být obrázek u zadání, jenž má funkci pouze ilustrační, a není tedy pro vyřešení úlohy potřebný. Žáky může rozptylovat nebo odpoutat jejich pozornost od příkladu.

4.2 Nadbytečné informace v zadání slovní úlohy

Jde o takové zadání úlohy, v jehož kontextu se vyskytují nepotřebné informace pro vyšetření samotné úlohy.

- Můžeme si to uvést na příkladu: *Petr Novák z Brna měří 187 cm a váží 80 kg. Kolik cm má Jan Pokorný z České Lípy, pokud víme, že je o 6 cm nižší než Petr Novák z Brna?*
- Ta samá úloha by mohla znít i takto: *Petr měří 187 cm a je vyšší o 6 cm než Jan. Kolik cm má Jan?*

Znění vyplývající z obou zadání těchto úloh lze chápat u obou stejně a mají i totéž řešení. Problém je však v tom, že nadbytečné informace nemění pouze délku zadání úlohy, ale také se jejich vinou příklad jeví jako složitější. Z psychologického hlediska se žáci u takovéto úlohy musejí více soustředit, a věnují jí dokonce více energie už při samotném pokusu o její pochopení. Pro žáky je tedy složité nalézt podstatné informace vedoucí k vyřešení příkladu.

4.3 Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy

Úloha vždy nemusí být zadána slovně, tedy jak tomu tradičně bývá. Zadání úlohy může představovat náčrt doplněný o číslici a znaky, text doplněný obrázkem atd. Ve své knize Vondrová používá rozlišení obrázků na ***dekorativní***, ***reprezentativní***, ***organizační*** a ***informační*** (Vondrová, 2019).

Dekorativní obrázek není podstatný pro vyřešení úlohy, jak můžeme vydedukovat z názvu. Je čistě ozdobný. V této práci nalezneme tento typ obrázku u příkladu 12: Devět míčků.

Reprezentativní obrázek můžeme vysvětlit jako obrázek, který zobrazuje strukturu situace ilustračně (úlohu formou obrázku). V případě příkladu 5: Dlažba je možné chápat obrázek jako reprezentativní.

Organizační obrázek navádí žáka k určité možnosti, jak se dostat k řešení. Podobně jako obrázek u úlohy 14: Dort.

Obrázky informační jsou nosičem informace, která se nevyskytuje v řešení. Jsou tudíž důležité pro vyřešení úlohy jako takové. Obrázek tohoto typu je využitý v úloze 15: Cukrárna, kde jsou cena jednotlivých surovin a recept pouze na obrázku.

4.4 Jazyková explicitnost zadání úlohy

V úlohách se využívá explicitní a implicitní jazyk. Tyto formy vyjádření jsou odlišné v tom, že explicitní sdělení přímo informuje o věci, jak je. Oproti tomu u implicitního vyjádření se musíme zamyslet, abychom informace důležité pro následné řešení úlohy získali.

U zadání slovních úloh se můžeme také setkat s explicitním rozšířením autorova zadání. Pro řešení úlohy není jazyková explicitnost v zadání vždy důležitá (jak udává Hirschová), jen potvrzuje následné údaje v zadání příkladu (např. Jestliže víme, že žvýkačka stojí x Kč, tak kolik žvýkaček si mohu koupit, …) (Hirschová, 2017). Ve sbírce se vyskytuje u několika příkladů (příklad 3: Mince)

4.5 Slovní úloha s antisignálem

Jedná se o slovní úlohu, jejíž zadání v nás evokuje určitou představu operace, kterou bychom úlohu vyřešili. Jenže k řešení je potřebná jiná operace. Uvedeme to na příkladu: *Petr měří 187 cm. Je nižší o 6 cm než Jan. Kolik cm má Jan?*

U slovní úlohy tohoto typu by u nás mohl vyvstat dojem, že pro vyřešení stačí odečíst od výšky Petra 6 centimetrů. Slovní spojení „je nižší“ v nás právě evokuje užití odčítání. Ovšem ke správnému řešení je potřeba provést operaci sčítání, nikoliv odčítaní. Příklad s antisignálem je také ve sbírce v úloze 5: Dlažba.

Praktická část

5 Sbírka úloh

Úlohy, jež se vyskytují v této sbírce, jsou z velké části vytvořeny na základně inspirace, případně zcela převzaty. Ve sbírce se ovšem vyskytuje i několik úloh, které vytvořil autor sám.

Úlohy 1, 8, 9 a 10 byly inspirovány úlohami ze zdroje *University of Waterloo – Problem of the week*. Z tohoto zdroje jsou rovněž převzaty úlohy 2, 4, 7, 11 a 12. Úlohy 15 a 16 byly převzaty z díla S. Kowala (*Matematika pro volné chvíle*, 1986), odkud byla též čerpána inspirace k úlohám 13 a 14.

5.1 Šetření energie

Úloha 1.

A) Novákovi si zakoupili novou sušičku. Sušička odebírá 5 kWh (kilowatthodin) na jedno vysušení várky prádla. V průměru rodina vypere 4 várky prádla za týden, z toho ale každou druhou várku rodina usuší na prádelní šňůře (průměrně, jelikož v létě rodina suší více prádla venku, tedy méně v sušičce a v zimě je to naopak).

Kolik tedy rodina uspoří za rok kWh? Kolik je to korun, pokud víme, že jedna kWh stojí přibližně 6 Kč (zaokrouhlená hodnota z konce února 2023)?

B) Pana Nováka napadlo, že by spotřebu energie snížili koupí fotovoltaické elektrárny (pro řešení úlohy nebereme náklady elektrárny v potaz). Pan Novák si procházel různé možnosti a zalíbila se mu tato:

Firma montuje panely na střechu rodinného domu. Energie je z panelů svedena do baterií, které jsou uloženy ve speciální skříni v technické místnosti. Následně energie z baterií putuje do rozvaděče a pokrývá spotřebu rodiny. Během roku je průměrný denní svit 4 hodiny, přičemž výkon panelu je 400 W.

Pan Novák si myslí, že rodině by stačil 1 panel, aby byl tento zdroj energie schopen pokrýt energii spotřebovanou ročním provozem sušičky. Je jeho odhad správný? Jestliže ano, vypočítejte přebytek kWh vůči roční spotřebě sušičky.

Řešení:

A)

- Rodina vysuší každou druhou várku prádla v pračce. Pak tedy víme:

Časový úsek	Počet vypraných praček	Počet vysušených praček na šňůře
2 vyprané várky	2	1
týden	4	2

- Rok má 52 týdnů, tedy můžeme určit, kolikrát za rok rodina suší prádlo na šňůře.

$$52 \cdot 2 = 104$$

- Teď jsme vypočítali, kolikrát za rok rodina použije prádelní šňůru. Nyní vypočítáme, kolik rodina ušetří za rok kWh.

$$104 \cdot 5 = 520 \text{ kWh}$$

- Když víme roční spotřebu, tak můžeme i určit, kolik korun to bude rodinu ročně stát.

$$520 \cdot 6 = \mathbf{3120\ K\check{c}}$$

- Novákovi bude roční provoz stát 3120 Kč.

B)

- Vypočítáme, kolik energie vyrobí 1 panel za 1 den.

$$400 \cdot 4 = 1600\ \mathrm{Wh}$$

- Tedy panel za 1 průměrný den vyrobí 1,6 kWh. Následně vypočítáme roční výrobu energie 1 panelu.

$$1{,}6 \cdot 365 = 584\ \mathrm{kWh}$$

- Pomocí výpočtu jsme získali informaci, kolik energie vyrobí 1 panel ročně. To nyní porovnáme s roční spotřebou sušičky.

$$584 > 520$$

- Zjistili jsme, že 1 panel coby zdroj energie dokáže ročně vyrobit tolik energie, aby bylo možné pokrýt třeba právě spotřebu sušičky – ještě o několik kWh uspoříme navíc. Teď si spočítáme kolik.

$$584 - 520 = \mathbf{64\ kWh}$$
$$64 \cdot 6 = \mathbf{384\ K}\check{c}$$

- Výsledkem tedy je, že Novákovi pořízením fotovoltaické elektrárny s jedním panelem ušetří pro ostatní spotřebiče 64 kWh (což je 384 Kč), a budou tudíž schopni pokrýt roční energetickou spotřebu sušičky.

5.2 Mince

Úloha 2. Anička nikdy nebyla v cizí zemi, ale i tak sbírá mince z různých koutů světa, které dostává od někoho z rodiny nebo od svých blízkých přátel. Ve sbírce má zatím 10 mincí z Afriky, 6 mincí z Asie, 7 mincí z Jižní Ameriky a 8 mincí z Evropy. Aniččin dědeček přidal do její sbírky mince z Austrálie, aniž by jí řekl, kolik jich přidal. Anička od něj věděla pouze to, že kdyby náhodně vybrala minci ze sbírky, tak pravděpodobnost, že vytáhne minci z Afriky nebo Asie, je $\frac{4}{9}$. Anička se zamyslela a po chvíli přemýšlení už věděla, kolik mincí dědeček do její sbírky přidal.

Kolik Aniččin dědeček přidal mincí z Austrálie do její sbírky?

Řešení:

Anička má tyto počty mincí z jednotlivých kontinentů:

- 10 mincí z Afriky
- 6 mincí z Asie
- 7 mincí z Jižní Ameriky
- 8 mincí z Evropy
- x mincí z Austrálie

Pravděpodobnost volby mince z Afriky nebo Asie je $\frac{4}{9}$, mincí z těchto kontinentů je 16, víme, že mincí je celkem 10 + 6 + 7 + 8 + x = 31 + x, což je 100 %. Pomocí pravděpodobnosti vypočítáme, kolik mincí z Austrálie dal dědeček Aničce.

- počet všech mincí $10 + 6 + 7 + 8 + x = 31 + x$
- mince z Afriky a Asie $10 + 6$
- pravděpodobnost mince z Afriky nebo Asie $\frac{4}{9}$

$$\frac{4}{9} = \frac{16}{31 + x}$$

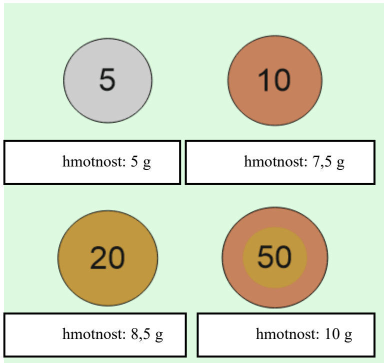
$$4 \cdot (31 + x) = 16 \cdot 9$$

$$124 + 4x = 144$$

$$4x = 20$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

Úloha 3. Petr a Pavel si hráli s mincemi, které si naspořili, a zjistili, že společně ušetřili mince v hodnotách 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč a 50 Kč, které dohromady váží 475 g. Dále vědí, kolik váží jedna mince samotná (údaje v tabulce se mírně odlišují od reálných hodnot), že celkový počet mincí je 66 a že 10 Kč je $\frac{1}{11}$ a 20 Kč je $\frac{40}{88}$ ze všech mincí. Dokáží chlapci určit hodnotu našetřených mincí? Pokud ano, kolik je to Kč?



Obrázek 1: *Obrázek k úloze 3*

Řešení:

Pro přehlednost si přepíšeme, co víme ze zadání. Vypočítáme si počet 10 Kč a 20 Kč.

- 10 Kč $\frac{1}{11} \cdot 66 = 6$
- 20 Kč $\frac{40}{88} \cdot 66 = 30$
- Celkem 66

Dále víme, že mají ještě mince hodnot 5 Kč a 50 Kč. Označíme počet 5 Kč mincí jako x a počet 50 Kč jako zbytek do celku, tedy $66 - (30 + 6 + x)$.

- 5 Kč x
- 10 Kč $\frac{1}{11} \cdot 66 = 6$
- 20 Kč $\frac{40}{88} \cdot 66 = 30$
- 50 Kč $66 - (30 + 6 + x) = 30 - x$
- Celkem 66

Data si přepíšeme pro větší přehlednost do tabulky.

Hodnota	**Počet (ks)**	**Hmotnost mincí stejné hodnoty (g)**	**Hodnota v korunách**
5 Kč	$30 - x$	$5 \cdot (30 - x)$	$5 \cdot (30 - x)$
10 Kč	6	$6 \cdot 7{,}5 = 45$ g	$10 \cdot 6$
20 Kč	30	$30 \cdot 8{,}5 = 255$ g	$30 \cdot 20$
50 Kč	x	$10 \cdot \mathrm{x}$	$50 \cdot \mathrm{x}$
Celkem	66	475 g	y

$$5 \cdot (30 - \mathrm{x}) + 45 + 255 + 10 \cdot \mathrm{x} = 475$$

$$5 \cdot (30 - \mathrm{x}) + 300 + 300 + 10 \cdot x = 475$$

$$150 - 5 \cdot \mathrm{x} + 300 + 10 \cdot \mathrm{x} = 475$$

$$5 \cdot \mathrm{x} = 25$$

$$\mathbf{x = 5}$$

$$\mathrm{y} = 5 \cdot (30 - \mathrm{x}) + 6 \cdot 10 + 30 \cdot 20 + 50 \cdot \mathrm{x}$$

$$\mathrm{y} = 5 \cdot (30 - 5) + 60 + 600 + 50 \cdot 5$$

$$\mathrm{y} = 5 \cdot 25 + 660 + 250$$

$$\mathrm{y} = 125 + 910$$

$$\mathbf{y = 1035\ \text{Kč}}$$

5.3 Hra s míčky

Úloha 4. Iva vytvořila hru. Pro vytvoření hry potřebujeme pytlík nebo batoh, fix a 3 baseballové míčky. Míčky postupně očíslujeme, budeme tedy mít 1 míček s číslicí 1, druhý s číslicí 2 a třetí s číslicí 3. Následně očíslované míčky vložíme do pytlíku. Teď si vysvětlíme, jak probíhá hra.

Hru hraje vždy jeden hráč a Iva ho kontroluje. Začíná se tím, že hráč i Iva dají vklad 1 bonbón. Následně si hráč vytáhne míček z pytlíku, zaznamená si jeho číslo a poté ho vrátí zpátky do pytlíku – to zopakuje ještě dvakrát. Poté zaznamenaná čísla společně vynásobí. Je-li součin číslic nižší než 8, hráč vyhrává bonbóny, pokud bude součin vyšší než 8 včetně, vyhrává Iva.

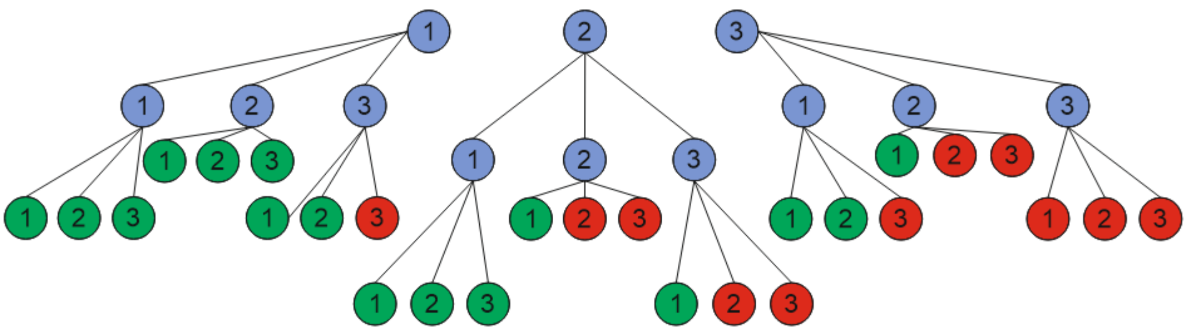
Je tato hra spravedlivá?

Jaká je pravděpodobnost, že hráč vyhraje?

Řešení:

Vypsání všech možností tažení:

- tato metoda je zbytečně dlouhá, pro složitější příklad bude toto řešení příliš časově náročné.
- 111; 112; 113; 121; 123; 131; 132; ...; 332; 333



Obrázek 2: *Obrázek k úloze 4*

Pomocí kombinatoriky:

- Víme, že jsou 3 tahy a každý tah můžeme vytáhnout 1 ze 3 míčků. Zjistíme, kolik je možností tahů pro součin 6. Po prvočíselném rozkladu víme, že potřebujeme vytáhnout míčky s čísly 1, 2 a 3.
    - Takových možností pro tento součin je hned několik. První můžeme vytáhnout 1 možnost ze 3 odlišných (1, 2 a 3). Pro druhý tah nám zůstanou 2 možné tahy, pokud byl například při prvním tahu vytáhnut míček s číslem 1. Pro druhý tah se tedy vybírá mezi dvěma možnostmi, a to 2, nebo 3. Poslední tah je už daný, jelikož je pro součin 6 potřeba vytáhnout ještě poslední možnost. Tedy víme, že součin 6 vytáhneme 6 možnými tahy ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$).
    - Poté se vyzkoušíme rozdělení čísel nižších než 8 na prvočíselný součin (obsahující pouze z prvočísel 1, 2, 3). Zjistíme tak počet vítězných tažení.
        - **1, 1, 1** – 1 možný tažení
        - **1, 1, 2** – 3 možné tažení
        - **1, 1, 3** – 3 možné tažení
        - **1, 2, 2** – 3 možné tažení
        - **1, 2, 3** – 6 možných tažení (123, 132, 213, 231, 312, 321)
- To je 27 možných tahů – to zjistíme tak, že máme 3 tahy: na první tah jsou 3 možnosti, na druhý a třetí tah také, tedy 3^3 nebo $3 \cdot 3 \cdot 3$, z nichž je **16 výherních možností**. Z toho tedy vyplývá, že pravděpodobnost výhry je $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{27}}$.
- Hra není spravedlivá z pohledu Ivy, jelikož pravděpodobnost výhry hráče a Ivy se nerovnají ($11 < 16$).

5.4 Závody

Úloha 5. V nedalekém městě se konal závod běhu 4členných družstev na vzdálenost 20 km. Přátelé z okolí udělali tým. Členy týmu byli Andrea, Ben, Čenda a Dana. Z této vzdálenosti každý z týmu uběhl odlišnou část trati, protože vzdálenost, kterou mají členové týmu uběhnout, nebyla zadána. Andrea uběhla $\frac{1}{8}$ z celkové délky závodu, Ben 40 % z celkové délky závodu, Čenda uběhl průměrnou délku Andrey a Bena, Dana běžela poslední část závodu.

Kolik metrů z celkové délky závodu uběhla Dana?

Řešení:

Závod má délku 20 km, tedy 20 000 metrů. Následně vypočítáme pomocí zadaní délku uběhnutých úseků jednotlivých členů týmu. Průměrná délka se spočítá jako součet délky Andrey a Bena podělený 2 (počet sčítanců). Délku, kterou uběhla Dana, neznáme, a tak ji označíme neznámou x.

- Andrea $\frac{1}{8} \cdot 20000$
- Ben $0{,}4 \cdot 20000$
- Čenda $\left(\frac{\frac{1}{8}+0{,}4}{2}\right) \cdot 20000 = \left(\frac{\frac{1}{8}+\frac{2}{5}}{2}\right) \cdot 20000$
- Dana x

Vzdálenost Dany dopočítáme pomocí rovnice o jedné neznámé. Na jedné straně rovnice bude celková vzdálenost a na druhé budou jednotlivé díly trasy, které v součtu mají dát také celek.

$$20000 = \frac{1}{8} \cdot 20000 + 0{,}4 \cdot 20000 + \left(\frac{\frac{1}{8}+\frac{2}{5}}{2}\right) \cdot 20000 + x$$

$$20000 = 2500 + 8000 + \left(\frac{\frac{5+16}{40}}{2}\right) \cdot 20000 + x$$

$$20000 = 2500 + 8000 + \left(\frac{21}{80}\right) \cdot 20000 + x$$

$$20000 = 2500 + 8000 + 5250 + x$$

$$20000 = 15750 + x \;/-15750$$

$$\boldsymbol{x = 4250\ m}$$

Dana uběhla 4250 m z celé délky závodu.

Úloha 6. Na školní olympiádě běželi chlapci závod na 400 m. Do finále postoupilo 6 chlapců, a to David, Honza, Karel, Marek, Petr a Vašek. Při doběhu do cíle se chlapci nezařadili za sebe, tedy tak, jak doběhli do cíle. Došlo k chaosu, nikdo nevěděl přesné pořadí závodníků. Rozhodčí si pamatovali pouze následující informace: Marek byl první nebo poslední, naopak David nebyl první ani poslední, Honza se umístil na medailové pozici (první až třetí místo), Karel doběhl buď na jedné z prvních dvou pozic nebo na jedné z posledních dvou, Petr doběhl hned za Markem, Václav doběhl hned za Karlem.

Řešení:

Pro určení pořadí nám pomůže jednoduchá tabulka, do které si pro přehlednost zapíšeme možná umístění chlapců. Plus bude symbolizovat, že se chlapec na daném místě mohl umístit, minus nikoliv.

	Marek	**David**	**Honza**	**Karel**	**Petr**	**Vašek**
1.	+	–	+	+	–	–
2.	–	+	+	+	+	+
3.	–	+	+	–	–	+
4.	–	+	–	–	–	–
5.	–	+	–	+	–	–
6.	+	–	–	+	–	+

Po zakreslení zjišťujeme, že Petr má být za Markem, tedy Marek nemůže být poslední. Tím pádem jsou obsazeny první dvě příčky.

	Marek	**David**	**Honza**	**Karel**	**Petr**	**Vašek**
1.	+	–	+	+	–	–
2.	–	+	+	+	+	+
3.	–	+	+	–	–	+
4.	–	+	–	–	–	–
5.	–	+	–	+	–	–
6.	–	–	–	+	–	+

Po zapsaní do tabulky se dozvídáme, že Honza je třetí. Potom můžeme říct, že Karel nemůže být na prvních dvou pozicích, jež jsou již obsazeny jednoznačně (Marek a Petr), tedy pro Karla zbývá jedna z posledních dvou. Víme, že Vašek se umístil až za Karlem, tak určíme, že Karel se umístil pátý a Vašek šestý.

Zbyla už jen jedna pozice, a to je čtvrté místo, které musel obsadit David.

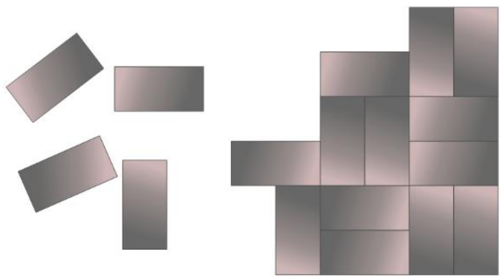
	Marek	**David**	**Honza**	**Karel**	**Petr**	**Vašek**
1.	+	–	–	–	–	–
2.	–	–	–	–	+	–
3.	–	–	+	–	–	–
4.	–	+	–	–	–	–
5.	–	–	–	+	–	–
6.	–	–	–	–	–	+

5.5 Dlažba

Úloha 7. Dělník dělá terénní úpravy pozemku u rodinného domu. Má za úkol na něj položit i zámkovou betonovou dlažbu. Víme, že po úpravách má pozemek plochu 53,5 m^2. Jedna betonová zámková dlaždice má délku 20 cm – ta je o 10 cm větší než šířka. V obchodě se prodává paleta těchto dlaždic po 960 kusech, přičemž 1 kus stojí 6 Kč. Bohužel se paleta prodává v celku – nelze zakoupit dlaždice po jednotlivých kusech.

Zjistěte, kolik betonových zámkových dlaždic je potřeba na pokrytí plochy pozemku.

Spočítejte, kolik korun by stála dlaždice, pokud by dělník neprodal zbytek dlaždic, co by mu zbyl na paletě.



Obrázek 3: *Obrázek k úloze 7*

Řešení:

Jako první zjistíme plochu jedné dlaždice. To zjistíme jako výpočet obsahu obdélníku, tedy:

$$S = a \cdot b$$

- Plocha jedné zámkové dlaždice: $20 \cdot 10 = 200\ \text{cm}^2$

Potom zjistíme, jaký počet dlaždic bude potřeba na pokrytí plochy pozemku. To zjistíme jako podíl plochy pozemku a plochy jedné dlaždice. Je důležité pohlídat si stejné jednotky, musíme tedy převést m^2 na cm^2 nebo obráceně.

- Počet dlaždic: $53{,}5 \div 0{,}02 = \mathbf{2675\ ks}\ (535000 \div 200)$

Když víme počet potřebných dlaždic, tak známe i informaci, kolik palet máme zakoupit. To jsou 3 palety, přičemž 1 dlaždice stojí 6 korun. Avšak zajímá nás také, kolik bude stát 1 dlaždice, pokud dělník neprodá zbylé dlaždice.

- Cena za 1 dlaždici, pokud dělník neprodá zbytek palety:

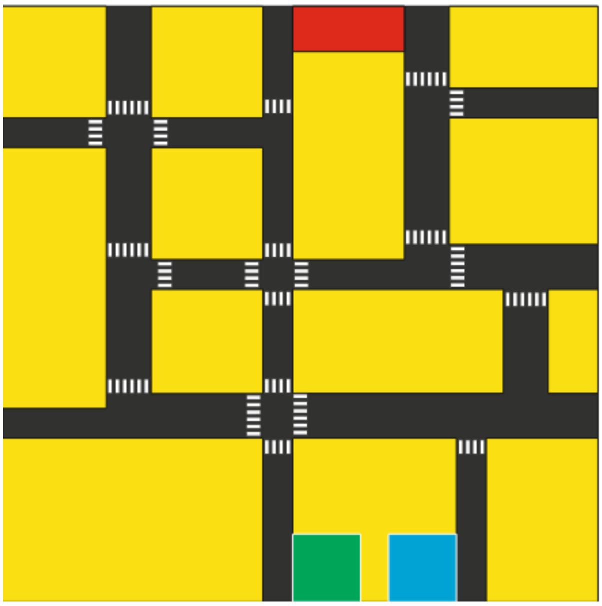
$$(2880 \cdot 6) \div 2675 = \mathbf{6,46\ Kč}$$

Na pokrytí pozemku je potřeba 2675 ks dlažby. Pokud by dělník neprodal zbytek dlaždic, tak by 1 dlaždice stála 6,46 Kč.

5.6 Cesta

Úloha 8. Petra chvátá domů z práce a své auto parkuje na parkovišti obchodního domu (zelený čtverec na obrázku níže). Po měsíci zjistila, že nejrychlejší cesta domů je taková, při které přejede přes co nejméně přechodů. Také už ví, že obchodní dům má i druhý výjezd (modré políčko), ale tento výjezd je více používaný. Kdyby ho Petra využila, tak se na cestě zpozdí stejně dlouhou dobu, jako kdyby přejela přes 2 přechody. Dále ví, že na křižovatce se 4 přechody se doba každého přejetého přechodu kvůli velkému provozu zdvojnásobí.

Určete cestu, kudy Petra pravidelně jezdí, chce-li být doma za co nejkratší čas.



Obrázek 4: *Mapa k úloze 8*

Řešení:

Vypsání různých možností:

= 2 · počet přejetých přechodů na křižovatce se 4 přechody + počet přejetých přechodů

= celkem přechodů

= 2 · (4) + 3
= 11

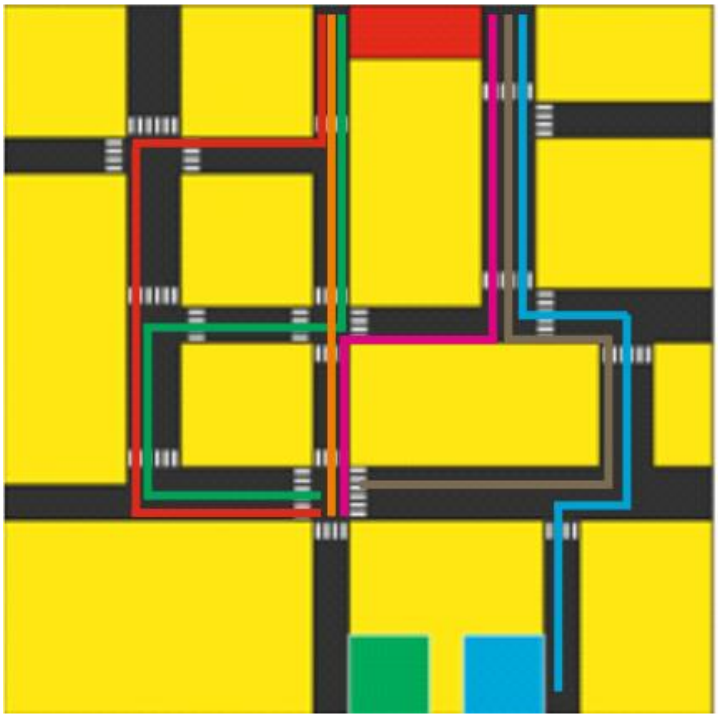
= 2 + 5
= **7**

= 2 · (4) + 1
= 9

= 2 · (2) + 4
= 8

= 2 · (2) + 4
= 8

= 2 · (4) + 2
= 10



Obrázek 5: *Mapa s řešení k úloze 8*

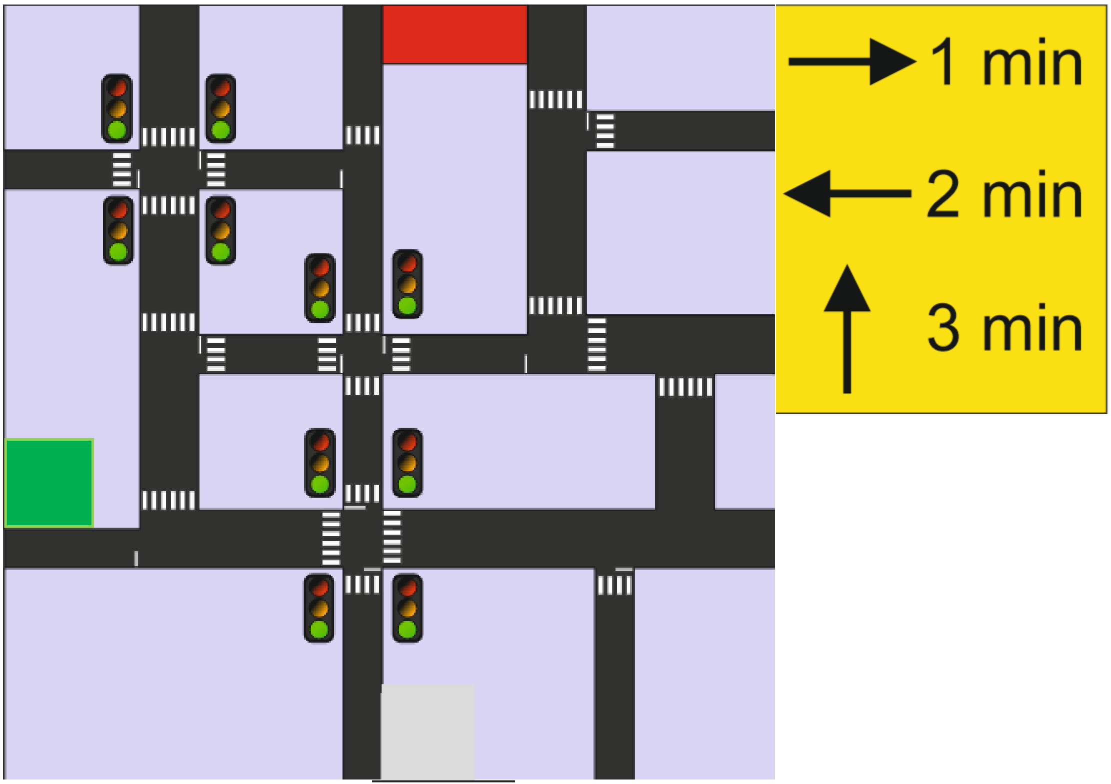
Petra na cestu domů z obchodního centra používá modrý výjezd a modrou cestu.

Úloha 9. Matěj přes zimní prázdniny zkoumal provoz ve městě. Vždy po cestě domů (zelený čtverec na obrázku níže) od své babičky (červený obdélník na obrázku) a naopak.

Po prázdninách si sepsal tyto poznatky:

- Na vedlejších silnicích je provoz pomalý, proto je cesta dvakrát delší než na hlavních silnicích (na minimapě to rozeznáme díky šířce silnice hlavní silnice lišící se od vedlejších – hlavní silnice je širší než vedlejší silnice).
- Pokud auto během cesty projede přes 2 křižovatky se semafory, tak právě na jedné z nich bude červená a auto se zpomalí na cestě o 3 minuty.
- Odbočení doprava trvá průměrně 1 minutu, doleva 2 minuty, rovně 3 minuty (viz žlutá tabulka).
- Časová délka cesty se mění po každé křižovatce (kde si řidič může vybrat změnu směru).

Určete trasu, která je podle Matějových poznatků časově nejkratší a nejdelší.



Obrázek 6: *Mapa k úloze 9*

Řešení:

(semafor je značen s)

$= 2 + 2 + 6 + 2 + 3 + s$

$= 15 + s = 15\ \text{min}$

$= 2 + 2 + 6 + 6 + s$

$= 16 + s = 16\ \text{min}$

$= 2 + 3 + 2 + 4 + s$

$= 11 + s = 11\ \text{min}$

$= 3 + 4 + 6 + 6 + 2 \cdot s$

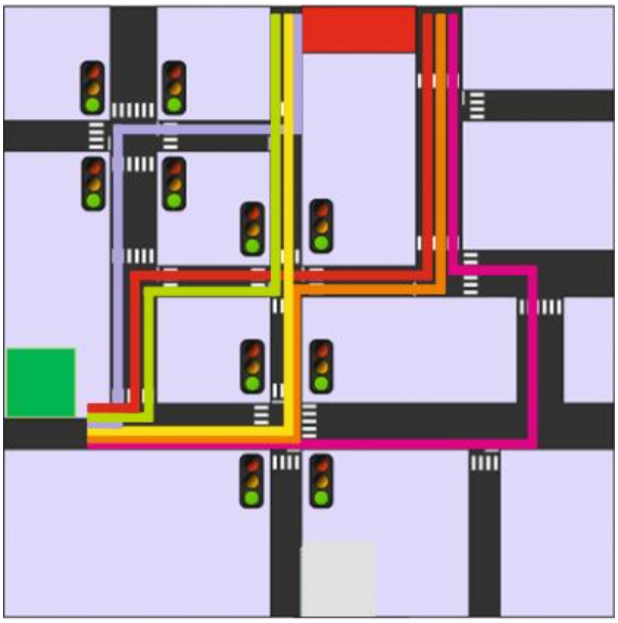
$= 19 + 2 \cdot s = 22\ \text{min}$

$= 3 + 4 + 2 + 2 + 3 + 2 \cdot s$

$= 14 + 2 \cdot s = 17\ \text{min}$

$= 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 3 + s$

$= 17 + s = 17\ \text{min}$



Obrázek 7: *Mapa řešení k úloze 9*

Nejrychlejší trasa je světle fialová, naopak časově nejdelší trasou je trasa žlutá.

5.7 Rybář

Úloha 10. Petr je vášnivým rybářem a pro svůj koníček potřebuje různé návnady. Většinou ryby chytá na třpytku nebo žížaly, ale používá i jinou návnadu. Zítra by Petr chtěl vyrazit na ryby, ale předtím potřebuje nasbírat žížaly, neboť mu z minulé výpravy zbývají už jen 2. Petr sbírá žížaly podle údajů v tabulce.

Doba hledání (min)	0	10	20	30	40
Počet všech žížal	2	5	8	11	14

1. Určete, kolik času by Petr potřeboval, aby měl celkem 20 žížal (předpokládáme, že Petr sbírá žížaly na místě, kde je běžně nevysbírá)
2. Kolik by Petr sesbíral žížal za x hodin?

Řešení:

A)

- Podle tabulky víme, že Petr sebere 5 žížal za 10 minut a že na začátku už měl 2. Můžeme určit počet sesbíraných žížal za první hodinu.

$$5 - 2 = 3$$

- Zjišťujeme, že Petr sesbírá během prvních 10 minut 3 žížaly. Ověříme si, zda se jedná o stejný pravidelný počet sesbíraných žížal i během jiných 10minutových intervalů.
  - druhý interval $8 - 5 = 3$
  - třetí interval $11 - 8 = 3$
  - čtvrtý interval $14 - 11 = 3$

- Ověřili jsme si, že Petr během 10 minut sesbírá pravidelně 3 žížaly. Teď spočítáme, za jak dlouho bude mít Petr 20 žížal. Počet 10minutových intervalů je pro nás neznámou x, kterou spočítame pomocí rovnice o jedné neznámé.

$$\text{celkem žížal} = \text{intervalový přírůstek žížal} \cdot \text{počet intervalů} + 2$$
$$20 = 3 \cdot x + 2$$

$$18 = 3 \cdot x$$

$$x = 6 \text{ intervalů}$$

- Aby měl Petr 20 žížal, potřebuje tedy 1 hodinu času (60 minut).

B)

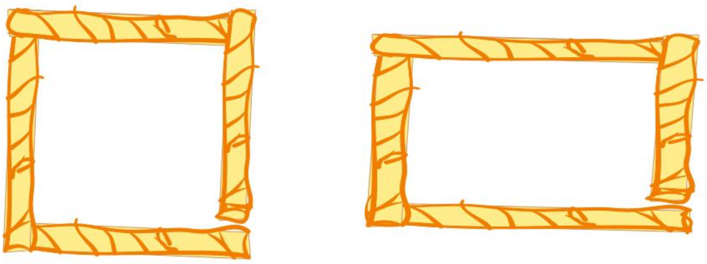
- Známe počet žížal, který Petr posbírá za každých 10 minut, což jsou 3 žížaly. Je nám známo, že ještě před sbíráním měl 2 žížaly z minule. Celkový počet žížal označíme jako y a počet 10minutových intervalů jako x. Potom tedy za x intervalů Petr nasbírá:

$$y = 3x + 2$$

5.8 Provaz

Úloha 11. Šimon má za úkol rozříznout provaz o délce 108 cm, z jehož jedné části má utvořit strany čtverce a z druhé by měl vytvořit strany obdélníku (podobně, jako je tomu na obrázku níže). O obdélníku navíc ví, že jedna jeho strana je délky 6 cm. Oba konce části provazu se dotýkají, ale tak, aby se nepřekrývaly. Dále ví, že obsah čtverce má být roven obsahu obdélníku.

Určete, kolik budou měřit části provazu po rozříznutí.



Obrázek 8: *Obrázek k úloze 11*

Řešení:

Víme, že obsah čtverce se vypočítá jako $S_{čtverec} = a \cdot a\ (a^2)$. Rovněž víme, že obvod čtverce se spočítá jako $o_{čtverec} = 4 \cdot a$

Obsah obdélníku se vypočítá jako $S_{obdelníku} = a \cdot b$ (v našem případě si to označíme $S = b \cdot c$), obvod obdelníku jako $o_{obdelníku} = 2 \cdot (a + b)$ (v našem případě $o = 2 \cdot (b + c)$.

Je nám známa délka provazu 108 cm, která se má rovnat obvodu čtverce a obvodu kruhu.

Tedy víme, že:

$$108 = o_{čtverce} + o_{obdelníku}$$

$$108 = 4 \cdot a + 2 \cdot (b + c)$$

$$108 = 4 \cdot a + 2 \cdot (6 + c)$$

- Dále je nám ze zadání známo, že obsahy čtverce a obdélníku se rovnají.

$$S_{čtverec} = S_{obdelník}$$

$$a^2 = b \cdot c$$

$$a^2 = 6 \cdot c$$

$$c = \frac{a^2}{6}$$

- Využijeme znalosti 2 rovnic a z jedné dosadíme do druhé – získáváme tak rovnici o jedné neznámé.

$$108 = 4 \cdot a + 2 \cdot \left(6 + \frac{a^2}{6}\right)$$

$$108 = 4a + 12 + \frac{a^2}{3}$$

$$0 = \frac{a^2}{3} + 4a - 96$$

$$0 = a^2 + 12a - 288$$

- Dostali jsme předpis kvadratické funkce. Vypočítáme stranu a pomocí diskriminantu.

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \mp \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}}}{2 \cdot \mathrm{a}}$$

$$a_{1,2} = \frac{-12 \mp \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-288)}}{2 \cdot 1}$$

$$a = \frac{-12 \mp \sqrt{144 + 1152}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{-12 \mp \sqrt{1296}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{-12 \mp 36}{2}$$

$$a_1 = \frac{-12+36}{2} \qquad a_2 = \frac{-12-36}{2}$$

$$a_1 = 12 \qquad a_2 = -24$$

- a je tedy 12 cm, jelikož není možné, aby byla délka strany záporná.
- Teď dopočítáme stranu c.

$$c = \frac{a^2}{6}$$

$$c = \frac{12^2}{6}$$

$$c = \frac{144}{6}$$

$$c = 24 \text{ cm}$$

5.9 Trojúhelník

Úloha 12. Je dán trojúhelník ABC, o kterém víme, že bod D půlí stranu a.

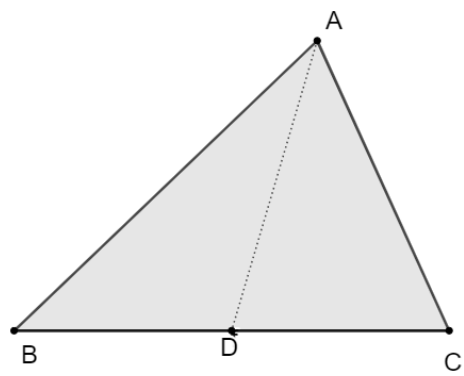
Dále víme:

$|BD| = 6$ cm,

$|AD| = 13$ cm,

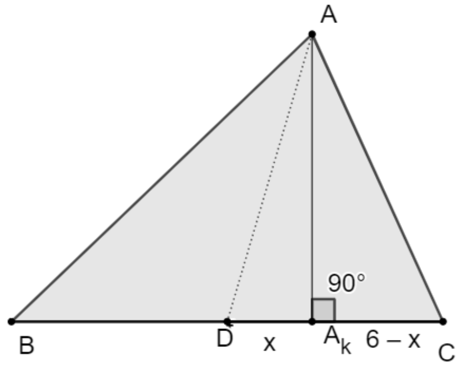
$S = 72$ cm^2.

Zjistěte velikosti zbývajících stran trojúhelníku ABC.



Obrázek 9: *Obrázek k úloze 12*

Řešení:



Obrázek 10: *Obrázek k řešení úlohy 12*

$|BC| = |BD| + |DC|$, jelikož D půli stranu BC, pak platí $|BC| = 2 \cdot |BD|$.

$|BC| = 12\ cm$, potom můžeme dopočítat výšku trojúhelníku ABC, protože:

$S_{ABC} = \frac{|BC| \cdot v_a.}{2}$

Tedy po dosazení:

$$S_{ABC} = \frac{|BC| \cdot v_a.}{2}$$

$$144 = 12 \cdot v_a$$

$$v_a = \frac{144}{12}$$

$$v_a = 12 \text{ cm}$$

Po zjištění výšky na stranu a dopočítáme *x* z trojúhelníku AA_kD pomocí Pythagorovy věty.

$$|AD|^2 = |x|^2 + |AA_k|^2$$

$$|x|^2 = 13^2 - 12^2$$

$$|x|^2 = 169 - 144$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

Teď už můžeme dopočítat AB a AC:

- Z trojúhelníku AA_kB spočítáme AB přes Pythagorovu větu
  - Známe $A_kB = 11$ cm, AA_k = 12 cm

$$AB = \sqrt{|AA_k|^2 + |A_kB|^2}$$

$$AB = \sqrt{|12|^2 + |11|^2}$$

$$\text{AB} = \sqrt{144 + 121}$$

$$AB = \sqrt{265}\ \text{cm}$$

- Z trojúhelník AA_kC spočítáme AC přes Pythagorovu větu
  - Známe $A_kC = 1$ cm, AA_k = 12cm

$$AC = \sqrt{|AA_k|^2 + |A_kC|^2}$$

$$AC = \sqrt{|12|^2 + |1|^2}$$

$$AC = \sqrt{145}\ \text{cm}$$

5.10 Vagóny

Úloha 13. Nádražím projely 3 historické vlaky. První měl 630 míst k sezení, druhý 462 a třetí 546. Také víme, že všechny vagóny měly stejnou kapacitu míst (kapacita míst byl největším možným).

Určete počet míst k sezení v jednom vagónu.

Řešení:

Řešením je největší společný dělitel počtu vojáků ve vlaku.

- 1. vlak 630 míst
- 2. vlak 462 míst
- 3. vlak 546 míst

A) Nalezení přes prvočíselný rozklad

Uděláme prvočíselný rozklad a nalezneme největší společní dělitel.

462	
231	2
77	3
11	7
1	11

546	
273	2
91	3
13	7
1	13

630	
315	2
63	5
9	7
3	3
1	3

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ (resp. $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$)

Všechna 3 čísla mají společné dělitele $2, 3, 7$. Tedy největším společným dělitelem je číslo $\mathbf{42 = 2 \cdot 3 \cdot 7}$

B) Nalezení přes postupné odčítání

- Spočívá v tom, že postupně odečítáme menší číslo od čísla většího, až se dostaneme k poslednímu nejmenšímu kladnému zbytku, který je největším společným dělitelem.

$$D(630{,}546{,}462) = 630 - 462, 546 - 462, 462$$

$$D(630{,}546{,}462) = 168, 84, 462$$

$$D(462{,}168{,}84) = 462 - 2 * 168, 168 - 84, 84$$

$$D(462{,}168{,}84) = 126, 84, 84$$

$$D(126{,}84) = 126 - 84, 84$$

$$D(126{,}84) = 42, 84$$

$$D(84{,}42) = 84 - 42, 42$$

$$D(42{,}42) = \mathbf{42}$$

5.11 Eiffelova věž

Úloha 14. Francouzský inženýr Gustave Eiffel vybudoval mezi lety 1889–1930 v Paříži věž vysokou 300 m. Dnes má dominanta francouzské metropole výšku 324 m, jelikož byl na vrchol přidán během let vysílač. Věž je členěna na 3 patra. Na postavení věže bylo potřeba více než 8000 t ocele.

Kolik modelů by se dalo vyrobit z oceli, ze které je postavena Eiffelova věž, víme-li, že 1 model by měřil 15 cm a vážil 4 gramy, a bereme-li v potaz, že model by byl dokonalou kopií originálu?

Řešení:

Počet kusů zjistíme jako podíl hmotností, ale nejprve je potřeba převést hmotnosti na stejné jednotky.

- originál = $8\,000\ t = 8\,000\,000\ kg = 8\,000\,000\,000\ g$
- model = $4\ g$

$$počet\ modelů\ =\ x$$

$$x = \frac{m_{originál}}{m_{model}}$$

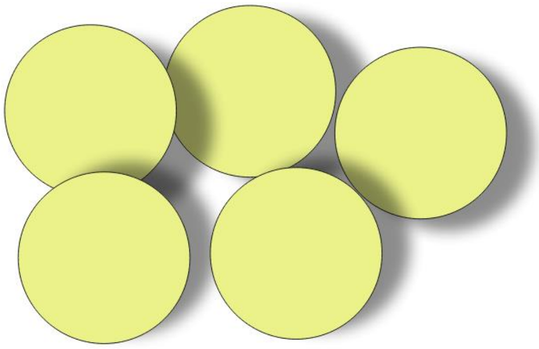
$$x = \frac{8\,000\,000\,000}{4}$$

$$x = 2\,000\,000\,000\ \text{ks}$$

Z oceli, ze které je Eiffelova věž zhotovena, by se mohlo být vyrobeno 2 000 000 000 kusů modelů, jež by vážily 4 g a měřily 15 cm.

5.12 Devět míčků

Úloha 15. Máš 9 pingpongových míčků. Jeden z nich je těžší než ostatní. Tvým úkolem je nalézt těžší míček po dvou váženích na miskových vahách bez závaží.



Obrázek 11: *Obrázek k úloze 15*

Řešení:

Rozdělíme 9 míčků do 3 trojic. Vybereme si na první vážení 2 trojice: jednu dáme na levou stranu váhy a druhou na pravou stranu váhy.

Očekávaným výsledkem vážení bude:

A) Misky jsou v rovnováze, tedy hledaný těžký míček se nachází ve trojici, která není v tuto chvíli na váze.

Pokračujeme tak, že ze trojice, kterou jsme nevážili, si vybereme 2 míčky.

Aa) Pokud budou v rovnováze, tak je třetí míček ze trojice ten hledaný.

Ab) Pokud jedna z misek váhy bude níže nežli druhá, tak víme, že se hledaný míček nachází na straně váhy, která je níže.

B) Misky nejsou v rovnováze, z čehož vyplývá, že se míček nachází na té z misek, která klesla dolů.

Poté vyberu z míčků, které klesly, 2 a položím je na misky váhy.

Ba) Pokud budou v rovnováze, tak je třetí míček ze trojice ten hledaný.

Bb) Pokud jedna z misek váhy bude níže nežli druhá, tak víme, že se hledaný míček nachází na straně váhy, která je níže.

5.13 Výlet

Úloha 16. Ve škole onemocnělo hodně učitelů, tudíž odpadlo vyučování hned ve 3 třídách. Blížil se však konec školního roku, a tak ředitel požádal učitele tělocviku, aby vyrazil s žáky těchto tříd a dalšími kolegy z učitelského sboru na výlet.

Třídy tedy vyrazily na výlet na nedalekou rozhlednu. Ještě před tím, než vyrazily, shromáždil tělocvikář žáky a chtěl je seřadit tak, aby se mu lépe počítali. Po seřazení do dvojstupu ale 1 z žáků zůstal sám. Totéž se stalo, když je seřadil do trojstupu, dokonce i do čtyřstupu. Vždy zbyl 1 žák samotný. Až když je učitel seřadil do pětistupu, nezůstal žádný z žáků mimo pětice.

Kolik žáků bylo dohromady ve 3 třídách?

Řešení:

Víme, že se jedná o 3 třídy, takže budeme předpokládat, že žáků v každé ze tříd je více než 20 a zároveň méně než 35. Z toho vyplývá $60 < x < 105$ (x je naše hledané číslo).

Následně si určíme cifru na místě jednotek. Víme, že pro dělitelnost 5 je potřeba mít na místech jednotek $0, 5$. Rovněž víme, že pro dělitelnost 2 platí, že na místě jednotek musí být cifra $0, 2, 4, 6, 8$. Z toho zjišťujeme, že cifra na místě jednotek čísla, které hledáme, je 5.

O dělitelnosti 3 můžeme říct, že existuje-li číslo takové, jehož součet cifer je dělitelný 3, pak je i takové číslo dělitelné 3 – díky této znalosti vyloučíme číslo 75.

Tedy zbývají čísla 65, 85, 95. Pro ty vyzkoušíme celočíselné dělení 3, kdy nám musí zbýt 1.

Pro číslo 65:	Pro číslo 85:	Pro číslo 95:
65 : 3 = 21 (2)	**85 : 3 = 28 (1)**	95 : 3 = 31 (2)

Tedy zbývá číslo 85. Pro kontrolu jej vydělíme, tentokrát číslem 4.

Pro číslo 85:

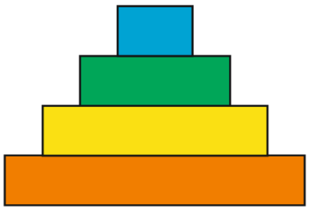
$\mathbf{85 : 4 = 21\ (1)}$

Dokázali jsme, že řešením je číslo 85, tedy že žáků bylo na výletě 85, a to proto, že toto číslo po celočíselném dělení 2, 3 a 4 dává zbytek 1 a zároveň platí, že je dělitelné 5, a to beze zbytku.

5.14 Dort

Úloha 17. Markéta ráda peče dorty, tentokráte dělá dort kruhového tvaru. Dort bude mít 4 patra (první patro je největší a postupně se vrstvy zmenšují v průměru). Jednotlivé vrstvy už Markéta upekla a poskládala na sebe. Na stole má místo na 3 takové dorty a chce dort přesunout z levé strany doprava, přitom jednotlivé vrstvy promazat a dort dát do krabice. Problém je, že vrstvy korpusu může Markéta přesouvat pouze po jedné. Nikdy nesmí položit průměrem větší vrstvu na menší, jinak by vrstvu zničila.

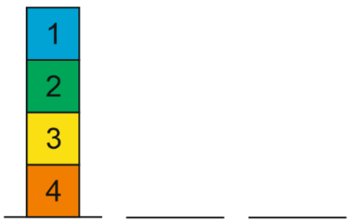
Kolik přesunů Markéta udělá nejméně?



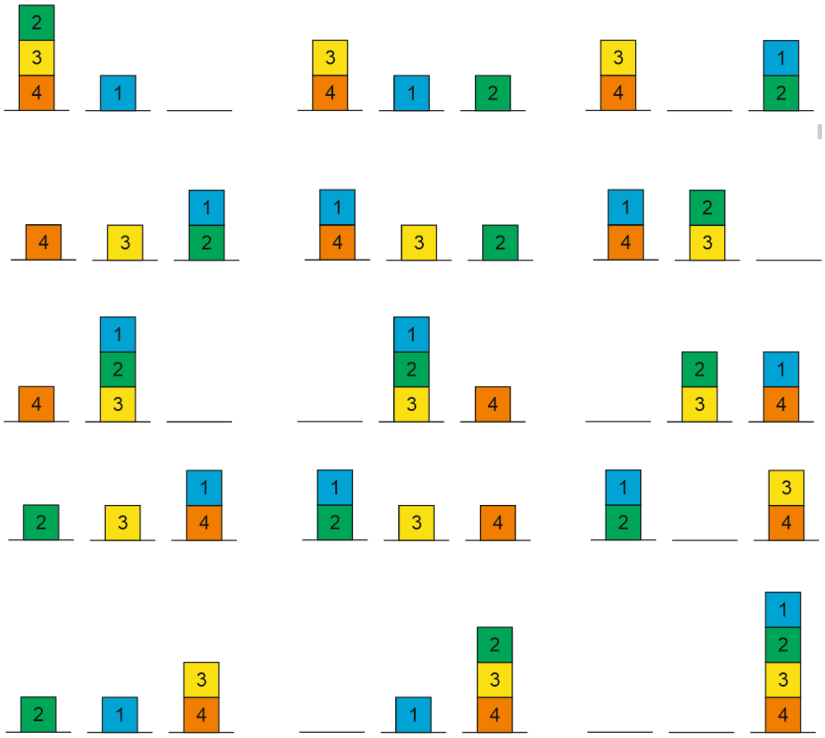
Obrázek 12: Schéma dortu k úloze 17

Řešení:

A) Zobrazením jednotlivých kroků, jak bude Markéta vrstvy přemisťovat. Jednotlivá patra si označíme číslem nebo barvou (v našem případě obojím). Postupně zapisujeme jednotlivé kroky tak, abychom promazali patra a přesunuli dort do krabice.



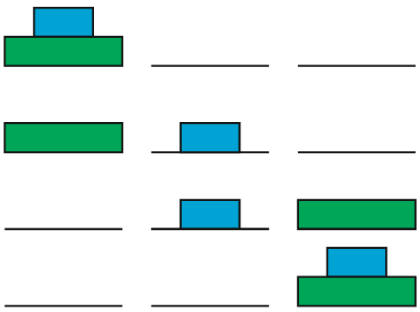
Obrázek 13: *Obrázek pro vyřešení úlohy 17*



Obrázek 14: *Vypsání všech možností řešení úlohy 17*

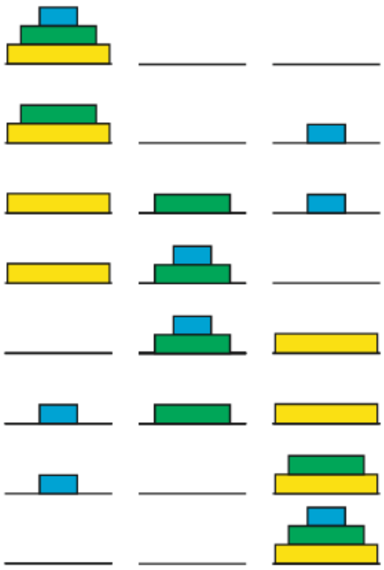
B) Pomocí menšího modelu zjistit, k jaké dochází změně přesunů s zvyšující se počtem vrstev.

- jednoprvkový model = jednopatrový dort
  - jedním tahem
- dvouprvkový model = dvoupatrový dort
  - třemi tahy



Obrázek 15: *Řešení menším modelem - dvouprvkový model - úloha 17*

- tříprvkový model = třípatrový dort
  - sedmi tahy



Obrázek 16: *Řešení menším modelem - tříprvkový model - úloha 17*

Můžeme si mezi jednotlivými modely všimnout vztahu.

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 3, m_2 = m_1 + 2^1$$

$$m_3 = 7, m_3 = m_2 + 2^2$$

Následně lze dopočítat i čtyřprvkový model.

$$m_4 = m_3 + 2^3$$

$$m_4 = 7 + 8$$

$$\boldsymbol{m_4 = 15}$$

Markéta bude muset udělat 15 přesunů, aby jednotlivé vrstvy promazala a dort dala do krabice.

5.15 Cukrárna

Úloha 18. Dvě kamarádky, Petra a Pavla, se rozhodly otevřít cukrárnu. Kromě běžných zákusků, zmrzliny a kávy se rozhodly pro rozšíření nabídky, a to o palačinky se zmrzlinou. Dívky mají recept na palačinky (viz obrázek). Palačinky budou promazané marmeládou, kdy se na 1 palačinku namaže průměrně 20 g marmelády. Na jednu porci slečny počítají 1 kopeček zmrzliny (přibližně 40 ml) a 2 namazané palačinky. Zboží nakupují v obchodě, jehož aktuální leták s nabídkou je na obrázku (ceny zaokrouhlete). Zmrzlinu odebírají od firmy, které platí 200 Kč za litr zmrzliny. Cena soli je v tomto příkladu zanedbatelná.

Zjistěte, za kolik korun mají palačinky se zmrzlinou prodávat, pokud chtějí jako zisk 1,5násobek výrobní ceny a cena má končit nulou nebo pětkou (nezapomeňte na DPH, které je u restaurací 10 %).

Obrázek 17: *Obrázek k úloze 18*

Řešení:

Spočítáme si výrobní cenu jednotlivých surovin pro výrobu 2 palačinek se zmrzlinou.

1. Vejce

- Na 10 kusů palačinek potřebujeme dle receptu 2 vejce. Víme, že balení 10 vajec v obchodě stojí 50 Kč (hodnota po zaokrouhlení). Tedy vypočítáme cenu pro 10 vajec.

2 vajíčka	x
10 vajíček	50 Kč

$$\frac{2}{10} = \frac{x}{50}$$

$$x = 10 \text{ Kč}$$

- Nyní již známe cenu 2 vajec, což je 10 Kč. Můžeme určit cenu y za 2 palačinky.

$$y = \frac{2}{10} \cdot 10$$

$$y = 2\ Kč$$

- Cena vajec ve 2 palačinkách jsou 2 Kč.

2. Mléko

- Cena za 1 litr mléka je 13 Kč. Na 10 palačinek potřebujeme podle receptu 400 ml mléka. Spočítáme si, kolik je cena mléka (x) potřebného pro přípravu receptu.

1000 ml	13 Kč
40 ml	x

$$\frac{x}{13} = \frac{400}{1000}$$

$$x = 5{,}2 \text{ Kč}$$

- Teď spočítáme cenu mléka za výrobu 2 palačinek (y).

$$y = \frac{2}{10} \cdot 5{,}2$$

$$y = \frac{5,2}{5}$$

$$y = 1,04 \text{ Kč}$$

- Cena mléka ve 2 palačinkách je 1 Kč (po zaokrouhlení).

3. Hladká mouka

- Cena hladké mouky je 25 Kč za 1 kg. Spočítáme cenu mouky (x) potřebné k vytvoření těsta dle receptu.

1000 g	25 Kč
200 g	x

$$\frac{200}{1000} = \frac{x}{25}$$

$$x = 5 \text{ Kč}$$

- Vypočítáme si cenu mouky (y) potřebné pro vyrobení těsta pro 2 palačinky.

$$y = \frac{5}{10} \cdot 2$$

$$y = 1 \text{ Kč}$$

- Cena mouky potřebné pro výrobu 2 palačinek je 1 Kč.

4. Marmeláda

- Marmeláda stojí v obchodě 100 Kč za 400 g. Vypočítáme cenu za marmeládu, která je potřebná pro namazání 2 palačinek. Pro namazání 1 palačinky je potřeba 20 g marmelády, tedy pro 2 palačinky je potřeba 40 g.

400 g	100 Kč
40 g	x

$$\frac{40}{400} = \frac{x}{100}$$

$$x = 10 \text{ Kč}$$

- Cena marmelády potřebné pro namazání 2 palačinek je 10 Kč.

5. Zmrzlina

- Na 1 porci palačinek se zmrzlinou je potřeba 40 ml zmrzliny. Také víme, že cukrárna objednává zmrzlinu za 200 Kč na litr. Z toho vyplývá, že pomocí trojčlenky spočteme cenu použité zmrzliny na jednu porci (x).

1000 ml	200 Kč
40 ml	x

$$\frac{x}{200} = \frac{40}{1000}$$

$$x = 8 \text{ Kč}$$

- Cena zmrzliny na 1 porci palačinek se zmrzlinou je 8 Kč.

6. Celkem

- Sečteme cenu všech potřebných věcí na připravení palačinek se zmrzlinou.

$$2 + 1 + 1 + 10 + 8 = 22 \text{ Kč}$$

- Spočítáme cenu bez DPH.

$$22 \cdot 2{,}5 = 55 \text{ Kč}$$

- Známe cenu bez DPH a teď získáme pomocí výpočtu cenu i s DPH.

	Procent celkové ceny	**Cena v Kč**
S DPH	100 %	x
Bez DPH	90 %	55 Kč

$$\frac{1}{0{,}9} = \frac{x}{55}$$

$$0{,}9x = 55$$

$$x = 61{,}1 \text{ Kč}$$

Cena má končit nulou nebo pětkou, tedy Petra a Pavla mají palačinky se zmrzlinou prodávat za 65 Kč.

5.16 Váhy

Úloha 19. Určete hmotnost jednotlivých komponentů počítačového vybavení (minimální hmotnost je 0,1 kg), víme-li, že platí následující rovnosti, které jsou zobrazeny formou obrázku níže.

Obrázek 18: *Obrázek k úloze 19*

Doplňte hmotnosti jednotlivých komponentů.

 =

 =

 =

 =

 =

Řešení:

Víme, že počítač je na váze v rovnosti s 20 kg. Tedy počítač váží 20 kg.

P = 20 kg

O monitoru víme, že je jeho hmotnost spolu se sluchátky, myší, klávesnicí (dále jako SMK) a 12,5 kg rovna počítači, tedy 20 kg. Dále víme, že hmotnost monitoru je rovna hmotnosti SMK a 5,3 kg.

Můžeme určit hmotnost monitoru následovně:

$$20 = 12{,}5 + \text{SMK} + \text{monitor}$$

$$\text{monitor} = 5{,}3 + \text{SMK}$$

Z těchto 2 rovnic můžeme spočítat monitor i SMK.

$$20 = 12{,}5 + \text{SMK} + 5{,}3 + \text{SMK}$$

$$20 = 17{,}8 + 2 * \text{SMK}$$

$$2 * \text{SMK} = 2{,}2$$

$$\mathbf{SMK = 1,1\ kg}$$

Potom zjistíme váhu monitoru:

$$\text{monitor} = 5{,}3 + 1{,}1$$

$$\text{monitor} = \mathbf{6{,}4\ kg}$$

Z vážení je zjevné, že sluchátka a 0,3 kg váží stejně jako 6 myší. Dále známe rovnost vah, přičemž na jedné straně jsou sluchátka, počítačová myš a závaží o hmotnosti 0,3 kg, na druhé straně klávesnice. Při počítaní hmotnosti monitoru jsme zjistili hmotnost SMK, která je rovna 1,1 kg.

$$\mathrm{S} + 0{,}3 = 6 \cdot \mathrm{M}$$

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} + 0{,}3 = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} + \mathrm{K} = 1{,}1$$

Získali jsme soustavu rovnic (3 rovnice) o 3 neznámých.

Použijeme pro vyřešení dosazovací metodu. Dosadíme vyjádření S pomocí M z první rovnice do druhé.

$$\mathrm{S} \ = 6 \cdot \mathrm{M} - 0{,}3$$

$$\mathrm{S} \ + \mathrm{M} + 0{,}3 = \mathrm{K}$$

$$6 \cdot \mathrm{M} - 0{,}3 + \mathrm{M} + 0{,}3 = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{K} \ = 7 \cdot \mathrm{M}$$

Získali jsme vyjádření K jako neznámé M ve druhé rovnici ($\mathrm{K} = 7 \cdot \mathrm{M}$). Teď dosadíme první ($\mathrm{S} = (6 \cdot \mathrm{M}) - 0{,}3$) a druhou rovnici do třetí rovnice ($\mathrm{S} + \mathrm{M} + \mathrm{K} = 1{,}1$). Tímto vyřešíme neznámou M a získáme její řešení.

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} + \mathrm{K} = 1{,}1$$

$$6 \cdot \mathrm{M} - 0{,}3 + \mathrm{M} + 7 \cdot \mathrm{M} = 1{,}1$$

$$14 \cdot \mathrm{M} = 1{,}4$$

$$\mathbf{M = 0{,}1\ kg}$$

Teď jsme schopni zpětně dopočítat zbývající neznámé S a K (díky vypočítané neznáme M).

Neznámá S:

$$S = (6 \cdot M) - 0{,}3$$

$$S = (6 \cdot 0{,}1) - 0{,}3$$

$$S = 0{,}6 - 0{,}3$$

$$\mathbf{S = 0,3\ kg}$$

Neznámá K:

$$K = 7 \cdot M$$

$$\mathbf{K = 0,7\ kg}$$

Použijeme metodu sčítací.

$$S + 0{,}3 = 6 \cdot M$$

$$S + M + 0{,}3 = K$$

$$S + M + K = 1{,}1$$

Ke druhé rovnici soustavy přičteme násobek třetí (-1), abychom se zbavili neznámých S a M. Získáme řešení neznámé K.

$$S + M + 0{,}3 = K$$

$$S + M + K = 1{,}1/(-1)$$

$$0{,}3 - K = K - 1{,}1$$

$$2K = 1{,}4$$

$$\mathbf{K = 0,7\ kg}$$

Získali jsme řešení neznámé K. Dosazením K do druhé rovnice (popř. třetí rovnice) jsme schopni dopočítat zbývající 2 neznámé S a M, opět jako pomocí sčítací metody.

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} + 0{,}3 = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} + 0{,}3 = 0{,}7$$

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} = 0{,}4$$

$$\mathrm{S} + 0{,}3 = 6 \cdot \mathrm{M}$$

$$\mathrm{S} + \mathrm{M} = 0{,}4 \ /(-1)$$

$$0{,}3 - \mathrm{M} = 6 \cdot \mathrm{M} - 0{,}4$$

$$7 \cdot \mathrm{M} = 0{,}7$$

$$\mathbf{M = 0,1\ kg}$$

$$\mathrm{S} + 0{,}3 = 6 \cdot \mathrm{M}$$

$$\mathrm{S} + 0{,}3 = 0{,}6$$

$$\mathbf{S = 0,3\ kg}$$

Zjistili jsme, že:

- Počítač váží 20 kg
- Monitor váží 6,4 kg
- Klávesnice váží 0,7 kg
- Sluchátka váží 0,3 kg
- Myš váží 0,1 kg

6 Závěr

Cílem této práce bylo představit alespoň malou část nestandardních úloh, které se běžně nevyskytují ve školních učebnicích, a i přesto by měly být nedílnou součástí výuky matematiky na základních školách. Část úloh byla vytvořena na základě inspirace či převzetí z různých zdrojů.

Bakalářská práce se rovněž zabývala přínosem těchto úloh, a to zejména pro rozvoj matematického myšlení u žáků. Na nestandardní úlohy lze pohlížet jako na cenný nástroj pro podporu kreativity, inovace a problémového myšlení.

Sbírka těchto nestandardních úloh se odlišuje od tradičních, standardních úloh tím, že klade důraz na netradiční postupy a na přemýšlení. Tímto způsobem rozšiřuje u žáků jejich matematické dovednosti a schopnosti. Studium a řešení nestandardních úloh může být zároveň motivujícím a zábavným způsobem, jak se ponořit do světa matematiky a objevovat nové perspektivy.

V závěru je třeba zdůraznit, že sbírka nestandardních úloh je dynamickým a neustále se rozvíjejícím nástrojem. Je důležité sledovat nové trendy a přístupy v oblasti matematiky a neustále rozšiřovat repertoár nestandardních úloh, aby byl co nejrelevantnější pro současné potřeby a zájmy žáků.

Věřím, že tato práce jednak přispěla k lepšímu porozumění a uvědomění si významu sbírky nestandardních úloh v matematice a jejího pozitivního vlivu na rozvoj matematického myšlení u žáků a jednak disponuje potenciálem pozitivně inspirovat učitele matematiky na základních školách

Seznam použité literatury a zdrojů

BEST: KLASIKO PŘÍRODNÍ. *BEST* [online]. [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.best.cz/best-klasiko/prirodni/K06C01

HIRSCHOVÁ, Milada; UK, PedF. *Matematická slovní úloha jako komunikát*: *slovní úlohy ve výuce matematiky a komunikační kompetence v mateřském jazyce.* Český jazyk a literatura, 2017, 68.2: 69-75

VONDROVÁ, Naďa. *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2019. ISBN 978-80-246-4516-2.

KOWAL, Stanislaw. *Matematika pro volné chvíle*. 2. vydání. Praha: SNTL, 1986.

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWA-22-G-N-01-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWC-22-D-01-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWD-22-D-01-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWB-22-G-N-03-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWC-22-C-03-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWB-22-A-N-04-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWE-22-G-N-04-P.pdf

Problem of the week. *University of Waterloo* [online]. University of Waterloo, 2022 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw/2022-23/English/POTWD-22-G-07-P.pdf

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [online]. Praha: VÚP. 2020. [cit. 2022-06-19]. Dostupné na adrese: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/

MŠMT. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání – 2021* [online]. Praha: NUV. 2021. [cit. 2022-06-19]. Dostupné z https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/.

Ušetřeno: Cena elektřiny za 1 kWh v roce 2023. *Ušetřeno* [online]. 2023, 2023 [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://www.usetreno.cz/energie-elektrina/cena-za-1-kwh/

Eiffelova věž. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-07-05]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Eiffelova_v%C4%9B%C5%BE

Seznam obrázků