Katedra experimentální fyziky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Statistické vlastnosti polí pulzní druhé harmonické frekvence generované v kvantovém procesu

2020

Jakub Ošťádal MBA.

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jan Peřina, Ph.D. ml.

Studijní obor: Nanotechnologie
prezenční forma

Bibliografické údaje

Autor:	Jakub Ošťádal MBA.
Název práce:	Statistické vlastnosti polí pulzní druhé harmonické frekvence generované v kvantovém procesu
Typ práce:	bakalářská práce
Pracoviště:	Katedra experimentální fyziky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Rok obhajoby:	2020
Studijní obor:	Nanotechnologie prezenční forma
Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Jan Peřina, Ph.D. ml.
Počet stran:	34
Jazyk práce:	český

Bibliograhic info

Author:	Jakub Ošťádal MBA.
Title:	Statistical properties of the pulsed second-harmonic fields generated in quantum process
Thesis type:	bachelor thesis
Department:	Department of Experimental Physics, Faculty of Science, Palacký University Olomouc
Year of defense:	2020
Study field:	Nanotechnology full-time form
Supervisor:	Prof. RNDr. Jan Peřina, Ph.D. ml.
Page count:	34
Thesis language:	Czech

Anotace

Text se zabývá statistickými vlastnostmi pole druhé harmonické frekvence generované v kvantovém procesu silným pulzním čerpáním. Tento proces je modelován pomocí kvantové metody založené na určení vývoje střední hodnoty amplitudy elektrického pole a následném určení vývoje kvantových linearizovaných odchylek amplitudy elektrického pole. Při modelování procesu bylo využito Schmidtova rozkladu dvoufotonové amplitudy inverzního kvantového procesu generace druhé subharmonické frekvence.

Synopsis

The list deals with the statistical properties of second harmonic generation generated in the quantum process by a strong pulsed laser pump field. The process is modeled by a quantum method that is based on the determination of the mean value of the electric-field amplitude and evolution of quantum linearized deviation of the electric-field amplitude. The Schmidt decomposition of two-photon amplitude obtained in the inverse process of second subharmonic generation has been used.

Klíčová slova: Generace druhé harmonické frekvence; Dvoufotonová amplituda; Schmidtova dekompozice; Poruchová teorie; Generace druhé subharmonické frekvence; Stlačené světlo

Keywords: Second harmonic generation; Two-photon amplitude; Schmidt decomposition; Perturbation theory; Second subharmonic generation; Squeezed light

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Janu Peřinovi ml. Ph.D. za odborné vedení, trpělivost, ochotu a především cenné rady při zpracování práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod odborným vedením prof. RNDr. Jana Peřiny ml. Ph.D. a uvedl v ní veškerou literaturu a ostatní zdroje, které jsem použil.

1. června 2020 v Olomouci

Obsah

1 Úvod

V roce 1917 byl fyzikálně poprvé popsán princip laseru Albertem Einsteinem a později, roku 1960, byl sestrojen Theodorem H. Maimanem v USA. Tento vynález vedl k rozvoji dvou pozoruhodných fyzikálních oborů, kvantové optiky a optiky nelineární. Oba obory spolu navzájem souvisí. Zatímco kvantová optika si vytyčila jako primární záměr studium světla na fotonové úrovni, nebo můžeme říci, studium světla chovajícího se jako proud fotonů, nelineární optika studuje primárně záření modifikované nelineárním prostředím, kterými jsou například krystaly KDP. V roce 1961 se na Michiganské univerzitě poprvé podařilo takovéto záření vytvořit a to Peteru Frankenovi, A. E. Hillovi, C. W. Petersovi a G. Weinreichovi. Fokusací koherentního laserového paprsku namířeného do krystalu křemíku se povedlo snížit vlnovou délku na polovinu (694 nm $\rightarrow$ 347 nm) a frekvenci zdvojnásobit ($\omega \rightarrow 2\omega$). Tento objev vedl nejen k rozvoji a hlubšímu zkoumání nelinárních jevů jak druhého, tak vyšších řádů, ale také k využití v oblasti mikroskopie a lékařství (kolagen je schopný, stejně jako necentrosymetrické nelineární krystaly, generovat záření druhé harmonické frekvence - zkráceně SHG, pokud je vystaven silnému laserovému čerpání). K účelu této práce je nutno zmínit ještě jeden podstatný nelineární jev, a to spontánní sestupnou frekvenční konverzi. Tento jev bere silný čerpací foton a pomocí prostředí jej mění na dva vzájemně korelované fotony (tvz. jedna elementární kvantová událost nelineárního procesu). Těmto fotonům se potom říká signálový a jalový foton. Monochromatické složky těchto polí jsou kvantově provázány v důsledku zákona zachování energie. Korelace fotonů popisuje dvoufotonová amplituda. Korelace vznikají jako důsledek potřeby prostorové fázové synchronizace interagujících optických polí pro efektivní nelineární interakci. Fotony mohou být korelovány a provázány v mnoha stupních volnosti jako jsou polarizace, frekvence nebo orbitální moment hybnosti. K popsání provázaností je třeba zavést nekonečně rozměrný Hilbertův prostor, který je tvořen bází vhodnou pro účely matematických operací pro kvantovou optiku. Práce si klade za cíl popsat korelované fotony pomocí dvoufotonové amplitudy, rozložit pole do jednotlivých módů pomocí Schmidtovy metody rozkladu, popsat jeho statistické vlastnosti a také generaci stlačeného světla.

2 Pole druhé harmonické klasicky

Za předpokladu, že je prostředí bezztrátové a pole se šíří v necentrosymetrickém krystalu, jak na fundamentální frekvenci ω_1, tak i na frekvenci druhé harmonické $\omega_1 = 2\omega_2$, podléhá nelineární susceptibilita podmínkám úplné permutační symetrie [1]. Pole je zapsáno ve složkách elektrické amplitudy uvnitř materiálu jako:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E_1}(z,t) + \vec{E_2}(z,t). \tag{1}$$

Každou z těchto částí je dále nutno rozložit jako komplexní amplitudu $E_j(z)$ a pomalu se měnící obálku $A_j(z)$ podle:

$$\vec{E_j}(z,t) = E_j(z)e^{-i\omega_j t} + c.c., \tag{2}$$

pro

$$E_j(z) = A_j(z)e^{ik_j z}. \tag{3}$$

Vlnový vektor spolu s indexem lomu je možno rozepsat následovně:

$$k_j = \frac{n_j\omega_j}{c}, n_j = [\epsilon^{(1)}(\omega_j)]^{1/2}.$$

Každá frekvenční složka elektrického pole potom podléhá vlnové rovnici dané následujícím předpisem:

$$\frac{\partial^2 \vec{E_j}}{\partial z^2} - \frac{\epsilon^{(1)}(\omega_j)}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E_j}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P_j}, \tag{4}$$

kde nelineární polarizace má tvar:

$$\vec{P}^{NL}(z,t) = \vec{P_1}(z,t) + \vec{P_2}(z,t); \vec{P_j}(z,t) = P_j(z)e^{-i\omega t} + c.c.,$$

a $j = 1, 2$. Symbol c.c značí komplexní sdružení. Rovnice pro jednotlivé amplitudy polarizace jsou následující:

$$P_1(z) = 4\epsilon_0 d_{\text{eff}} E_2 E_1^* = 4\epsilon_0 d_{\text{eff}} A_2 A_1^* e^{i(k_2-k_1)z},$$
$$P_2(z) = 2\epsilon_0 d_{\text{eff}} E_1^2 = 2\epsilon_0 d_{\text{eff}} A_1^2 e^{2ik_1 z},$$

kde d_{eff} je tenzor popisující susceptibilitu prostředí. Jednotlivé rovnice pro odvození amplitud polí je možno zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial A_1}{dz} = \frac{2i\omega_1^2 d_{eff}}{k_1 c^2} A_2 A_1^* e^{-i\Delta kz}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial A_2}{dz} = \frac{2i\omega_1^2 d_{eff}}{k_1 c^2} A_1^2 e^{i\Delta kz}, \tag{6}$$

kde rozfázování vlnových vektorů je dáno takto $\Delta k = 2k_1 - k_2$.

Pokud je fundamentální pole dostatečně silné a nevyčerpává se (tzn. A_1=konst), rovnici (5) lze integrovat a tím určit prostorovou závislost amplitudy druhé harmonické frekvence. Obecněji je třeba obě rovnice (5) a (6) vyřešit společně. Pro nalezení řešení je vhodné pracovat s modulem a fází jednotlivých amplitud pole. Je také výhodné uvádět amplitudy v bezrozměrné formě. Proto se komplexní pomalu se měnící amplitudy pole zapíší jako:

$$A_1 = \left(\frac{I}{2n_1\epsilon_0 c}\right)^{\frac{1}{2}} u_1 e^{i\phi_1}, \tag{7}$$

$$A_2 = \left(\frac{I}{2n_2\epsilon_0 c}\right)^{\frac{1}{2}} u_2 e^{i\phi_2}, \tag{8}$$

kde $u_{1,2}$ jsou reálné normované amplitudy. Dále je nutno zjistit, jak vypadají jednotlivé intenzity polí:

$$I_j = 2n_j\epsilon_0 c|A_j|^2. \tag{9}$$

Celková intenzita je pak dána jejich součtem. Důsledkem Manley-Roweho vztahů (rozepsány v dodatku) je, že veškerá intenzita svazku je invariantní vůči propagaci nelineárním médiem. Rovnice (5) a (6) pak získávají následující tvar[1]:

$$\frac{\partial A_1(z)}{\partial z} = -2gA_1(z)A_2(z), \tag{10}$$

$$\frac{\partial A_2(z)}{\partial z} = g\,A_1^2(z) = g[A_1^2(0) - 2A_2^2(z)]. \tag{11}$$

g značí vazebnou konstantu. Ze zákona zachování energie plyne:

$$A_1^2(z) + 2A_2^2(z) = A_1^2(0) + 2A_2^2(0). \tag{12}$$

Pro $A_2(0) = 0$ lze dostat:

$$A_1^2(z) = A_1^2(0) - 2A_2^2(z). \tag{13}$$

Při separaci proměnných rovnice nabudou tvaru:

$$\int \frac{dA_2}{A_1^2(0) - 2A_2^2} = \int g\,dz + C. \tag{14}$$

Zlomek na levé straně rovnice je nutno rozložit na parciální zlomky. Po přeznačení $a = A_1(0)$ lze modifikovat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - 2A_2^2} &= \frac{\alpha}{a - A_2\sqrt{2}} + \frac{\beta}{a + A_2\sqrt{2}}, \\ 1 &= \alpha(a + A_2\sqrt{2}) + \beta(a - A_2\sqrt{2}), \\ 1 &= a(\alpha + \beta) \wedge 0 = \alpha - \beta, \\ \alpha &= \frac{1}{2a} = \beta. \end{aligned} \tag{15}$$

Lze tedy psát:

$$\frac{1}{2a}\int\frac{dA_2}{a-A_2\sqrt{2}}+\frac{1}{2a}\int\frac{dA_2}{a+A_2\sqrt{2}}=gz+C. \tag{16}$$

$$-\ln(a-A_2\sqrt{2})+\ln(a+A_2\sqrt{2})=\sqrt{2}2agz+C^{'},\ C^{'}=C\sqrt{2}2a. \tag{17}$$

Pro další úpravu je vhodné zavést konstantu $y=e^{\sqrt{2}2agz}$ a rovnici vyjádřit jako:

$$\frac{a+\sqrt{2}A_2}{a-\sqrt{2}A_2}=yC^{''},\ C^{''}=e^{C^{'}}, \tag{18}$$

$$a[1-yC^{''}]=\sqrt{2}A_2[-1-C^{''}y]. \tag{19}$$

Zpětná substituce za $a=A_1(0)$ vede ke vztahu pro $A_2(z)$:

$$A_2(z)=\frac{A_1(0)}{\sqrt{2}}\tanh[\sqrt{2}A_1(0)zg], \tag{20}$$

a pro $A_1(z)$:

$$A_1(z)=A_1(0)\sqrt{1-\tanh^2[\sqrt{2}A_1(0)gz]}=\frac{A_1(0)}{\cosh[\sqrt{2}A_1(0)gz]}. \tag{21}$$

2.1 Fourierova transformace základního svazku

Gaussovské pulzy jsou obecně zakřivené, stejně jako Gaussovská funkce, která je popisuje. Tyto pulzy se v aparatuře vytváří pomocí Gaussovského filtru a charakterizuje je minimální zpoždění grupové rychlosti za rychlostí fázovou. Jsou tvořeny módy kolem centrální frekvence ω_f. Grupová rychlost udává rychlost šíření tohoto vlnového klubka, nebo-li vlnového balíku. Elektrická intenzita takového vlnového balíku je zadána následujícím předpisem, jako funkce rozptylu frekvencí, ze kterého se pomocí Fourierovy transformace stane funkce, jejímž argumentem bude čas:

$$E_f(\omega_f)=\epsilon_f\sqrt{\frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}}}e^{\frac{-\tau_f^2}{4}(\omega_f-\omega_f^0)^2}, \tag{22}$$

kde $E_f(\omega_f)$ je elektrická amplituda, ω_f^0 je nosná frekvence pulzu, τ_f je doba trvání pulzu a ϵ_f je amplituda spektra. Výraz $\Delta\omega=\omega_f-\omega_f^0$ udává rozdíl frekvencí od středu Gaussovského píku. Fourierova transformace je dána vztahem [2]:

$$E(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{23}$$

Dvojice funkcí ve Fourierově transformaci se nazývají originál (v tomto případě $\tilde{E}(t)$) a obraz (zde $E(\omega)$). Inverzní Fourierova transformace je dána takto:

$$\tilde{E}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{24}$$

Při dosazení $E_f(\omega)$ do rovnice (24) bude Fourierova transformace nabývat tvaru:

$$E_f(t) = \frac{\epsilon_f}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\Delta\omega t}e^{\frac{-\tau_f^2\Delta\omega^2}{4}}d\Delta\omega, \tag{25}$$

a po matematicky korektních úpravách a výpočtu Gaussova integrálu [3] ($\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$) lze dojít k výsledku:

$$\begin{aligned} E_f(t) &= \frac{\epsilon_f}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}}}e^{\frac{\frac{t^2}{4\tau_f^2}}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\tau_f^2}{4}}} = \frac{\epsilon_f}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}}}e^{-\frac{t^2}{\tau_f^2}}\sqrt{\frac{4\pi}{\tau_f^2}} \\ &= \frac{\epsilon_f}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\tau_f}}e^{-\frac{t^2}{\tau_f^2}} = \frac{\epsilon_f e^{\frac{-t^2}{\tau_f^2}}}{\pi^{\frac{3}{4}}\sqrt{\tau_f}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Lze si povšimnout, že Fourierova transformace zachovává tvar Gaussovských funkcí. Jde o změnu danou jako $e^{\frac{-\tau_f^2}{4}(\Delta\omega_f)^2} \to e^{\frac{-t^2}{\tau_f^2}}$.

2.2 Normalizace základního svazku a energie elektromagnetických vln

Energie třídimenzionálního elektromagnetického pole je dána Hamiltoniánem ve tvaru [4]:

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2}\int_V dV\left[\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right], \tag{27}$$

který je dán integrálem hustoty energie v celém objemu, ve kterém se pole nachází. Veličina $\epsilon_0|\vec{E}^2/2|$ udává hustotu energie elektrického pole a $|\vec{B}^2|/(2\mu_0)$ je hustota energie magnetického pole. Stav tohoto pole je nutno prvně normalizovat. Gaussovské funkce jsou obecně použity při studiu hustoty pravděpodobnosti fyzikálních dějů. V obecném případě musí integrál plochy pod grafem přes celý definiční obor být roven jedné [5]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{28}$$

Tohoto lze docílit volbou vhodné konstanty (v případě této práce se bude jednat o amplitudu pole ϵ_f):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |E_f(\omega_f)|^2 d\omega_f = 1, \tag{29}$$

$$\epsilon_f^2\frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{-\frac{\tau_f^2}{4}(\Delta\omega_f)^2})^2 d\Delta\omega_f = 1. \tag{30}$$

Integrál v levé části rovnice je opět Gaussovský a jeho řešení je odvozeno v matematickém dodatku na konci práce, lze se tedy omezit pouze na výsledek integrálu [3], který má tvar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 dx} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Dosazením a následnými úpravami dojdeme ke vztahům:

$$\epsilon_f^2 \frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\frac{\tau_f^2}{4}\Delta\omega_f)^2}) d\Delta\omega_f =$$
$$\epsilon_f^2 \frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\frac{\tau_f^2}{2}(\Delta\omega_f)^2}) d\Delta\omega_f =$$
$$\epsilon_f^2 \frac{\tau_f}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau_f} = 1 \rightarrow$$
$$\epsilon_f = 1.$$

Důvodem normování bylo zajištění toho, že profil pulzu odpovídá jednomu fotonu.

2.3 Konvoluce základního svazku

Konvoluce je matematický operátor, který v optice popisuje vznik obrazu „znehodnoceného“ rozostřením a šumem. Spojitá konvoluce jednorozměrných funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je definována jako [6]

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha, \tag{31}$$

kde funkce $g(x)$ je označována jako konvoluční jádro. Hodnota konvoluce funkce f s jádrem v g v bodě x je integrál ze součinu funkce f s otočenou funkcí konvolučního jádra (integrační proměnná α má v argumentu konvolučního jádra $g(x - \alpha)$ záporné znaménko) posunutou do bodu x.

Odtud lze celkem jednoduše zjistit, jak bude vypadat rovnice pro pole druhé harmonické frekvence E_{shg}. Začneme-li s konvolucí pro druhou harmonickou frekvenci, bude potřeba do obecného vztahu (31) přidat ještě nelineární susceptibilitu druhého řádu, která hraje důležitou úlohu při zjišťování toho, jak reaguje daný materiál na dané záření resp. jak jsou atomy materiálu polarizovány daným zářením.

$$E_{sh}(\omega) = \chi^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\omega_f) E_f(\omega - \omega_f) d\omega_f. \tag{32}$$

Vztah (32) lze alternativně zapsat ve tvaru [7]:

$$E_{sh}(\omega) = \chi^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f' E_f(\omega_f) E_f(\omega_f') \delta(\omega - \omega_f - \omega_f'). \tag{33}$$

Pro časovou oblast se vztah přepíše jako:

$$E_{sh}(t) = \chi^{(2)} E_f^2(t) \tag{34}$$

a tudíž

$$E_{sh}(t) = \chi^{(2)} \frac{\epsilon_f^2}{\tau_f \pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{2t^2}{\tau_f^2}}. \tag{35}$$

Zpětná Fourierova transformace rovnice (35) vede k následující rovnici:

$$E_{sh}(\omega) = \chi^{(2)} \frac{\epsilon_f^2}{\tau_f \pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2t^2}{\tau_f^2}} e^{-i\omega t} dt. \tag{36}$$

Tento integrál lze vypočítat stejnou metodou jako rovnici (8). Výsledné pole druhé harmonické frekvence bude mít tvar

$$E_{sh}(\omega_p) = \chi^{(2)} \frac{\epsilon_f^2}{\tau_f \pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\omega_p^2}{4\frac{2}{\tau_f^2}}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{2}{\tau_f^2}}}, \tag{37}$$

který lze pomocí korektních úprav přepsat jako

$$E_{sh}(\omega_p) = \frac{\chi^{(2)} \epsilon_f^2}{\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{\omega_p^2 \tau_f^2}{8}}. \tag{38}$$

Při nevyčerpávajícím se fundamentálním poli je brán zřetel na to, že velikost intenzity fundamentálního pole je daleko větší, než velikost intenzity pole druhé harmonické frekvence a tedy platí $|E_f|^2 \gg |E_{sh}|^2$.

3 Rozložení pole druhé harmonické frekvence do rovinných monochromatických vln

Rovinná vlna je obecně jakákoli vlna, jejíž fáze má pro konkrétní čas určitou hodnotu. Rovinná vlna $E_{sh}(z,t)$ je pro pole druhé harmonické frekvence daná jako [8]:

$$E_{sh}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E_{sh}(\omega) e^{-i\omega t + ik(\omega)z}, \tag{39}$$

$$E_{sh}(z,t) = \chi^{(2)} \frac{\epsilon_f^2 \tau_f^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{ik(\omega)z} e^{\frac{-(\omega-\omega_0)^2 \tau_f^2}{16}} d\omega. \tag{40}$$

V dalších výpočtech je nutno rozepsat vlnový vektor $\vec{k}$ do tvaru Taylorovy řady, neboť závisí na frekvenci pole [9]:

$$\vec{k}(\omega) = k_0(\omega_0) + \frac{\partial k}{\partial \omega}|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2. \tag{41}$$

První člen rozvoje je na centrální frekvenci, druhý člen udává informaci o grupové rychlosti a lze jej přepsat jako $\frac{\partial k}{\partial \omega}|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) = \frac{1}{v_g}$, kde v_g značí grupovou rychlost, a třetí člen udává informaci o disperzi (rozptylu) optického pulzu, jenž lze nahradit symbolem D. Integrál se potom počítá standardním postupem užitým u rovnice (11). Pro snadnější zápis zavedeme konstantu $C = \chi^{(2)} \frac{\epsilon_f^2 \tau_f^3}{\sqrt{\pi}}$ a rovnici lze přepsat následovně:

$$\begin{aligned} E_{sh}(z,t) = C \int_{-\infty}^{\infty} & e^{iz[k_0(\omega_0) + \frac{\partial k}{\partial \omega}|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2]} \\ & e^{\frac{-(\omega-\omega_0)^2 \tau_f^2}{16}} e^{-i\omega t} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t} d(\omega-\omega_0). \end{aligned} \tag{42}$$

Po využití vhodné substituce $\delta\omega = (\omega - \omega_0)$ a zavedení nové konstanty $C_1 = Ce^{-i\omega_0 t + ik_0 z}$:

$$E_{sh}(z,t) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\tau^2 \delta\omega^2}{16}} e^{\frac{izD\delta\omega^2}{2}} e^{iz\frac{\delta\omega}{v_g}} e^{-it\delta\omega} d\delta\omega, \tag{43}$$

$$E_{sh}(z,t) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{\tau^2}{16} - \frac{izD}{2})\delta\omega^2} e^{i(\frac{z}{v_g} - t)\delta\omega} d\delta\omega. \tag{44}$$

Na základě výsledku v matematickém dodatku lze pro pole druhé harmonické frekvence psát:

$$E_{sh}(z,t) = 4\chi^{(2)} \frac{\epsilon_f^2 \tau_f^3}{\sqrt{\tau_f^2 - 8izD}} e^{ik_p z - i\omega_p t - \frac{4(z-tv_g)^2}{v_g^2(\tau_f^2 - 8izD)}}. \tag{45}$$

Takto rozložené pole bude nadále označeno $E_p^{(+)}(z,t)$ kde index p značí skutečnost, že se jedná o čerpací pole procesu generace druhé subharmonické frekvence.

4 Rovnice signálového a jalového pole

Signálové (resp. jalové) pole je vytvořeno během jedné kvantové elementární události z čerpacího fotonu při interakci s nelineárním krystalem a lze jej zapsat jako [9]:

$$E_s^{(-)}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \epsilon_s \hat{a}_s^\dagger(k_s) e^{ik_s z - i\omega_s t}, \tag{46}$$

$$E_i^{(-)}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \epsilon_i \hat{a}_i^\dagger(k_i) e^{ik_i z - i\omega_i t}. \tag{47}$$

Pro rovnice lze zavést stejná substituce ($\delta\omega_{s,i} = \omega_{s,i} - \omega_{s,i}^0$) jako v předešlém případě pro Taylorovu řadu. Symbol $\epsilon_{s,i}$ značí amplitudu pole, kterou je možno rozepsat do tvaru $\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$ pro pole v objemu V. Tomuto tvaru se říká kvantová jednotka elektrické síly [4]. Potom rovnice nabydou tvaru:

$$E_s^{(-)}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \epsilon_s \hat{a}_s^\dagger(k_s) e^{i(k_s(\omega_s) + \frac{\partial k_s}{\partial \omega_s}|_{\omega_0} \delta\omega_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_s^2}|_{\omega_0}(\delta\omega_s)^2)z - i\omega_s t}, \tag{48}$$

$$E_i^{(-)}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \epsilon_i \hat{a}_i^\dagger(k_i) e^{i(k_i(\omega_i) + \frac{\partial k_i}{\partial \omega_i}|_{\omega_0} \delta\omega_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_i}{\partial \omega_i^2}|_{\omega_0}(\delta\omega_i)^2)z - i\omega_i t}. \tag{49}$$

Jednotlivé $\vec{k}$ vektory jsou, jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole, závislé na frekvenci pole ke kterému přísluší. Proto je nutno s nimi pracovat dále ve tvaru Taylorovy řady ve frekvencích. Na frekvencích jsou závislé anihilační a kreační operátory, které obecně popisují kvantování elektromagnetického pole.

5 Interakční Hamiltonián

Hamiltonián pro většinu problémů kvantové optiky se sestává ze 3 částí [4]:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_F + \hat{H}_{int}, \tag{50}$$

kde první člen popisuje energii systému, druhý popisuje energii pole a třetí energii při interakci polí se systémem. Za systém se obecně považují atomy, molekuly a pevné látky (např. tenké vrstvy). Interakční Hamiltonův operátor tedy vyjadřuje celkovou hustotu energie systému při průchodu pulzu nelineárním krystalem podél její z-ové souřadnice. Pro třímodovou interakci jej lze vyjádřit takto [9]

$$\hat{H}_{int}(t) = \chi^{(2)} \int_0^L dz\, E_p^{(+)}(z,t) E_s^{(-)}(z,t) E_i^{(-)}(z,t) + H.c., \tag{51}$$

kde se hustota vazební energie nelineární interakce integruje v prostoru v daném čase. Symbol $H.c.$ nahrazuje Hermitovsky sdružené členy. Po dosazení rovnic (48), (49) a (45) do rovnice (51) se problém stane přehlednějším a je možné přistoupit k integraci. Jediné integrály, které není možné provést, jsou ty, v nichž figurují anihilační a kreační operátory polí (tato pole jsou kvantová a nelze s nimi zacházet stejně jako s polem klasickým). Interakční Hamiltonián tedy sčítá energie všech módů na jednotlivých frekvencích přes celou délku krystalu (např. beta barium borát nebo dihydrogenfosforečnan draselný) či jiného nelineárního prostředí. Matematicky lze zapsat jako:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}(t) = \int_0^L dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \epsilon_i \epsilon_s \hat{a}_i^\dagger(k_i) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \\ e^{i(k_i+k_s+k_p)z} e^{-i(\omega_i+\omega_s+\omega_p)t} 4\chi^{(2)} \epsilon_f^2 e^{-\frac{(\omega_p-\omega_p^0)^2 \tau_p^2}{8}}. \end{aligned} \tag{52}$$

Interakční Hamiltonián v tomto tvaru využívá výhody delta funkce vycházející ze zákona zachování energie. Druhý člen Taylorova rozvoje není pro další účely práce potřeba a proto jej lze zanedbat (práce se nezabývá disperzí pulzu a další výpočty s tímto členem by byly obtížné za pomocí analytických metod). Stejně tak není nutné uvažovat Hamiltonián pole a Hamiltonián systému díky práci v interakční reprezentaci.

6 Dvoufotonová spektrální amplituda

V nelineárním krystalu čerpaném silným koherentním polem vede nelineární interakce ke spontánní generaci dvou downkonvertovaných polí odborně nazývaných poli signálním a jalovým. Tato pole jsou velmi silně korelována. Tyto korelace je třeba popsat, a to za pomoci dvoufotonové amplitudy. Ta je definována jako maticový element součinu operátorů elektrických polí $\hat{E}_s^{(+)}(z_1, t_1)$ a $\hat{E}_i^{(+)}(z_2, t_2)$ působících na provázaný, dvoufotonový stav $|\psi^{(2)}\rangle$ a na vakuový stav $|vac\rangle$. Dvoufotonovou amplitudu lze vyjádřit ve tvaru [9]:

$$A_{12}(z_1, t_1, z_2, t_2) = \langle vac|\hat{E}_s^{(+)}(z_1, t_1)\hat{E}_i^{(+)}(z_2, t_2)|\psi^{(2)}(0, t)\rangle. \tag{53}$$

Na konci nelineární interakce v krystalu se down-konvertovaná pole začnou volně šířit a proto dvoufotonová amplituda A_{12} závisí pouze na rozdílu časů $t_1 - t$ a $t_2 - t$ [9].

6.1 Spontánní sestupná frekvenční parametrická konverze (SPDC) čerpaná polem druhé harmonické frekvence

SPDC je proces, při kterém zaniká průchodem nelineárním prostředím jeden silný čerpací foton o vyšší energii a vznikají dva fotony s energií nižší. Tento proces slouží k tzv. generaci provázaných fotonových párů (signálového a jalového fotonu) [10]. Oba fotony při svém vzniku podléhají zákonu zachování energie ($\hbar\omega_p = \hbar\omega_i + \hbar\omega_s$) a hybnosti ($\vec{p}_p = \vec{p}_s + \vec{p}_i$). Tudíž platí $\omega_p = \omega_i + \omega_s$. Pro vlnové délky platí tato rovnost pro převrácené hodnoty, tedy $\frac{1}{\lambda_p} = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_i}$. Zákon zachování hybnosti definuje směry šíření nově vzniklých fotonů. Platí tzv. podmínka fázové synchronizace[1] vyplývající jak ze zákona zachování hybnosti, tak ze zákona zachování energie. Nejsnáze bývá splněna v případě anizotropního prostředí, ve kterém závisí index lomu na polarizaci a směru šíření. Existuje několik typů fázové synchronizace dělených podle směru polarizace interagujících polí. Pro odvození dvoufotonové amplitudy, popisující korelované fotonové páry vzniklé při SPDC, je potřeba přejít ke kvantové poruchové teorii a vyřešit Schrödingerovu rovnici.

6.2 Poruchové řešení SPDC s polem druhé harmonické frekvence

Schrödingerova rovnice je dána následujícím předpisem

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{int}(t)|\psi\rangle \tag{54}$$

a pro její řešení $|\psi\rangle(t)$ platí následující integrální rovnice:

$$|\psi\rangle(t) = |\psi(t \to -\infty)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\hat{H}_{int}(t')|\psi\rangle(t'). \tag{55}$$

Tuto rovnici lze řešit ve třech následujících krocích. Prvním krokem je započtení počáteční podmínky v signálovém a jalovém poli:

$$|\psi\rangle^{(0)}(0, t \to -\infty) = |vac\rangle. \tag{56}$$

Následující krok má tvar [11]:

$$|\psi\rangle^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' H_{int}(t')|vac\rangle \tag{57}$$

a popisuje jeden fotonový pár. Posledním krokem je kombinace obou členů:

$$|\psi\rangle(t) = |\psi\rangle^{(0)} + |\psi\rangle^{(1)}. \tag{58}$$

Obecně lze tedy psát první řád teorie poruch následovně:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle^{(1)}_{s,i}(t \to \infty) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^L dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \\ E_p^{(+)}(z,t)E_s^{(-)}(z,t)E_i^{(-)}(z,t)|vac\rangle_{s,i}.\end{aligned} \tag{59}$$

Po dosazení se rovnice (59) vyjádří následovně:

$$\begin{aligned}\int_0^L dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \frac{-i}{\hbar}\frac{\chi^{(2)}\epsilon_f^2\epsilon_s\hat{a}_s^\dagger(k_s)\epsilon_i\hat{a}_i^\dagger(k_i)}{\sqrt{2}\pi} e^{i(k_p+k_s+k_i)z} e^{\frac{-(\omega_p-\omega_p^0)^2\tau_p^2}{8}} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i(\omega_p-\omega_s-\omega_i)t}.\end{aligned} \tag{60}$$

Integrál v předchozím výrazu lze zjednodušit pomocí následujících vzorců pro δ-funkce:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\Omega t} = \delta(\Omega) \to \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i), \tag{61}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)\,\delta(\Omega)\, d\Omega = f(0). \tag{62}$$

Rovnici (60) lze tedy přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned}\int_0^L dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \frac{-i}{\hbar}\frac{\chi^{(2)}\epsilon_f^2\epsilon_s\hat{a}_s^\dagger(k_s)\epsilon_i\hat{a}_i^\dagger(k_i)}{\sqrt{2}\pi} \\ e^{i(k_p+k_s+k_i)z} e^{\frac{-(\omega_p-\omega_p^0)^2\tau_p^2}{8}} 2\pi\delta(\omega_i + \omega_s - \omega_p).\end{aligned} \tag{63}$$

Pro integrál přes frekvenci čerpacího pulzu platí

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_p\, \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)\beta(\omega_p, \omega_s, \omega_i) = \beta(\omega_s + \omega_i, \omega_s, \omega_i). \tag{64}$$

Tím v rovnici (63) zůstávají pouze integrály ve frekvenční oblasti signálového a jalového pole a podél délky krystalu:

$$\int_0^L dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \frac{-i}{\hbar}\sqrt{2}\epsilon_s\epsilon_i\epsilon_f^2 e^{i\Delta k(\omega_s,\omega_i)z} e^{\frac{-(\omega_i+\omega_s-\omega_p^0)^2\tau_p^2}{8}}. \tag{65}$$

Prostorový integrál se řeší přímou metodou, je však třeba dbát na to, že původní změna integračních mezí od 0 do L na $-L/2$ do $L/2$ změní i fázový faktor[1]. Řešení se získá ve tvaru funkce $\frac{sin(x)}{x} = sinc(x)$:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\, e^{i\Delta kz} = \frac{-i}{\Delta k}\Big[e^{i\Delta kz}\Big]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{sin(\frac{\Delta kL}{2})}{\frac{\Delta kL}{2}} = Lsinc\Big(\frac{\Delta kL}{2}\Big). \tag{66}$$

Vlnová funkce prvního řádu teorie poruch má tedy tvar

$$|\psi\rangle_{s,i}^{(1)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i\, A_{12}(\omega_s,\omega_i)\hat{a}_s^\dagger(\omega_s)\hat{a}_i^\dagger(\omega_i)|vac\rangle \tag{67}$$

a dvoufotonová amplituda se rovná

$$A_{12}(\omega_s,\omega_i) = -\frac{i\,\chi^2\,\epsilon_i\epsilon_s\epsilon_f^2\sqrt{2}Le^{-\frac{(\omega_i+\omega_s-\omega_p^0)^2\,\tau_f^2}{8}}}{\hbar} sinc\Big(\frac{\Delta k(\omega_i,\omega_s)L}{2}\Big). \tag{68}$$

6.3 Aproximace funkce sinc

Volbou vhodné aproximace funkce *sinc* je možné opět pracovat s Gaussovskou funkcí. Byla zvolena funkce $e^{-\alpha\,x^2}$ pro kterou je potřeba najít vhodnou konstantu α. Metodou „Full width at half maximum"byla konstanta x_0 určena numericky a to pro

$$\frac{sin(x_0)}{x_0} = \frac{1}{2} \rightarrow 2\,sin(x_0) = x_0. \tag{69}$$

Vztah je tedy dán jako:

$$e^{-\alpha\,x_0^2} = \frac{1}{2} \rightarrow -\alpha\,x_0^2 = -ln(2) \tag{70}$$

a konstantu α lze tedy vyjádřit následujícím způsobem:

$$\alpha = \frac{ln2}{x_0}. \tag{71}$$

Rovnice (69) byla vyřešena v programu Python s výsledkem $x_0 = 1,89549$. Dosazením do (71) byla určena konstanta $\alpha = 0,192922$.

6.4 Odvození vlnového vektoru $\Delta\vec{k}(\omega_s, \omega_i)$

Rozfázování vlnových vektorů $\Delta\vec{k}(\omega_s, \omega_i)$ je prvně nutno rozložit do tvaru jednotlivých vlnových vektorů a ty rozepsat ve formě Taylorovy řady následovně:

$$k_p(\omega_p) = k_p^0 + \frac{\partial k_p}{\partial \omega_p}\Big|_{\omega_p=\omega_p^0}(\omega_p - \omega_p^0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega_p^2}\Big|_{\omega_p=\omega_p^0}(\omega_p - \omega_p^0)^2, \tag{72}$$

$$k_s(\omega_s) = k_s^0 + \frac{\partial k_s}{\partial \omega_s}\Big|_{\omega_s=\omega_s^0}(\omega_s - \omega_s^0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega_s^2}\Big|_{\omega_s=\omega_s^0}(\omega_s - \omega_s^0)^2, \tag{73}$$

$$k_i(\omega_i) = k_i^0 + \frac{\partial k_i}{\partial \omega_i}\Big|_{\omega_i=\omega_i^0}(\omega_i - \omega_i^0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega_i^2}\Big|_{\omega_i=\omega_i^0}(\omega_i - \omega_i^0)^2. \tag{74}$$

Druhé členy jde rozepsat ve smyslu grupové rychlosti, třetí jako disperzi a rozptyl frekvencí od středu gaussovského píku lze nahradit pomocí symbolu Δ stejně jako v popisu pod rovnicí (45):

$$k_p(\omega_p) = k_p^0 + \frac{1}{v_{g,p}}\Delta\omega_p + D_p(\Delta\,\omega_p)^2, \tag{75}$$

$$k_s(\omega_s) = k_s^0 + \frac{1}{v_{g,s}}\Delta\omega_s + D_s(\Delta\,\omega_s)^2, \tag{76}$$

$$k_i(\omega_i) = k_i^0 + \frac{1}{v_{g,i}}\Delta\omega_i + D_i(\Delta\,\omega_i)^2. \tag{77}$$

Dosazením těchto rovnic do $\Delta\,k(\omega_s, \omega_i)$ lze vyjádřit $\Delta\,k(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i) = k_s + k_i - k_p$ jako:

$$\begin{aligned} \Delta\,k(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i) = k_s^0(\omega_s^0) + k_i^0(\omega_i^0) - k_p(\omega_p^0 = \omega_s^0 + \omega_i^0) \\ + \frac{\Delta\,\omega_s}{v_{g,s}} + \frac{\Delta\,\omega_i}{v_{g,i}} + \frac{(\Delta\omega_s + \Delta\omega_i)}{v_{g,p}} \\ -D_p(\Delta\,\omega_p)^2 + D_s(\Delta\,\omega_s)^2 + D_i(\Delta\,\omega_i)^2, \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} \Delta\,k(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i) = k_s^0(\omega_s^0) + k_i^0(\omega_i^0) - k_s^0(\omega_s^0) - k_i^0(\omega_i^0) \\ + \frac{\Delta\,\omega_s}{v_{g,s}} + \frac{\Delta\,\omega_i}{v_{g,i}} + \frac{(\Delta\omega_s + \Delta\omega_i)}{v_{g,p}} \\ -D_p(\Delta\,\omega_p)^2 + D_s(\Delta\,\omega_s)^2 + D_i(\Delta\,\omega_i)^2 \\ \approx \frac{\Delta\,\omega_s}{v_{g,s}} + \frac{\Delta\,\omega_i}{v_{g,i}} + \frac{\Delta\omega_s + \Delta\omega_i}{v_{g,p}}. \end{aligned} \tag{79}$$

6.5 Konečný tvar dvoufotonové amplitudy

Obecný tvar dvoufotonové amplitudy byl odvozen jako

$$A_{12}(\omega_s, \omega_i) = -\frac{i\,\chi^2\,\epsilon_i \epsilon_s \epsilon_f^2 \sqrt{2} L e^{-\frac{(\omega_i + \omega_s - \omega_p^0)^2\,\tau_p^2}{8}}}{\hbar} sinc\Big(\frac{\Delta k(\omega_i, \omega_s) L}{2}\Big) \tag{80}$$

a po dosazení gaussovy funkce za sinc přejde rovnice na tvar:

$$\tilde{A}_{12}(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i) = -\frac{i\,\chi^2\,\epsilon_i \epsilon_s \epsilon_f^2 \sqrt{2} L\, e^{-\frac{(\Delta\omega_i + \Delta\omega_s)^2\,\tau_p^2}{8}}}{\hbar} e^{-\frac{\alpha\,\Delta k\,(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i)^2 L^2}{4}}. \tag{81}$$

7 Schmidtova dekompozice - rozklad na jednotlivé módy

7.1 Teorie Schmidtova rozkladu a stupeň provázání dvoučásticového systému

Analýza pomocí Schmidtovy dekompozice je v kvantové optice dnes považována za jednu ze základních teorií pro popis provázaných systémů. Původní matematický základ byl odvozen Erhardem Schmidtem v jeho článku z roku 1907[12]. Původní rozklad byl však navržen pro dvou-částicové systémy se spojitými proměnnými (dnes možno použít i pro diskrétní proměnné), pro proměnné diskrétní se využívalo principů tzv. „Singular-Value Decomposition neboli SVD"za použití maticového počtu. Obě tyto metody jsou však vzájemně spjaty [12]. Spojité proměnné mohou reprezentovat frekvence fotonu, nebo směr vlnového vektoru v divergujícím paprsku. V takovýchto případech závisí stupeň provázání na dimenzi Hilbertova prostoru částice, která může nabývat nekonečně velkých hodnot, a proto i stupeň provázání takovýchto systémů může být velmi vysoký. Nejjednoduším příkladem dvou-částicového systému s diskrétními proměnnými jsou například dvojice polarizace - frekvence. Tyto stavy ovšem nemají tak vysoký stupeň provázání, i když jejich reálné aplikace jsou značné, využívají se například v kvantové kryptografii, kvantové tomografii nebo kvantové teleportaci. Je třeba zmínit, že Schmidtův rozklad kvantového provázání je účinný pouze pro tzv. čisté dvou-částicové stavy. Pokud by šlo o stavy smíšené, je lepší použít jiných veličin popisující jejich charakter a to především relativní entropii. Odvození metody SVD je rozepsáno v matematickém dodatku.

7.2 Odvození Schmidtova rozkladu spektrální dvoufotonové amplitudy

Redukovaná matice hustoty módu s je definována jako: [13]:

$$\hat{\rho}_s = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s^{'} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s \Psi_s(\omega_s^{'}, \omega_s) \hat{a}_s^{\dagger}(\omega_s^{'}) |vac\rangle\langle vac| \hat{a}_s^{\dagger}(\omega_s), \tag{82}$$

a funkce Ψ_s(tzv. „weighting function") následovně [11]:

$$\Psi_s(\omega_s^{'}, \omega_s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_i\, \tilde{A}_{12}(\Delta\,\omega_s^{'}, \Delta\,\omega_i) \tilde{A}_{12}^{*}(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i). \tag{83}$$

Při dosazení vlnového vektoru z rovnice (79) do konečného tvaru dvoufotonové amplitudy (81) a zavedení konstanty $C = \frac{i\,\chi^2\,\epsilon_i\epsilon_s\epsilon_f^2\sqrt{2}L}{\hbar}$ lze odvodit mnohem přehlednější tvar dvoufotonové amplitudy pro účely Schmidtova rozkladu a to jako:

$$\tilde{A}_{12}(\Delta\,\omega_s, \Delta\,\omega_i) = C e^{-\frac{(\Delta\omega_i^2 + 2\Delta\omega_i\Delta\omega_s + \Delta\omega_s^2)\tau_p^2}{8}} e^{\frac{-\alpha\,L^2(\frac{\Delta\omega_s}{v_{g,s}} + \frac{\Delta\omega_i}{v_{g,i}} + \frac{\Delta\omega_s + \Delta\omega_i}{v_{g,p}})^2}{4}}, \tag{84}$$

a po dalších úpravách:

$$\tilde{A}_{12}(\Delta\,\omega_s,\Delta\,\omega_i) = Ce^{-(\frac{\tau_p^2}{8}-\frac{\alpha\,L^2}{4}(\frac{1}{v_{g,s}}-\frac{1}{v_{g,p}})^2)\Delta\omega_s^2-(\frac{\tau_p^2}{8}-\frac{\alpha\,L^2}{4}(\frac{1}{v_{g,i}}-\frac{1}{v_{g,p}})^2)\Delta\omega_i^2} \\ e^{-(\frac{\tau_p^2}{8}-\frac{\alpha\,L^2}{4}\frac{1}{v_{g,p}^2})2\Delta\omega_s\Delta\omega_i}. \tag{85}$$

Zavedením substitučních členů $f_{2a} = \frac{\tau_p^2}{8} - \frac{\alpha L^2}{4}(\frac{1}{v_{g,s}} - \frac{1}{v_{g,i}})^2$ kde $a = s,i$ a $f_{2s,i} = \frac{\tau_p^2}{8} - \frac{\alpha L^2}{4}\frac{1}{v_{g,p}}^2$ se rovnice dále zjednoduší a lze ji přepsat následujícím způsobem

$$\tilde{A}_{12}(\Delta\,\omega_s,\Delta\,\omega_i) = Ce^{-f_{2s}\Delta\omega_s^2-f_{2i}\Delta\omega_i^2-f_{2s,i}\Delta\omega_s\,\Delta\omega_i}. \tag{86}$$

Dosazením $\tilde{A}_{12}(\Delta\,\omega_s,\Delta\,\omega_i)$ a $\tilde{A}_{12}(\Delta\omega_s^{'},\Delta\omega_i)$ do (83) lze získat rovnici v Gaussovském tvaru

$$\Psi_s(\omega_s^{'},\omega_s) = |C|^2 e^{-f_{2s}\Delta\omega_s^2-f_{2s^{'}}\Delta\omega_s^{'2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_i e^{-f_{2i}\Delta\omega_i^2-f_{2si}\Delta\omega_s\Delta\omega_i-f_{2i}\Delta\omega_i^2} \\ e^{-f_{2s^{'}i}\Delta\omega_s^{'}\Delta\omega_i}. \tag{87}$$

a po vypočtení integrálu a úpravě se váhová funkce projeví jako

$$\Psi_s(\omega_s^{'},\omega_s) = |C|^2\sqrt{\frac{\pi}{2f_{2i}}} e^{-(-f_{2s}+\frac{f_{2si}}{8f_{2i}})\Delta\omega_s^2-(f_{2,s^{'}}-\frac{f_{2s^{'},i}}{8f_{2i}})\Delta\omega_{s^{'}}^2} \\ e^{2(\frac{|f_{2si}|^2}{8f_{2i}})\Delta\omega_s\Delta\omega_s^{'})}. \tag{88}$$

Pro odvození normalizační konstanty K_n je výhodné zavést další substituce jako

$$e_{2s} = -f_{2s} + \frac{f_{2si}}{8f_{2i}}, \tag{89}$$

$$e_{2s^{'}} = f_{2,s^{'}} - \frac{f_{2s^{'},i}^2}{8f_{2i}}, \tag{90}$$

$$e_{2c} = \frac{|f_{2si}|^2}{8f_{2i}}. \tag{91}$$

Normalizační podmínka definovaná jako [11] $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_s(\omega_s,\omega_s)d\omega_s = 1$ je vypočítána pomocí koeficientů e_{2s}, $e_{2s^{'}}$ a e_{2c} a to následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_s(\omega_s,\omega_s)d\omega_s = K_n|C|^2\sqrt{\frac{\pi}{2f_{2i}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{e_{2s}\Delta\omega_s^2+e_{2s}\Delta\omega_s^2+2e_{2c}\Delta\omega_s\Delta\omega_s} d\omega_s = \\ = K_n|C|^2\sqrt{\frac{\pi}{2f_{2i}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta\omega_s^2 2(e_{2s}+e_{2c})} d\omega_s = \\ = K_n|C|^2\sqrt{\frac{\pi}{2f_{2i}}}\sqrt{\frac{\pi}{2(e_{2s}+e_{2c})}} = 1. \end{aligned} \tag{92}$$

Normalizační konstanta je tedy rovna [11]

$$K_n = \frac{2\sqrt{f_{2i}(e_{2s} + e_{2c})}}{|C|^2\pi}. \tag{93}$$

Normovaný tvar matice hustoty se získá další úpravou výrazu

$$e_{2s}\Delta\omega_s^2 + e_{2s^{‘}}\Delta\omega_{s^{‘}}^2 + 2e_{2c}\Delta\omega_s\Delta\omega_{s^{‘}}. \tag{94}$$

Pomocí transformace $x = \sqrt{e_{2c}}\omega_s$ a $y = \sqrt{e_{2c}}\omega_{s^{‘}}$ lze výraz (94) upravit do tvaru:

$$\frac{e_2}{e_{2c}}(x^2 + y^2) + 2xy = (1 + P)(x^2 + y^2) + 2xy, \tag{95}$$

kde $P = \frac{e_2}{e_{2c}} - 1$. Pokud $P \to 0$ potom všechny vlastní hodnoty λ_n rovnice

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_a \Psi_a(\omega_a^{'}, \omega_a)\phi_{a,n}(\omega_a) = \lambda_n^2 \phi_{a,n}(\omega_a^{'}), \quad a = s, i, \tag{96}$$

jsou stejné a stav je maximálně provázaný. Vlastní hodnoty jsou vyjádřeny pomocí parametru θ [11]

$$\theta = 1 + P - \sqrt{P^2 + 2P}, \tag{97}$$

s jehož využitím lze tyto hodnoty psát jako:

$$\lambda_n^2 = \sqrt{\pi\theta}\theta^n, \quad n = 0, 1, ..., \infty. \tag{98}$$

Vlastní vektory $\phi_{a,n}(x)$ jsou dány následovně:

$$\phi_{a,n}(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{2^n n! \sqrt{\pi\theta}}} e^{-\frac{1-\theta^2}{2\theta}x^2} H_n(\sqrt{\frac{1-\theta^2}{\theta}}x), \;\; n = 0, 1, ..., \infty, \tag{99}$$

kde H_n značí Hermitovy polynomy.

8 Stlačené stavy světla

8.1 Heisenbergovy rovnice

Heisenbergova reprezentace popisuje časový vývoj kvantového systému tak, že se vyvíjí operátory pozorovatelných veličin, zatímco stavový vektor zůstává konstantní. Ze Schrödingerovy rovnice plyne, že [14]:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle, \ \rightarrow |\psi\rangle(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t|}\psi(0)\rangle. \tag{100}$$

Dále se vychází ze statistického operátoru definovaného jako $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$. Jeho časový vývoj je dán jeho derivací:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}\langle\psi| + |\psi\rangle\frac{\partial\langle\psi|}{\partial t}, \tag{101}$$

a tedy

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}. \tag{102}$$

Pro střední hodnoty libovolného operátoru $\hat{A}(t)$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} Tr[\hat{\rho}(t)\hat{A}(0)] &= \langle\hat{A}(t)\rangle \\ &= Tr[e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\rho}(0)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)] \\ &= Tr[\hat{\rho}(0)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}] \\ &= Tr[\hat{\rho}(0)\hat{A}(t)]. \end{aligned} \tag{103}$$

Heisenbergova rovnice pro operátor $\hat{A}$ závisející na čase nabývá tvaru

$$-i\hbar\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{A}]. \tag{104}$$

Rovnice, popisující analogický vývoj v prostoru podél osy z (ct) má následující formu:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{A}}{\partial z} = [\hat{G}, \hat{A}], \ \ \hat{G} = \frac{\hat{H}}{c}, \tag{105}$$

kde $\hat{G}$ je operátor hybnosti, $\hat{H}$ je Hamiltonián popisující celkovou energii systému a c je rychlost světla. Hamiltononián, využitý v další části práce, je výhodný zapsat ve tvaru [13]:

$$\hat{H} = \kappa\,\hat{a}_f^2\hat{a}_{shg}^\dagger + \kappa\,\hat{a}_p^{\dagger 2}\hat{a}_{shg}, \tag{106}$$

kde $\hat{a}_f$ značí anihilační operátor fundamentálního pole a $\hat{a}_{shg}$ je anihilační operátor pole druhé harmonické frekvence, κ je vazebná konstanta.

8.2 Odvození vazebné konstanty

Amplitudu klasického elektrického fundamentálního pole E_f lze rozložit do polychromatických módových funkcí Schmidtovy báze $f_n(\omega)$ s využitím koeficientů $\alpha_{f,n}$ následovně:

$$E_f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{fn}\, f_n(\omega), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(\omega)|^2 d\omega = 1. \tag{107}$$

Podobným způsobem lze přibližně vyjádřit klasické pole druhé harmonické frekvence:

$$E_{shg}(\omega) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{shg,n}\, g_n(\omega)\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g_n(\omega)|^2 d\omega \neq 1. \tag{108}$$

Módové funkce pole druhé harmonické frekvence jsou dány takto:

$$g_n(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(\omega`) f_n(\omega - \omega`) d\omega`. \tag{109}$$

Pro kvantová pole se pozitivně frekvenční složky $\hat{E}_f^{(+)}(\omega)$ a $\hat{E}_{shg}^{(+)}(\omega)$ vyjádří pomocí anihilačních operátorů fotonů módů $\tilde{g}_n(\omega)$, $f_n(\omega)$ jako

$$\hat{E}_f^{(+)}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_{f,n}\, f_n(\omega), \tag{110}$$

$$\hat{E}_{shg}^{(+)}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_{shg,n}\, \tilde{g}_n(\omega), \;\; \tilde{g}_n(\omega) = r_n g_n(\omega), \tag{111}$$

kde r_n je renormalizační koeficient,

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |g_n(\omega)|^2}}, \tag{112}$$

a $\tilde{g}_n$ jsou správně normované módové funkce ($\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{g}_n(\omega)|^2 = 1$).
Pomocí těchto rozkladů interagujících polí lze nahradit operátor hybnosti jeho přibližným efektivním tvarem

$$\hat{G}_{shg}(z) = \chi^{(2)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_f^{(-)2}(z,\, t)\, \hat{E}_{shg}^{(+)}(z, t) dt + H.c., \tag{113}$$

$$\hat{G}_{shg}^{eff} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_n^{ren} \hat{a}_{f,n}^2\, \hat{a}_{shg,n}^{\dagger} + H.c., \tag{114}$$

kde $\tilde{\kappa}_n^{ren}$ je renormalizovaná vazebná konstanta a $H.c.$ značí hermitovské sdružení. Renormalizovaná vazební konstanta $\tilde{\kappa}_n^{ren}$ musí být přímo úměrná susceptibilitě $\chi^{(2)}$, Schmidtovu koeficientu λ_n a renormalizační konstantě r_n

$$\tilde{\kappa}_n \approx \chi^{(2)} \lambda_n r_n. \tag{115}$$

Podobně jako původní Schmidtovy koeficienty λ_n splňovaly podmínku

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 = 1, \tag{116}$$

musí platit $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n\, r_n)^2 = 1$ a tedy $\tilde{\kappa}_n^{ren}$ lze vyjádřit takto:

$$\tilde{\kappa}_n^{ren} = \chi^{(2)} \frac{\lambda_n\, r_n}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n\, r_n)^2}}. \tag{117}$$

8.3 Prostorový vývoj operátorů $\hat{a}_f$ a $\hat{a}_{shg}$ v jedné dvojici módů, lineární operátorové korekce

Dosazením operátorů amplitudy elektrického pole pro fundamentální pole a pole druhé harmonické frekvence do Heisenbergových rovnic (105) odvodíme soustavu následujících nelineárních rovnic pro operátory jednotlivých módů:

$$\frac{\partial \hat{a}_f}{\partial z} = \frac{2i}{\hbar}\tilde{\kappa}^* \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_{shg}, \tag{118}$$

$$\frac{\partial \hat{a}_f^*}{\partial z} = -\frac{2i}{\hbar}\tilde{\kappa} \hat{a}_f \hat{a}_{shg}^\dagger, \tag{119}$$

$$\frac{\partial \hat{a}_{shg}}{\partial z} = \frac{i}{\hbar}\tilde{\kappa} \hat{a}_f^2, \tag{120}$$

$$\frac{\partial \hat{a}_{shg}^*}{\partial z} = -\frac{i}{\hbar}\tilde{\kappa}^* \hat{a}_f^{\dagger 2}. \tag{121}$$

Při odvození rovnic byly použity komutační relace[5] $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, $[l(\hat{a}), \hat{a}^\dagger] = \frac{\partial l(\hat{a})}{\partial \hat{a}}$ a $[\hat{a}, h(\hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial h(\hat{a}^\dagger)}{\partial \hat{a}^\dagger}$. Tyto nenlineární operátorové rovnice není možno řešit analyticky, proto se postupuje následujícím způsobem. Nejprve se provede přeznačení $\frac{i}{\hbar}\tilde{\kappa} = \gamma$ a následně se rovnice (118) až (121) přepíší do tvaru [15]:

$$\frac{\partial \hat{a}_f}{\partial z} = -2\gamma^* \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_{shg}, \quad \frac{\partial \hat{a}_f^\dagger}{\partial z} = -2\gamma \hat{a}_f \hat{a}_{shg}^\dagger, \tag{122}$$

$$\frac{\partial \hat{a}_{shg}}{\partial z} = \gamma \hat{a}_f^2, \quad \frac{\partial \hat{a}_{shg}^\dagger}{\partial z} = \gamma^* \hat{a}_f^{\dagger 2}, \tag{123}$$

jež odpovídají rovnicím (5) a (6) [1, 16] pro klasické řešení. Poté lze získat řešení odpovídající klasických rovnic a kvantový charakter řešení zhruba započítat pomocí operátorových lineárních korekcí. Tedy operátory fundamentálního pole a pole druhé harmonické frekvence lze rozepsat jako [17]:

$$\hat{a}_{(f,\, shg)} = a_{(f,\, shg)} + \delta\hat{a}_{(f,\, shg)}. \tag{124}$$

Linearizované rovnice pro operátorové korekce potom nabydou tvaru:

$$\frac{\partial \hat{a_f}}{\partial z} = 2\gamma[a_f^*(z)\delta\hat{a}_{shg} + \delta\hat{a}_f(z) a_{shg}(z)], \tag{125}$$

$$\frac{\partial \delta a_{shg}}{\partial z} = -2\gamma a_f(z)\delta\hat{a}_f. \tag{126}$$

V tomto modelu lineární operátorové korekce však nedochází ke stlačení módů pole druhé harmonické frekvence a bylo by nutné započítat i další člen, který by v rovnici (125) byl ve formě $\delta\hat{a}_f^\dagger \delta\hat{a}_{shg}$ a v rovnici (126) δa_f^2. Na druhé straně stlačené světlo je generováno v poli fundamentální frekvence. O tomto je možné se přesvědčit například pomocí teorie poruch.

9 Závěr

V práci byla podána spektrální mnohamódová formulace procesu generace druhé harmonické frekvence, která umožňuje studovat stlačené světlo v jednotlivých spektrálních módech. Byla použita metoda rozkladu dvoufotonové spektrální amplitudy, získané poruchovým řešením procesu generace druhé subharmonické frekvence do Schmidtovy ortogonální báze, která přibližně diagonalizuje studovanou nelineární interakci. Tímto metoda poskytuje vhodné spektrální dvojice módů (jeden ve fundamentálním módu, jeden v módu druhé harmonické) pro studium generace stlačeného světla. Pro toto studium je nutná kvantová formulace založená na řešení Heisenbergových rovnic a jejich řešení pomocí lineární operátorové korekce ke klasickému nelineárnímu řešení. Detailní mnohamódové studium bude předmětem další práce.

10 Matematické dodatky

10.1 Gaussovské integrály

Gaussův integrál, označovaný též jako Eulerův-Poissonův, je integrál přes celou reálnou osu z funkce e^{x^2} označované jako Gaussova funkce. Původním autorem je Abraham de Moivre, který objevil tento typ integrálu v roce 1733. Gaussem publikovaný důkaz je z roku 1809. Integrál je nezbytnou součástí moderní fyziky hlavně díky svému užití při výpočtu normálního rozdělení, normalizačních konstant a stal se základním matematickým aparátem kvantové mechaniky a kvantové teorie pole. Důkaz výpočtu se provádí v polarních, či kartézských souřadnicích. Důkaz v polárních souřadnicích je v dalším textu odvozen.[3]
Integrál lze aproximovat funkcí $M(a)$ jako:

$$M(a) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx \tag{127}$$

Pokud je integrál absolutně konvergentní je hlavní hodnota integrálu určena limitně:

$$\lim_{a\to\infty} M(a) \tag{128}$$

a odpovídá situaci

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}. \tag{129}$$

Při kvadratickém umocnění obou stran rovnice a změně jedné integrační proměnné lze dojít k:

$$M^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy. \tag{130}$$

Při přechodu od kartézských do polárních souřadnic se volí proměnné následovně:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi)$$

a celá rovnice nabývá tvaru:

$$M^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr\, d\phi. \tag{131}$$

Integrál lze vyřešit za použití substituce $s = r^2$ a jeho hodnota je π, odmocněním je tedy výsledek rovnice (131)

$$M = \sqrt{\pi}. \tag{132}$$

Pokud se před proměnnou nachází jakákoli konstanta α, výsledek se modifikuje na

$$M = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{133}$$

Dalším z použitých Gaussovských integrálů je ten, který je rozšířen ještě o jednu exponenciální závislost $e^{i\beta z}$ a počítá se takto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\beta x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\frac{i\beta}{2\alpha})^2} e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha}} dx$$

za použití substituce komplexním číslem ($z = ix + y$, $y = -\frac{\beta}{2\alpha}$):

$$x - \frac{\beta i}{2\alpha} = z,$$

je hodnota integrálu dána jako

$$e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty - i\frac{\beta}{2\alpha}}^{\infty - i\frac{\beta}{2\alpha}} e^{-\alpha z^2} dz = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

10.2 Manley-Roweho vztahy

Manley-Roweho vztahy byly původně odvozeny v Bellových laboratořích Johnem Manley a Harrisonem Rowe za účelem výpočtu množství elektromagnetické energie uchované ve vlnách o různých frekvencích. Dnes se vztahy využívají taktéž v nelineární optice pro stejné účely. Za předpokladu tří vln o různých frekvencích ω_1, ω_2 a ω_3 [1] je odvození následující:

$$\varepsilon_j(z,t) = \hat{e}_j A_j(z,\omega_j) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c., \tag{134}$$

pro $j = 1, 2, 3$ a za předpokladu izotropního média. Poyntingův vektor $\vec{S}$ je rovnoběžný s vlnovým vektorem $\vec{k}$. Pro ω_3 platí, že $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Vývoj amplitud je popsán rovnicemi vázaných vln:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1}{n_1 c} \hat{e_1} \chi^{(2)}(\omega_3, -\omega_2) \hat{e}_3 \hat{e}_2 A_3\, A_2^* e^{i\Delta kz}, \tag{135}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2}{n_2 c} \hat{e_2} \chi^{(2)}(\omega_3, -\omega_1) \hat{e}_3 \hat{e}_1 A_3\, A_1^* e^{i\Delta kz}, \tag{136}$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3}{n_3 c} \hat{e_3} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \hat{e}_1 \hat{e}_2 A_1\, A_2^* e^{i\Delta kz}. \tag{137}$$

Hustota energie v nelineárním médiu je vyjádřena pomocí fotonové hustoty $N\hbar\omega = Nh\frac{c}{\lambda} = |\vec{S}| = 2\varepsilon_0 cn|A|^2$. Evoluce fotonové hustoty na frekvenci ω_3 se mění podle optické osy krystalu následovně

$$\frac{dN_3}{dz} = \frac{2\varepsilon_0}{\hbar} \hat{e_3} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \hat{e}_1 \hat{e}_2 (iA_1 A_2 A_3^* e^{-i\Delta kz} - iA_1^* A_2^* A_3 e^{i\Delta kz}). \tag{138}$$

Za předpokladu úplné permutační symetrie a využití analogických rovnic pro fotonové hustoty N_1 a N_2 odvodíme následující Manley-Roweho vztahy:

$$\frac{d(N_1 - N_2)}{dz} = \frac{d(N_2 + N_3)}{dz} = \frac{d(N_1 + N_3)}{dz} = 0. \tag{139}$$

10.3 Diracova δ-funkce

Dirakova funkce δ je zobecněná funkce, která nabývá hodnoty nekonečno pouze v hodnotě $x = 0$ a jinde má hodnotu nulovou. Vytváří nekonečně vysoký a nekonečně úzký pík, jehož plocha pod grafem je rovna jedné[5]:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{pro}\, x = 0 \\ 0, & \text{pro}\, x \neq 0 \end{cases}. \tag{140}$$

Diracova δ-funkce má pro účely práce význam jednotkového operátoru při integraci ve formě

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_a(x)dx = f(a). \tag{141}$$

Jako příklad je uveden vzorec:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega_p\, \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)\, \beta(\omega_p, \omega_s, \omega_i) = \beta(\omega_p, \omega_s, \omega_i). \tag{142}$$

Diracova δ-funkce je také Fourierovou transformací konstantní funkce $1/(2\pi)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{ixt} = 2\pi\delta(x). \tag{143}$$

10.4 Přepočet Gaussova integrálu dle Cauchyho věty

Podle Cauchyho věty platí, že integrály holomorfních funkcí po uzavřených křivkách jsou nulové pokud tyto funkce nemají uvnitř uzavřené oblasti póly. Důsledkem této věty je tzv. Cauchyho vzorec [3] díky němuž můžeme počítat hodnoty holomorfních funkcí uvnitř nějaké oblasti z hodnot na její hranici. Lze psát že,

$$\oint_C f(z)\, dz = 0. \tag{144}$$

Integrál se rozepíše na imaginární a reálnou část a to s využitím vztahů $f = u+iv$ a $z = x + iy$ $(dz = dx + idy)$:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy) = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy). \tag{145}$$

Integrály je nutno upravit pomocí Greenovy věty

$$\oint_C (udx - vdy) = \iint_C \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{146}$$

$$\oint_C (vdx + udy) = \iint_C \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{147}$$

Integrandy na pravých stranách rovnic jsou dle Cauchyho-Riemannových podmínek nulové, tím je důkaz proveden. Přepočet Gaussova integrálu je tedy dán následovně:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\beta x} dx =$$

$$\int_{e^{-\frac{i\phi\alpha}{2}}(-\infty)}^{e^{\frac{i\phi\alpha}{2}}(\infty)} dz\, e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} e^{-|\alpha|z^2} e^{i\beta e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} z} =$$

$$e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-|\alpha|z^2} e^{i\beta e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} z} =$$

$$e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-|\alpha|[z-\frac{i\beta_1}{2|\alpha|}]^2} e^{-\frac{|\alpha|\beta_1^2}{4|\alpha|^2}} =$$

$$e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{-\frac{\beta^2 e^{-i\phi\alpha}}{4|\alpha|}} =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Při výpočtu byly použity následující substituce:

$$\alpha = |\alpha| e^{i\phi\alpha},$$

$$x = e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}} z,$$

$$\beta_1 = \beta e^{-i\frac{\phi\alpha}{2}}.$$

10.5 Singular-Value Decomposition

SVD je metoda rozkladu matice na tři jiné matice ve tvaru[18]:

$$A = USV^{\mathrm{T}}. \tag{148}$$

V rozkladu je matice A tvaru $m \times n$, ortogonální matice U tvaru $m \times n$, diagonální matice S tvaru $n \times n$ a ortogonální matice V tvaru $n \times n$.

Rovnice (148) se dá rozepsat pomocí Einsteinovi sumační konvence do názornějšího tvaru jako

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} s_k v_{jk}. \tag{149}$$

Výhodou je rozpad diagonální matice S do formy vektoru, takto je možno celý výraz zjednodušit do tvaru výše. Proměnné s_i jsou tzv. singulární hodnoty a jsou uspořádány od největšího po nějmenší. Sloupce matice U jsou tzv. levé singulární vektory, pro matici V se nazývají pravé singulární vektory. Matice U a V jsou slo6eny z ortonormálních vektorů, což lze vyjádřit pomocí

$$U^{\mathrm{T}}U = VV^{\mathrm{T}} = I, \tag{150}$$

kde I je jednotková matice, jejíž hodnoty na diagonále jsou rovny jedné, ostatní rovny nule. Za použití vlastností ortogonality je možno jednotlivé matice uspořádat do následujících párových rovnic pro vyjádření vlastních hodnot

$$AA^{\mathrm{T}}U = US^2, \tag{151}$$

$$A^{\mathrm{T}}AV = VS^2. \tag{152}$$

Literatura

[1] BOYD, R.W. *Nonlinear Optics, Third Edition*. New York: Academic Press, Inc., 2008. ISBN 0123694701.

[2] BRACEWELL, R.N. *Solutions Manual to Accompany the Fourier Transform and Its Applications*. 1978. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series. ISBN 9780070070141.

[3] GRADSHTEIN, I.S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products, 6th ed.* San Diego: Academic Press, Inc., 2000. ISBN 9780122947575.

[4] FICEK, Z.; WAHIDDIN, M.R. *Quantum Optics for Beginners*. 2014. ISBN 9789814411752.

[5] GRIFFITHS, D.J.; GRIFFITHS, P.D.J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2005. Pearson international edition. ISBN 9780131118928.

[6] DAMELIN, S.B.; MILLER, W. *The Mathematics of Signal Processing*. 2012. Cambridge Texts in Applied Mathematics. ISBN 9781107013223.

[7] SALEH, B.E.A.; TEICH, M.C. *Fundamentals of photonics; 2nd ed.* New York: Wiley, 2007. Wiley series in pure and applied optics.

[8] MALÝ, P. *Optika*. Praha 1: Karolinum, 2008. ISBN 978-80-246-2246-0.

[9] PEŘINA, J.; SERGIENKO, A.V.; JOST, B.M.; SALEH, B.E.A.; TEICH, M.C. Dispersion in femtosecond entangled two-photon interference. *Phys. Rev. A*. 1999, roč. 59, č. 3, s. 2359–2368. ISSN 1094-1622.

[10] HALENKOVÁ, E.; ČERNOCH, A.; SOUBUSTA, J. *Spontánní sestupná frekvenční parametrická konverze a zdroj fotonových párů podle návrhu P.G. Kwiata*. 2012. ISBN 9788024431116.

[11] PEŘINA, J. Quantum properties of counterpropagating two-photon states generated in a planar waveguide. *Phys. Rev. A*. 2008, roč. 77, s. 013803.

[12] FEDOROV, M.V.; MIKLIN, N.I. Schmidt modes and entanglement. *Cont. Phys.* 2014, roč. 55, č. 2, s. 94–109.

[13] MEYSTRE, P.; SARGENT, M. *Elements of Quantum Optics*. 1998. ISBN 9783540642206.

[14] KLÍMA, J.; VELICKÝ, B. *Kvantová mechanika I.* 2016. ISBN 9788024629377.

[15] LUKŠ, A.; PEŘINOVÁ, V.; PEŘINA, J. Principal squeezing of vacuum fluctuations. *Opt. Commun.* 1988, roč. 67, s. 149–151.

[16] FRANKEN, P.A.; HILL, A.E.; PETERS, C.W.; WEINREICH, G. Generation of Optical Harmonics. *Phys. Rev. Lett.* 1961, roč. 7, s. 118–119.

[17] LUKŠ, A.; PEŘINA, J.; KŘEPELKA, J. Quantum corrections to classical solutions for second harmonic generation. *Acta Phys. Polonica A*. 1987, roč. 72, s. 443–451.

[18] TREFETHEN, Lloyd N.; BAU, D. *Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 1997. ISBN 0898713617.