

Česká zemědělská univerzita v Praze

Provozně ekonomická fakulta

Katedra systémového inženýrství



Diplomová práce

**Analýza časových oken pro okružní dopravní problém
ve vybrané společnosti**

Nikola Písaříková

© 2017 ČZU v Praze

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Provozně ekonomická fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Bc. Nikola Písaříková

Provoz a ekonomika

Název práce

Analýza časových oken pro okružní dopravní problém ve vybrané společnosti

Název anglicky

Analysis of time windows for travelling salesman problem in the selected company

Cíle práce

Cílem diplomové práce je analýza citlivosti optimální trasy technika ve vybrané společnosti. Citlivost trasy bude analyzována s ohledem na možné změny časových oken a jejich dopad na posloupnost jednotlivých míst v okružní trase. Citlivost bude analyzována nejen z čistě matematického hlediska, ale musí respektovat ekonomické a manažerské požadavky společnosti.

Metodika

- 1) Studium odborné literatury se zaměřením na bivalentní programování a jeho aplikaci na problematiku okružních úloh.
- 2) Sběr dat v konkrétní firmě: reálné okružní trasy, současná časová okna, možné změny časových oken.
- 3) Analýza získaných dat – optimální trasy při současném nastavení časových oken.
- 4) Analýza časových oken – optimální trasy při alternativním nastavení časových oken.
- 5) Komparace a interpretace výsledků.

Doporučený rozsah práce

60-80 stran

Klíčová slova

okružní dopravní problém, časová okna, citlivostní analýza, optimalizace tras, bivalentní programování

Doporučené zdroje informací

Fábry, Jan, 2006. Dynamické okružní a rozvozní úlohy, disertační práce. Praha: VŠE-FIS.

Fábry, Jan, 2006. Dynamic Traveling Salesman Problem. Plzeň, s. 137-146. ISBN 80- 7043-480-5.

PELIKÁN, J. 1993. Praktikum z operačního výzkumu. 1.vyd. Praha: VŠE. 86 s. ISBN 80-7079-135-7.

PELIKÁN, J. 2001. Diskrétní modely v operačním výzkumu. 1. vyd. Praha: Professional Publishing. 164 s. ISBN 80-86419-17-7.

ŠUBRT, Tomáš a kolektiv, 2011. Ekonomicko-matematické metody. Plzeň: Aleš Čeněk, s.r.o. ISBN 978-80-7380-345-2.

Předběžný termín obhajoby

2016/17 LS – PEF

Vedoucí práce

Ing. Igor Krejčí, Ph.D.

Garantující pracoviště

Katedra systémového inženýrství

Elektronicky schváleno dne 22. 11. 2016

doc. Ing. Tomáš Šubrt, Ph.D.

vedoucí katedry

Elektronicky schváleno dne 23. 11. 2016

Ing. Martin Pelikán, Ph.D.

Děkan

V Praze dne 31. 03. 2017

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci "Analýza časových oken pro okružní dopravní problém ve vybrané společnosti" jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího Ing. Igora Krejčího, Ph.D. a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu literatury. Dále jako autorka uvedené diplomové práce prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušila autorská práva třetích osob.

V Praze dne 31. března 2017

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala Ing. Igoru Krejčímu, Ph.D. za odborné vedení a cenné připomínky a rady k diplomové práci a Ing. Robertu Hlavatému, Ph.D. za pomoc se softwarem GurobiOptimizer.

Analýza časových oken pro okružní dopravní problém ve vybrané společnosti

Analysis of time windows for travelling salesman problem in the selected company

Souhrn

Diplomová práce se zabývá analýzou časových oken pro okružní dopravní problém ve společnosti XYZ. Teoretická část práce seznamuje s problematikou. Zaměřena je hlavně na úlohu obchodního cestujícího, která je doplněna o časová okna, délku obsluhy a čekání vozidla. Dále se teoretická část zabývá celočíselným programováním a postoptimalizační analýzou. V praktické části je nejdříve provedena analýza pěti tras technika, který navštěvuje zákazníky a musí dodržovat určité dvouhodinové intervaly, kdy je může obsloužit. Každá návštěva je jinak časově ohodnocena, záleží na náročnosti prováděné práce. Tím, že existují časové intervaly (časová okna), musí sezohlednit čekání vozidla, v této diplomové práci vozidlo čeká u právě obslouženého zákazníka. Časových oken má technik za den několik, nejvíce jich může mít šest. Analýza časových oken zkoumá, zda po sjednocení vybraných časových oken, nebude mít lepší řešení. Optimální řešení vytvořeného matematického modelu je nalezeno pomocí softwaru GurobiOptimizer. Získané výsledky jsou následně interpretovány.

Summary

This thesis deals with analysis of time windows for travelling salesman problem in the company XYZ. Theoretical part of the thesis introduces the problematic focused mainly on the travelling salesman problem which is completed with time windows length of service and waiting of the vehicle. Furthermore the theoretical part is about integer programming and postoptimality analysis. Beginning of the practical part refers about analysis of visiting customers by technician which need to obey specific two-hour time intervals when the customers can be served. Each customer visit takes different amount of time with regarding the difficulty of the work. Because of time intervals (time windows) must be considered

waiting of the vehicle. In this thesis the vehicle waiting at the site of currently served customer. Technicians have more slots (time windows) during the day however the maximum is six. Analysis of time windows is about find whether or not the technician would have better solution after unification of some of the time windows. Optimal solution of created mathematical model is found by software Gurobi Optimizer. Gained results are interpreted afterwards.

Klíčová slova:

Okružní dopravní problém, časová okna, citlivostní analýza, optimalizace tras, bivalentní programování

Keywords:

Travelling salesman problem, time windows, postoptimality analysis, route optimization, bivalent programming

Obsah

1	Úvod.....	12
2	Cíl práce a metodika	13
3	Teoretická část práce	15
3.1	Operační výzkum.....	15
3.1.1	Historie operačního výzkumu.....	15
3.1.2	Definice operačního výzkumu a disciplíny	15
3.1.3	Matematické modelování.....	16
3.1.4	Rozhodovací problém	17
3.1.5	Členění modelů	21
3.2	Celočíselné programování	22
3.2.1	Klasifikace úloh	24
3.3	Postoptimalizační analýza.....	25
3.4	Software pro řešení úloh LP	27
3.4.1	Optimalizační systémy.....	27
3.4.2	Systémy na podporu modelování.....	28
3.5	Distribuční úlohy	29
3.5.1	Dopravní problém	29
3.5.2	Kontejnerový dopravní problém.....	32
3.5.3	Přiřazovací problém.....	32
3.5.4	Okružní dopravní problém.....	33
3.5.5	Úloha obchodního cestujícího	33
4	Praktická část	42
4.1	Představení společnosti XYZ.....	42
4.2	Objednávky.....	42
4.3	Analýza tras	44
4.3.1	Pondělí - Trasa 1 a 1.1	45
4.3.2	Úterý – Trasa 2 a 2.2.....	49
4.3.3	Středa – Trasa 3 a 3.3.....	53
4.3.4	Čtvrtek – Trasa 4 a 4.4.....	56
4.3.5	Pátek – Trasa 5 a 5.5.....	59
4.4	Výsledky	63

5	Závěr	86
6	Seznam literatury	88
7	Přílohy.....	90

Seznam tabulek

Tabulka 1: Tabulka dopravního problému (Zdroj: Šubrt a kol., 2011, s. 81).....	30
Tabulka 2: „Praktické příklady množin v přiřazovacím problému“ (Fábry, 2011, s. 51) ...	32
Tabulka 3: Označení tras (Vlastní zpracování).....	45
Tabulka 4: Adresy trasy 1 a 1.1, minuty (Vlastní zpracování).....	45
Tabulka 5 : Dvuhodinové intervaly pro Trasu 1 a 1.1 (Vlastní zpracování)	46
Tabulka 6: Naměřené hodnoty pro trasu 1 a 1.1, sekundy (Vlastní zpracování).....	48
Tabulka 7: Adresy Trasy 2 a 2.2, minuty (Vlastní zpracování).....	50
Tabulka 8: Časové intervaly pro Trasu 2 a 2.2 (Vlastní zpracování)	50
Tabulka 9: Naměřené hodnoty pro Trasu 2 a 2.2, sekundy (Vlastní zpracování)	52
Tabulka 10: Adresy Trasy 3 a 3.3, minuty (Vlastní zpracování).....	53
Tabulka 11: Časové intervaly pro Trasu 3 a 3.3 (Vlastní zpracování)	54
Tabulka 12: Naměřené hodnoty pro Trasu 3 a 3.3, sekundy (Vlastní zpracování)	55
Tabulka 13: Adresy Trasy 4 a 4.4, minuty (Vlastní zpracování).....	56
Tabulka 14: Časové intervaly pro Trasu 4 a 4.4 (Vlastní zpracování)	56
Tabulka 15: Naměřené hodnoty pro Trasu 4 a 4.4, sekundy (Vlastní zpracování)	58
Tabulka 16: Adresy pro Trasu 5 a 5.5, minuty (Vlastní zpracování)	59
Tabulka 17: Časové intervaly pro Trasu 5 a 5.5 (Vlastní zpracování)	60
Tabulka 18: Naměřené hodnoty pro Trasu 5 a 5.5, sekundy (Vlastní zpracování)	62
Tabulka 19: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 1 (Vlastní zpracování)	63
Tabulka 20: Výsledné proměnných x_{ij} pro Trasu 1 (Vlastní zpracování).....	64
Tabulka 21: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 2 (Vlastní zpracování)	66
Tabulka 22: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 2.2 (Vlastní zpracování)	67
Tabulka 23: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 3 (Vlastní zpracování)	69
Tabulka 24: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 3.3 (Vlastní zpracování)	69
Tabulka 25: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 4 (Vlastní zpracování)	71
Tabulka 26: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 4.4 (Vlastní zpracování)	72
Tabulka 27: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 5 (Vlastní zpracování)	74
Tabulka 28: Výsledky proměnných x_{ij} pro trasu 5 (Vlastní zpracování).....	83

Seznam obrázků

Obrázek 1: Model jako zjednodušení reality (Zdroj: Fábry, 2011, s. 9).....	17
Obrázek 2: Průběh rozhodovacího procesu (Fábry, 2011, s. 10).....	18
Obrázek 3: Časový interval (Vlastní zpracování).....	36
Obrázek 4: Optimalizace Trasy 1 (Vlastní zpracování).....	65
Obrázek 5: Optimalizace Trasy 1.1 (Vlastní zpracování).....	65
Obrázek 6: Optimalizace Trasy 2 (Vlastní zpracování).....	67
Obrázek 7: Optimalizace Trasy 2.2 (Vlastní zpracování).....	68
Obrázek 8: Optimalizace Trasy 3 (Vlastní zpracování).....	70
Obrázek 9: Optimalizace Trasy 3.3 (Vlastní zpracování).....	70
Obrázek 10: Optimalizace Trasy 4 (Vlastní zpracování).....	72
Obrázek 11: Optimalizace Trasy 4.4 (Vlastní zpracování).....	73
Obrázek 12: Optimalizace Trasy 5 (Vlastní zpracování).....	84
Obrázek 13: Optimalizace Trasy 5.5 (Vlastní zpracování).....	84

1 Úvod

V dnešní uspěchané době se snaží ušetřit každý – jednotlivci, firmy, orgány veřejné správy. Úspora a efektivnost využití vstupů neoddělitelně souvisí s racionálním rozhodováním. Také proto má operační výzkum v této době veliký význam a uplatnění najde v mnoha odvětvích, ať už v ekonomice, managementu, tak i v průmyslovém inženýrství atd. Optimalizace tras při rozvozu materiálu, zboží nebo při obslužení zákazníka službou obecně je stále více a více využívána. Firmy chtějí ušetřit na ujetých kilometrech vozidla, chtějí naplno využít čas řidiče a vozidla, uspokojit zákazníky na základě rychlého jednání, a tím vším být nejlepší na konkurenčním trhu. Cílem je dosažení spokojenosti firmy i zákazníka, proto se hledá optimální řešení - nesmí se ovšem opomenout požadavky, které nelze zahrnout do modelu.

Lineární programování je disciplína, jež se v praxi objevuje nejčastěji, a to u distribuce, rozmístění zdrojů, či v optimalizaci dopravy, která je v této práci řešena pomocí okružního dopravního problému, konkrétněji za pomoci úlohy obchodního cestujícího s časovými okny. Díky této a podobným úlohám a moderním počítačovým technologiím, které se každým dnem stále vyvíjejí, lze řešit i problémy velkého rozsahu, ale existují úlohy, které jsou rozsahově tak velké a obtížné na výpočet, že je ještě nelze vyřešit. Přesto nám technologie většinou případů ušetří mnoho času a může nám najít i chyby, které v modelu máme a sami bychom na ně nepřišli.

V této práci je řešena optimalizace pěti tras technika uskutečněných za týden pro společnost, která poskytuje televizní služby a vysokorychlostní internet. Tyto služby jsou v dnešní době důležitou součástí života většiny lidí, a když už si tyto služby zaplatí, chtějí, aby fungovaly na sto procent. Pokud přestane jít například internet, lidé jsou hned nervózní a mrzutí a chtějí, aby okamžitě opět fungoval. Naléhají na poskytovatele služeb, který musí udělat vše pro to, aby zákazníkům služby co nejdříve opět zpřístupnil. Lidé negativně vnímají čekání, a aby firma měla spokojené zákazníky a oni neodešli ke konkurenci, musí je obsloužit co nejdříve. Proto je zde vhodná optimalizace tras, protože díky ní dokáže technik obsloužit více míst (zákazníků), takže zákazník bude rád za zkrácenou dobu čekání. Je v zájmu firmy využívat optimalizační software, s nímž bude na trhu konkurenceschopnější a získá celkově spokojenější zákazníky.

2 Cíl práce a metodika

Cíl práce

Hlavním cílem této diplomové práce je analýza citlivosti optimálních tras technika ve vybrané společnosti. Analýza citlivosti bude provedena u celkem pěti dnů, resp. pěti tras technika, které nejdříve budou optimalizovány. Citlivost trasy bude analyzována s ohledem na možné změny časových oken (snižováním počtu časových oken) a jejich dopad na posloupnost jednotlivých míst v okružní trase. Citlivost nebude analyzována z čistě matematického hlediska, což by vedlo k určení hranice časového okna, kdy dojde ke změně řešení, ale musí být respektovány především ekonomické a manažerské požadavky společnosti.

Metodika

Diplomová práce je zpracována především na základě prostudované české a zahraniční odborné literatury, která je zaměřena na bivalentní programování a jeho aplikaci na problematiku okružních dopravních úloh. Dále byly prostudovány interní informace a data reálných okružních tras, současných časových oken a dalších důležitých dat společnosti.

K získání všech potřebných informací předcházelo několik schůzek s pracovníky na oddělení dispečinku, protože je velmi důležité pro tuto práci poznat, jak detailně funguje práce na daném oddělení, a také u externí firmy, která obsluhuje zákazníky. Je nutné vědět, jak probíhá komunikace mezi těmito subjekty – jak se vytvářejí a plánují objednávky, jak se odesílají objednávky externí firmě, jak jsou seřazeny objednávky v jednotlivých časových oknech, jaké jsou možné činnosti, které jednotlivý technik může provádět u klienta, jak jsou tyto práce časově ohodnoceny apod.

Dále byla v praktické části tato získaná data analyzována, resp. nejdříve došlo k vytvoření optimálních tras při současném nastavení časových oken. Pro tyto účely byl sestaven pro každý okruh model lineárního programování s bivalentními proměnnými. Sestavené modely respektují reálné požadavky – délka trvání obsluhy, časová okna, kdy může být zákazník obslužen, doba přesunu mezi jednotlivými místy. Poté proběhla analýza

časových oken, resp. došlo k vytvoření optimálních tras při alternativním nastavení časových oken. To znamená, že byly vytvořeny modely lineárního programování, při kterých byla pozměněna časová okna tak, aby odpovídali reálným možnostem a požadavkům firmy a zákazníků. Všechny účelové funkce, rovnice a podmínky byly vytvořeny, převedeny a seřazeny do takové podoby, kterou vyžadoval zvolený software. Hodnoty byly vloženy do softwaru GurobiOptimizer a z něho získané hodnoty interpretovány. Každý analyzovaný den má dvě varianty, tedy i dva výsledky - jeden původní, který odpovídá současnému nastavení časových oken, a druhý alternativní s pozměněnými časovými okny. Celkem software vytvořil deset výsledků, které byly následně interpretovány.

3 Teoretická část práce

3.1 Operační výzkum

3.1.1 Historie operačního výzkumu

Počátky operačního výzkumu nelze přesně definovat, protože se s ním můžeme setkat v řadě oblastí, jako je matematika, statistika, ekonomika, management, v průmyslovém inženýrství apod. Operační výzkum spadá do období 30. - 40. let minulého století. Největší rozvoj byl především během druhé světové války, kde se speciální týmy zabývaly analýzou složitých strategických a taktických vojenských problémů a operací. Po válce se rozvoj objevil hlavně v ekonomice a dále ve výpočetní technice apod. (Jablonský, 2007, s. 9)

Za druhé světové války vzniklo systémové inženýrství, které mělo za cíl řešit projektování, realizaci a provoz velkých a složitých technických systémů. Systémové inženýrství ale nejvíce vzkvétalo až v 50. a 60. letech minulého století a klade důraz na dosažení stanovených cílů, jež se týkají poskytování technických výrobků, které jsou vhodné pro řešení mechanicky unitárních problémů. (International Society for System Sciences, 2015, překlad autorka)

3.1.2 Definice operačního výzkumu a disciplíny

Operační výzkum je definován široce, je to útok moderní vědy na složité problémy vznikající v řízení (v řízení podniku). (International Society for System Sciences, 2015, překlad autorka)

Operační výzkum (Operationalresearch, operationsresearch) je vědní disciplína, která se zabývá zkoumáním operací daného systému s cílem provést takové operace, aby bylo dosaženo jeho nejlepšího fungování při stanovení kritéria či více kritérií. Operační výzkum lze využít též jako nástroj pro nalezení optimálního řešení řešeného problému s dodržováním všech omezení, které se podílejí na chodu daného systému. Neexistuje jedna jediná univerzální definice operačního výzkumu a to z důvodu toho, že v dnešní době se s operačním systémem můžeme potkat v různých odvětvích. (Jablonský, 2007, s. 9 - 10)

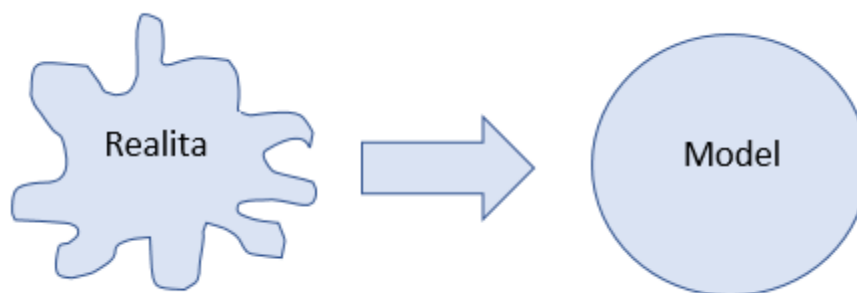
Základní disciplíny operačního výzkumu, v závorce je uvedený orientační rok jejich vzniku (Fábry, 2011, s. 15):

- Strukturní analýza (1939)
- Teorie her (1944)
- Simulační modely (1946)
- Lineární programování (1947)
- Modely hromadné obsluhy (1951)
- Nelineární programování (1951)
- Modely řízení zásob (1951)
- Dynamické programování (1957)
- Síťová analýza, řízení projektů (1957)
- Vícekriteriální optimalizace (1970)

„Základním nástrojem operačního výzkumu je matematické modelování.“ (Jablonský, 2007, s.10)

3.1.3 Matematické modelování

I matematické modelování zahrnuje mnoho různorodých disciplín. Nyní bude řešena disciplína spojená s ekonomickým chováním a rozhodováním subjektů za použití matematického aparátu. V matematickém modelování je důležitým termínem model, který znázorňuje zjednodušenou realitu. (Fábry, 2011, s. 9)



Obrázek 1: **Model jako zjednodušení reality** (Zdroj: Fábry, 2011, s. 9)

Při vytváření modelu je důležité brát v potaz i skutečnosti, že pokud bude realita zjednodušena příliš, model bude zkreslený a získané výsledky nebudou reálné, spíše budou nesmyslné. Dobré není ani snažení se o co nejvěrnější zachycení skutečnosti, protože analýza nebude uskutečnitelná a ani výsledky nebudou dosažitelné. Proto je vhodné najít střední cestu mezi věrnou kopií reality a snadnou řešitelností úlohy, vyjádřené modelem.(Fábry, 2011, s. 9)

GIGO – Garbage In, GarbageOut

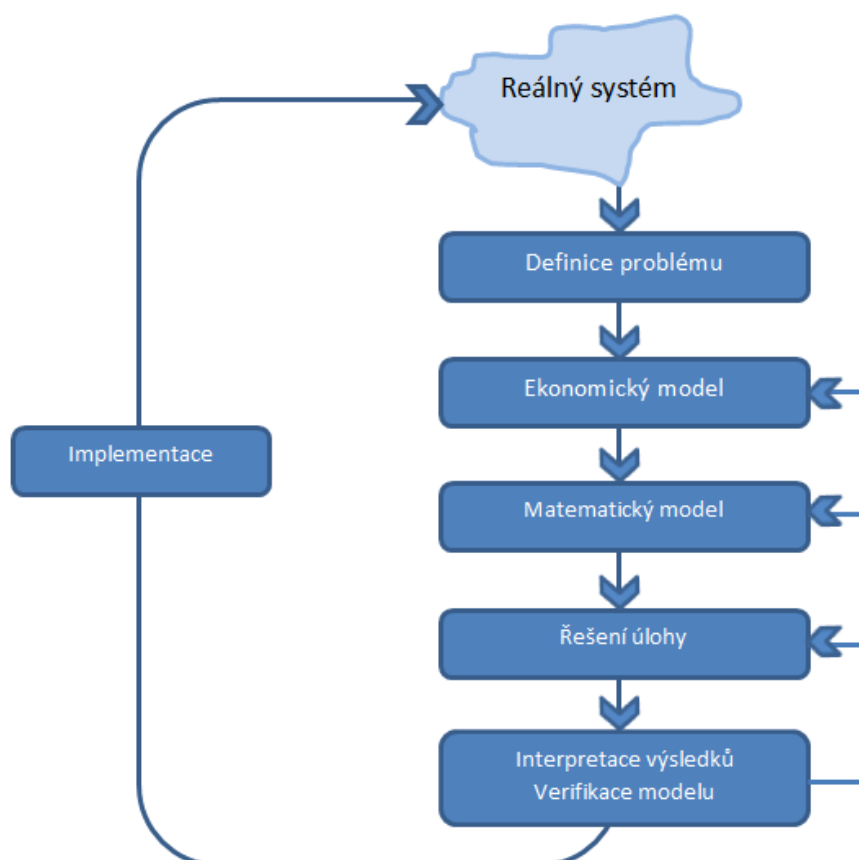
„Vstup dat do modelu a jejich výstup spolu velmi souvisí, protože výstup z programu závisí na tom, jaká vstupní data program obdrží. Pokud obdrží vstupní data irelevantní, výstupní budou stejného významu.“(Foote, 2015, s. 37, překlad autorka)

3.1.4 Rozhodovací problém

V rozhodovacím procesu jde o zvolení jednoho rozhodnutí z několika možných alternativ rozhodnutí. Důležité je vybrat takovou alternativu, která je pro proces nejvýhodnější. Je faktem, že není jasné, která z variant rozhodnutí je nejlepší, protože v tom okamžiku rozhodnutí není známo, jakých důsledků bude mít vybraná varianta pro rozhodovatele. (Šubrt, 2011, s. 116)

Právě díky postupu rozhodovacího problému lze snadno pochopit matematické modelování. V rozhodovacím problému se setkáváme s dvěma pojmy, rozhodovací subjekt

(rozhodovatel) a analytik (řešitel). Rozhodovací subjekt zadává problém a analytik ho řeší. Funguje to tak, že analytik vypracuje řešení a nabídne ho rozhodovacímu subjektu, ten obdržené řešení (cílem je zlepšení fungování dosavadního systému) buď přijme, nebo ho vrátí zpět analytikovi spolu s komentářem k přepracování. Rozhodovací proces vypadá následovně (Fábry, 2011, s. 10-13):



Obrázek 2: Průběh rozhodovacího procesu (Fábry, 2011, s. 10)

3.1.4.1 Definice problému

Definice problému je první a zároveň velmi důležitou fází rozhodovacího procesu. Pokud rozhodovací subjekt objeví problém včas, tak díky tomu se mohou ušetřit finanční prostředky anebo se předejde nevratným důsledkům. Rozhodovateli nestačí pouze daný

problém nahlásit analytikovi, ale je zapotřebí, aby problém jednoznačně definoval. (Fábry, 2011, s. 10 - 11)

3.1.4.2 Ekonomický model

Ekonomický model je chápán jako zjednodušený popis reálného systému. Velmi důležité pro řešení daného problému jsou také prvky a vazby mezi nimi, které jsou v systému obsaženy. Ekonomický model by měl obsahovat (Lagová a Jablonský, 2004, s. 9 – 10):

- Cíl analýzy – jedna z nejdůležitějších věcí je určení cíle modelového systému, kterého chceme dosáhnout, např. maximalizace zisku při plánování výrobního programu firmy, snížení nákladů při rozvozu zboží apod.
- Popis procesů, které v systému probíhají – jde o reálnou aktivitu, která v systému probíhá s určitou silou a působí tak na cíl analýzy. Např. při plánování výrobního programu může být intenzitou procesu objem výroby výrobku a procesem výroba výrobku.
- Popis činitelů ovlivňujících provádění procesů – v realitě působí na proces i řada činitelů jako požadavky na maximální či minimální objemy výroby nebo spotřeba zdrojů surovin a energie při výrobě výrobků.
- Popis vzájemného vztahu mezi cílem analýzy, procesy a činiteli – například se zde určuje, kolik se spotřebuje surovin na výrobu výrobků a jakého zisku se dosáhne.

3.1.4.3 Matematický model

Obecně lze říci, že jde o převedení ekonomického modelu na model matematický. Matematický model obsahuje stejné prvky jako model ekonomický, prvky jsou pouze jinak vyjádřeny. (Lagová a Jablonský, 2014, s. 10-11):

- Cíl analýzy – ve většině případů vyjádřen ve tvaru lineárních či nelineárních n proměnných

- Proces – proměnné, kde je intenzita provádění vyjádřena jako hodnota těchto proměnných
- Činitelé – činitelé jsou vyjádřeny ve tvaru lineárních či nelineárních rovnic nebo nerovnic
- Vazby mezi cílem analýzy, procesy a činiteli – vazby mezi těmito prvky jsou označovány parametry, které není možné ovlivnit

3.1.4.4 Řešení úloh

Řešení úlohy je v dnešní době spíše technickou záležitostí, pokud je problém vyřešen matematicky, potom už není většinou obtížné získat řešení daného problému. Lze zde řešit pouze složitost matematického modelu, některé úlohy jsou natolik složité, že ani v současných možnostech techniky a vědy není možné získat řešení daného problému. (Fábry, 2011, s. 11)

3.1.4.5 Interpretace výsledků a verifikace modelu

Tato fáze rozhodovacího procesu je stejně důležitá jako fáze první, resp. definice problému. (Fábry, 2011, s. 12)

- Interpretace výsledků – jde o popis, vysvětlení číselných výsledků z minulé fáze (řešení úloh), většinou se jedná o počítačovou sestavu, které musí analytik porozumět a najít tam odpovědi na hledané otázky. Celý popis výsledků musí být popsán analytikem tak, aby mu jej rozhodovatel (zadavatel problému) rozuměl, analytik nesmí používat odborné názvy.
- Verifikace modelu – znamená ověření správnosti sestaveného modelu a posouzení, zda jsou získané výsledky reálné. Zkušený analytik se zaměřuje na všechny výsledky a už dopředu tuší znaménka výsledných hodnot proměnných a jejich intervaly. Pokud najde nesrovnalosti, musí se vrátit k fázi převádění matematického modelu do jazyka softwaru nebo až k formulaci samotného modelu.

Na tomto místě je nutné zdůraznit rozdílné pohledy autorů na modelovací proces a jejich důsledky v podobě terminologických rozporů. Mnoho autorů mluví u modelu o validaci a verifikaci, resp. že model je platný a ověřený. Mnohdy je však validace a verifikace modelů považována za nemožnou. Verifikace představuje ověření jako stanovení pravdy, přesnosti nebo reality a platnost je definována jako mající výsledek správně odvozený z předpokladů, platnost vyžaduje, aby byl podpořen objektivní pravdou. A právě podle této definice nemůže být žádný z modelů ověřen, nebo potvrzen, protože všechny modely jsou jenom omezenou, zjednodušenou reprezentací reálného světa. Každý model je tedy ze své podstaty z nějakého úhlu pohledu nesprávný. Testuje se užitečnost modelu. Ověřena mohou být pouze analytická sdělení. (Stermán, 2000, s. 846)

I v případě uspokojivých získaných výsledků jsou zde ještě další ukazatelé, kteří upozorňují na špatně zvolený model, jedná se hlavně o složité případy modelů. Mezi nejčastější chyby patří opomenutí důležitých podmínek, které ovlivňují proces. Správná verifikace záleží na analytikovi, na jeho zkušenostech a na komunikaci se zadavatelem problému. (Fábry, 2011, s. 12)

3.1.4.6 Implementace

Po úspěšné verifikaci může přijít na řadu fáze implementace, což je završení celého rozhodovacího procesu. Je to fáze, kdy zadavatel problému obdržel od analytika výsledky řešeného problému a rozumí jim. Implementace by měla přispět ke zlepšení fungování systému. (Fábry, 2011, s. 12-13)

3.1.5 Členění modelů

Modely lze členit podle typu informace, času a druhu či velikosti systému na deterministické a stochastické modely, statické a dynamické a na mikroekonomické a makroekonomické. Podrobné členění dle Fábryho (2011, s. 13):

- **Deterministické a stochastické modely**

Určit, zda je model deterministický či stochastický, závisí na typu informací, které má zadavatel problému a analytik k dispozici. Pokud jsou informace zkoumaného systému

známy s jistotou, jde o model deterministický. Pokud informace (procesy či hodnoty) jsou založeny na pravděpodobnosti, jedná se o stochastický model.

- **Statické a dynamické modely**

Pokud v systému, který zkoumáme, hraje důležitou roli čas (hodnoty proměnných a parametrů se v závislosti na čase mění), jde o model dynamický, pokud nikoliv, tak statický. Lze říci, že nejjednodušší je analýza deterministických statických modelů.

- **Mikroekonomické a makroekonomické modely**

Tato skupina členění modelů závisí na velikosti a druhu zkoumaného systému. Za mikroekonomické modely se považují podniky, individuální trhy výrobků a služeb, spotřebitelů, domácností apod. Makroekonomické modely slouží většinou k analýze národního hospodářství.

3.2 Celočíselné programování

„Název lineární celočíselné programování odkazuje na třídu kombinatorických omezených optimalizačních problémů s celočíselnými proměnnými, kde účelovou funkcí je lineární funkce a omezeními jsou lineární nerovnice.“ (Genova a Guliashki, 2011, s. 3, překlad autorka)

Úloha maximalizace (resp. minimalizace) lineární funkce je považována za obecný tvar lineárního celočíselného programování. Musí zde být dodržena podmínka nezávisle proměnné této funkce – splňování soustavy omezení ve tvaru soustav lineárních rovnic (příp. nerovnic). Některé z proměnných musí dodržovat i podmínku celočíselnosti. S celočíselným programováním se setkáme tam, kde si nelze dovolit neceločíselné hodnoty. (Pelikán, 2001, 9 - 13)

Dva příklady celočíselných úloh dle Jablonského (2007, s. 114):

- „v úloze výrobního plánování proměnné x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vyjadřovaly počet kusů stolů a židlí ve výrobním programu,

- v úloze rozvrhování výroby na více období byly proměnné x_1, x_2, x_3, x_4 počty kusů 50litrových a 30litrových nádrží vyrobených ve dvou po sobě následujících čtvrtletích.“

Z obou příkladů je jasné, že všechny proměnné musí vyjít jako nezáporná celá čísla.

Podmínky celočíselnosti zaručují, aby hodnoty proměnných byly celočíselnými hodnotami. Existuje rozdělení úloh dle mnoha hledisek. Můžeme rozdělit na (Lagová a Jablonský, 2004, s. 249 – 250):

- úlohy s obecnými celočíselnými podmínkami;
- bivalentní úlohy;
- smíšené celočíselné úlohy – podmínky celočíselnosti nejsou kladeny na všechny proměnné v modelu;
- ryzí celočíselnosti – podmínky celočíselnosti jsou kladeny na všechny proměnné v modelu.

Za smíšenou úlohu lineárního celočíselného programování (MIP = mixedintegerprogramming) se považují ty úlohy, ve kterých existují celočíselné proměnné a současně se v úloze objevují i proměnné, které na sebe nevážou podmínku celočíselnosti (neceločíselné, spojité proměnné). (Pelikán, 2001, s. 9)

„V úloze MIP lze omezení bez újmy na obecnosti definovat jako rovnice, neboť každou nerovnost pomocí přídatných proměnných lze převést na rovnici a naopak rovnici lze nahradit dvěma nerovnostmi.“ (Pelikán, 2001, s. 10)

Bivalentní úlohy jsou ty, ve kterých proměnné nabývají pouze dvou hodnot: 0 nebo 1, někdy se jim říká dvouhodnotové. Pokud v úloze MIP mohou proměnné (celočíselné) nabývat pouze těchto hodnot (0 nebo 1) nazývají se smíšené bivalentní úlohy. (Pelikán, 2001, s. 10)

V praxi je výskyt úloh s celočíselným programováním častý, ale také většina z nich je výpočetně velmi náročná. Pro většinu úloh celočíselného programování existují algoritmy,

u kterých je dokázána za určitých podmínek konvergence (sbíhavost) k optimálnímu řešení. Úlohy s většími rozměry mohou být až natolik komplikované, že se k řešení ani nedopracujeme. (Jablonský, 2007, s. 114)

„Pro ilustraci lze uvést, že řešení úlohy LP s několika tisíci proměnnými a stovkami omezujících podmínek bez podmínek celočíselnosti trvá na běžném osobním počítači s použitím kvalitního software pouze několik málo vteřin. Řešení podobné úlohy, ale s podmínkami celočíselnosti, na stejném počítači a s pomocí stejného programu může trvat i několik hodin (pokud se podaří vůbec výpočet ukončit). Méně kvalitní programové produkty mohou kolabovat již při řešení celočíselných úloh velmi malých rozměrů (desítky celočíselných proměnných a omezujících podmínek).“ (Jablonský, 2007, s. 114 - 115)

3.2.1 Klasifikace úloh

Otázka Edmondse J. z roku 1960, která zněla, zda existuje či neexistuje dobrý algoritmus, není stále vyřešena. Hodně se touto problematikou zabýval Stephen Cook a jeho závěry z roku 1971 ukazují, že pokud existuje úloha, která má polynomiální algoritmus, potom každý problém v NP lze podle tohoto algoritmu řešit. Taková úloha je nazývána NP těžká nebo NP úplná. (Applegate et al, 2006, s. 49)

Úlohy obecně lze po klasifikaci algoritmu klasifikovat do třídy úloh. Třída P je tvořena rozhodovací úlohou, pro kterou existuje polynomiální algoritmus řešící příslušnou úlohu. V takovýchto úlohách hledáme na otázky odpovědi typu ano či ne (rozhodovací, binární, bivalentní úlohy). Druhá třída, třída NP, je náročnou skupinou jak pro teoretický popis, tak v praxi velice obtížně řešitelnou úlohou. Při růstu rozměru úlohy nám vysoce roste výpočetní čas a také lze říci, že čím nám roste náročnost úloh NP, tím nám rostou možnosti na řešení těchto úloh. NP třídu tvoří rozhodovací úlohy, pro které existuje polynomiální algoritmus – může dát odpověď „ano“ na základě další informace, kterou dostane. NP úlohy jsou také formulovány na základě nedeterministického polynomiálního algoritmu, který řeší rozhodovací úlohu ve dvou fázích. První fáze spočívá v „náhodném kroku“, který na kladené otázky v úloze „uhádne“ řešení. Druhá fáze je ověřovacím krokem, ve kterém je ověřeno, zda uhádnuté řešení z první fáze je opravdu řešením dané úlohy.

Do úlohy NP patří i úloha smíšeného celočíselného programování a další. Existují dva druhy úlohy NP. (Pelikán, 2001, s. 124 – 129):

- **NP – úplná (NPC, NP-Complete)**

Třída NP – úplných úloh obsahuje ty nejobtížnější úlohy z úloh NP. Pokud bude vyřešena jakákoliv NP – úplná úloha polynomiálním algoritmem, pak budou vyřešeny pomocí tohoto polynomiálního algoritmu i všechny ostatní úlohy z třídy NP. Zatím ale taková úloha neexistuje. Postup, zda je úloha NP-úplná: dokázat, že patří úloha do třídy NP, a nalézt NP-úplnou úlohu, která se dá na danou úlohu redukovat, resp. na takovou úlohu, která je méně obtížná než daná úloha. První úlohou v NPC byl problém splnitelnosti.

- **NP – těžká (NPH, NP – Hard)**

Za NP-těžkou považujeme tu úlohu, která je obtížnější než všechny úlohy z NP. Pokud existuje polynomiální algoritmus pro tyto úlohy, pak lze řešit polynomiálně všechny úlohy z NP. NPH obsahuje všechny úlohy NPC, ale všechny úlohy NPH nepatří do úloh NP. Mezi NP - těžké úlohy patří úloha obchodního cestujícího, úloha smíšeného celočíselného programování. Zmíněné úlohy nejsou rozhodovacího typu (nejsou v NP), ale do třídy NP patří jejich binární verze.

Vyřešení nebo důkaz, zda existuje či nikoliv hledaný algoritmus, je oceněno na 1.000.000 dolarů z institutu ClayMathematics. (ClayMathematics Institute, 2012)

3.3 Postoptimalizační analýza

Optimální řešení, které získáme k určitému okamžiku při splnění určité soustavy omezujících podmínek a účelové funkce, nemusí stačit k volbě optimálního rozhodnutí. Optimální rozhodnutí závisí také na kvantitativních vlivech, které nelze zahrnout do modelu LP. Proto je cílem optimálního řešení získání co nejvíce možných dalších informací o daném systému, a to na základě analýzy všech údajů, dále jde o úplný popis optimálních řešení, která byla získána, apod. Tyto zmíněné postupy jsou právě postoptimalizační analýzou; přesně stanovují rozsah přípustných změn a určují, jak postupovat při hledání nového optimálního řešení. (Šubrt a kol. 2011, s. 59)

Pro postoptimalizační analýzu optimalizačních problémů by měly být zodpovězeny následující otázky (Mikhailyuk, 2010, s. 1):

- jak se změní optimální řešení daného problému, pokud hodnoty jeho koeficientu budou pozměněny určitým způsobem;
- jak informace získaná při řešení nějakého problému specifickou metodou může být použita pro vyřešení změněného problému;
- jaké minimální informace by měly být nashromážděny během řešení původního problému pro efektivní řešení změněného problému.

Programy, které řeší úlohy lineárního programování, jsou už na takové úrovni, že uživateli nabízejí možnost zobrazit informace týkající se analýzy citlivosti optimálního řešení ve vztahu ke změnám ve vektoru pravých stran a vektoru cenových koeficientů. (Jablonský, 2007, s. 78)

Analýza citlivosti pravých stran

Analýza citlivosti se zabývá takovým rozsahem změn, v rámci kterých nedochází ke změně optimální struktury řešení. Čím je rozsah změn v rámci optimální báze vyšší, tím je optimální řešení, které získáme, stabilnější, a tak je tomu i naopak. Změny ve vektoru pravých stran neporušují kritérium optimality, změna se projeví pouze u výsledného vektoru pravých stran. Nesmí se pouze připustit, aby ve výsledném vektoru pravých stran byla záporná čísla. (Šubrt a kol., 2011, s. 61)

Je důležité brát v úvahu pouze změnu jedné složky vektoru \mathbf{b} , další složky se měnit nebudou. Aby řešení zůstalo přípustné, lze pro každou složku vektoru pravých stran vypočítat interval, ve kterém se může pohybovat. Tyto intervaly se nazývají intervaly stability pro hodnoty vektoru pravých stran \mathbf{b} . Výpočet není náročný, jde pouze o součin inverzní matice báze a původního vektoru pravých stran, a aby řešení nadále bylo přípustné, musí platit $B_S^{-1}\mathbf{b} \geq 0$. (Jablonský, 2007, s. 78-79)

Analýza citlivosti cenových koeficientů

Změny cenových koeficientů neovlivňují přípustnost řešení, ale mají vliv na hodnoty testu optimality, resp. někdy může dojít k porušení optimality řešení. Po změně cen nebude báze

optimální, ale test optimality dá vědět, že existuje nebázická proměnná, která bude pro zlepšení účelové funkce zařazena do řešení. (Šubrt a kol, s. 64)

Je hledán interval, ve kterém se složka vektoru c může měnit tak, aby momentální řešení bylo stále optimální. Opět lze změnit pouze jednu složku, ostatní složky nikoliv. Každá složka vektoru c může mít interval, který je nazván jako interval stability pro složky vektoru cenových koeficientů.

Podobně jako narůstá složitost výpočtu celočíselného programování oproti matematickému programování bez podmínky celočíselnosti, roste i složitost postoptimalizační analýzy celočíselných problémů. (W. Cook et al, 1986)

3.4 Software pro řešení úloh LP

V dnešní vyspělé době je nesmyslné řešit úlohy lineárního programování ručně. Existuje totiž mnoho efektivních softwarových prostředků a výkonných počítačů, které nám usnadní hodně práce. I úlohy lineárního programování lze právě řešit pomocí vhodných programů, které dokáží zapsat matematický model v přívětivém prostředí a pomocí výkonných optimalizačních nástrojů tak úlohu vyřešit. Nejdříve je nutné rozdělit software do dvou skupin: „optimalizační systémy a systémy na podporu modelování.“ (Fábry, 2011, s. 55-57):

3.4.1 Optimalizační systémy

Optimalizační systémy jsou programy, které řeší danou úlohu, proto se označují jako „řešitelé“. Důležité je, aby řešitel dokázal přečíst matematický model. Lze říci, že většina z programů pracuje se vstupními daty, která jsou ve formátu MPS (Mathematical Programming System). Právě z důvodu, že tento formát používá většina z profesionálních programů, lze využít jakýkoliv:

- IBM ILOG CPLEX – nejznámější a nejpoužívanější
- Gurobi Optimizer – nejrychlejším řešitelem úloh (v této práci je využit)
- Xpress Optimizer - od firmy FICO

- Lindo – od firmy Lindo Systems
- řešitel, který nabízí MS Excel
- XA linearOptimizer System – pro řešení úloh LP
- XA Binary and MixedIntegerSolver – pro řešení binární a smíšeně-celočíselné úlohy

Dva poslední zmíněné optimalizační systémy jsou od firmy Sunset Software Technology a řešení těchto zmíněných úloh (LP a řešení úloh binárních a smíšeně celočíselných) umí samozřejmě řešit také všechny výše zmíněné systémy. Existuje opravdu několik optimalizačních systémů.

3.4.2 Systémy na podporu modelování

Některé optimalizační systémy mají možnost zadání matematického modelu ve vlastním formátu, některé zase nabízejí přívětivé prostředí v podobě modelovacího jazyka. Modelovací jazyk umí snadné převedení matematického modelu do formátu, který již řešitel zná. Respektive existují dva systémy: otevřený a uzavřený. Otevřený systém umožňuje použití externího řešitele a uzavřený zase pouze vlastního řešitele

- Otevřené systémy
 - AIMMS – od firmy Paragon Decision Technology – tento systém dokáže využít několik řešitelů, např.: XA, IBM ILOG CPLEX nebo GurobiOptimizer. Při prezentaci výsledků má krásné grafické vyjádření.
 - MPL for Windows
 - AMPL
- Uzavřené systémy
 - Lingo – je to nejtypičtější uzavřený systém, má vlastní modelovací jazyk a již uvnitř zabudovaného řešitele Lindo. Neumožňuje tedy pro řešení úloh využít žádný z jiných optimalizačních systémů. Výhodou tohoto systému je, že umí exportovat model do formátu MPS – s tím již dokáže pracovat většina řešitelů.
 - Xpress Mosel

3.5 Distribuční úlohy

Distribuční úlohy lineárního programování patří mezi nejtypičtější speciální úlohy lineárního programování. (Jablonský, 2007, s. 91)

Do distribučních úloh patří dopravní úloha jednostupňová a dvoustupňová, úloha přiřazovací, dále problémy zobecněné, trasovací, okružní a další. (Šubrt a kol., 2011, s. 79)

V této práci nebudou vysvětleny dopodrobna všechny zmíněné speciální typy distribučních úloh, ale pouze některé, hlavně bude zaměřena na ty, které budou využity v praktické části – okružní.

3.5.1 Dopravní problém

V běžném případě v dopravním problému jde o rozvržení rozvozu zboží nebo materiálu od dodavatelů k odběratelům tak, aby byly celkové náklady minimalizovány. (Jablonský, 2007, s. 91)

	Spotřebitelé				
Dodavatelé	S ₁	S ₂	...	S _n	Kapacity dodavatelů a _i
D ₁	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
D ₂	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
D _m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požadavky spotřebitelů b _j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Tabulka 1: **Tabulka dopravního problému** (Zdroj: Šubrt a kol., 2011, s. 81)

Popis dopravní tabulky: V řádcích většinou nalezneme dodavatele D_1, D_2, \dots, D_m , s kapacitou produktu a_1, a_2, \dots, a_m (v posledním sloupci tabulky). Danou kapacitu produktu dodavatel potřebuje dopravit ke spotřebitelům S_1, S_2, \dots, S_n uvedených v tabulce ve sloupcích. Spotřebitelé mají stanovené požadavky (resp. takové možnosti, které spotřebitel v tom okamžiku potřebuje), značeny b_1, b_2, \dots, b_n (v posledním řádku tabulky). Sazby c_{ij} jsou ceny za přepravu jednotky daného produktu (náklady na přepravu, vzdálenost apod.) mezi D_i a S_i . Hledané proměnné x_{ij} vyjadřují objem produktu, který má být mezi spotřebiteli a dodavateli. (Šubrt a kol., 2011, s. 79)

„Cílem řešení dopravního problému je naplánovat přepravu mezi zdroji a cílovými místy, tzn. stanovit objem přepravy mezi každou dvojicí zdroj-cílové místo tak, aby nebyly překročeny kapacity zdrojů a aby byly uspokojeny požadavky cílových míst.“ (Jablonský, 2007, s. 92)

Upřesnění citace k tabulce: Dodavatelé = zdroj; požadavky spotřebitelů = požadavky cílových míst; spotřebitelé = cílová místa, kapacity dodavatelů = kapacity zdrojů.

Při řešení dopravního problému musíme brát v potaz vztah celkové kapacity dodavatelů D a všech požadavků spotřebitelů S . Pouze ve výjimečných případech bude platit tato podmínka:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1)$$

Takový dopravní problém je označován jako vyrovnaný dopravní problém. Naopak dopravní problém, ve kterém se označuje

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad (2)$$

jako nevyrovnaný dopravní problém. Takový dopravní problém je třeba vyrovnat, resp. doplnit jej o fiktivního odběratele (při převisu nabídky) nebo fiktivního dodavatele (při převisu poptávky). U fiktivního odběratele i dodavatele je c_{ij} nulové. (Jablonský, 2007, s. 926 – 93)

Zápis matematické modelu dopravní úlohy (Šubrt, 2011, s. 80):

Existuje dvojitý zápis matematického modelu, zvolen je jednodušší (zkrácenější) a to pomocí sum.

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow MIN \quad (3)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Zároveň platí podmínka (1)

Popis podmínek modelu:

Znázorněná soustava podmínek matematického modelu je zadána jako soustava rovnic. První podmínka m rovnic nám říká, že každý z dodavatelů doveze tolik produktu spotřebitelům, kolik maximálně může (nemůže překročit svojí kapacitu). Dalších n rovnic určuje, že každý ze spotřebitelů přijme pouze tolik produktu, kolik je jeho požadavek.

Podmínka nezápornosti všech proměnných nám zaručuje, že se nemůže převážet záporné množství produktu (např. nelze převézt -2 tuny písku).

Účelová funkce určuje závislost mezi strukturou přepravy a přepravními náklady.

Proměnné v dopravní úloze mají dva indexy – i a j . Existují dva druhy označení proměnných. V této práci bude využito tohoto označení pro lepší identifikaci proměnných, první index $u_{x_{ij}}$ tedy i určuje číslo příslušného dodavatele a druhý index j zase číslo spotřebitele. (Šubrt, 2011, s. 80 – 81)

3.5.2 Kontejnerový dopravní problém

Jde o modifikovanou verzi dopravního problému. Přeprava mezi dodavatelem a odběratelem se provádí pomocí kontejnerů. Kontejnery mají kapacitu K jednotek. Náklady na přepravu se vážou na jeden přepravovaný kontejner, nikoliv na jednotku přepravovaného zboží. Optimálním řešením této úlohy je, aby jednotlivé přepravované kontejnery byly využity co možná nejvíce. (Jablonský, 2007, s. 103)

3.5.3 Přiřazovací problém

Přiřazovací problém je distribuční úloha, ve které jde o nalezení vzájemně jednoznačného přiřazení dvojice jednotek ze dvou skupin (množin) tak, aby se dosáhlo maximálního efektu (Jablonský, 2007, s. 107)

Příklady přiřazovacího problému:

Maximální efekt je vyjádřen formou maximalizačního či minimalizačního kritéria

Množina 1	Množina 2	Kritérium
Pracovníci	Stroje	Čas, výkon, zisk
Manažeři	Projekty	Zisk, čas
Opraváři	Přístroje	Čas, výkon
Stavební firmy	Stavby	Náklady, čas

Tabulka 2: „Praktické příklady množin v přiřazovacím problému“ (Fábry, 2011, s. 51)

3.5.4 Okružní dopravní problém

Tento typ distribučních úloh se v praxi objevuje velmi často, a to v případech rozvozu nějakého materiálu od dodavatele ke spotřebiteli nebo opačně. Samozřejmě se nemusí jednat pouze o rozvoz, ale mohou to být i služby, resp. obsluha zákazníka. Pomocí okružního spojení se velmi ušetří náklady spojené s rozvozem v porovnání s tím, že by každá trasa od dodavatele ke spotřebiteli (či naopak) byla realizována zvlášť. Okružních úloh existuje řada, za nejjednodušší se považuje jednookruhový okružní dopravní problém – přeprava mezi jednotlivými místy, která mají být obsloužena, je provedena jedním okruhem. Tato úloha bývá často označována problémem obchodního cestujícího - i v této práci bude dále používán tento výraz. Úlohy s více než jedním okruhem, víceokruhové okružní dopravní problémy, se někdy zase nazývají trasovací problémy. (Šubrt, 2011, s. 102)

3.5.5 Úloha obchodního cestujícího

„Problém obchodního cestujícího spočívá v hledání cyklu o minimální délce (délkou cyklu rozumíme součet ohodnocení hran tvořících tento cykl), který prochází každým uzlem právě jednou.“(Pelikán, 1993, s. 37)

"Daný počet měst (míst) spolu s náklady na cestu mezi každou dvojicí z nich, problém obchodního cestujícího, neboli TSP ve zkratce, je najítí nejlevnějšího způsobu, jak navštívit všechna místa s návratem do výchozího bodu. Daný „způsob návštěvy všech míst“ je jednoduše pořadí, ve kterém jsou místa navštívena; to pořadí je nazýváno trasou nebo okruhem míst. "(Applegate et al, 2006, s. 1, překlad autorka)

3.5.5.1 Standardní úloha obchodního cestujícího

Úloha obchodního cestujícího má hodně společných vlastností s přiřazovacím problémem. Úloha má za cíl vyjít z nějakého počátečního místa A a dále musí navštívit všechny ostatní místa pouze jednou a vrátit se zpět do počátečního bodu A tak, aby byl nalezen nejkratší okruh, který začíná a končí ve stejném bodě A. Tato úloha se nezabývá typem či velikostí požadavku spotřebitele. Např. Auto vyjíždí z pekárny (z místa A) s pečivem a musí

navštívit postupně všechny obchody tak, aby se vrátilo co nejrychleji zpět do místa, odkud auto vyjíždělo (z A). (Jablonský, 2007, s. 111 – 112)

Zápis matematického modelu standardní úlohy obchodního cestujícího:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow MIN \quad (7)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \quad (10)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

(Šubrt, 2011, s. 103)

Kde (Fábry, 2006, s. 13):

n znázorňuje počet míst, který musí být navštíven (včetně počátečního místa),

c_{ij} nám určuje vzdálenost mezi místem i a j ,

x_{ij} je bivalentní proměnná,

podmínky (8) a (9) zaručují návštěvnost místa právě jednou,

soustava podmínek (10) zabraňuje tvorbě partiálních cyklů.

Bivalentní proměnné (Pelikán, 1993, s. 38 - 39):

Bivalentní proměnné nabývají pouze dvou hodnot, 0 a 1. Pokud proměnná nabývá hodnoty jedna, $x_{ij} = 1$, znamená to, že vozidlo jede z místa i do místa j . Pokud nabývá hodnoty nula, $x_{ij} = 0$, vozidlo z místa i do j nepojede.

Úloha obchodního cestujícího má dva modely, a to statickou úlohu obchodního cestujícího (TSPTW = TravelingSalesmanProblemwithTime Windows) a dynamickou úlohu obchodního cestujícího (DTSPTW = DynamicTravelingSalesmanProblemwithTime Windows). Již byl uveden model statický (7) - (11), u kterého se očekává znalost všech potřebných parametrů před tím, než samotné vozidlo vyrazí z místa A (z počátečního bodu) a vydá se na okružní jízdu. Po dobu celé okružní jízdy nelze nic měnit, nelze například přidat zákazníka do okruhu či jej z něho ubrat apod. Kdežto v dynamické úloze takové změny jsou v pořádku. Kdykoliv během jízdy může být situace změněna požadavkem. Například to v praxi vypadá takto: zákazník nahlásí dispečerovi požadavek, ten ho vyhodnotí v rámci vhodného území a mnoha dalších podmínek, rozhodne, že ho přijme, a přidá ho do již naplánovaného okruhu. Z hlediska úspěšnosti na konkurenčním trhu je tento model pro již fungující firmu prospěšný. Vozidlo obslouží více míst, tudíž je spokojenost jak na straně zákazníka, tak i firmy. (Fábry, 2006, s. 14)

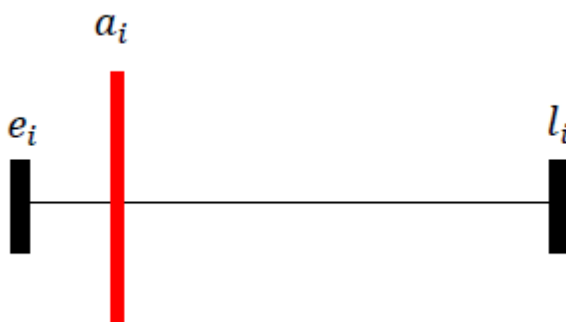
V této práci bude pozornost více zaměřena na statickou úlohu obchodního cestujícího, dynamická bude zmíněna okrajově.

3.5.5.2 Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny

Jde o standardní úlohu obchodního cestujícího, která musí znát všechny údaje před výjezdem auta na předem naplánovaný okruh. Úloha je doplněna navíc o časová okna. Jedná se o optimalizační okružní úlohu - cílem je určit pořadí navštívených míst právě tak, aby se dosáhlo splnění všech požadavků zákazníků a aby náklady, které jsou spojené s rozvozem, byly minimální. (Fábry, 2006, s. 24)

Časové okno je časový interval, ve kterém musí být provedena určitá práce (předání zboží, dodávka materiálu apod.). Konkrétní příklad k této práci: technik obsluhuje zákazníky,

k zákazníkovi č. 5 se má dostavit a začít provádět danou práci v rozmezí od 14:00 do 16:00. Toto rozmezí, tzv. dvouhodinový slot, je právě časové okno. Nastává zde riziko, že technik nezvládne začít s obsluhou v tomto intervalu, nebo naopak bude muset před intervalem počkat. (Pelikán, 1993, s. 34)



Obrázek 3: Časový interval (Vlastní zpracování)

Popis:

e_i = nejdříve možný termín obsluhy,

l_i = nejpozději přípustný termín obsluhy,

a_i = okamžik, ve kterém je místo i navštíveno vozidlem.

Matematický model Statické úlohy obchodního cestujícího s časovými okny (Fábry, 2006, s. 141 - 142):

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (12)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

$$e_i \leq a_i \leq l_i \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (15)$$

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq a_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j \quad (16)$$

$$a_1 = 0 \quad (17)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (18)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

Kde:

n znázorňuje počet míst, který musí být navštíven (včetně počátečního místa, které je značeno č. 1),

c_{ij} = představuje vzdálenost mezi místy i a j

t_{ij} = časový úsek přejezdu vozidla z místa i do místa j

e_i = nejdříve možný termín obsluhy

l_i = nejpozději přípustný termín obsluhy

M = vysoká konstanta

x_{ij} = bivalentní proměnná – nabývá pouze hodnot 0 nebo 1

a_i = okamžik, ve kterém je místo i navštíveno vozidlem

Právě podmínka (15) zaručuje, aby byl zákazník obslužen uvnitř časového intervalu. Omezení $e_i \leq a_i$ ukazuje, že obsluha nesmí začít dřív než v nejdříve možném termínu obsluhy, zde vzniká možné čekání vozidla. Naopak omezení $a_i \leq l_i$ říká, že vozidlo musí stihnout přijet a začít s obsluhou do nejpozději přípustného termínu obsluhy; pokud se tak nestane, následuje penalizace. Podmínka (16) zajišťuje, že časový interval od zákazníka i k zákazníkovi j je ohodnocen minimální hodnotou t_{ij} . Konstanta M nám zaručuje splnění nerovnosti v případě, že vozidlo nepojede od zákazníka i k zákazníkovi j . (Fábry, 2006, s. 25 – 26)

Existují dva druhy čekání vozidla u zákazníka: čekání vozidla u právě obsluženého zákazníka a čekání vozidla u zákazníka před jeho obsluhou.

Dle Fábryho (2006, s. 26 – 28):

- **Čekání vozidla u zákazníka před jeho obsluhou**

Tato situace nastane, když je obsluha u zákazníka i dokončena, vozidlo přejezdí k zákazníkovi j , který je jako další v pořadí. Vozidlo ovšem musí čekat na otevření časového intervalu, tedy na nejdříve možný termín začátku obsluhy, značeno e_j . Průměrná rychlost vozidla se bere $60\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

$$c_{ij} = t_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Čas v této práci uveden v sekundách.

$$W_j \geq 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

Tato proměnná vyjadřuje dobu čekání vozidla u zákazníka j před jeho obsluhou, a to do doby otevření časového okna.

Matematický model s čekáním vozidla u zákazníka před jeho obsluhou:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} + \sum_{j=2}^n W_j \quad (20)$$

Místo nerovnic je potřeba soustava rovnic.

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + W_j + v_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (21)$$

Proměnné v_{ij} musí dodržovat následující omezení:

$$0 \leq v_{ij} \leq 2M(1 - x_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (22)$$

Pokud jede vozidlo od zákazníka i k zákazníkovi j , platí, že $x_{ij} = 1$, v tom případě musí platit, že $v_{ij} = 0$. V opačném případě, kdy vozidlo k zákazníkovi nejede, tedy $x_{ij} = 0$, v_{ij} je pouze pomocnou proměnnou.

V některých případech se musí do modelu zahrnout i délka obsluhy u každého zákazníka. V této práci bude zapotřebí také zahrnout délku obsluhy, jelikož u každého zákazníka bude technik provádět jinak časově náročnou práci, a to v rozmezí pěti, patnácti a pětáctičetmi minut. S_i vyjadřuje dobu obsluhy.

$$S_i \geq 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Matematický model s délkou obsluhy:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=2}^n S_i + \sum_{j=2}^n W_j \quad (23)$$

Rovnice (16) jsou nahrazeny následující soustavou rovnic:

$$a_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + W_j + v_{ij} = a_i; \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n; \\ i \neq j \quad (24)$$

Dále platí podmínky (22) a přičemž $S_i = 0$.

- **Čekání vozidla u právě obslouženého zákazníka**

Situace, kdy po uskutečnění obsluhy zákazníka i stále vozidlo čeká na stejné adrese a vyjede až v takovém okamžiku, aby přijelo k následujícímu zákazníkovi j přesně v momentu otevření daného časového okna. Tato varianta je vhodná spíše u dynamické úlohy, kdy vozidlo čekající u obslouženého zákazníka i může dostat navíc objednávku od dispečera a obsloužit tak jiného zákazníka, než kdyby mělo pouze čekat a poté vyjet k naplánovanému zákazníkovi j .

Matematický zápis s čekáním u právě obslouženého zákazníka

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n W'_i + \sum_{j=2}^n S_j \quad (25)$$

Kde proměnné $W'_i \geq 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$) znázorňují dobu čekání od skončení obsluhy u zákazníka i až po výjezd vozidla k zákazníkovi j .

Rovnice (24) nahradí následující soustava rovnic:

$$a_i + W'_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + v_{ij} = a_j; \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n; \\ i \neq j. \quad (26)$$

3.5.5.3 Dynamická úloha obchodního cestujícího

Oproti statické úloze obchodního cestujícího se může zasahovat do již naplánovaného okruhu a měnit situaci na základě nově získaných požadavků. Získání a zpracování nových

informací není příliš nákladné, ba naopak to má několik výhod. Spokojenost zákazníka - rychlé vyřízení jeho požadavku. Spokojená firma – sníží se náklady na další cestu, protože toto vozidlo má nového zákazníka poblíž. Vozidlo nestojí a je více využito. Zlepšuje se pozice firmy na konkurenčním trhu. Samozřejmě se to může využívat pouze tam, kde je to vhodné, například u služeb. Fábry (2006, s. 14 – 15) popisuje dva přístupy:

- Re-optimalizace

Po získání nového požadavku na obsluhu zákazníka dispečer pracuje se všemi informacemi a chce najít nejlepší řešení mezi dvěma ještě nenavštívenými místy. Ovšem čím vyšší je počet zákazníků, tím více vzniká dispečerovi problém s výpočetní náročností.

- Vkládající algoritmus

„Pokud přijde nový požadavek, zákazník je zařazen do plánované trasy mezi dva posobě následující zákazníky, kteří mají být vozidlem na trase navštíveni. Pro nalezení nejvhodnější dvojice zákazníků lze použít jako kritérium hodnotu prodloužení stávající trasy po zařazení nového zákazníka, která se bude minimalizovat“ (Fábry, 2006, s.15)

4 Praktická část

4.1 Představení společnosti XYZ

Z důvodu obavy firmy o uveřejnění citlivých údajů, je firma v práci anonymizována a bude nazývána v textu pouze XYZ.

Společnost XYZ je provozovatelem telekomunikačních služeb v České republice, ale i v dalších čtrnácti zemích. Nabízí vysoký standard a kvalitu v poskytování vysokorychlostního internetu, televizních služeb a telefonu, které využívá v České republice více jak půl milionů zákazníků.

Činnost společnosti XYZ dle CZ-NACE je ve skupině “Ostatní činnosti související s pevnou telekomunikační sítí”. Jde o společnost s ručením omezeným, jejíž počet zaměstnanců spadá do skupiny: 500 - 999 zaměstnanců. (Český statistický úřad, 2007)

Analýza je prováděna na oddělení dispečinku. Společnost využívá externí technické firmy, které jim obstarávají zákazníky. Externích firem využívá společnost více, každá je zaměřena na konkrétní oblast. Technik a jeho trasy jsou vybrány a analyzovány z té největší dodavatelské firmy, kterou společnost využívá.

Externí technická firma, která je využita pro tuto práci, je také společnost s ručením omezeným, velikostní kategorie dle počtu zaměstnanců je 100 - 199 zaměstnanců a činnost dle CZ-NACE je ve stejné skupině “Ostatní činnosti související s pevnou telekomunikační sítí”.(Český statistický úřad, 2007)

4.2 Objednávky

Objednávky si společnost XYZ plánuje sama a následně je posílá dodavatelským firmám. Ve většině případů (skoro ve všech) to funguje tak, že jedna osoba navrhuje termín zákazníkovi a další osoba pak přidělí danou práci technikovi.

Obecný postup plánování objednávek:

Při telefonickém rozhovoru nejdříve operátor položí klientovi otázku, jaký den návštěvy technika preferuje. Plánovat objednávku lze až od druhého dne hovoru. Operátor zadá do systému CRM (Customer Relationship Management) časové rozmezí, které klientovi vyhovuje pro vyhledání volného termínu. Ze systému CRM jde dotaz rezervačnímu systému, na veškeré volné termíny, které jsou vhodné pro konkrétní typ objednávky (např. samoinstalace, instalace technikem, děláním rozvodů apod.) ve zvoleném časovém rozmezí dle klienta (např. úterý) a dle oblasti, vyhledané podle PSČ. Z rezervačního systému se odešle zpět operátorovi do CRM seznam všech možných volných termínů pro hledaný den. Tyto termíny nabídne operátor klientovi. Pokud se nějaký termín z nabízených termínů klientovi hodí, je vše v pořádku a termín je určen pro daného klienta, pokud nikoliv, opakuje se stejný způsob hledání nového termínu pro jiný den. Termíny, které jsou nabízené klientům, mají dvouhodinový interval, a to od osmi hodin ráno do osmi večer. Celkem je nabízeno šest dvouhodinových termínů. Zmíněný dvouhodinový termín je pro tuto práci časové okno, resp. technik se musí dostavit na místo a začít konkrétní práci v tomto intervalu. Ve dvouhodinovém intervalu lze naplánovat od dvou do šesti objednávek, samozřejmě dle jejich náročnosti. Nakonec se objednávka uloží a je zaslaná dodavatelské firmě.

Postup u externí firmy:

Společnost XYZ objednávky odešle externí firmě vždy den dopředu před realizací objednávky. Systém objednávky automaticky rozdělí podle oblasti (PSČ) a odešle objednávky na konkrétní pobočky. V České republice je poboček několik, v Praze jsou čtyři. Na každé pobočce se vytisknuté objednávky opět rozdělí na oblasti a dají se konkrétnímu technikovi, který s tou oblastí má největší zkušenosti a zná ji dobře. Např. Technik ve čtvrtek dostane seznam jedenácti objednávek (zakázkových listů) seřazených dle času (časových dvouhodinových intervalů). V konkrétním intervalu si ale technik musí sám rozvrhnout, ke komu pojedou nejdříve. V situaci, kdy ve dvouhodinovém intervalu jsou pouze dvě objednávky, rozvržení je snadnější oproti šesti objednávkám ve stejně náročném časovém intervalu. Samozřejmě záleží na náročnosti jednotlivých prací. Pokud se stane, že firma pro tolik techniků nemá práci, tak technici dostanou jinou práci – údržba sítě apod.

4.3 Analýza tras

Analýza tras je prováděna na základě získaných dat od společnosti XYZ a to u jednoho vybraného technika, který jezdil v oblasti Prahy 9 - Černý Most. Analýza bude provedena u již obslužených klientů, ale nelze porovnat optimalizované trasy s tím, v jakém pořadí technik navštívil místa, jelikož je to na každém technikovi, jaké místo obslouží jako první v jednotlivém intervalu. Firma XYZ trasy neoptimalizuje.

Každý den měl technik jiný počet zakázek (zakázkových listů). Počet zakázek se odvíjí hlavně od náročnosti objednávek. Jeden den může mít technik na obslužení 8 klientů, ale u většiny z nich se zdrží okolo pětáctyřiceti minut, a pak může nastat situace, kdy klientů bude mít za den celkem 15 s tím, že se u většiny z nich zastaví na pět minut.

Aby byla provedena optimalizace tras, musí být známy veškeré údaje o každé trase. Nejdůležitější jsou přesné adresy, dále jakou činnost bude technik vykonávat u daného klienta, časová okna - časový interval, ve kterém má být zákazník obslužen.

Celkem analýza proběhne u pěti tras, které technik obsloužil. Trasy jsou od pondělí do pátku. Nejdříve bude provedena optimalizace tras a poté proběhne citlivostní analýza resp. dojde například k prodloužení časového intervalu ze dvou hodin, na čtyři hodiny – sníží se celkový počet časových oken. Počáteční a konečný interval toho dne zůstává vždy stejný, dvouhodinový.

V realitě je to ale těžké, a ne vždy může být spolehnutí pouze na výsledky ze softwaru, každý manažer si musí zodpovědět i další otázky, zda to bude na základě těchto výsledků opravdu fungovat, ne vždy se totiž do modelu dají uvést všechny informace. Není možné zákazníkům nabízet sice matematicky přesný ale obtížně zapamatovatelný a uživatelsky nepřívětivý interval (například 13:27-15:13). Navíc nesmí být zapomenuto, že lidé mají většinou čas brzy ráno nebo cca od 16:00 hodin, kdy opustí práci. Proto ranní (8:00 – 10:00) a večerní interval (18:00 – 20:00) je v této práci zachován a není změněn na více jak dvouhodinový. Dále je nutné si uvědomit, že i když se sníží počet časových intervalů, zákazník si bude muset o to víc vyhradit volný čas. To se zákazníkům nemusí líbit a je zde otázka, zda vůbec u takovéto společnosti budou chtít zůstat.

Analýza bude provedena u každé trasy zvlášť. Nejdříve proběhne optimalizace trasy s původními časovými okny a poté dojde k vytvoření optimálních tras při alternativním nastavení časových oken.

Pro lepší přehled jednotlivých analyzovaných tras je vytvořena tabulka s označením jak tras s původními časovými okny, tak s alternativními časovými okny:

Pořadí tras	Trasa s původními č. okny	Trasa s alternativ. č. okny
První trasa, pondělí	1	1.1
Druhá trasa, úterý	2	2.2
Třetí trasa, středa	3	3.3
Čtvrtá trasa, čtvrtek	4	4.4
Pátá trasa, pátek	5	5.5

Tabulka 3: **Označení tras**(Vlastní zpracování)

4.3.1 Pondělí - Trasa 1 a 1.1

První trasu jezdil technik v pondělí a musel obsloužit celkem 9 míst. V následující tabulce jsou vypsány přesné adresy a délka činnosti, kterou technik musel u jednotlivého zákazníka provést. Délka obsluhy je značena S .

Počet míst	Adresa	Délka obsluhy (minuty)
1	BOUŘILOVA 1103/4	45
2	GENERÁLA JANOUŠKA 966/5	15
3	BRYKSOVA 779/61	45
4	VAŠÁTKOVA 819/28	15
5	CÍGLEROVA 1079/10	5
6	BRYKSOVA 763/46	45
7	KUČEROVA 806/17	15
8	BOUŘILOVA 1105/8	15
9	HLAĐOVA 661/7	15

Tabulka 4: **Adresy trasy 1 a 1.1, minuty**(Vlastní zpracování)

Délka obsluhy je vyjádřena v minutách a činnosti jsou rozděleny pouze do tří časových skupin – 5, 15 a 45 minut. Pětiminutové práce jsou většinou samoinstalace, kde technik odevzdá klientovi pouze zařízení. Samoinstalace někdy může být i na patnáct minut, a to v případě, že klient je nový a technik musí hledat rozvody apod. Na patnáctiminutové a pětáctičetiminutové délky obsluhy jsou plánované většinou instalace technikem, výměny zařízení, budování nových zásuvek apod. Tyto práce mohou někdy zabrat více času, než je naplánovaný čas v zakázkovém listě dle operátora.

V následující tabulce jsou údaje jak pro původní trasu 1, tak i pro alternativní trasu 1.1.

e_i je čas, kdy nejdříve může technik začít provádět danou činnost,

l_i je čas, kdy nejpozději musí začít obsluha.

Počet míst	Adresa	Časová okna			
		Původní		Alternativní	
		e_i	l_i	e_i	l_i
1	BOUŘILOVA 1103/4	8:00	10:00	8:00	10:00
2	GEN. JANOUŠKA 966/5	10:00	12:00	10:00	14:00
3	BRYKSOVA 779/61	12:00	14:00	10:00	14:00
4	VAŠÁTKOVA 819/28	12:00	14:00	10:00	14:00
5	CÍGLEROVA 1079/10	12:00	14:00	10:00	14:00
6	BRYKSOVA 763/46	14:00	16:00	14:00	18:00
7	KUČEROVA 806/17	14:00	16:00	14:00	18:00
8	BOUŘILOVA 1105/8	16:00	18:00	14:00	18:00
9	HLAĐOVA 661/7	18:00	20:00	18:00	20:00

Tabulka 5 : **Dvouhodinové intervaly pro Trasu 1a 1.1**(Vlastní zpracování)

Trasa 1 – Trasa s původními časovými okny: pro práci je velmi důležitá informace, v jakém dvouhodinovém intervalu se musí dostavit technik ke klientovi a začít provádět danou činnost. Světle modré sloupce vyjadřují původní dvouhodinové intervaly v daném dni. Celkem je dvouhodinových intervalů šest.

Trasa 1.1 – Trasa s alternativními časovými okny: alternativní časová okna (žluté sloupce) byla pozměněna oproti původním tak, že intervaly 10:00 – 12:00 a 12:00 – 14:00 byly změněny na jeden čtyřhodinový, od 10:00 do 14:00. To samé bylo provedeno u intervalů

14:00 – 16:00 a 16:00 – 18:00, byly změněny také na čtyřhodinový interval od 14:00 do 18:00. Taková změna bude provedena i u všech ostatních tratí s tím, že první a poslední časové okno zůstane vždy dvouhodinové, nikoliv z důvodu matematického ale z manažerského. Jelikož nelze do modelu zahrnout veškeré požadavky a informace. Zákazníci mají čas většinou v ranních nebo pozdě odpoledních hodinách, proto se první a poslední interval neměnil a zůstal stále dvouhodinový.

Tato práce je komplikovaná celočíselným programováním. Kdyby úloha byla neceločíselná, mohla by být vyřešena různými aproximačními metodami. Náročnosti také přidávají již zmíněná časová okna (časové intervaly), ve kterém musí být klient obslužen. Tím, že existuje interval, je možné, že nastane čekání nebo zpoždění vozidla. V této práci se počítá s tím, že pokud vozidlo čeká na otevření nového intervalu, čeká u právě obsluženého zákazníka, nikoliv u zákazníka, kterého bude teprve technik obsluhovat. Pokud se vozidlo zpozdí, je vozidlo penalizováno.

Každá trasa bude řešena pomocí Statické úlohy obchodního cestujícího s časovými okny, a dále bude zohledněno čekání u právě obsluženého zákazníka i .

Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny

Naše úloha je statická, protože všechny informace, které jsou potřeba pro řešení této práce, jsou dopředu známé.

Účelová funkce

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 c_{ij} x_{ij} \quad (27)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^9 x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^9 x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, 9 \quad (29)$$

$$e_i \leq a_i \leq l_i \quad i = 2, 3, \dots, 9 \quad (30)$$

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq a_j \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad j = 1, 2, \dots, 9 \quad i \neq j \quad (31)$$

$$a_1 = 0 \quad (32)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 2, 3, \dots, 9 \quad (33)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, \dots, 9 \quad (34)$$

Pro ulehčení výpočtu, nebyly měřeny hodnoty ručně, ale pomocí internetové stránky Optimap – FastestRoudtripSolver (2017). Díky této webové stránce bylo nalezeno 72 naměřených hodnot pro trasu 1 a 1.1. Rozdíl mezi těmito trasy je pouze v časových oknech, tyto naměřené hodnoty jsou stejné. Uvedené hodnoty v následující tabulce jsou v sekundách.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BOUŘILOVA 1103/4	0	259	340	290	258	527	401	252	226
GEN. JANOUŠKA 966/5	293	0	170	84	238	468	231	241	170
BRYKSOVA 779/61	217	164	0	187	162	392	61	165	187
VAŠÁTKOVA 819/28	345	105	222	0	290	520	283	293	226
CÍGLEROVA 1079/10	55	229	179	252	0	432	240	4	249
BRYKSOVA 763/46	574	557	507	580	519	0	568	523	578
KUČEROVA 806/17	277	224	60	247	222	452	0	225	247
BOUŘILOVA 1105/8	51	234	184	257	5	437	245	0	244
HLAŽOVA 661/7	239	180	114	203	184	414	175	187	0

Tabulka 6: **Naměřené hodnoty pro trasu 1 a 1.1, sekundy**(Vlastní zpracování)

Naměřené hodnoty z tabulky č 6 jsou hodnoty proměnné c_{ij} a každá naměřená hodnota má svoji proměnnou x , první hodnota v řádku a zároveň ve sloupci má proměnnou x_{11} .

Hodnoty x jsou číslovány podle sloupců a řádků, první číslo u x je číslo řádku, druhé číslo sloupce. Na diagonále jsou samé nuly, protože vozidlo stojí právě na tom daném místě. Pro další počítání jsou hodnoty na diagonále ohodnoceny pomocí vysoké konstanty M , která je 10 000 000.

Pomocí proměnných x jsou vytvořeny rovnice sloupců a řádků. Účelová funkce, je tvořena hodnoty x , které jsou násobeny naměřenými hodnotami c_{ij} , dále jsou součástí účelové funkce hodnoty délky obsluhy možné čekání W_i .

Úloha s čekáním vozidla u právě obsluženého zákazníka

Ke statické úloze obchodního cestujícího s časovými okny je přidána i doba čekání W_i a délka obsluhy S_i .

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^9 W'_i + \sum_{j=2}^9 S_j \quad (35)$$

Účelová funkce je v příloze č. 1.

Dále je zapotřebí vytvořit tuto soustavu rovnic:

$$a_i + W'_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + v_{ij} = a_j; \quad i = 1, 2, \dots, 9; \quad j = 2, 3, \dots, 9; \\ i \neq j. \quad (36)$$

soustava rovnic je v příloze č. 2.

4.3.2 Úterý – Trasa 2 a 2.2

Opět zde platí, že trasa s původními časovými okny je značena jako Trasa 2 a trasa s alternativními časovými okny, značena jako Trasa 2.2. Při této trase, musel technik obsloužit osm klientů. V následující tabulce jsou přesné adresy s délkou obsluhy, která je stanovena operátorem pro činnost, kterou technik musel provést u jednotlivých klientů.

Počet míst	Adresa	Délka obsluhy (minuty)
1	GENERÁLA JANOUŠKA 897/20	15
2	BOUŘILOVA 1105/7	15
3	KUTTELWASCHEROVA 928/15	45
4	KUTTELWASCHEROVA 929/17	45
5	BREITCETLOVA 881/11	15
6	BOBKOVA 731/18	15
7	VYBÍRALOVA 937/29	5
8	DYGRÝNOVA 815/10	5

Tabulka 7: **Adresy Trasy 2 a 2.2, minuty**(Vlastní zpracování)

V následující tabulce jsou uvedené časové intervaly – původní i alternativní.

Počet míst	Adresa	Časová okna			
		Původní		Alternativní	
		e_i	l_i	e_i	l_i
1	GENERÁLA JANOUŠKA	8:00	10:00	8:00	10:00
2	BOUŘILOVA 1105/7	8:00	10:00	8:00	10:00
3	KUTTELWASCHEROVA	10:00	12:00	10:00	14:00
4	KUTTELWASCHEROVA	14:00	16:00	14:00	18:00
5	BREITCETLOVA 881/11	14:00	16:00	14:00	18:00
6	BOBKOVA 731/18	18:00	20:00	18:00	20:00
7	VYBÍRALOVA 937/29	18:00	20:00	18:00	20:00
8	DYGRÝNOVA 815/10	18:00	20:00	18:00	20:00

Tabulka 8: **Časové intervaly pro Trasu 2 a 2.2**(Vlastní zpracování)

Trasa 2 - Trasa s původními časovými okny: u této trasy je zřejmé, že firma měla pro technika méně práce než v ostatních dnech, proto už i u původních časových oken chybí dva intervaly to od 12:00 – 14:00 a od 16:00 – 18:00. Technik zřejmě dostal od firmy jinou práci.

Trasa 2.2 – Trasa s alternativními časovými okny: jelikož už u původních časových oken této trasy byly pouze čtyři časová okna a počáteční a konečné intervaly musí zůstat stejné,

nebude změna časových oken nijak příliš projevna. Samozřejmě dojde k prodloužení a spojení prostředních časových intervalů stejně tak, jako u ostatních tras, tedy z dvou dvouhodinových intervalů vzniknou dva čtyřhodinové a celkový počet časových oken bude stále stejný. V tomto případě se zřejmě nic zásadního nezmění oproti původním časovým oknům.

Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 c_{ij} x_{ij} \quad (37)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^8 x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^8 x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad (39)$$

$$e_i \leq a_i \leq l_i \quad i = 2, 3, \dots, 8 \quad (40)$$

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq a_j \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad i \neq j \quad (41)$$

$$a_1 = 0 \quad (42)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 2, 3, \dots, 8 \quad (43)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, \dots, 8 \quad (44)$$

Pomocí webové stránky Optimap – FastestRoudtripSolver (2017) byly nalezeny naměřené hodnoty pro úterní trasu. Celkem bylo naměřeno 56 hodnot. Hodnoty v následující tabulce jsou v sekundách:

	1	2	3	4	5	6	7	8
GEN. JANOUŠKA 897/20	0	251	292	288	86	125	290	83
BOUŘILOVA 1105/7	273	0	507	492	328	329	401	347
KUTTELWASCHER. 928/15	279	316	0	4	214	151	278	279
KUTTELWASCHER. 929/17	275	313	4	0	210	147	274	275
BREITCETLOVA 881/11	98	194	235	231	0	68	233	65
BOBKOVA 731/18	128	165	167	163	63	0	218	128
VYBÍRALOVA 937/29	294	331	67	63	229	165	0	294
DYGRÝNOVA 815/10	84	258	300	296	65	133	298	0

Tabulka 9: Naměřené hodnoty pro Trasu 2 a 2.2, sekundy (Vlastní zpracování)

Úloha s čekáním vozidla u právě obsluženého zákazníka

K účelové funkci přidána doba čekání W_i a délka obsluhy S_i .

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^8 W'_i + \sum_{j=2}^8 S_j \quad (45)$$

Účelová funkce je v příloze č. 3.

Soustavu rovnic:

$$a_i + W'_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + v_{ij} = a_j; \quad i = 1, 2, \dots, 8; \quad j = 2, 3, \dots, 8; \quad i \neq j. \quad (46)$$

soustava rovnic je v příloze č. 4.

4.3.3 Středa – Trasa 3 a 3.3

Původní trasa s časovými okny je značena jako Trasa 3 a Trasa 3.3 je ta, která má alternativní časová okna. Tentokrát technik navštívil 12 míst. V následující tabulce jsou uvedeny konkrétní adresy s délkou obsluhy v minutách.

Počet míst	Adresa	Délka obsluhy (minuty)
1	GEN. JANOUŠKA 885/44	45
2	KUČEROVA 808/13	45
3	DYGRÝNOVA 824/15	5
4	DOLEŽALOVA 1040/10	5
5	BRYKSOVA 772/47	5
6	VLČKOVA 1069/1	5
7	KPT. STRÁNSKÉHO 963/31	5
8	POSPÍCHALOVA 1129/3	15
9	KUTTELWASCHEROVA	5
10	GEN. JANOUŠKA 889/36	5
11	DOLEŽALOVA 1049/11	5
12	BRYKSOVA 742/70	15

Tabulka 10: Adresy Trasy 3 a 3.3, minuty (Vlastní zpracování)

V následující tabulce jsou uvedeny u každé adresy časové intervaly, původní i alternativní.

Počet míst	Adresa	Časová okna			
		Původní		Alternativní	
		e_i	l_i	e_i	l_i
1	GEN. JANOUŠKA 885/44	8:00	10:00	8:00	10:00
2	KUČEROVA 808/13	8:00	10:00	8:00	10:00
3	DYGRÝNOVA 824/15	10:00	12:00	10:00	14:00
4	DOLEŽALOVA 1040/10	10:00	12:00	10:00	14:00
5	BRYKSOVA 772/47	10:00	12:00	10:00	14:00
6	VLČKOVA 1069/1	10:00	12:00	10:00	14:00
7	KPT. STRÁNSKÉHO 963/31	12:00	14:00	10:00	14:00
8	POSPÍCHALOVA 1129/3	14:00	16:00	14:00	18:00
9	KUTTELWASCHEROVA	16:00	18:00	14:00	18:00
10	GEN. JANOUŠKA 889/36	16:00	18:00	14:00	18:00
11	DOLEŽALOVA 1049/11	16:00	18:00	14:00	18:00
12	BRYKSOVA 742/70	16:00	18:00	14:00	18:00

Tabulka 11: Časové intervaly pro Trasu 3 a 3.3 (Vlastní zpracování)

Trasa 3 – Trasa s původními časovými okny: i přesto že měl technik v tento den hodně zakázek, dvanáct, skončil o jeden interval dříve, resp. nebyl použit večerní interval od 18:00 – 20:00. Většina ze zakázek byla pětiminutová, nebo patnáctiminutová, šlo tedy pouze o předání zařízení (samoinstalaci) nebo o vyřešení menšího problému.

Trasa 3.3 – Trasa s alternativními časovými okny: v tomto případě šlo hezky spojit prostřední intervaly, jako ve většině ostatních tras, pouze zde chybí poslední interval.

Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny

Účelová funkce:
Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} c_{ij} x_{ij} \quad (47)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{12} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (49)$$

$$e_i \leq a_i \leq l_i \quad i = 2, 3, \dots, 12 \quad (50)$$

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq a_j \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad i \neq j \quad (51)$$

$$a_1 = 0 \quad (52)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 2, 3, \dots, 12 \quad (53)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 12; j = 1, 2, \dots, 12 \quad (54)$$

Webová stránka Optimap – FastestRoudtripSolver (2017) naměřila 132 měření. Hodnoty v následující tabulce jsou v sekundách. Místo nul na diagonále je pro výpočet použita vysoká konstanta $M = 10\,000\,000$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
GEN. JANOUŠKA 885/44	0	168	100	231	169	284	232	204	242	15	303	81
KUČEROVA 808/13	152	0	216	299	73	339	300	259	146	167	371	84
DYGRÝNOVA 824/15	97	226	0	279	227	342	290	262	300	112	351	139
DOLEŽALOVA 1040/10	261	393	267	0	395	350	354	387	468	248	72	307
BRYKSOVA 772/47	144	62	208	291	0	331	295	251	73	159	363	75
VLČKOVA 1069/1	230	334	237	215	336	0	295	273	409	218	287	248
KPT. STRÁNSKÉHO 963/31	198	273	262	242	275	392	0	312	348	213	314	187
POSPÍCHALOVA 1129/3	205	296	269	271	298	297	351	0	371	220	343	210
KUTTELWASCH. 928/15	213	132	277	360	69	400	270	320	0	228	432	145
GEN. JANOUŠKA 889/36	13	181	113	244	182	297	245	217	255	0	316	94
DOLEŽALOVA 1049/11	188	320	194	201	322	277	281	314	395	175	0	234
BRYKSOVA 742/70	68	86	132	215	88	255	216	175	161	83	287	0

Tabulka 12: Naměřené hodnoty pro Trasu 3 a 3.3, sekundy (Vlastní zpracování)

Úloha s čekáním vozidla u právě obsluženého zákazníka

K účelové funkci přidána doba čekání W_i a délka obsluhy S_i .

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{12} W'_i + \sum_{j=2}^{12} S_j \quad (55)$$

Účelová funkce je v příloze č. 5.

Soustavu rovnic:

$$a_i + W'_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + v_{ij} = a_j; \quad i = 1, 2, \dots, 12; \quad j = 2, 3, \dots, 12; \\ i \neq j. \quad (56)$$

soustava rovnic je v příloze č. 6.

4.3.4 Čtvrtek – Trasa 4 a 4.4

Trasa 4 je trasa s původními časovými okny, trasa 4.4 s okny alternativními. V tento den měl technik jedenáct míst na obslužení.

Počet míst	Adresa	Délka obsluhy (minuty)
1	BRYKSOVA 757/64	5
2	KPT. STRÁNSKÉHO 997/1	5
3	BRYKSOVA 742/70	45
4	DOLEŽALOVA 1045/20	15
5	VAŠÁTKOVA 1008/26	45
6	VAŠÁTKOVA 819/28	15
7	MAREŠOVA 642/2	45
8	BRYKSOVA 941/33	5
9	PACULOVA 1117/1	5
10	KPT. STRÁNSKÉHO 987/18	5
11	VAŠÁTKOVA 1025/25	45

Tabulka 13: **Adresy Trasy 4 a 4.4, minuty** (Vlastní zpracování)

V následující tabulce jsou adresy s přiřazenými časovými okny – původní i alternativní.

Počet míst	Adresa	Časová okna			
		Původní		Alternativní	
		e_i	l_i	e_i	l_i
1	BRYKSOVA 757/64	8:00	10:00	8:00	10:00
2	KPT. STRÁNSKÉHO 997/1	8:00	10:00	8:00	10:00
3	BRYKSOVA 742/70	10:00	12:00	10:00	14:00
4	DOLEŽALOVA 1045/20	12:00	14:00	10:00	14:00
5	VAŠÁTKOVA 1008/26	12:00	14:00	10:00	14:00
6	VAŠÁTKOVA 819/28	14:00	16:00	14:00	18:00
7	MAREŠOVA 642/2	14:00	16:00	14:00	18:00
8	BRYKSOVA 941/33	16:00	18:00	14:00	18:00
9	PACULOVA 1117/1	18:00	20:00	18:00	20:00
10	KPT. STRÁNSKÉHO 987/18	18:00	20:00	18:00	20:00
11	VAŠÁTKOVA 1025/25	18:00	20:00	18:00	20:00

Tabulka 14: **Časové intervaly pro Trasu 4 a 4.4**(Vlastní zpracování)

Trasa 4 – Trasa s původními časovými okny: u této trasy je maximální počet dvouhodinových intervalů, který je možný v jednom dni mít, celkem šest intervalů. Už na první pohled je zde vidět třeba u obsluženého místa 8, u kterého je naplánovaná činnost ohodnocena délkou trvání pěti minut využita pro dvouhodinový interval. Toto místo by mohlo být obsluženo v jiném blízkém intervalu a technik by měl více času na něco jiného (závažnější závadu na jiném místě, práce na firmě, apod.). Ale zde je problém, že nevíme ostatní informace, které dostal operátor při řešení dané objednávky.

Trasa 4.4 – Trasa s alternativními časovými okny: z celkem šesti intervalů byl počet díky sloučení dvou prostředních dvouhodinových intervalů snížen na čtyři.

Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny

Veškeré informace pro řešení dané úlohy jsou známé již před jejím řešením, proto je zde opět použita úloha obchodního cestujícího s časovými okny statická, nikoliv dynamická.

Účelová funkce

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} c_{ij} x_{ij} \quad (57)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{12} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, 11 \quad (59)$$

$$e_i \leq a_i \leq l_i \quad i = 2, 3, \dots, 11 \quad (60)$$

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq a_j \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad j = 1, 2, \dots, 11 \quad i \neq j \quad (61)$$

$$a_1 = 0 \quad (62)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 2,3, \dots, 11 \quad (63)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1,2, \dots, 11; j = 1,2, \dots, 11 \quad (64)$$

Internetová stránka Optimap – FastestRoudtripSolver (2017) naměřila 110 hodnot, které jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnoty jsou v sekundách. Opět místo nul na diagonále bude při výpočtu použita vysoká konstanta $M = 10\,000\,000$, aby vozidlo toto místo nemohlo navštívit.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
GEN. JANOUŠKA 885/44	0	168	100	231	169	284	232	204	242	15	303	81
KUČEROVA 808/13	152	0	216	299	73	339	300	259	146	167	371	84
DYGRÝNOVA 824/15	97	226	0	279	227	342	290	262	300	112	351	139
DOLEŽALOVA 1040/10	261	393	267	0	395	350	354	387	468	248	72	307
BRYKSOVA 772/47	144	62	208	291	0	331	295	251	73	159	363	75
VLČKOVA 1069/1	230	334	237	215	336	0	295	273	409	218	287	248
KPT. STRÁNSKÉHO 963/31	198	273	262	242	275	392	0	312	348	213	314	187
POSPÍCHALOVA 1129/3	205	296	269	271	298	297	351	0	371	220	343	210
KUTTELWASCH. 928/15	213	132	277	360	69	400	270	320	0	228	432	145
GEN. JANOUŠKA 889/36	13	181	113	244	182	297	245	217	255	0	316	94
DOLEŽALOVA 1049/11	188	320	194	201	322	277	281	314	395	175	0	234
BRYKSOVA 742/70	68	86	132	215	88	255	216	175	161	83	287	0

Tabulka 15: Naměřené hodnoty pro Trasu 4 a 4.4, sekundy (Vlastní zpracování)

Úloha s čekáním vozidla u právě obsluženého zákazníka

Ke statické účelové funkci obchodního cestujícího s časovými okny je přidána doba čekání W_i a délka obsluhy S_i .

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{11} W'_i + \sum_{j=2}^{11} S_j \quad (65)$$

Účelová funkce je v příloze č. 7.

Soustavu rovnic:

$$a_i + W'_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + v_{ij} = a_j; \quad i = 1, 2, \dots, 11; j = 2, 3, \dots, 11; \\ i \neq j. \quad (66)$$

soustava rovnic je v příloze č. 8.

4.3.5 Pátek – Trasa 5 a 5.5

Poslední den analyzovaného týdne, měl technik na obslužení nejvíce zakázek, celkem čtrnáct. Trasa 5 je trasa s původními časovými okny, trasa 5.5 s časovými okny alternativními. V následující tabulce jsou uvedené adresy s přiřazenou délkou obsluhy u jednotlivých míst, které mají být technikem obslouženy.

	Adresa	Délka obsluhy (minuty)
1	KUTTELWASCHEROVA	45
2	RUDOLFA HOLEKY 637/4	5
3	BOBKOVA 665/19	5
4	KPT. STRÁNSKÉHO 981/19	15
5	BRYKSOVA 954/7	5
6	BRYKSOVA 947/21	15
7	TRYTOVA 1120/6	45
8	VYBÍRALOVA 973/7	5
9	GENERÁLA JANOUŠKA	45
10	MANSFELDOVA 791/5	15
11	DOLEŽALOVA 1023/5	15
12	RONEŠOVA 1135/6	5
13	BREITCETLOVA 881/11	5
14	GENERÁLA JANOUŠKA	15

Tabulka 16: Adresy pro Trasu 5 a 5.5, minuty (Vlastní zpracování)

Počet míst	Adresa	Časová okna			
		Původní		Alternativní	
		e_i	l_i	e_i	l_i
1	KUTTELWASCHEROVA	8:00	10:00	8:00	10:00
2	RUDOLFA HOLEKY 637/4	8:00	10:00	8:00	10:00
3	BOBKOVA 665/19	8:00	10:00	8:00	10:00
4	KPT. STRÁNSKÉHO 981/19	10:00	12:00	10:00	14:00
5	BRYKSOVA 954/7	10:00	12:00	10:00	14:00
6	BRYKSOVA 947/21	10:00	12:00	10:00	14:00
7	TRYTOVA 1120/6	12:00	14:00	10:00	14:00
8	VYBÍRALOVA 973/7	12:00	14:00	10:00	14:00
9	GENERÁLA JANOUŠKA	12:00	14:00	10:00	14:00
10	MANSFELDOVA 791/5	14:00	16:00	14:00	18:00
11	DOLEŽALOVA 1023/5	14:00	16:00	14:00	18:00
12	RONEŠOVA 1135/6	16:00	18:00	14:00	18:00
13	BREITCETLOVA 881/11	16:00	18:00	14:00	18:00
14	GENERÁLA JANOUŠKA	16:00	18:00	14:00	18:00

Tabulka 17: Časové intervaly pro Trasu 5 a 5.5 (Vlastní zpracování)

Trasa 5 – Trasa s původními časovými okny: z celého týdne je to nejvíce zakázkových listů, které musí technik za den obsloužit, a přesto je den snížený o poslední interval – chybí interval od 18:00 – 20:00 hodin. Je to z důvodu, že šest zakázek ze všech čtrnácti je pětiminutových a pět zakázek patnáctiminutových, proto toho technik zvládne obsloužit tolik.

Trasa 5.5 – Trasa s alternativními časovými okny: v tomto případě se sloučí prostřední intervaly ze dvou dvouhodinových na čtyřhodinové, a to od 10:00 – 14:00 a od 14:00 do 18:00. Zde je i možné, že technik skončí s obsluhou zákazníků celkově dříve, než u trasy s původními časovými okny.

Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{14} \sum_{j=1}^{14} c_{ij} x_{ij} \quad (67)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{14} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 14 \quad (68)$$

$$\sum_{i=1}^{14} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, 14 \quad (69)$$

$$e_i \leq a_i \leq l_i \quad i = 2, 3, \dots, 14 \quad (70)$$

$$a_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq a_j \quad i = 1, 2, \dots, 14 \quad j = 1, 2, \dots, 14 \quad i \neq j \quad (71)$$

$$a_1 = 0 \quad (72)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 2, 3, \dots, 14 \quad (73)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 14; \quad j = 1, 2, \dots, 14 \quad (74)$$

Optimap – Fastest Roudtrip Solver (2017) naměřil k této páteční trase 182 hodnot, které jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnoty, nuly na diagonále znamenají, že vozidlo je na daném místě. Hodnoty jsou v sekundách.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
KUTTELWASCH. 923/5	0	384	201	254	133	99	297	252	239	153	358	310	236	239
RUD. HOLEKY 637/4	409	0	229	235	450	417	241	233	204	317	168	282	237	204
BOBKOVA 665/19	181	386	0	344	223	189	299	342	241	90	358	312	238	241
K. STRÁNSKÉHO 981/19	422	297	242	0	463	430	319	163	254	330	270	332	250	254
BRYKSOVA 954/7	378	253	198	121	0	386	275	119	210	286	224	288	206	210
BRYKSOVA 947/21	412	287	232	155	34	0	309	153	244	320	260	322	240	244
TRYTOVA 1120/6	328	246	148	248	370	336	0	246	144	236	261	41	140	144
VYBÍRALOVA 973/7	137	407	242	274	154	120	338	0	280	193	378	351	277	280
G. JANOUŠKA 887/40	268	198	88	198	310	276	163	196	0	177	209	176	40	0
MANSFELDOVA 791/5	141	296	113	257	183	149	209	255	151	0	268	222	148	151
DOLEŽALOVA 1023/5	505	212	336	331	557	513	328	340	279	424	0	369	323	267
RONESHOVA 1135/6	408	213	228	328	450	416	187	326	224	316	260	0	220	224
BREITCETLOVA 881/11	257	227	77	187	299	265	152	185	43	166	198	165	0	36
G. JANOUŠKA 887/40	268	198	88	198	310	276	163	196	1	177	216	176	40	0

Tabulka 18: Naměřené hodnoty pro Trasu 5 a 5.5, sekundy (Vlastní zpracování)

Úloha s čekáním vozidla u právě obsluženého zákazníka

I u této trasy musí být zohledněno čekání vozidla – vozidlo čeká u právě obsluženého zákazníka, nikoliv před místem, které má být teprve obsluženo. Vozidlo čeká na čas, kdy může vyrazit k místu, které má obsluhovat, tak, aby přijelo nejdříve v čas otevření časového intervalu. U míst, která jsou v jednom intervalu, nenastane čekání, to je pouze v úseku, kdy se mění časová okna.

Účelová funkce:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{14} \sum_{j=1}^{14} t_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{14} W'_i + \sum_{j=2}^{14} S_j \quad (75)$$

Účelová funkce je v příloze č. 9.

Soustavu rovnic:

$$a_i + W'_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + v_{ij} = a_j; \quad i = 1, 2, \dots, 14; \quad j = 2, 3, \dots, 14; \quad (76)$$

$$i \neq j.$$

soustava rovnic je v příloze č. 10.

4.4 Výsledky

V této části, části výsledků, dojde k porovnání vždy mezi optimálními trasou s původními časovými okny a trasou s alternativními časovými okny, resp. každý den se porovnájí obě trasy mezi sebou. Výsledky ze software jsou v sekundách, jelikož hodnoty, které se do něj vkládaly byly též v sekundách. Pro lepší znázornění, představitivost budou všechny hodnoty převedeny na minuty. V přílohách, na které bude odkázáno, budou hodnoty v sekundách, protože bude přiložena vždy originální verze výsledků ze software Gurobi Optimizer.

Trasa 1 a 1.1

Trasa 1:

V trase 1 bylo zapotřebí optimalizovat trasu s devíti místy a s původními časovými okny. V následující tabulce jsou uvedeny výsledky proměnných x_{ij} , kde je vidět, jak vypadá optimální trasa s původními časovými okny. Bere se v úvahu, že vozidlo vyjíždí z prvního místa a z posledního se vrací zpět do prvního místa. V realitě jede většinou technik zpět na firmu nebo k sobě domu, nikoliv zpět do prvního místa. Jelikož není známa adresa technika a ani z důvodu anonymity nelze zadat adresu firmy, je počítáno pouze s adresami a první obslužné místo je zároveň i počátečním a konečným místem okruhu.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BOUŘILOVA 1103/4	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19
GEN. JANOUŠKA 966/5	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29
BRYKSOVA 779/61	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39
VAŠÁTKOVA 819/28	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49
CÍGLEROVA 1079/10	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59
BRYKSOVA 763/46	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69
KUČEROVA 806/17	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79
BOUŘILOVA 1105/8	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89
HLAĐOVA 661/7	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99

Tabulka 19: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 1 (Vlastní zpracování)

Žlutě označená políčka znamenají vjezd vozidla na danou adresu a následně na daném místě probíhající obsluhu. V prvním řádku je vidět označené pole s x_{12} , to znamená, že z prvního místa jede vozidlo do druhého. Dále z druhého místa je výsledek u proměnné x_{24} , tzn., že vozidlo jede z druhého místa do čtvrtého, a tak dále.

Celá trasa: z prvního místa, tedy z adresy Bouřilova 1103/4 jede do místa Generála Janouška 966/5, postupně dále navštíví místa v tomto pořadí: Vašátkova 819/28, Cíglerova 1079/10, Bryksova 779/61, Kučerova 806/17, Bryksova 763/46, Bouřilova 1105/8 a poslední navštíveným místem je adresa Hlad'ova 661/7 ze kterého se vrací zpět do prvního místa a tím je okruh uzavřen.

Trasa 1.1:

Trasa 1.1 má alternativní časová okna, oproti trase 1. V následující tabulce jsou žlutě zvýrazněná pole znázorňující trasu vozidla při alternativních časových oknech.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BOUŘILOVA 1103/4	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19
GEN. JANOUŠKA 966/5	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29
BRYKSOVA 779/61	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39
VAŠÁTKOVA 819/28	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49
CÍGLEROVA 1079/10	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59
BRYKSOVA 763/46	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69
KUČEROVA 806/17	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79
BOUŘILOVA 1105/8	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89
HLAD'OVA 661/7	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99

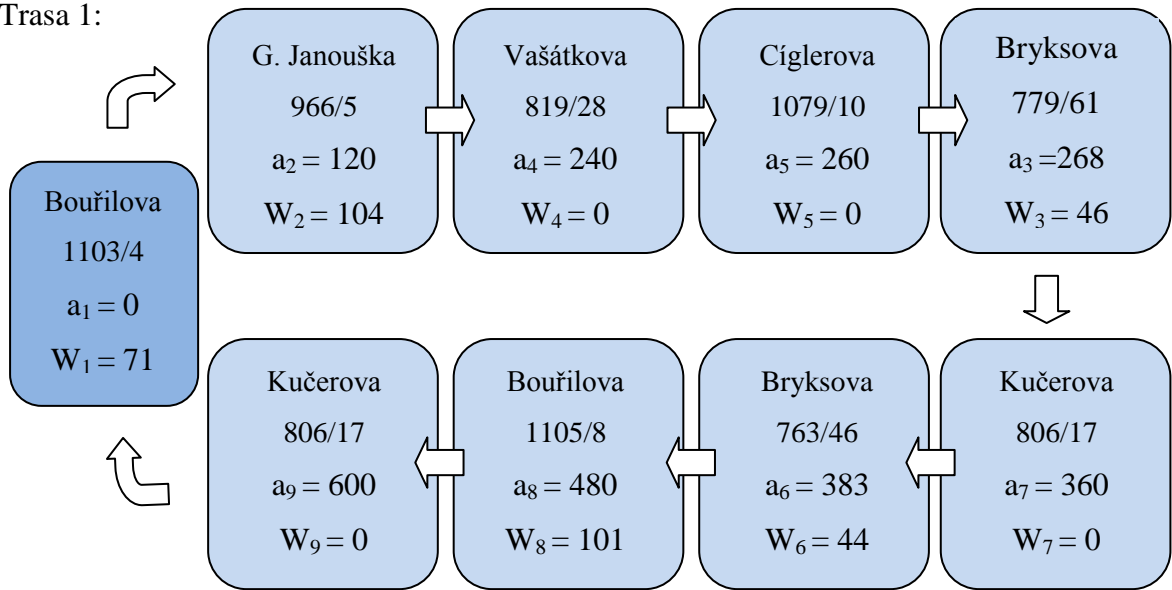
Tabulka 20: Výsledné proměnných x_{ij} pro Trasu 1 (Vlastní zpracování)

Celá trasa: z počátečního místa Bouřilova 1103/4 navštěvuje další místa v následujícím pořadí – Generála Janouška 966/5, Vašátkova 819/28, Bryksova 779/61, Cíglerova 1079/10, Bouřilova 1105/8, Bryksova 763/46, Kučerova 806/17, posledním místem je adresa Hlad'ova 661/7 a z té se vrací zpět do počátečního místa.

Pro představu je představen vstupní model Trasy 1, který byl vložen do softwaru, je v příloze č. 11 a výstupní model s výsledky je v příloze č. 12. Ostatní trasy jsou na stejný způsob, proto nebudou přiloženy.

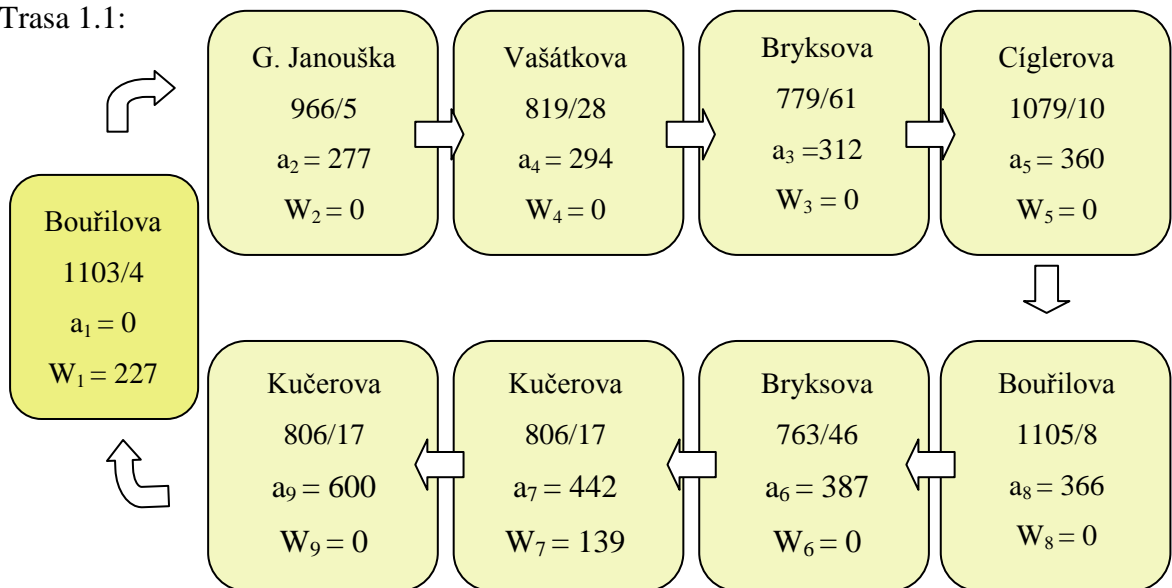
Pro lepší přehlednost budou obě trasy graficky znázorněny.

Trasa 1:



Obrázek 4: **Optimalizace Trasy 1** (Vlastní zpracování)

Trasa 1.1:



Obrázek 5: **Optimalizace Trasy 1.1** (Vlastní zpracování)

Proměnná a_i znamená okamžik, kdy technik začne provádět svoji práci u daného zákazníka, W_i znamená dobu čekání, resp. jde o dobu, kdy technik obslouží

napříkladv Trase 1 prvního zákazníka, a po obsluze musí čekat 71 minut, než může odjet k zákazníkovi dalšímu – je bráno čekání u obslouženého zákazníka.

Z těchto dvou obrázků (č. 4 a 5) je vidět, že u Trasy 1 technik vždy obsloužil místo a většinou několik minut následněmuselčekat. Když už nastalo čekání, tak měl volno mezi 40 – 105 minuty. Kdežto ve druhé trase, v Trase 1.1, kde byly pozměněny časová okna, je vidět, že nastalo čekání vozidla pouze ve dvou případech a ještě k tomu vždy ve velké časové hodnotě. Pokud nastalo takovéto velké čekání, bylo vždy s časem více jak dvě hodiny a do tohoto volného času by mohla být přidělena obsluha třeba dalšího zákazníka, nebo obsluha sítě na firmě apod. Je to čas, se kterým se dá lépe pracovat. Samozřejmě se musí brát v potaz i jiné parametry, které nelze zahrnout do modelu –selhání dopravy, lidé nechtějí čekat na obsluhu v intervalu čtyř hodin apod.

Vozidlo u první varianty, Trasy 1, jezdilo celkem 2331 sekund (= 39 minut) a u Trasy 1.1 2222 sekund (= 37 minut). Sekundy jsou převedeny a zaokrouhleny na celá čísla.

Trasa 2 a 2.2

Trasa 2:

U této trasy technik obsluhoval celkem osm míst, v následující tabulce jsou uvedeny hodnoty x_{ij} pro úterní trasu s původními časovými okny.

	1	2	3	4	5	6	7	8
G. JANOUŠKA 897/20	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18
BOURÍLOVA 1105/7	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28
KUTTELWASCH. 928/15	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38
KUTTELWASCH. 929/17	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48
BREITCETLOVA 881/11	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58
BOBKOVA 731/18	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68
VYBÍRALOVA 937/29	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78
DYGRÝNOVA 815/10	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88

Tabulka 21: **Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 2** (Vlastní zpracování)

Žlutá políčka z tabulky 21 znamenají vjezd vozidla do daného místa. Jak je vidět z tabulky, vozidlo vyjíždělo z místa Generála Janouška 897/20 a končí po obsloužení všech ostatních adres v tom samém místě.

Trasa 2.2:

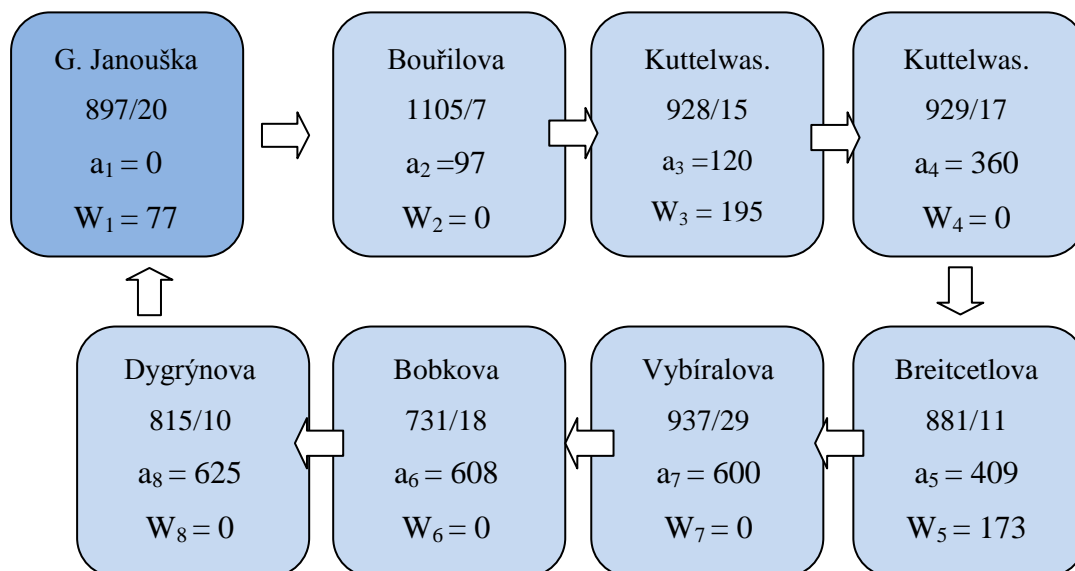
Tato trasa se od Trasy 2 liší pouze v časových oknech, které jsou alternativní. Výsledky proměnných x_{ij} , resp. jakou cestu mělo vozidlo lze vyčíst z následující tabulky.

	1	2	3	4	5	6	7	8
G. JANOUŠKA 897/20	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18
BOUŘILOVA 1105/7	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28
KUTTELWASCH. 928/15	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38
KUTTELWASCH. 929/17	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48
BREITCETLOVA 881/11	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58
BOBKOVA 731/18	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68
VYBÍRALOVA 937/29	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78
DYGRÝNOVA 815/10	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88

Tabulka 22: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 2.2 (Vlastní zpracování)

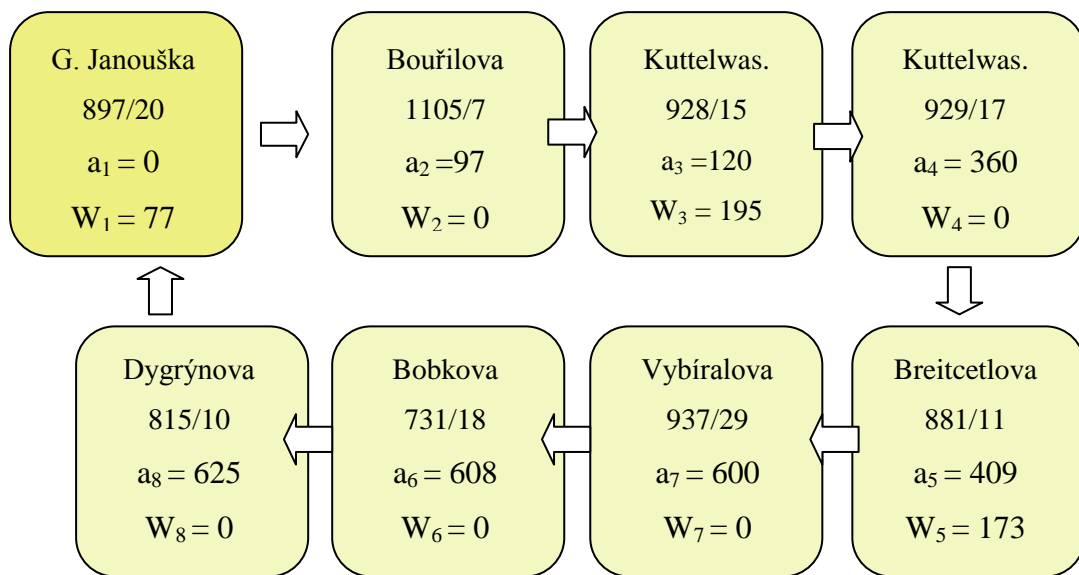
Obě úterní trasy, jak Trasa 2 s původními časovými okny, tak Trasa 2.2 s okny alternativními budou graficky znázorněny:

Trasa 2:



Obrázek 6: Optimalizace Trasy 2 (Vlastní zpracování)

Trasa 2.2:



Obrázek 7: **Optimalizace Trasy 2.2** (Vlastní zpracování)

Oba obrázky tras, Trasy 2 a Trasy 2.2, jsou totožné ikdyž mají jiná časová okna. Je to tím, že když se slučovaly vždy dva prostřední intervaly, interval 10:00 – 12:00 s 12:00 – 14:00, a v druhém případě 14:00 – 16:00 s 16:00 – 18:00, v oboch případech jeden z intervalů chyběl – technik neměl v daném intervalu naplánovanou žádnou obsluhu místa. Proto ikdyž se interval rozšířil ze dvouhodinového na čtyřhodinový, nemá to v tomto případě žádný vliv na změnu trasy. Velké časové mezery lze využít na jiné práce, než je obsluha zákazníků.

Vozidlo u první varianty, Trasy 2, jezdilo celkem 1582 sekund (= 26,5 minuty) a u Trasy 2.2 je to stejné, jelikož vozidlo navštívilo místa ve stejném pořadí.

Trasa 3 a 3.3:

Trasa 3:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G. Janouška 885/44	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x110	x111	x112
Kučerova 808/13	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x210	x211	x212
Dygrýnova 824/15	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x310	x311	x312
Doležalova 1040/10	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x410	x411	x412
Bryksova 772/47	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x510	x511	x512
Vlčkova 1069/1	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69	x610	x611	x612
Kpt. Strán. 963/31	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79	x710	x711	x712
Pospíchal.1129/3	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89	x810	x811	x812
Kuttelwasch. 928/15	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99	x910	x911	x912
G. Janouška 889/36	x10.1	x10.2	x10.3	x10.4	x10.5	x10.6	x10.7	x10.8	x10.9	x10.10	x10.11	x10.12
Doležalova 1049/11	x11.1	x11.2	x11.3	x11.4	x11.5	x11.6	x11.7	x11.8	x11.9	x11.10	x11.11	x11.12
Bryksova 742/70	x12.1	x12.2	x12.3	x12.4	x12.5	x12.6	x12.7	x12.8	x12.9	x12.10	x12.11	x12.12

Tabulka 23: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 3 (Vlastní zpracování)

Tento den měl technik na obsluhování dvanáct míst, hodnoty x_{ij} jsou vloženy do předchozí tabulky č. 24.

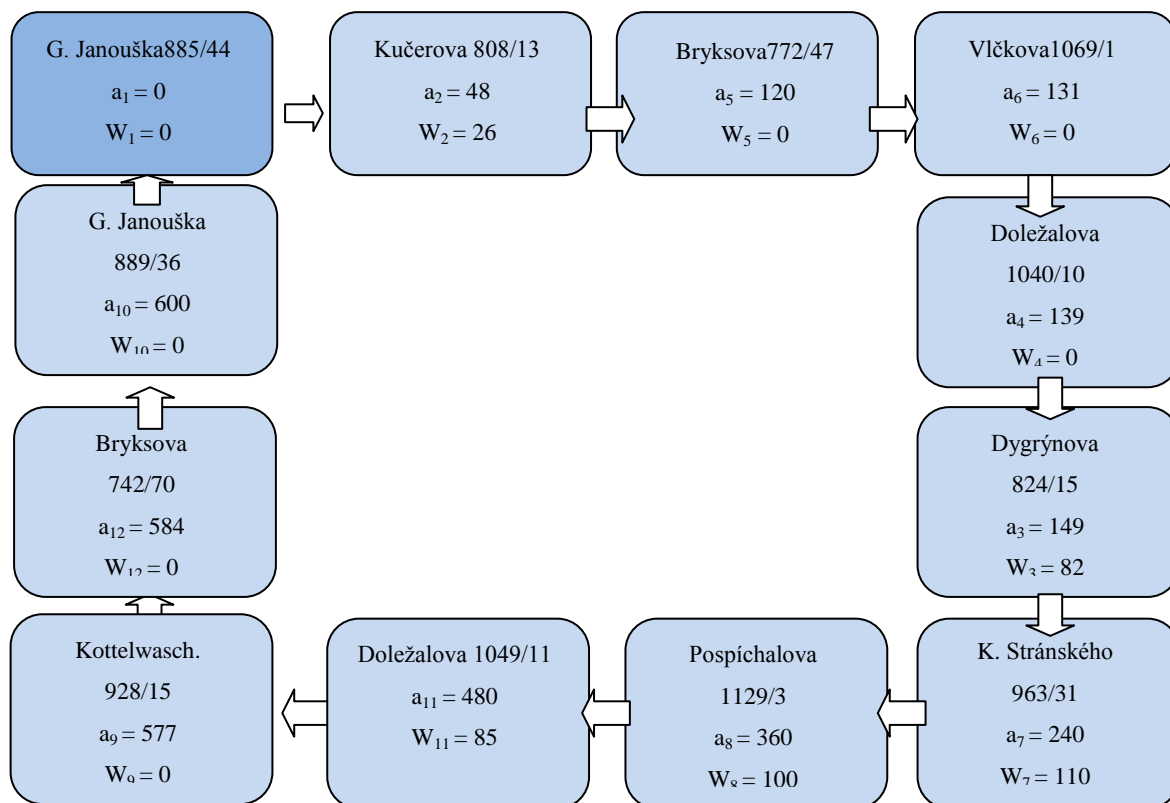
Trasa 3.3:

Oproti předchozí, úterní trase, jsou zde vidět velké změny díky alternativním časovým oknům.

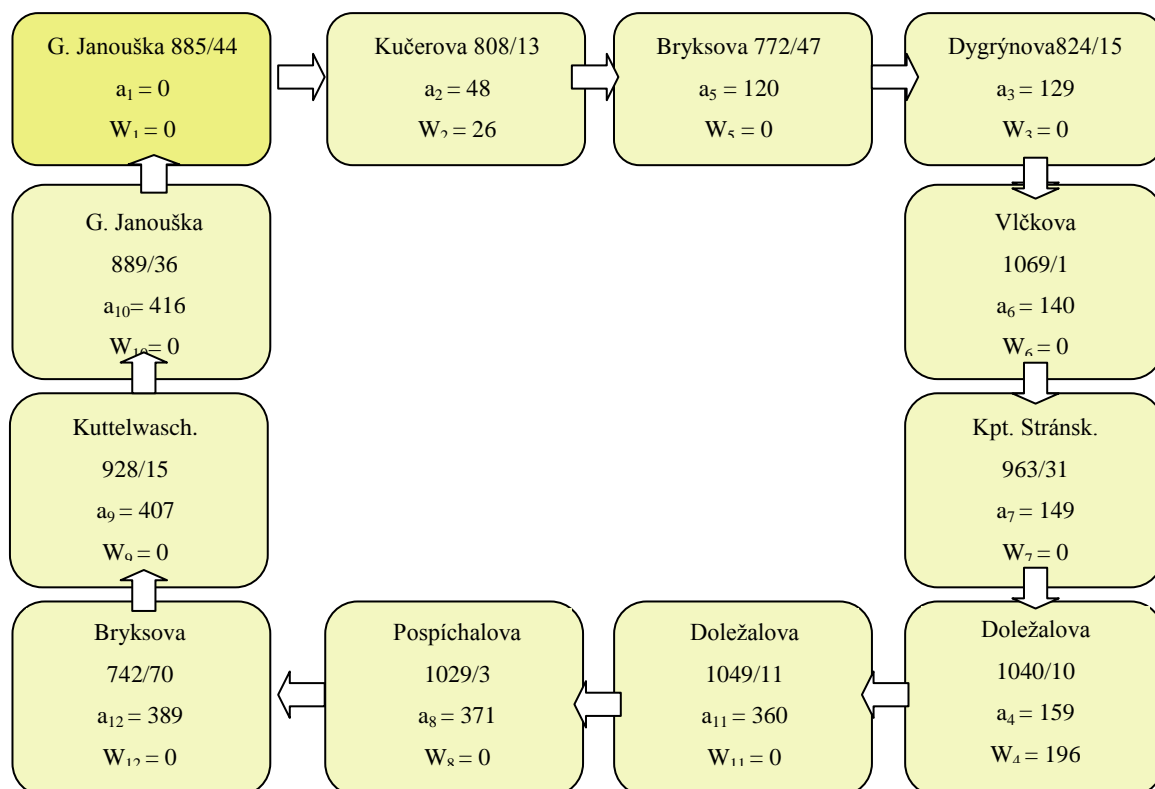
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G. Janouška 885/44	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x110	x111	x112
Kučerova 808/13	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x210	x211	x212
Dygrýnova 824/15	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x310	x311	x312
Doležalova 1040/10	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x410	x411	x412
Bryksova 772/47	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x510	x511	x512
Vlčkova 1069/1	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69	x610	x611	x612
Kpt. Strán. 963/31	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79	x710	x711	x712
Pospíchal.1129/3	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89	x810	x811	x812
Kuttelwasch. 928/15	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99	x910	x911	x912
G. Janouška 889/36	x10.1	x10.2	x10.3	x10.4	x10.5	x10.6	x10.7	x10.8	x10.9	x10.10	x10.11	x10.12
Doležalova 1049/11	x11.1	x11.2	x11.3	x11.4	x11.5	x11.6	x11.7	x11.8	x11.9	x11.10	x11.11	x11.12
Bryksova 742/70	x12.1	x12.2	x12.3	x12.4	x12.5	x12.6	x12.7	x12.8	x12.9	x12.10	x12.11	x12.12

Tabulka 24: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 3.3 (Vlastní zpracování)

Obě trasy, Trasa 3 a 3.3 budou znázorněny graficky a popsány:



Obrázek 8: **Optimalizace Trasy 3** (Vlastní zpracování)



Obrázek 9: **Optimalizace Trasy 3.3** (Vlastní zpracování)

Jak lze vidět z grafického znázornění, tak u Trasy 3 není jízda s obsluhou tak plynulá jako u Trasy 3.3. Vozidlo u Trasy 3.3 má během dne dvě čekání, jedno po druhé obsluze, kdy vozidlo muselo čekat na otevření intervalu, druhé během dne. Kdežto u Trasy 3 nastalo čekání 5 krát. a v daleko delších intervalech než v Trase s alternativními časovými okny. Trasa s původními okny trvá celkově déle, než trasa s alternativními časovými okny. U trasy 3.3 ve skutečnosti vozidlo začne s poslední obsluhou o 184 minut dříve, než je tomu tak u Trasy s původními časovými okny. Modře znázorněná trasa, je Trasa 3 s původními časovými okny a žlutě znázorněná je Trasa 3.3 s okny alternativními.

Vozidlo u první varianty, Trasy 3, jezdilo celkem 2635 sekund (= 44 minut) a u Trasy 3.32326 sekund (= 39 minut). Sekundy jsou převedeny na minuty a zaokrouhleny na celá čísla, to je pouze pro lepší představivost, v sekundách je to přesnější.

Trasa 4 a 4.4:

Trasa 4:

Tento den, čtvrtek, odjezdil technik celkem jedenáct zakázek, jednotlivé hodnoty proměnné x_{ij} jsou uvedeny v následující tabulce.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
BRYKSOVA 757/64	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x110	x111
KPT. STRÁNSKÉHO	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x210	x211
BRYKSOVA 742/70	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x310	x311
DOLEŽAL. 1045/20	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x410	x411
VAŠÁTKOVA 1008/26	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x510	x511
VAŠÁTKOVA 819/28	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69	x610	x611
MAREŠOVA 642/2	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79	x710	x711
BRYKSOVA 941/33	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89	x810	x811
PACULOVA 1117/1	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99	x910	x911
KPT. STRÁNS. 987/18	x10.1	x10.2	x10.3	x10.4	x10.5	x10.6	x10.7	x10.8	x10.9	x10.10	x10.11
VAŠÁTKOVA 1025/25	x11.1	x11.2	x11.3	x11.4	x11.5	x11.6	x11.7	x11.8	x11.9	x11.10	x11.11

Tabulka 25: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 4 (Vlastní zpracování)

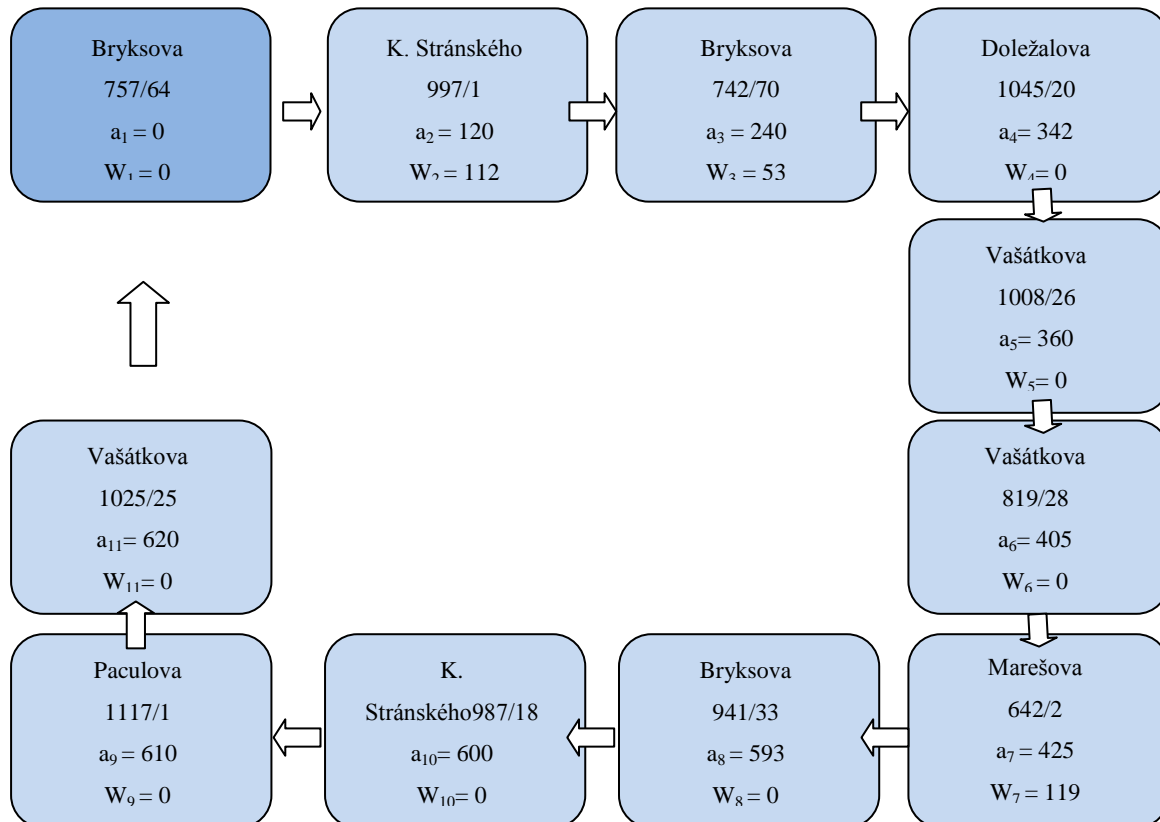
Trasa 4.4:

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty proměnné x_{ij} u trasy s alternativními časovými okny.

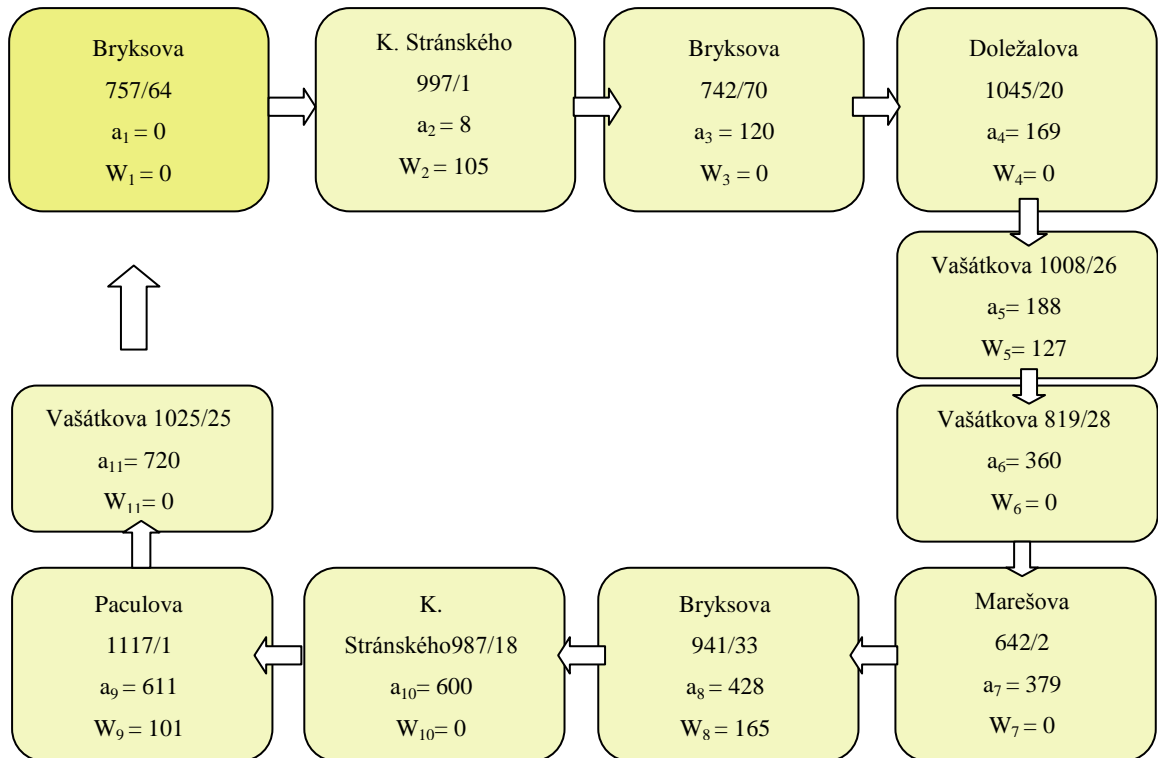
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
BRYKSOVA 757/64	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x110	x111
KPT. STRÁNSKÉHO	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x210	x211
BRYKSOVA 742/70	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x310	x311
DOLEŽAL. 1045/20	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x410	x411
VAŠÁTKOVA 1008/26	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x510	x511
VAŠÁTKOVA 819/28	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69	x610	x611
MAREŠOVA 642/2	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79	x710	x711
BRYKSOVA 941/33	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89	x810	x811
PACULOVA 1117/1	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99	x910	x911
KPT. STRÁNS. 987/18	x10.1	x10.2	x10.3	x10.4	x10.5	x10.6	x10.7	x10.8	x10.9	x10.10	x10.11
VAŠÁTKOVA 1025/25	x11.1	x11.2	x11.3	x11.4	x11.5	x11.6	x11.7	x11.8	x11.9	x11.10	x11.11

Tabulka 26: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 4.4 (Vlastní zpracování)

Trasa jak s původními, tak s alternativními časovými okny budou znázorněny graficky a interpretovány, modře Trasa 4 a žlutě Trasa 4.4:



Obrázek 10: Optimalizace Trasy 4 (Vlastní zpracování)



Obrázek 11: **Optimalizace Trasy 4.4** (Vlastní zpracování)

Pokud porovnáme tyto trasy, Trasu 4 – s původními časovými okny a Trasu 4.4 – s alternativními časovými okny, lze říci, že zde neměla změna časových oken zlepšující efekt, spíše naopak. – zvýšil se počet čekání a i celková délka čekání během dne a vozidlo s alternativními časovými okny obsloužilo zákazníka o to později než při alternativních časových oknech. Zde je vidět, že né vždy vyjde trasa s alternativními časovými okny lépe, než s časovými okny původními.

Vozidlo u první varianty, Trasy 4, jezdilo celkem 2277 sekund (= 38 minut), stejně je tomu i u varianty druhé, Trasy 4.4, protože vozidlo navštívilo daná místa ve stejném pořadí. Hodnoty v sekundách jsou převedeny na minuty a zaokrouhleny na celá čísla, to je pouze pro lepší představivost.

Trasa 5 a 5.5

Trasa 5:

V poslední den, technik měl na obsluhu nejvíce míst, celkem čtrnáct. Hodnoty proměnné x_{ij} u trasy s původními časovými okny jsou v následující tabulce:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x110	x111	x112	x113	x114
2	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x210	x211	x212	x213	x214
3	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x310	x311	x312	x313	x314
4	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x410	x411	x412	x413	x414
5	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x510	x511	x512	x513	x514
6	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69	x610	x611	x612	x613	x614
7	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79	x710	x711	x712	x713	x714
8	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89	x810	x811	x812	x813	x814
9	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99	x910	x911	x912	x913	x914
10	x10_1	x10_2	x10_3	x10_4	x10_5	x10_6	x10_7	x10_8	x10_9	x10_10	x10_11	x10_12	x10_13	x10_14
11	x11_1	x11_2	x11_3	x11_4	x11_5	x11_6	x11_7	x11_8	x11_9	x11_10	x11_11	x11_12	x11_13	x11_14
12	x12_1	x12_2	x12_3	x12_4	x12_5	x12_6	x12_7	x12_8	x12_9	x12_10	x12_11	x12_12	x12_13	x12_14
13	x13_1	x13_2	x13_3	x13_4	x13_5	x13_6	x13_7	x13_8	x13_9	x13_10	x13_11	x13_12	x13_13	x13_14
14	x14_1	x14_2	x14_3	x14_4	x14_5	x14_6	x14_7	x14_8	x14_9	x14_10	x14_11	x14_12	x14_13	x14_14

Tabulka 27: Výsledné proměnných x_{ij} pro trasu 5 (Vlastní zpracování)

Pro velikost tabulky, adresy očíslovány v tomto pořadí, platí i pro tabulku 29:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1- KUTTELWASCHEROVA 923/5 | 8- VYBÍRALOVA 973/7 |
| 2- RUDOLFA HOLEKY 637/4 | 9- GENER. JANOUŠKA 887/40 |
| 3- BOBKOVA 665/19 | 10- MANSFELDOVA 791/5 |
| 4- KPT. STRÁNSKÉHO 981/19 | 11- DOLEŽALOVA 1023/5 |
| 5- BRYKSOVA 954/7 | 12- RONEŠOVA 1135/6 |
| 6- BRYKSOVA 947/21 | 13- BREITCETLOVA 881/11 |
| 7- TRYTOVA 1120/6 | 14- GENER. JANOUŠKA 887/40 |

Trasa 5.5

Změny oproti minulé tabulce, tabulce č. 28 jsou díky alternativním časovým oknům.

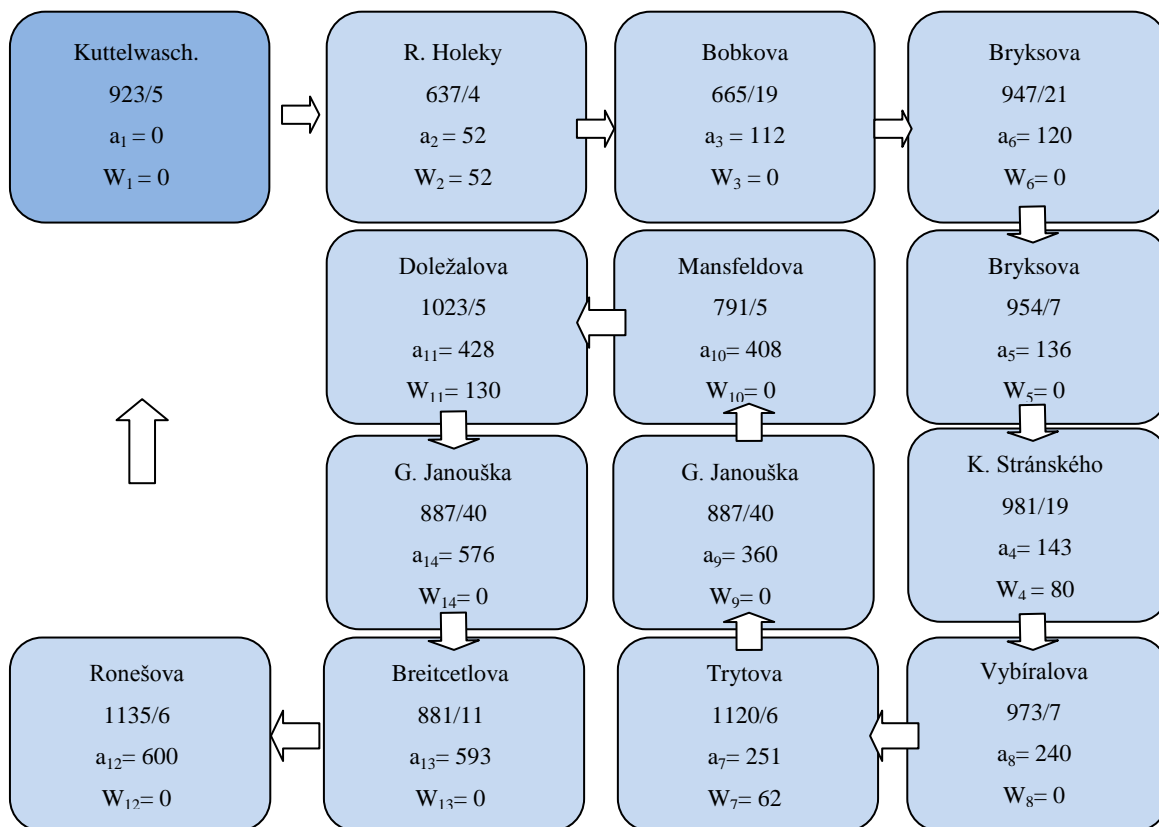
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x110	x111	x112	x113	x114
2	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x210	x211	x212	x213	x214
3	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x310	x311	x312	x313	x314
4	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x410	x411	x412	x413	x414
5	x51	x52	x53	x54	x55	x56	x57	x58	x59	x510	x511	x512	x513	x514
6	x61	x62	x63	x64	x65	x66	x67	x68	x69	x610	x611	x612	x613	x614
7	x71	x72	x73	x74	x75	x76	x77	x78	x79	x710	x711	x712	x713	x714
8	x81	x82	x83	x84	x85	x86	x87	x88	x89	x810	x811	x812	x813	x814
9	x91	x92	x93	x94	x95	x96	x97	x98	x99	x910	x911	x912	x913	x914
10	x10_1	x10_2	x10_3	x10_4	x10_5	x10_6	x10_7	x10_8	x10_9	x10_10	x10_11	x10_12	x10_13	x10_14
11	x11_1	x11_2	x11_3	x11_4	x11_5	x11_6	x11_7	x11_8	x11_9	x11_10	x11_11	x11_12	x11_13	x11_14
12	x12_1	x12_2	x12_3	x12_4	x12_5	x12_6	x12_7	x12_8	x12_9	x12_10	x12_11	x12_12	x12_13	x12_14
13	x13_1	x13_2	x13_3	x13_4	x13_5	x13_6	x13_7	x13_8	x13_9	x13_10	x13_11	x13_12	x13_13	x13_14
14	x14_1	x14_2	x14_3	x14_4	x14_5	x14_6	x14_7	x14_8	x14_9	x14_10	x14_11	x14_12	x14_13	x14_14

Tabulka 28: Výsledky proměnných x_{ij} pro trasu 5 (Vlastní zpracování)

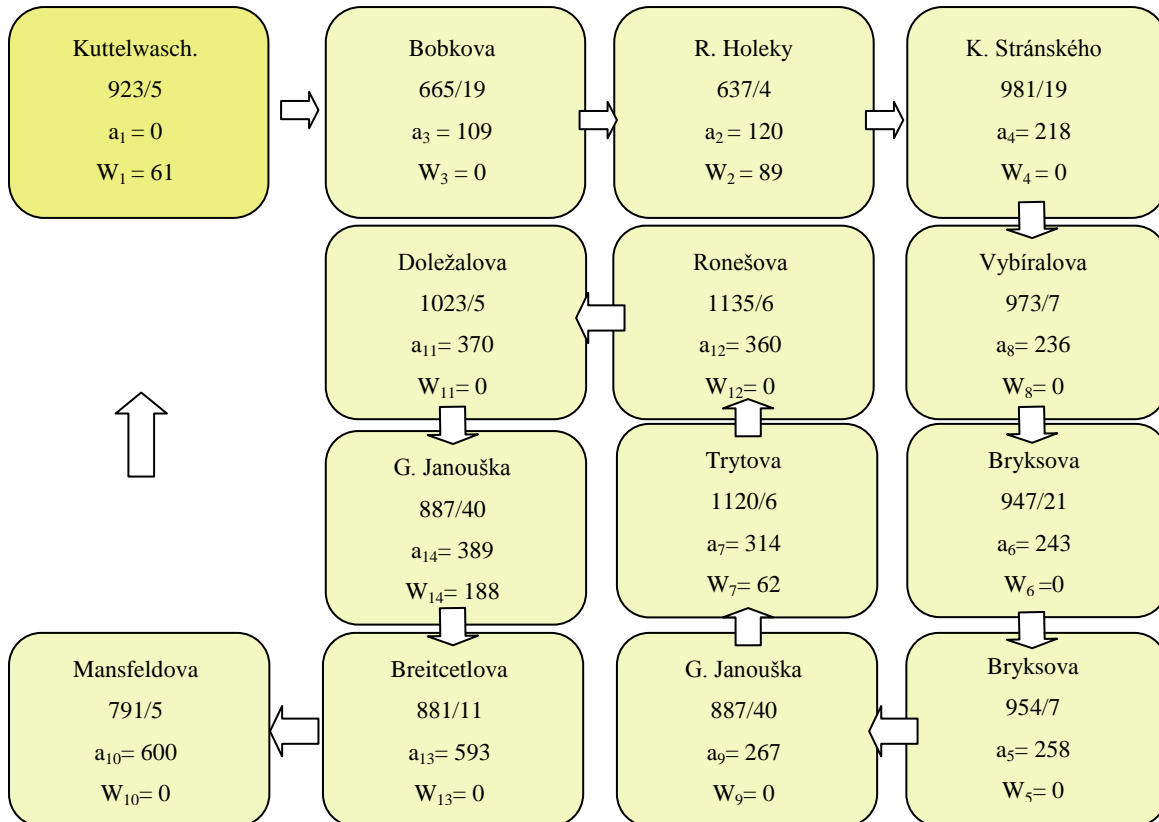
Při porovnání těchto dvou tras, Trasy 5 – s původními časovými okny a Trasy 5.5 – s okny alternativními v tabulkách nebo hlavně u grafického znázornění ve kterém jsou i hodnoty, kdy vozidlo započalo obsluhu u zákazníka (proměnná a_i) a doba čekání, při kterém muselo vozidlo stát u právě obsluženého zákazníka (proměnná W_i) zjistíme, že vozidlo u obou tras započalo poslední obsluhu ve stejném čase, ale v jiném místě, ze kterého se poté vracelo zpátky do počátečního místa.

Trasa s alternativními časovými okny je o trochu plynulejší, má i dobu čekání seskupenější než je tomu tak u trasy s původními časovými okny. A když je čas nerozdělený, má technik čas na jiné věci – vešla by se do doby, kdy čeká další obsluha zákazníka, nebo by mu firma přidělila jinou práci. Což je možná všechno dobré pro firmu, ale celé je to náročnější pro zákazníky, kteří si musí vyhradit čtyři hodiny oproti původnímu dvouhodinovému intervalu. Musí se brát ohled také na lidi, kteří pracují a vracení se domů většinou až po práci, resp. po 16 hodině. V grafickém znázornění je první trasa (modrá) trasa s původními časovými okny, žlutá trasa je trasa s alternativními časovými okny.

Tmavě modré a tmavě žluté pole je startovní a zároveň konečné místo okruhu.



Obrázek 12: **Optimalizace Trasy 5** (Vlastní zpracování)



Obrázek 13: **Optimalizace Trasy 5.5** (Vlastní zpracování)

Vozidlo u Trasy 5, trasy s původními časovými okny strávilo na cestě celkem 2927 sekund (= 49 minut) a u Trasy 5.5, trasy s alternativními časovými okny celkem 2427 sekund (=40,5 minut).

5 Závěr

Tato diplomová práce se zabývala analýzou časových oken pro okružní dopravní problém ve vybrané společnosti. Nejdříve proběhla optimalizace tras pomocí statické úlohy obchodního cestujícího při původních časových oknech, kde byla brána v potaz též délka úlohy u každé z obslužených míst a čekání, kde vozidlo čekalo u právě obsluženého zákazníka na vhodný čas vyjetí k obsluze dalšího zákazníka v pořadí. Dále byla provedena optimalizace těch stejných tras, akorát s časovými okny alternativními – došlo ke spojení prostředních dvouhodinových intervalů, tzn., že vznikly během dne dva čtyřhodinové intervaly, první a poslední interval zůstal stejný, dvouhodinový.

Po porovnání všech tras s původními časovými okny s trasy, které mají alternativní časová okna, lze říci, že ve většině případů v trasách s alternativními časovými okny jde o plynulou jízdu s obsluhou, čekání se vyskytuje pouze v tom momentu, kdy vozidlo čeká na otevření intervalu – jelikož je snížený počet intervalů, čeká vozidlo méněkrát a v delších časových úsecích, než je tomu tak v trasách s původními časovými okny, kde je čekání v krátkých a častých minutových intervalech. Pokud se sjednotí čas čekání do větších úseků – např., je lepší mít hodinu a půl úsek v celku než po tři úseky po dvaceti minutách. Do většího úseku se klidně vejde další obsluha zákazníka (obsluha zákazníka trvá v rozsahu od 15 – 45 minut plus doprava), nebo jiná práce, kterou by technik dostal od firmy. I v případě, že by se jednalo o prostoj, je většinou techniků preferovaná varianta úseku v celku.

Toto vše ale je dobré pouze pro firmu, která by využila maximálního času technika a vozidla na trati, avšak pokud se sestavuje model pro optimalizaci, nelze tam zahrnout úplně všechny informace i když se o nich ví. Každý manažer se musí zamyslet i nad druhou stranou, stranou z pohledu zákazníka. Pro zákazníka je horší vyhradit si čtyřhodinový interval z celého dne, než dvouhodinový. Dále se musí brát ohled na pracující lidi, kteří bývají doma pouze ráno nebo večer, proto v této práci byly zachovány ranní a večerní intervaly jako dvouhodinové. Manažer by se měl vcítit i do role technika, jak by se mu jezdilo lépe – zamyslet se nad časem na odpočinek, na čas na jídlo – jelikož při alternativních časových oknech by technik neměl víceméně čas nikdy a pracoval by dvanáct hodin v kuse.

Nelze vše brát z pohledu pouze matematického, ale především z ekonomického a manažerského hlediska. Vždy je vhodné najít kompromis mezi všemi stranami a to je někdy obzvlášť těžké. Výsledky práce je možné brát jako pilotní studii, která vede jednak k představení možností optimalizace tras ve firmě XYZ, jednak ke kvantifikaci dopadů agregace vybraných časových intervalů. Samotné zhodnocení je již na zodpovědných manažerech firmy. Před samotným rozhodnutím je však nutné upozornit i na možnost kombinace obou přístupů. Obě varianty časových oken mají svá pro i proti, je možné zvolit různé varianty pro různé dny, nebo oblasti.

6 Seznam literatury

- Applegate David L., Bixby Robert E., Chvátal Vašek and Cook William J. 2006.***The Traveling Salesman Problem.* New Jersey : Princeton University Press, 2006. 978-0-691-12993-8.
- Cook, W., Gerards, A.M.H., Schrijver, A., Tardos, É.***Sensitivity theorems in integer linear programming,* s. 251-262, vol. 34, 1986.
- Fábry, Jan. 2006.***Dynamic Traveling Salesman Problem.* Plzeň, 2006. stránky 137 - 146. 80-7043-480-5.
- Fábry, Jan. 2006.***Dynamické okružní a rozvozní úlohy, disertační práce.* Praha : VŠE - FIS, 2006.
- Fábry, Jan. 2011.***Matematické modelování.* Praha : Professional Publishing, 2011. 978-80-7431-066-9.
- Foote, Steven. 2015.***Learning to program.* Westford, Massachusetts : Pearson Education, Inc. , 2015. 978-0-7897-5339-7.
- Genova, Krasimira; Guliashki, Vassil., 2011.***Linear integer programming methods and approaches—a survey.* Journal of Cybernetics and Information Technologies, Vol. 11, No 1, 2011.
- Jablonský, Josef. 2007.***Operační výzkum.* Praha : Professional Publishing, 2007. 978-80-86946-44-3.
- Lagová, Milada a Jablonský, Josef. 2004.***Lineární modely.* Praha : Vysoká škola ekonomická, 2004. 80-245-0816-8.
- Mikhailyuk, V. A.,2010.** *Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 46, No. 2,* , 1060-0396/10/4602-0290.
- Pelikán, Jan. 2001.***Diskrétní modely v operačním výzkumu.* místo neznámé : Professional Publishing, 2001. 80-86419-17-7.
- Pelikán, Jan. 1993.***Praktikum z operačního výzkumu.* Praha : Vysoká škola ekonomická , 1993. 80-7079-135-7.
- International Society for System Sciences, 2015,**(online). dostupné na <http://iss.org/projects>.

Sterman, John D. 2000.*Systems Thinking and Modeling for a Complex World.*: Jeffrey J. Shelsfud, 2000. 0-07-231135-5.

Šubrt, Tomáš a kolektiv. 2011.*Ekonomicko-matematické metody.* Plzeň : Aleš Čeněk, s.r.o., 2011. 978-80-7380-345-2.

Clay mathematics Institute, 2012(online). Citováno 12. 2. 2017, www.claymath.org, 2012 <http://www.claymath.org/millennium-problems/rules-millennium-prizes>.

Český statistický úřad, 2017(online), Citováno 16.3.2017, dostupné na <https://www.czso.cz>.

Gurobi Optimizer (online). Dostupné na <http://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer>.

7 Přílohy

1. Účelová funkce – Trasa 1 a 1.1
2. Rovnice s dobou čekání – Trasa 1 a 1.1
3. Účelová funkce – Trasa 2 a 2.2
4. Rovnice s dobou čekání – Trasa 2 a 2.2
5. Účelová funkce – Trasa 3 a 3.3
6. Rovnice s dobou čekání – Trasa 3 a 3.3
7. Účelová funkce – Trasa 4 a 4.4
8. Rovnice s dobou čekání – Trasa 4 a 4.4
9. Účelová funkce – Trasa 5 a 5.5
10. Rovnice s dobou čekání – Trasa 5 a 5.5
11. Vstupní model Trasy 1
12. Výstupní model Trasy 1 s výsledky

1. Účelová funkce – Trasa 1 a 1.1

$$\begin{aligned} &10000000 x_{11} + 259 x_{12} + 340 x_{13} + 290 x_{14} + 258 x_{15} + 527 x_{16} + 401 x_{17} + 252 x_{18} + 226 x_{19} + \\ &293 x_{21} + 10000000 x_{22} + 170 x_{23} + 84 x_{24} + 238 x_{25} + 468 x_{26} + 231 x_{27} + 241 x_{28} + 170 x_{29} + \\ &217 x_{31} + 164 x_{32} + 10000000 x_{33} + 187 x_{34} + 162 x_{35} + 392 x_{36} + 61 x_{37} + 165 x_{38} + 187 x_{39} + \\ &345 x_{41} + 105 x_{42} + 222 x_{43} + 10000000 x_{44} + 290 x_{45} + 520 x_{46} + 283 x_{47} + 293 x_{48} + 226 x_{49} + \\ &55 x_{51} + 229 x_{52} + 179 x_{53} + 252 x_{54} + 10000000 x_{55} + 432 x_{56} + 240 x_{57} + 4 x_{58} + 249 x_{59} + 574 \\ &x_{61} + 557 x_{62} + 507 x_{63} + 580 x_{64} + 519 x_{65} + 10000000 x_{66} + 568 x_{67} + 523 x_{68} + 578 x_{69} + 277 \\ &x_{71} + 224 x_{72} + 60 x_{73} + 247 x_{74} + 222 x_{75} + 452 x_{76} + 10000000 x_{77} + 225 x_{78} + 247 x_{79} + 51 x_{81} \\ &+ 234 x_{82} + 184 x_{83} + 257 x_{84} + 5 x_{85} + 437 x_{86} + 245 x_{87} + 10000000 x_{88} + 244 x_{89} + 239 x_{91} + \\ &180 x_{92} + 114 x_{93} + 203 x_{94} + 184 x_{95} + 414 x_{96} + 175 x_{97} + 187 x_{98} + 10000000 x_{99} + W_1 + W_2 + \\ &W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9 \end{aligned}$$

2. Rovnice s dobou čekání – Trasa 1 a 11

$$\begin{aligned}a_1+W_1+45+259-10000000*(1-x_{12})+v_{12}&=a_2 \\a_1+W_1+45+340-10000000*(1-x_{13})+v_{13}&=a_3 \\a_1+W_1+45+290-10000000*(1-x_{14})+v_{14}&=a_4 \\a_1+W_1+45+258-10000000*(1-x_{15})+v_{15}&=a_5 \\a_1+W_1+45+527-10000000*(1-x_{16})+v_{16}&=a_6 \\a_1+W_1+45+401-10000000*(1-x_{17})+v_{17}&=a_7 \\a_1+W_1+45+252-10000000*(1-x_{18})+v_{18}&=a_8 \\a_1+W_1+45+226-10000000*(1-x_{19})+v_{19}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2+W_2+15+170-10000000*(1-x_{23})+v_{23}&=a_3 \\a_2+W_2+15+84-10000000*(1-x_{24})+v_{24}&=a_4 \\a_2+W_2+15+238-10000000*(1-x_{25})+v_{25}&=a_5 \\a_2+W_2+15+468-10000000*(1-x_{26})+v_{26}&=a_6 \\a_2+W_2+15+231-10000000*(1-x_{27})+v_{27}&=a_7 \\a_2+W_2+15+241-10000000*(1-x_{28})+v_{28}&=a_8 \\a_2+W_2+15+170-10000000*(1-x_{29})+v_{29}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3+W_3+45+164-10000000*(1-x_{32})+v_{32}&=a_2 \\a_3+W_3+45+187-10000000*(1-x_{34})+v_{34}&=a_4 \\a_3+W_3+45+162-10000000*(1-x_{35})+v_{35}&=a_5 \\a_3+W_3+45+392-10000000*(1-x_{36})+v_{36}&=a_6 \\a_3+W_3+45+61-10000000*(1-x_{37})+v_{37}&=a_7 \\a_3+W_3+45+165-10000000*(1-x_{38})+v_{38}&=a_8 \\a_3+W_3+45+187-10000000*(1-x_{39})+v_{39}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4+W_4+15+105-10000000*(1-x_{42})+v_{42}&=a_2 \\a_4+W_4+15+222-10000000*(1-x_{43})+v_{43}&=a_3 \\a_4+W_4+15+290-10000000*(1-x_{45})+v_{45}&=a_5 \\a_4+W_4+15+520-10000000*(1-x_{46})+v_{46}&=a_6 \\a_4+W_4+15+283-10000000*(1-x_{47})+v_{47}&=a_7 \\a_4+W_4+15+293-10000000*(1-x_{48})+v_{48}&=a_8 \\a_4+W_4+15+226-10000000*(1-x_{49})+v_{49}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5+W_5+5+229-10000000*(1-x_{52})+v_{52}&=a_2 \\a_5+W_5+5+179-10000000*(1-x_{53})+v_{53}&=a_3 \\a_5+W_5+5+252-10000000*(1-x_{54})+v_{54}&=a_4 \\a_5+W_5+5+432-10000000*(1-x_{56})+v_{56}&=a_6 \\a_5+W_5+5+240-10000000*(1-x_{57})+v_{57}&=a_7 \\a_5+W_5+5+4-10000000*(1-x_{58})+v_{58}&=a_8 \\a_5+W_5+5+249-10000000*(1-x_{59})+v_{59}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_6+W_6+45+557-10000000*(1-x_{62})+v_{62}&=a_2 \\a_6+W_6+45+507-10000000*(1-x_{63})+v_{63}&=a_3 \\a_6+W_6+45+580-10000000*(1-x_{64})+v_{64}&=a_4 \\a_6+W_6+45+519-10000000*(1-x_{65})+v_{65}&=a_5 \\a_6+W_6+45+568-10000000*(1-x_{67})+v_{67}&=a_7 \\a_6+W_6+45+523-10000000*(1-x_{68})+v_{68}&=a_8 \\a_6+W_6+45+578-10000000*(1-x_{69})+v_{69}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_7+W_7+15+224-10000000*(1-x_{72})+v_{72}&=a_2 \\a_7+W_7+15+60-10000000*(1-x_{73})+v_{73}&=a_3 \\a_7+W_7+15+247-10000000*(1-x_{74})+v_{74}&=a_4 \\a_7+W_7+15+222-10000000*(1-x_{75})+v_{75}&=a_5 \\a_7+W_7+15+452-10000000*(1-x_{76})+v_{76}&=a_6 \\a_7+W_7+15+225-10000000*(1-x_{78})+v_{78}&=a_8 \\a_7+W_7+15+247-10000000*(1-x_{79})+v_{79}&=a_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_8+W_8+15+234-10000000*(1-x_{82})+v_{82}&=a_2 \\a_8+W_8+15+184-10000000*(1-x_{83})+v_{83}&=a_3 \\a_8+W_8+15+257-10000000*(1-x_{84})+v_{84}&=a_4 \\a_8+W_8+15+5-10000000*(1-x_{85})+v_{85}&=a_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_8 + W_8 + 15 + 437 - 10000000 \cdot (1 - x^{86}) + v^{86} &= a_6 \\ a_8 + W_8 + 15 + 245 - 10000000 \cdot (1 - x^{87}) + v^{87} &= a_7 \\ a_8 + W_8 + 15 + 244 - 10000000 \cdot (1 - x^{89}) + v^{89} &= a_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_9 + W_9 + 15 + 180 - 10000000 \cdot (1 - x^{92}) + v^{92} &= a_2 \\ a_9 + W_9 + 15 + 114 - 10000000 \cdot (1 - x^{93}) + v^{93} &= a_3 \\ a_9 + W_9 + 15 + 203 - 10000000 \cdot (1 - x^{94}) + v^{94} &= a_4 \\ a_9 + W_9 + 15 + 184 - 10000000 \cdot (1 - x^{95}) + v^{95} &= a_5 \\ a_9 + W_9 + 15 + 414 - 10000000 \cdot (1 - x^{96}) + v^{96} &= a_6 \\ a_9 + W_9 + 15 + 175 - 10000000 \cdot (1 - x^{97}) + v^{97} &= a_7 \\ a_9 + W_9 + 15 + 187 - 10000000 \cdot (1 - x^{98}) + v^{98} &= a_8 \end{aligned}$$

3. Účelová funkce – Trasa 2 a 2.2

$$\begin{aligned} &10000000 x_{11} + 251 x_{12} + 292 x_{13} + 288 x_{14} + 86 x_{15} + 125 x_{16} + 290 x_{17} + 83 x_{18} + 273 x_{21} + \\ &10000000 x_{22} + 507 x_{23} + 492 x_{24} + 328 x_{25} + 329 x_{26} + 401 x_{27} + 347 x_{28} + 279 x_{31} + 316 x_{32} + \\ &10000000 x_{33} + 4 x_{34} + 214 x_{35} + 151 x_{36} + 278 x_{37} + 279 x_{38} + 275 x_{41} + 313 x_{42} + 4 x_{43} + \\ &10000000 x_{44} + 210 x_{45} + 147 x_{46} + 274 x_{47} + 275 x_{48} + 98 x_{51} + 194 x_{52} + 235 x_{53} + 231 x_{54} + \\ &10000000 x_{55} + 68 x_{56} + 233 x_{57} + 65 x_{58} + 128 x_{61} + 165 x_{62} + 167 x_{63} + 163 x_{64} + 63 x_{65} + \\ &10000000 x_{66} + 218 x_{67} + 128 x_{68} + 294 x_{71} + 331 x_{72} + 67 x_{73} + 63 x_{74} + 229 x_{75} + 165 x_{76} + \\ &10000000 x_{77} + 294 x_{78} + 84 x_{81} + 258 x_{82} + 300 x_{83} + 296 x_{84} + 65 x_{85} + 133 x_{86} + 298 x_{87} + \\ &10000000 x_{88} + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 \end{aligned}$$

4. Rovnice s dobou čekání – Trasa 2

$$\begin{aligned}a_1+W_1+15+251-10000000*(1-x_{12})+v_{12}&=a_2 \\a_1+W_1+15+292-10000000*(1-x_{13})+v_{13}&=a_3 \\a_1+W_1+15+288-10000000*(1-x_{14})+v_{14}&=a_4 \\a_1+W_1+15+86-10000000*(1-x_{15})+v_{15}&=a_5 \\a_1+W_1+15+125-10000000*(1-x_{16})+v_{16}&=a_6 \\a_1+W_1+15+290-10000000*(1-x_{17})+v_{17}&=a_7 \\a_1+W_1+15+83-10000000*(1-x_{18})+v_{18}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2+W_2+15+507-10000000*(1-x_{23})+v_{23}&=a_3 \\a_2+W_2+15+492-10000000*(1-x_{24})+v_{24}&=a_4 \\a_2+W_2+15+328-10000000*(1-x_{25})+v_{25}&=a_5 \\a_2+W_2+15+329-10000000*(1-x_{26})+v_{26}&=a_6 \\a_2+W_2+15+401-10000000*(1-x_{27})+v_{27}&=a_7 \\a_2+W_2+15+347-10000000*(1-x_{28})+v_{28}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3+W_3+45+316-10000000*(1-x_{32})+v_{32}&=a_2 \\a_3+W_3+45+4-10000000*(1-x_{34})+v_{34}&=a_4 \\a_3+W_3+45+214-10000000*(1-x_{35})+v_{35}&=a_5 \\a_3+W_3+45+151-10000000*(1-x_{36})+v_{36}&=a_6 \\a_3+W_3+45+278-10000000*(1-x_{37})+v_{37}&=a_7 \\a_3+W_3+45+279-10000000*(1-x_{38})+v_{38}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4+W_4+45+313-10000000*(1-x_{42})+v_{42}&=a_2 \\a_4+W_4+45+4-10000000*(1-x_{43})+v_{43}&=a_3 \\a_4+W_4+45+210-10000000*(1-x_{45})+v_{45}&=a_5 \\a_4+W_4+45+147-10000000*(1-x_{46})+v_{46}&=a_6 \\a_4+W_4+45+274-10000000*(1-x_{47})+v_{47}&=a_7 \\a_4+W_4+45+275-10000000*(1-x_{48})+v_{48}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5+W_5+15+194-10000000*(1-x_{52})+v_{52}&=a_2 \\a_5+W_5+15+235-10000000*(1-x_{53})+v_{53}&=a_3 \\a_5+W_5+15+231-10000000*(1-x_{54})+v_{54}&=a_4 \\a_5+W_5+15+68-10000000*(1-x_{56})+v_{56}&=a_6 \\a_5+W_5+15+233-10000000*(1-x_{57})+v_{57}&=a_7 \\a_5+W_5+15+65-10000000*(1-x_{58})+v_{58}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_6+W_6+15+165-10000000*(1-x_{62})+v_{62}&=a_2 \\a_6+W_6+15+167-10000000*(1-x_{63})+v_{63}&=a_3 \\a_6+W_6+15+163-10000000*(1-x_{64})+v_{64}&=a_4 \\a_6+W_6+15+63-10000000*(1-x_{65})+v_{65}&=a_5 \\a_6+W_6+15+218-10000000*(1-x_{67})+v_{67}&=a_7 \\a_6+W_6+15+128-10000000*(1-x_{68})+v_{68}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_7+W_7+5+331-10000000*(1-x_{72})+v_{72}&=a_2 \\a_7+W_7+5+67-10000000*(1-x_{73})+v_{73}&=a_3 \\a_7+W_7+5+63-10000000*(1-x_{74})+v_{74}&=a_4 \\a_7+W_7+5+229-10000000*(1-x_{75})+v_{75}&=a_5 \\a_7+W_7+5+165-10000000*(1-x_{76})+v_{76}&=a_6 \\a_7+W_7+5+294-10000000*(1-x_{78})+v_{78}&=a_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_8+W_8+5+258-10000000*(1-x_{82})+v_{82}&=a_2 \\a_8+W_8+5+300-10000000*(1-x_{83})+v_{83}&=a_3 \\a_8+W_8+5+296-10000000*(1-x_{84})+v_{84}&=a_4 \\a_8+W_8+5+65-10000000*(1-x_{85})+v_{85}&=a_5 \\a_8+W_8+5+133-10000000*(1-x_{86})+v_{86}&=a_6 \\a_8+W_8+5+298-10000000*(1-x_{87})+v_{87}&=a_7\end{aligned}$$

5. Účelová funkce – Trasa 3 a 3.3

$$\begin{aligned} &10000000 x_{11} + 168 x_{12} + 100 x_{13} + 231 x_{14} + 169 x_{15} + 284 x_{16} + 232 x_{17} + 204 x_{18} + 242 x_{19} \\ &+ 15 x_{110} + 303 x_{111} + 81 x_{112} + 152 x_{21} + 10000000 x_{22} + 216 x_{23} + 299 x_{24} + 73 x_{25} + 339 \\ &x_{26} + 300 x_{27} + 259 x_{28} + 146 x_{29} + 167 x_{210} + 371 x_{211} + 84 x_{212} + 97 x_{31} + 226 x_{32} + \\ &10000000 x_{33} + 279 x_{34} + 227 x_{35} + 342 x_{36} + 290 x_{37} + 262 x_{38} + 300 x_{39} + 112 x_{310} + 351 \\ &x_{311} + 139 x_{312} + 261 x_{41} + 393 x_{42} + 267 x_{43} + 10000000 x_{44} + 395 x_{45} + 350 x_{46} + 354 x_{47} + \\ &387 x_{48} + 468 x_{49} + 248 x_{410} + 72 x_{411} + 307 x_{412} + 144 x_{51} + 62 x_{52} + 208 x_{53} + 291 x_{54} + \\ &10000000 x_{55} + 331 x_{56} + 295 x_{57} + 251 x_{58} + 73 x_{59} + 159 x_{510} + 363 x_{511} + 75 x_{512} + 230 x_{61} \\ &+ 334 x_{62} + 237 x_{63} + 215 x_{64} + 336 x_{65} + 10000000 x_{66} + 295 x_{67} + 273 x_{68} + 409 x_{69} + 218 \\ &x_{610} + 287 x_{611} + 248 x_{612} + 198 x_{71} + 273 x_{72} + 262 x_{73} + 242 x_{74} + 275 x_{75} + 392 x_{76} + \\ &10000000 x_{77} + 312 x_{78} + 348 x_{79} + 213 x_{710} + 314 x_{711} + 187 x_{712} + 205 x_{81} + 296 x_{82} + 269 \\ &x_{83} + 271 x_{84} + 298 x_{85} + 297 x_{86} + 351 x_{87} + 10000000 x_{88} + 371 x_{89} + 220 x_{810} + 343 x_{811} \\ &+ 210 x_{812} + 213 x_{91} + 132 x_{92} + 277 x_{93} + 360 x_{94} + 69 x_{95} + 400 x_{96} + 270 x_{97} + 320 x_{98} + \\ &10000000 x_{99} + 228 x_{910} + 432 x_{911} + 145 x_{912} + 13 x_{10_1} + 181 x_{10_2} + 113 x_{10_3} + 244 x_{10_4} \\ &+ 182 x_{10_5} + 297 x_{10_6} + 245 x_{10_7} + 217 x_{10_8} + 255 x_{10_9} + 10000000 x_{10_10} + 316 x_{10_11} + \\ &94 x_{10_12} + 188 x_{11_1} + 320 x_{11_2} + 194 x_{11_3} + 201 x_{11_4} + 322 x_{11_5} + 277 x_{11_6} + 281 x_{11_7} \\ &+ 314 x_{11_8} + 395 x_{11_9} + 175 x_{11_10} + 10000000 x_{11_11} + 234 x_{11_12} + 68 x_{12_1} + 86 x_{12_2} + \\ &132 x_{12_3} + 215 x_{12_4} + 88 x_{12_5} + 255 x_{12_6} + 216 x_{12_7} + 175 x_{12_8} + 161 x_{12_9} + 83 x_{12_10} \\ &+ 287 x_{12_11} + 10000000 x_{12_12} + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9 + \\ &W_{10} + W_{11} + W_{12} \end{aligned}$$

6. Rovnice s dobou čekání – Trasa 3 a 3.3"

$$\begin{aligned} a1+W1+45+168-10000000*(1-x12)+v12=a2 \\ a1+W1+45+100-10000000*(1-x13)+v13=a3 \\ a1+W1+45+231-10000000*(1-x14)+v14=a4 \\ a1+W1+45+169-10000000*(1-x15)+v15=a5 \\ a1+W1+45+284-10000000*(1-x16)+v16=a6 \\ a1+W1+45+232-10000000*(1-x17)+v17=a7 \\ a1+W1+45+204-10000000*(1-x18)+v18=a8 \\ a1+W1+45+242-10000000*(1-x19)+v19=a9 \\ a1+W1+45+15-10000000*(1-x110)+v110=a10 \\ a1+W1+45+303-10000000*(1-x111)+v111=a11 \\ a1+W1+45+81-10000000*(1-x112)+v112=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a2+W2+45+216-10000000*(1-x23)+v23=a3 \\ a2+W2+45+299-10000000*(1-x24)+v24=a4 \\ a2+W2+45+73-10000000*(1-x25)+v25=a5 \\ a2+W2+45+339-10000000*(1-x26)+v26=a6 \\ a2+W2+45+300-10000000*(1-x27)+v27=a7 \\ a2+W2+45+259-10000000*(1-x28)+v28=a8 \\ a2+W2+45+146-10000000*(1-x29)+v29=a9 \\ a2+W2+45+167-10000000*(1-x210)+v210=a10 \\ a2+W2+45+371-10000000*(1-x211)+v211=a11 \\ a2+W2+45+84-10000000*(1-x212)+v212=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a3+W3+5+226-10000000*(1-x32)+v32=a2 \\ a3+W3+5+279-10000000*(1-x34)+v34=a4 \\ a3+W3+5+227-10000000*(1-x35)+v35=a5 \\ a3+W3+5+342-10000000*(1-x36)+v36=a6 \\ a3+W3+5+290-10000000*(1-x37)+v37=a7 \\ a3+W3+5+262-10000000*(1-x38)+v38=a8 \\ a3+W3+5+300-10000000*(1-x39)+v39=a9 \\ a3+W3+5+112-10000000*(1-x310)+v310=a10 \\ a3+W3+5+351-10000000*(1-x311)+v311=a11 \\ a3+W3+5+139-10000000*(1-x312)+v312=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a4+W4+5+393-10000000*(1-x42)+v42=a2 \\ a4+W4+5+267-10000000*(1-x43)+v43=a3 \\ a4+W4+5+395-10000000*(1-x45)+v45=a5 \\ a4+W4+5+350-10000000*(1-x46)+v46=a6 \\ a4+W4+5+354-10000000*(1-x47)+v47=a7 \\ a4+W4+5+387-10000000*(1-x48)+v48=a8 \\ a4+W4+5+468-10000000*(1-x49)+v49=a9 \\ a4+W4+5+248-10000000*(1-x410)+v410=a10 \\ a4+W4+5+72-10000000*(1-x411)+v411=a11 \\ a4+W4+5+307-10000000*(1-x412)+v412=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a5+W5+5+62-10000000*(1-x52)+v52=a2 \\ a5+W5+5+208-10000000*(1-x53)+v53=a3 \\ a5+W5+5+291-10000000*(1-x54)+v54=a4 \\ a5+W5+5+331-10000000*(1-x56)+v56=a6 \\ a5+W5+5+295-10000000*(1-x57)+v57=a7 \\ a5+W5+5+251-10000000*(1-x58)+v58=a8 \\ a5+W5+5+73-10000000*(1-x59)+v59=a9 \\ a5+W5+5+159-10000000*(1-x510)+v510=a10 \\ a5+W5+5+363-10000000*(1-x511)+v511=a11 \\ a5+W5+5+75-10000000*(1-x512)+v512=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a6+W6+5+334-10000000*(1-x62)+v62=a2 \\ a6+W6+5+237-10000000*(1-x63)+v63=a3 \\ a6+W6+5+215-10000000*(1-x64)+v64=a4 \\ a6+W6+5+336-10000000*(1-x65)+v65=a5 \\ a6+W6+5+295-10000000*(1-x67)+v67=a7 \\ a6+W6+5+273-10000000*(1-x68)+v68=a8 \\ a6+W6+5+409-10000000*(1-x69)+v69=a9 \\ a6+W6+5+218-10000000*(1-x610)+v610=a10 \\ a6+W6+5+287-10000000*(1-x611)+v611=a11 \\ a6+W6+5+248-10000000*(1-x612)+v612=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a7+W7+5+273-10000000*(1-x72)+v72=a2 \\ a7+W7+5+262-10000000*(1-x73)+v73=a3 \\ a7+W7+5+242-10000000*(1-x74)+v74=a4 \\ a7+W7+5+275-10000000*(1-x75)+v75=a5 \\ a7+W7+5+392-10000000*(1-x76)+v76=a6 \\ a7+W7+5+312-10000000*(1-x78)+v78=a8 \\ a7+W7+5+348-10000000*(1-x79)+v79=a9 \\ a7+W7+5+213-10000000*(1-x710)+v710=a10 \\ a7+W7+5+314-10000000*(1-x711)+v711=a11 \\ a7+W7+5+187-10000000*(1-x712)+v712=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a8+W8+15+296-10000000*(1-x82)+v82=a2 \\ a8+W8+15+269-10000000*(1-x83)+v83=a3 \\ a8+W8+15+271-10000000*(1-x84)+v84=a4 \\ a8+W8+15+298-10000000*(1-x85)+v85=a5 \\ a8+W8+15+297-10000000*(1-x86)+v86=a6 \\ a8+W8+15+351-10000000*(1-x87)+v87=a7 \\ a8+W8+15+371-10000000*(1-x89)+v89=a9 \\ a8+W8+15+220-10000000*(1-x810)+v810=a10 \\ a8+W8+15+343-10000000*(1-x811)+v811=a11 \\ a8+W8+15+210-10000000*(1-x812)+v812=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a9+W9+5+132-10000000*(1-x92)+v92=a2 \\ a9+W9+5+277-10000000*(1-x93)+v93=a3 \\ a9+W9+5+360-10000000*(1-x94)+v94=a4 \\ a9+W9+5+69-10000000*(1-x95)+v95=a5 \\ a9+W9+5+400-10000000*(1-x96)+v96=a6 \\ a9+W9+5+270-10000000*(1-x97)+v97=a7 \\ a9+W9+5+320-10000000*(1-x98)+v98=a8 \\ a9+W9+5+228-10000000*(1-x910)+v910=a10 \\ a9+W9+5+432-10000000*(1-x911)+v911=a11 \\ a9+W9+5+145-10000000*(1-x912)+v912=a12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a10+W10+5+181-10000000*(1-x10_2)+v10_2=a2 \\ a10+W10+5+113-10000000*(1-x10_3)+v10_3=a3 \\ a10+W10+5+244-10000000*(1-x10_4)+v10_4=a4 \\ a10+W10+5+182-10000000*(1-x10_5)+v10_5=a5 \\ a10+W10+5+297-10000000*(1-x10_6)+v10_6=a6 \\ a10+W10+5+245-10000000*(1-x10_7)+v10_7=a7 \\ a10+W10+5+217-10000000*(1-x10_8)+v10_8=a8 \\ a10+W10+5+255-10000000*(1-x10_9)+v10_9=a9 \\ a10+W10+5+316-10000000*(1-x10_11)+v10_11=a11 \\ a10+W10+5+94-10000000*(1-x10_12)+v10_12=a12 \end{aligned}$$

a11+W11+5+320-10000000*(1-x11_2)+v11_2=a2
a11+W11+5+194-10000000*(1-x11_3)+v11_3=a3
a11+W11+5+201-10000000*(1-x11_4)+v11_4=a4
a11+W11+5+322-10000000*(1-x11_5)+v11_5=a5
a11+W11+5+277-10000000*(1-x11_6)+v11_6=a6
a11+W11+5+281-10000000*(1-x11_7)+v11_7=a7
a11+W11+5+314-10000000*(1-x11_8)+v11_8=a8
a11+W11+5+395-10000000*(1-x11_9)+v11_9=a9
a11+W11+5+175-10000000*(1-x11_10)+v11_10=a10
a11+W11+5+234-10000000*(1-x11_12)+v11_12=a12

a12+W12+15+86-10000000*(1-x12_2)+v12_2=a2
a12+W12+15+132-10000000*(1-x12_3)+v12_3=a3
a12+W12+15+215-10000000*(1-x12_4)+v12_4=a4
a12+W12+15+88-10000000*(1-x12_5)+v12_5=a5
a12+W12+15+255-10000000*(1-x12_6)+v12_6=a6
a12+W12+15+216-10000000*(1-x12_7)+v12_7=a7
a12+W12+15+175-10000000*(1-x12_8)+v12_8=a8
a12+W12+15+161-10000000*(1-x12_9)+v12_9=a9
a12+W12+15+83-10000000*(1-x12_10)+v12_10=a10
a12+W12+15+287-10000000*(1-x12_11)+v12_11=a11

7. Účelová funkce – Trasa 4 a 4.4

$$\begin{aligned} &10000000 x_{11} + 151 x_{12} + 22 x_{13} + 269 x_{14} + 237 x_{15} + 190 x_{16} + 220 x_{17} + 281 x_{18} + 238 x_{19} \\ &+ 188 x_{110} + 231 x_{111} + 214 x_{21} + 10000000 x_{22} + 190 x_{23} + 277 x_{24} + 244 x_{25} + 264 x_{26} + 191 \\ &x_{27} + 147 x_{28} + 355 x_{29} + 132 x_{210} + 238 x_{211} + 24 x_{31} + 128 x_{32} + 10000000 x_{33} + 247 x_{34} + \\ &214 x_{35} + 167 x_{36} + 197 x_{37} + 258 x_{38} + 215 x_{39} + 165 x_{310} + 208 x_{311} + 299 x_{41} + 218 x_{42} + \\ &259 x_{43} + 10000000 x_{44} + 225 x_{45} + 201 x_{46} + 180 x_{47} + 364 x_{48} + 340 x_{49} + 271 x_{410} + 235 \\ &x_{411} + 245 x_{51} + 283 x_{52} + 220 x_{53} + 338 x_{54} + 10000000 x_{55} + 19 x_{56} + 290 x_{57} + 413 x_{58} + \\ &383 x_{59} + 320 x_{510} + 299 x_{511} + 225 x_{61} + 263 x_{62} + 200 x_{63} + 318 x_{64} + 285 x_{65} + 10000000 \\ &x_{66} + 240 x_{67} + 395 x_{68} + 363 x_{69} + 300 x_{610} + 279 x_{611} + 162 x_{71} + 97 x_{72} + 151 x_{73} + 181 \\ &x_{74} + 149 x_{75} + 169 x_{76} + 10000000 x_{77} + 227 x_{78} + 303 x_{79} + 134 x_{710} + 143 x_{711} + 156 x_{81} + \\ &218 x_{82} + 178 x_{83} + 406 x_{84} + 374 x_{85} + 346 x_{86} + 308 x_{87} + 10000000 x_{88} + 394 x_{89} + 169 x_{810} \\ &+ 368 x_{811} + 249 x_{91} + 242 x_{92} + 225 x_{93} + 281 x_{94} + 249 x_{95} + 254 x_{96} + 204 x_{97} + 372 x_{98} + \\ &10000000 x_{99} + 279 x_{910} + 243 x_{911} + 174 x_{10_1} + 78 x_{10_2} + 150 x_{10_3} + 236 x_{10_4} + 204 x_{10_5} \\ &+ 223 x_{10_6} + 138 x_{10_7} + 156 x_{10_8} + 315 x_{10_9} + 10000000 x_{10_10} + 198 x_{10_11} + 251 x_{11_1} + \\ &289 x_{11_2} + 226 x_{11_3} + 343 x_{11_4} + 6 x_{11_5} + 26 x_{11_6} + 266 x_{11_7} + 419 x_{11_8} + 389 x_{11_9} + \\ &326 x_{11_10} + 10000000 x_{11_11} + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9 + \\ &W_{10} + W_{11} \end{aligned}$$

8. Rovnice s dobou čekání – Trasa 4 a 4.4

$a1+W1+5+151-10000000*(1-x12)+v12=a2$
 $a1+W1+5+22-10000000*(1-x13)+v13=a3$
 $a1+W1+5+269-10000000*(1-x14)+v14=a4$
 $a1+W1+5+237-10000000*(1-x15)+v15=a5$
 $a1+W1+5+190-10000000*(1-x16)+v16=a6$
 $a1+W1+5+220-10000000*(1-x17)+v17=a7$
 $a1+W1+5+281-10000000*(1-x18)+v18=a8$
 $a1+W1+5+238-10000000*(1-x19)+v19=a9$
 $a1+W1+5+188-10000000*(1-x110)+v110=a10$
 $a1+W1+5+231-10000000*(1-x111)+v111=a11$

$a2+W2+5+190-10000000*(1-x23)+v23=a3$
 $a2+W2+5+277-10000000*(1-x24)+v24=a4$
 $a2+W2+5+244-10000000*(1-x25)+v25=a5$
 $a2+W2+5+264-10000000*(1-x26)+v26=a6$
 $a2+W2+5+191-10000000*(1-x27)+v27=a7$
 $a2+W2+5+147-10000000*(1-x28)+v28=a8$
 $a2+W2+5+355-10000000*(1-x29)+v29=a9$
 $a2+W2+5+132-10000000*(1-x210)+v210=a10$
 $a2+W2+5+238-10000000*(1-x211)+v211=a11$

$a3+W3+45+128-10000000*(1-x32)+v32=a2$
 $a3+W3+45+247-10000000*(1-x34)+v34=a4$
 $a3+W3+45+214-10000000*(1-x35)+v35=a5$
 $a3+W3+45+167-10000000*(1-x36)+v36=a6$
 $a3+W3+45+197-10000000*(1-x37)+v37=a7$
 $a3+W3+45+258-10000000*(1-x38)+v38=a8$
 $a3+W3+45+215-10000000*(1-x39)+v39=a9$
 $a3+W3+45+165-10000000*(1-x310)+v310=a10$
 $a3+W3+45+208-10000000*(1-x311)+v311=a11$

$a4+W4+15+218-10000000*(1-x42)+v42=a2$
 $a4+W4+15+259-10000000*(1-x43)+v43=a3$
 $a4+W4+15+225-10000000*(1-x45)+v45=a5$
 $a4+W4+15+201-10000000*(1-x46)+v46=a6$
 $a4+W4+15+180-10000000*(1-x47)+v47=a7$
 $a4+W4+15+364-10000000*(1-x48)+v48=a8$
 $a4+W4+15+340-10000000*(1-x49)+v49=a9$
 $a4+W4+15+271-10000000*(1-x410)+v410=a10$
 $a4+W4+15+235-10000000*(1-x411)+v411=a11$

$a5+W5+45+283-10000000*(1-x52)+v52=a2$
 $a5+W5+45+220-10000000*(1-x53)+v53=a3$
 $a5+W5+45+338-10000000*(1-x54)+v54=a4$
 $a5+W5+45+19-10000000*(1-x56)+v56=a6$
 $a5+W5+45+290-10000000*(1-x57)+v57=a7$
 $a5+W5+45+413-10000000*(1-x58)+v58=a8$
 $a5+W5+45+383-10000000*(1-x59)+v59=a9$
 $a5+W5+45+320-10000000*(1-x510)+v510=a10$
 $a5+W5+45+299-10000000*(1-x511)+v511=a11$

$a6+W6+15+263-10000000*(1-x62)+v62=a2$
 $a6+W6+15+200-10000000*(1-x63)+v63=a3$
 $a6+W6+15+318-10000000*(1-x64)+v64=a4$
 $a6+W6+15+285-10000000*(1-x65)+v65=a5$
 $a6+W6+15+240-10000000*(1-x67)+v67=a7$

$a6+W6+15+395-10000000*(1-x68)+v68=a8$
 $a6+W6+15+363-10000000*(1-x69)+v69=a9$
 $a6+W6+15+300-10000000*(1-x610)+v610=a10$
 $a6+W6+15+279-10000000*(1-x611)+v611=a11$

$a7+W7+45+97-10000000*(1-x72)+v72=a2$
 $a7+W7+45+151-10000000*(1-x73)+v73=a3$
 $a7+W7+45+181-10000000*(1-x74)+v74=a4$
 $a7+W7+45+149-10000000*(1-x75)+v75=a5$
 $a7+W7+45+169-10000000*(1-x76)+v76=a6$
 $a7+W7+45+227-10000000*(1-x78)+v78=a8$
 $a7+W7+45+303-10000000*(1-x79)+v79=a9$
 $a7+W7+45+134-10000000*(1-x710)+v710=a10$
 $a7+W7+45+143-10000000*(1-x711)+v711=a11$

$a8+W8+5+218-10000000*(1-x82)+v82=a2$
 $a8+W8+5+178-10000000*(1-x83)+v83=a3$
 $a8+W8+5+406-10000000*(1-x84)+v84=a4$
 $a8+W8+5+374-10000000*(1-x85)+v85=a5$
 $a8+W8+5+346-10000000*(1-x86)+v86=a6$
 $a8+W8+5+308-10000000*(1-x87)+v87=a7$
 $a8+W8+5+394-10000000*(1-x89)+v89=a9$
 $a8+W8+5+169-10000000*(1-x810)+v810=a10$
 $a8+W8+5+368-10000000*(1-x811)+v811=a11$

$a9+W9+5+242-10000000*(1-x92)+v92=a2$
 $a9+W9+5+225-10000000*(1-x93)+v93=a3$
 $a9+W9+5+281-10000000*(1-x94)+v94=a4$
 $a9+W9+5+249-10000000*(1-x95)+v95=a5$
 $a9+W9+5+254-10000000*(1-x96)+v96=a6$
 $a9+W9+5+204-10000000*(1-x97)+v97=a7$
 $a9+W9+5+372-10000000*(1-x98)+v98=a8$
 $a9+W9+5+279-10000000*(1-x910)+v910=a10$
 $a9+W9+5+243-10000000*(1-x911)+v911=a11$

$a10+W10+5+78-10000000*(1-x10_2)+v10_2=a2$
 $a10+W10+5+150-10000000*(1-x10_3)+v10_3=a3$
 $a10+W10+5+236-10000000*(1-x10_4)+v10_4=a4$
 $a10+W10+5+204-10000000*(1-x10_5)+v10_5=a5$
 $a10+W10+5+223-10000000*(1-x10_6)+v10_6=a6$
 $a10+W10+5+138-10000000*(1-x10_7)+v10_7=a7$
 $a10+W10+5+156-10000000*(1-x10_8)+v10_8=a8$
 $a10+W10+5+315-10000000*(1-x10_9)+v10_9=a9$
 $a10+W10+5+198-10000000*(1-x10_11)+v10_11=a11$

$a11+W11+45+289-10000000*(1-x11_2)+v11_2=a2$
 $a11+W11+45+226-10000000*(1-x11_3)+v11_3=a3$
 $a11+W11+45+343-10000000*(1-x11_4)+v11_4=a4$
 $a11+W11+45+6-10000000*(1-x11_5)+v11_5=a5$
 $a11+W11+45+26-10000000*(1-x11_6)+v11_6=a6$
 $a11+W11+45+266-10000000*(1-x11_7)+v11_7=a7$
 $a11+W11+45+419-10000000*(1-x11_8)+v11_8=a8$
 $a11+W11+45+389-10000000*(1-x11_9)+v11_9=a9$
 $a11+W11+45+326-10000000*(1-x11_10)+v11_10=a10$

9. Účelová funkce – Trasa 5 a 5.5

$$\begin{aligned} &10000000 x_{11} + 384 x_{12} + 201 x_{13} + 254 x_{14} + 133 x_{15} + 99 x_{16} + 297 x_{17} + 252 x_{18} + 239 x_{19} \\ &+ 153 x_{110} + 358 x_{111} + 310 x_{112} + 236 x_{113} + 239 x_{114} + 409 x_{21} + 10000000 x_{22} + 229 x_{23} + \\ &235 x_{24} + 450 x_{25} + 417 x_{26} + 241 x_{27} + 233 x_{28} + 204 x_{29} + 317 x_{210} + 168 x_{211} + 282 x_{212} + \\ &237 x_{213} + 204 x_{214} + 181 x_{31} + 386 x_{32} + 10000000 x_{33} + 344 x_{34} + 223 x_{35} + 189 x_{36} + 299 \\ &x_{37} + 342 x_{38} + 241 x_{39} + 90 x_{310} + 358 x_{311} + 312 x_{312} + 238 x_{313} + 241 x_{314} + 422 x_{41} + \\ &297 x_{42} + 242 x_{43} + 10000000 x_{44} + 463 x_{45} + 430 x_{46} + 319 x_{47} + 163 x_{48} + 254 x_{49} + 330 x_{410} \\ &+ 270 x_{411} + 332 x_{412} + 250 x_{413} + 254 x_{414} + 378 x_{51} + 253 x_{52} + 198 x_{53} + 121 x_{54} + \\ &10000000 x_{55} + 386 x_{56} + 275 x_{57} + 119 x_{58} + 210 x_{59} + 286 x_{510} + 224 x_{511} + 288 x_{512} + 206 \\ &x_{513} + 210 x_{514} + 412 x_{61} + 287 x_{62} + 232 x_{63} + 155 x_{64} + 34 x_{65} + 10000000 x_{66} + 309 x_{67} + \\ &153 x_{68} + 244 x_{69} + 320 x_{610} + 260 x_{611} + 322 x_{612} + 240 x_{613} + 244 x_{614} + 328 x_{71} + 246 x_{72} \\ &+ 148 x_{73} + 248 x_{74} + 370 x_{75} + 336 x_{76} + 10000000 x_{77} + 246 x_{78} + 144 x_{79} + 236 x_{710} + 261 \\ &x_{711} + 41 x_{712} + 140 x_{713} + 144 x_{714} + 137 x_{81} + 407 x_{82} + 242 x_{83} + 274 x_{84} + 154 x_{85} + \\ &120 x_{86} + 338 x_{87} + 10000000 x_{88} + 280 x_{89} + 193 x_{810} + 378 x_{811} + 351 x_{812} + 277 x_{813} + 280 \\ &x_{814} + 268 x_{91} + 198 x_{92} + 88 x_{93} + 198 x_{94} + 310 x_{95} + 276 x_{96} + 163 x_{97} + 196 x_{98} + \\ &10000000 x_{99} + 177 x_{910} + 209 x_{911} + 176 x_{912} + 40 x_{913} + 0 x_{914} + 141 x_{10_1} + 296 x_{10_2} + \\ &113 x_{10_3} + 257 x_{10_4} + 183 x_{10_5} + 149 x_{10_6} + 209 x_{10_7} + 255 x_{10_8} + 151 x_{10_9} + 10000000 \\ &x_{10_10} + 268 x_{10_11} + 222 x_{10_12} + 148 x_{10_13} + 151 x_{10_14} + 505 x_{11_1} + 212 x_{11_2} + 336 \\ &x_{11_3} + 331 x_{11_4} + 557 x_{11_5} + 513 x_{11_6} + 328 x_{11_7} + 340 x_{11_8} + 279 x_{11_9} + 424 x_{11_10} + \\ &10000000 x_{11_11} + 369 x_{11_12} + 323 x_{11_13} + 267 x_{11_14} + 408 x_{12_1} + 213 x_{12_2} + 228 x_{12_3} + \\ &328 x_{12_4} + 450 x_{12_5} + 416 x_{12_6} + 187 x_{12_7} + 326 x_{12_8} + 224 x_{12_9} + 316 x_{12_10} + 260 \\ &x_{12_11} + 10000000 x_{12_12} + 220 x_{12_13} + 224 x_{12_14} + 257 x_{13_1} + 227 x_{13_2} + 77 x_{13_3} + 187 \\ &x_{13_4} + 299 x_{13_5} + 265 x_{13_6} + 152 x_{13_7} + 185 x_{13_8} + 43 x_{13_9} + 166 x_{13_10} + 198 x_{13_11} + \\ &165 x_{13_12} + 10000000 x_{13_13} + 36 x_{13_14} + 268 x_{14_1} + 198 x_{14_2} + 88 x_{14_3} + 198 x_{14_4} + 310 \\ &x_{14_5} + 276 x_{14_6} + 163 x_{14_7} + 196 x_{14_8} + 1 x_{14_9} + 177 x_{14_10} + 216 x_{14_11} + 176 x_{14_12} + \\ &40 x_{14_13} + 10000000 x_{14_14} + W1 + W2 + W3 + W4 + W5 + W6 + W7 + W8 + W9 + \\ &W10 + W11 + W12 + W13 + W14 \end{aligned}$$

10. Rovnice s dobou čekání – Trasa 5 a 5.5

$$\begin{aligned} a1+W1+45+384-10000000*(1-x12)+v12=a2 \\ a1+W1+45+201-10000000*(1-x13)+v13=a3 \\ a1+W1+45+254-10000000*(1-x14)+v14=a4 \\ a1+W1+45+133-10000000*(1-x15)+v15=a5 \\ a1+W1+45+99-10000000*(1-x16)+v16=a6 \\ a1+W1+45+297-10000000*(1-x17)+v17=a7 \\ a1+W1+45+252-10000000*(1-x18)+v18=a8 \\ a1+W1+45+239-10000000*(1-x19)+v19=a9 \\ a1+W1+45+153-10000000*(1-x110)+v110=a10 \\ a1+W1+45+358-10000000*(1-x111)+v111=a11 \\ a1+W1+45+310-10000000*(1-x112)+v112=a12 \\ a1+W1+45+236-10000000*(1-x113)+v113=a13 \\ a1+W1+45+239-10000000*(1-x114)+v114=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a2+W2+5+229-10000000*(1-x23)+v23=a3 \\ a2+W2+5+235-10000000*(1-x24)+v24=a4 \\ a2+W2+5+450-10000000*(1-x25)+v25=a5 \\ a2+W2+5+417-10000000*(1-x26)+v26=a6 \\ a2+W2+5+241-10000000*(1-x27)+v27=a7 \\ a2+W2+5+233-10000000*(1-x28)+v28=a8 \\ a2+W2+5+204-10000000*(1-x29)+v29=a9 \\ a2+W2+5+317-10000000*(1-x210)+v210=a10 \\ a2+W2+5+168-10000000*(1-x211)+v211=a11 \\ a2+W2+5+282-10000000*(1-x212)+v212=a12 \\ a2+W2+5+237-10000000*(1-x213)+v213=a13 \\ a2+W2+5+204-10000000*(1-x214)+v214=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a3+W3+5+386-10000000*(1-x32)+v32=a2 \\ a3+W3+5+344-10000000*(1-x34)+v34=a4 \\ a3+W3+5+223-10000000*(1-x35)+v35=a5 \\ a3+W3+5+189-10000000*(1-x36)+v36=a6 \\ a3+W3+5+299-10000000*(1-x37)+v37=a7 \\ a3+W3+5+342-10000000*(1-x38)+v38=a8 \\ a3+W3+5+241-10000000*(1-x39)+v39=a9 \\ a3+W3+5+90-10000000*(1-x310)+v310=a10 \\ a3+W3+5+358-10000000*(1-x311)+v311=a11 \\ a3+W3+5+312-10000000*(1-x312)+v312=a12 \\ a3+W3+5+238-10000000*(1-x313)+v313=a13 \\ a3+W3+5+241-10000000*(1-x314)+v314=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a4+W4+15+297-10000000*(1-x42)+v42=a2 \\ a4+W4+15+242-10000000*(1-x43)+v43=a3 \\ a4+W4+15+463-10000000*(1-x45)+v45=a5 \\ a4+W4+15+430-10000000*(1-x46)+v46=a6 \\ a4+W4+15+319-10000000*(1-x47)+v47=a7 \\ a4+W4+15+163-10000000*(1-x48)+v48=a8 \\ a4+W4+15+254-10000000*(1-x49)+v49=a9 \\ a4+W4+15+330-10000000*(1-x410)+v410=a10 \\ a4+W4+15+270-10000000*(1-x411)+v411=a11 \\ a4+W4+15+332-10000000*(1-x412)+v412=a12 \\ a4+W4+15+250-10000000*(1-x413)+v413=a13 \\ a4+W4+15+254-10000000*(1-x414)+v414=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a5+W5+5+253-10000000*(1-x52)+v52=a2 \\ a5+W5+5+198-10000000*(1-x53)+v53=a3 \\ a5+W5+5+121-10000000*(1-x54)+v54=a4 \\ a5+W5+5+386-10000000*(1-x56)+v56=a6 \\ a5+W5+5+275-10000000*(1-x57)+v57=a7 \\ a5+W5+5+119-10000000*(1-x58)+v58=a8 \\ a5+W5+5+210-10000000*(1-x59)+v59=a9 \\ a5+W5+5+286-10000000*(1-x510)+v510=a10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a5+W5+5+224-10000000*(1-x511)+v511=a11 \\ a5+W5+5+288-10000000*(1-x512)+v512=a12 \\ a5+W5+5+206-10000000*(1-x513)+v513=a13 \\ a5+W5+5+210-10000000*(1-x514)+v514=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a6+W6+15+287-10000000*(1-x62)+v62=a2 \\ a6+W6+15+232-10000000*(1-x63)+v63=a3 \\ a6+W6+15+155-10000000*(1-x64)+v64=a4 \\ a6+W6+15+34-10000000*(1-x65)+v65=a5 \\ a6+W6+15+309-10000000*(1-x67)+v67=a7 \\ a6+W6+15+153-10000000*(1-x68)+v68=a8 \\ a6+W6+15+244-10000000*(1-x69)+v69=a9 \\ a6+W6+15+320-10000000*(1-x610)+v610=a10 \\ a6+W6+15+260-10000000*(1-x611)+v611=a11 \\ a6+W6+15+322-10000000*(1-x612)+v612=a12 \\ a6+W6+15+240-10000000*(1-x613)+v613=a13 \\ a6+W6+15+244-10000000*(1-x614)+v614=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a7+W7+45+246-10000000*(1-x72)+v72=a2 \\ a7+W7+45+148-10000000*(1-x73)+v73=a3 \\ a7+W7+45+248-10000000*(1-x74)+v74=a4 \\ a7+W7+45+370-10000000*(1-x75)+v75=a5 \\ a7+W7+45+336-10000000*(1-x76)+v76=a6 \\ a7+W7+45+246-10000000*(1-x78)+v78=a8 \\ a7+W7+45+144-10000000*(1-x79)+v79=a9 \\ a7+W7+45+236-10000000*(1-x710)+v710=a10 \\ a7+W7+45+261-10000000*(1-x711)+v711=a11 \\ a7+W7+45+41-10000000*(1-x712)+v712=a12 \\ a7+W7+45+140-10000000*(1-x713)+v713=a13 \\ a7+W7+45+144-10000000*(1-x714)+v714=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a8+W8+5+407-10000000*(1-x82)+v82=a2 \\ a8+W8+5+242-10000000*(1-x83)+v83=a3 \\ a8+W8+5+274-10000000*(1-x84)+v84=a4 \\ a8+W8+5+154-10000000*(1-x85)+v85=a5 \\ a8+W8+5+120-10000000*(1-x86)+v86=a6 \\ a8+W8+5+338-10000000*(1-x87)+v87=a7 \\ a8+W8+5+280-10000000*(1-x89)+v89=a9 \\ a8+W8+5+193-10000000*(1-x810)+v810=a10 \\ a8+W8+5+378-10000000*(1-x811)+v811=a11 \\ a8+W8+5+351-10000000*(1-x812)+v812=a12 \\ a8+W8+5+277-10000000*(1-x813)+v813=a13 \\ a8+W8+5+280-10000000*(1-x814)+v814=a14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a9+W9+45+198-10000000*(1-x92)+v92=a2 \\ a9+W9+45+88-10000000*(1-x93)+v93=a3 \\ a9+W9+45+198-10000000*(1-x94)+v94=a4 \\ a9+W9+45+310-10000000*(1-x95)+v95=a5 \\ a9+W9+45+276-10000000*(1-x96)+v96=a6 \\ a9+W9+45+163-10000000*(1-x97)+v97=a7 \\ a9+W9+45+196-10000000*(1-x98)+v98=a8 \\ a9+W9+45+177-10000000*(1-x910)+v910=a10 \\ a9+W9+45+209-10000000*(1-x911)+v911=a11 \\ a9+W9+45+176-10000000*(1-x912)+v912=a12 \\ a9+W9+45+40-10000000*(1-x913)+v913=a13 \\ a9+W9+45+0-10000000*(1-x914)+v914=a14 \end{aligned}$$

a10+W10+15+296-10000000*(1-x10_2)+v10_2=a2
a10+W10+15+113-10000000*(1-x10_3)+v10_3=a3
a10+W10+15+257-10000000*(1-x10_4)+v10_4=a4
a10+W10+15+183-10000000*(1-x10_5)+v10_5=a5
a10+W10+15+149-10000000*(1-x10_6)+v10_6=a6
a10+W10+15+209-10000000*(1-x10_7)+v10_7=a7
a10+W10+15+255-10000000*(1-x10_8)+v10_8=a8
a10+W10+15+151-10000000*(1-x10_9)+v10_9=a9
a10+W10+15+268-10000000*(1-x10_11)+v10_11=a11
a10+W10+15+222-10000000*(1-x10_12)+v10_12=a12
a10+W10+15+148-10000000*(1-x10_13)+v10_13=a13
a10+W10+15+151-10000000*(1-x10_14)+v10_14=a14

a11+W11+15+212-10000000*(1-x11_2)+v11_2=a2
a11+W11+15+336-10000000*(1-x11_3)+v11_3=a3
a11+W11+15+331-10000000*(1-x11_4)+v11_4=a4
a11+W11+15+557-10000000*(1-x11_5)+v11_5=a5
a11+W11+15+513-10000000*(1-x11_6)+v11_6=a6
a11+W11+15+328-10000000*(1-x11_7)+v11_7=a7
a11+W11+15+340-10000000*(1-x11_8)+v11_8=a8
a11+W11+15+279-10000000*(1-x11_9)+v11_9=a9
a11+W11+15+424-10000000*(1-x11_10)+v11_10=a10
a11+W11+15+369-10000000*(1-x11_12)+v11_12=a12
a11+W11+15+323-10000000*(1-x11_13)+v11_13=a13
a11+W11+15+267-10000000*(1-x11_14)+v11_14=a14

a12+W12+5+213-10000000*(1-x12_2)+v12_2=a2
a12+W12+5+228-10000000*(1-x12_3)+v12_3=a3
a12+W12+5+328-10000000*(1-x12_4)+v12_4=a4
a12+W12+5+450-10000000*(1-x12_5)+v12_5=a5
a12+W12+5+416-10000000*(1-x12_6)+v12_6=a6
a12+W12+5+187-10000000*(1-x12_7)+v12_7=a7
a12+W12+5+326-10000000*(1-x12_8)+v12_8=a8
a12+W12+5+224-10000000*(1-x12_9)+v12_9=a9
a12+W12+5+316-10000000*(1-x12_10)+v12_10=a10
a12+W12+5+260-10000000*(1-x12_11)+v12_11=a11
a12+W12+5+220-10000000*(1-x12_13)+v12_13=a13
a12+W12+5+224-10000000*(1-x12_14)+v12_14=a14

a13+W13+5+227-10000000*(1-x13_2)+v13_2=a2
a13+W13+5+77-10000000*(1-x13_3)+v13_3=a3
a13+W13+5+187-10000000*(1-x13_4)+v13_4=a4
a13+W13+5+299-10000000*(1-x13_5)+v13_5=a5
a13+W13+5+265-10000000*(1-x13_6)+v13_6=a6
a13+W13+5+152-10000000*(1-x13_7)+v13_7=a7
a13+W13+5+185-10000000*(1-x13_8)+v13_8=a8
a13+W13+5+43-10000000*(1-x13_9)+v13_9=a9
a13+W13+5+166-10000000*(1-x13_10)+v13_10=a10
a13+W13+5+198-10000000*(1-x13_11)+v13_11=a11
a13+W13+5+165-10000000*(1-x13_12)+v13_12=a12
a13+W13+5+36-10000000*(1-x13_14)+v13_14=a14

a14+W14+15+198-10000000*(1-x14_2)+v14_2=a2
a14+W14+15+88-10000000*(1-x14_3)+v14_3=a3
a14+W14+15+198-10000000*(1-x14_4)+v14_4=a4
a14+W14+15+310-10000000*(1-x14_5)+v14_5=a5
a14+W14+15+276-10000000*(1-x14_6)+v14_6=a6
a14+W14+15+163-10000000*(1-x14_7)+v14_7=a7
a14+W14+15+196-10000000*(1-x14_8)+v14_8=a8
a14+W14+15+1-10000000*(1-x14_9)+v14_9=a9
a14+W14+15+177-10000000*(1-x14_10)+v14_10=a10
a14+W14+15+216-10000000*(1-x14_11)+v14_11=a11
a14+W14+15+176-10000000*(1-x14_12)+v14_12=a12
a14+W14+15+40-10000000*(1-x14_13)+v14_13=a13

11. Vstupní model Trasy 1

Minimize

10000000 x11
 + 259 x12
 + 340 x13
 + 290 x14
 + 258 x15
 + 527 x16
 + 401 x17
 + 252 x18
 + 226 x19
 + 293 x21
 + 10000000 x22
 + 170 x23
 + 84 x24
 + 238 x25
 + 468 x26
 + 231 x27
 + 241 x28
 + 170 x29
 + 217 x31
 + 164 x32
 + 10000000 x33
 + 187 x34
 + 162 x35
 + 392 x36
 + 61 x37
 + 165 x38
 + 187 x39
 + 345 x41
 + 105 x42
 + 222 x43
 + 10000000 x44
 + 290 x45
 + 520 x46
 + 283 x47
 + 293 x48
 + 226 x49
 + 55 x51
 + 229 x52
 + 179 x53
 + 252 x54
 + 10000000 x55
 + 432 x56
 + 240 x57
 + 4 x58
 + 249 x59
 + 574 x61
 + 557 x62
 + 507 x63
 + 580 x64
 + 519 x65
 + 10000000 x66
 + 568 x67
 + 523 x68
 + 578 x69

+ 277 x71
 + 224 x72
 + 60 x73
 + 247 x74
 + 222 x75
 + 452 x76
 + 10000000 x77
 + 225 x78
 + 247 x79
 + 51 x81
 + 234 x82
 + 184 x83
 + 257 x84
 + 5 x85
 + 437 x86
 + 245 x87
 + 10000000 x88
 + 244 x89
 + 239 x91
 + 180 x92
 + 114 x93
 + 203 x94
 + 184 x95
 + 414 x96
 + 175 x97
 + 187 x98
 + 10000000 x99
 + W1
 + W2
 + W3
 + W4
 + W5
 + W6
 + W7
 + W8
 + W9

Subject To

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 1$
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} = 1$
 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} = 1$
 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} = 1$
 $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} = 1$
 $x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} + x_{68} + x_{69} = 1$
 $x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} + x_{78} + x_{79} = 1$
 $x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} + x_{86} + x_{87} + x_{88} + x_{89} = 1$
 $x_{91} + x_{92} + x_{93} + x_{94} + x_{95} + x_{96} + x_{97} + x_{98} + x_{99} = 1$

$$\begin{aligned}
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} \\
& + x_{71} + x_{81} + x_{91} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} \\
& + x_{72} + x_{82} + x_{92} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} \\
& + x_{73} + x_{83} + x_{93} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} \\
& + x_{74} + x_{84} + x_{94} = 1 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} \\
& + x_{75} + x_{85} + x_{95} = 1 \\
& x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} \\
& + x_{76} + x_{86} + x_{96} = 1 \\
& x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} \\
& + x_{77} + x_{87} + x_{97} = 1 \\
& x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} \\
& + x_{78} + x_{88} + x_{98} = 1 \\
& x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} + x_{69} \\
& + x_{79} + x_{89} + x_{99} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1 - a_2 + w_1 + v_{12} + 10000000 x_{12} = 9997041 \\
& a_1 - a_3 + w_1 + v_{13} + 10000000 x_{13} = 9996960 \\
& a_1 - a_4 + w_1 + v_{14} + 10000000 x_{14} = 9997010 \\
& a_1 - a_5 + w_1 + v_{15} + 10000000 x_{15} = 9997042 \\
& a_1 - a_6 + w_1 + v_{16} + 10000000 x_{16} = 9996773 \\
& a_1 - a_7 + w_1 + v_{17} + 10000000 x_{17} = 9996899 \\
& a_1 - a_8 + w_1 + v_{18} + 10000000 x_{18} = 9997048 \\
& a_1 - a_9 + w_1 + v_{19} + 10000000 x_{19} = 9997074
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_2 - a_3 + w_2 + v_{23} + 10000000 x_{23} = 9998930 \\
& a_2 - a_4 + w_2 + v_{24} + 10000000 x_{24} = 9999016 \\
& a_2 - a_5 + w_2 + v_{25} + 10000000 x_{25} = 9998862 \\
& a_2 - a_6 + w_2 + v_{26} + 10000000 x_{26} = 9998632 \\
& a_2 - a_7 + w_2 + v_{27} + 10000000 x_{27} = 9998869 \\
& a_2 - a_8 + w_2 + v_{28} + 10000000 x_{28} = 9998859 \\
& a_2 - a_9 + w_2 + v_{29} + 10000000 x_{29} = 9998930
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3 - a_2 + w_3 + v_{32} + 10000000 x_{32} = 9997136 \\
& a_3 - a_4 + w_3 + v_{34} + 10000000 x_{34} = 9997113 \\
& a_3 - a_5 + w_3 + v_{35} + 10000000 x_{35} = 9997138 \\
& a_3 - a_6 + w_3 + v_{36} + 10000000 x_{36} = 9996908 \\
& a_3 - a_7 + w_3 + v_{37} + 10000000 x_{37} = 9997239 \\
& a_3 - a_8 + w_3 + v_{38} + 10000000 x_{38} = 9997135 \\
& a_3 - a_9 + w_3 + v_{39} + 10000000 x_{39} = 9997113
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_4 - a_2 + w_4 + v_{42} + 10000000 x_{42} = 9998995 \\
& a_4 - a_3 + w_4 + v_{43} + 10000000 x_{43} = 9998878 \\
& a_4 - a_5 + w_4 + v_{45} + 10000000 x_{45} = 9998810 \\
& a_4 - a_6 + w_4 + v_{46} + 10000000 x_{46} = 9998580 \\
& a_4 - a_7 + w_4 + v_{47} + 10000000 x_{47} = 9998817 \\
& a_4 - a_8 + w_4 + v_{48} + 10000000 x_{48} = 9998807 \\
& a_4 - a_9 + w_4 + v_{49} + 10000000 x_{49} = 9998874
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_5 - a_2 + w_5 + v_{52} + 10000000 x_{52} = 9999471 \\
& a_5 - a_3 + w_5 + v_{53} + 10000000 x_{53} = 9999521 \\
& a_5 - a_4 + w_5 + v_{54} + 10000000 x_{54} = 9999448
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_5 - a_6 + w_5 + v_{56} + 10000000 x_{56} = 9999268 \\
& a_5 - a_7 + w_5 + v_{57} + 10000000 x_{57} = 9999460 \\
& a_5 - a_8 + w_5 + v_{58} + 10000000 x_{58} = 9999696 \\
& a_5 - a_9 + w_5 + v_{59} + 10000000 x_{59} = 9999451
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_6 - a_2 + w_6 + v_{62} + 10000000 x_{62} = 9996743 \\
& a_6 - a_3 + w_6 + v_{63} + 10000000 x_{63} = 9996793 \\
& a_6 - a_4 + w_6 + v_{64} + 10000000 x_{64} = 9996720 \\
& a_6 - a_5 + w_6 + v_{65} + 10000000 x_{65} = 9996781 \\
& a_6 - a_7 + w_6 + v_{67} + 10000000 x_{67} = 9996732 \\
& a_6 - a_8 + w_6 + v_{68} + 10000000 x_{68} = 9996777 \\
& a_6 - a_9 + w_6 + v_{69} + 10000000 x_{69} = 9996722
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_7 - a_2 + w_7 + v_{72} + 10000000 x_{72} = 9998876 \\
& a_7 - a_3 + w_7 + v_{73} + 10000000 x_{73} = 9999040 \\
& a_7 - a_4 + w_7 + v_{74} + 10000000 x_{74} = 9998853 \\
& a_7 - a_5 + w_7 + v_{75} + 10000000 x_{75} = 9998878 \\
& a_7 - a_6 + w_7 + v_{76} + 10000000 x_{76} = 9998648 \\
& a_7 - a_8 + w_7 + v_{78} + 10000000 x_{78} = 9998875 \\
& a_7 - a_9 + w_7 + v_{79} + 10000000 x_{79} = 9998853
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_8 - a_2 + w_8 + v_{82} + 10000000 x_{82} = 9998866 \\
& a_8 - a_3 + w_8 + v_{83} + 10000000 x_{83} = 9998916 \\
& a_8 - a_4 + w_8 + v_{84} + 10000000 x_{84} = 9998843 \\
& a_8 - a_5 + w_8 + v_{85} + 10000000 x_{85} = 9999095 \\
& a_8 - a_6 + w_8 + v_{86} + 10000000 x_{86} = 9998663 \\
& a_8 - a_7 + w_8 + v_{87} + 10000000 x_{87} = 9998855 \\
& a_8 - a_9 + w_8 + v_{89} + 10000000 x_{89} = 9998856
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_9 - a_2 + w_9 + v_{92} + 10000000 x_{92} = 9998920 \\
& a_9 - a_3 + w_9 + v_{93} + 10000000 x_{93} = 9998986 \\
& a_9 - a_4 + w_9 + v_{94} + 10000000 x_{94} = 9998897 \\
& a_9 - a_5 + w_9 + v_{95} + 10000000 x_{95} = 9998916 \\
& a_9 - a_6 + w_9 + v_{96} + 10000000 x_{96} = 9998686 \\
& a_9 - a_7 + w_9 + v_{97} + 10000000 x_{97} = 9998925 \\
& a_9 - a_8 + w_9 + v_{98} + 10000000 x_{98} = 9998913
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{12} + 20000000 x_{12} \leq 20000000 \\
& v_{13} + 20000000 x_{13} \leq 20000000 \\
& v_{14} + 20000000 x_{14} \leq 20000000 \\
& v_{15} + 20000000 x_{15} \leq 20000000 \\
& v_{16} + 20000000 x_{16} \leq 20000000 \\
& v_{17} + 20000000 x_{17} \leq 20000000 \\
& v_{18} + 20000000 x_{18} \leq 20000000 \\
& v_{19} + 20000000 x_{19} \leq 20000000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{23} + 20000000 x_{23} \leq 20000000 \\
& v_{24} + 20000000 x_{24} \leq 20000000 \\
& v_{25} + 20000000 x_{25} \leq 20000000 \\
& v_{26} + 20000000 x_{26} \leq 20000000 \\
& v_{27} + 20000000 x_{27} \leq 20000000 \\
& v_{28} + 20000000 x_{28} \leq 20000000 \\
& v_{29} + 20000000 x_{29} \leq 20000000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{32} + 20000000 x_{32} \leq 20000000 \\
& v_{34} + 20000000 x_{34} \leq 20000000 \\
& v_{35} + 20000000 x_{35} \leq 20000000 \\
& v_{36} + 20000000 x_{36} \leq 20000000
\end{aligned}$$

v37 + 20000000 x37 <= 20000000
v38 + 20000000 x38 <= 20000000
v39 + 20000000 x39 <= 20000000

v42 + 20000000 x42 <= 20000000
v43 + 20000000 x43 <= 20000000
v45 + 20000000 x45 <= 20000000
v46 + 20000000 x46 <= 20000000
v47 + 20000000 x47 <= 20000000
v48 + 20000000 x48 <= 20000000
v49 + 20000000 x49 <= 20000000

v52 + 20000000 x52 <= 20000000
v53 + 20000000 x53 <= 20000000
v54 + 20000000 x54 <= 20000000
v56 + 20000000 x56 <= 20000000
v57 + 20000000 x57 <= 20000000
v58 + 20000000 x58 <= 20000000
v59 + 20000000 x59 <= 20000000

v62 + 20000000 x62 <= 20000000
v63 + 20000000 x63 <= 20000000
v64 + 20000000 x64 <= 20000000
v65 + 20000000 x65 <= 20000000
v67 + 20000000 x67 <= 20000000
v68 + 20000000 x68 <= 20000000
v69 + 20000000 x69 <= 20000000

v72 + 20000000 x72 <= 20000000
v73 + 20000000 x73 <= 20000000
v74 + 20000000 x74 <= 20000000
v75 + 20000000 x75 <= 20000000
v76 + 20000000 x76 <= 20000000
v78 + 20000000 x78 <= 20000000
v79 + 20000000 x79 <= 20000000

v82 + 20000000 x82 <= 20000000
v83 + 20000000 x83 <= 20000000
v84 + 20000000 x84 <= 20000000
v85 + 20000000 x85 <= 20000000
v86 + 20000000 x86 <= 20000000
v87 + 20000000 x87 <= 20000000
v89 + 20000000 x89 <= 20000000

v92 + 20000000 x92 <= 20000000
v93 + 20000000 x93 <= 20000000
v94 + 20000000 x94 <= 20000000
v95 + 20000000 x95 <= 20000000
v96 + 20000000 x96 <= 20000000
v97 + 20000000 x97 <= 20000000
v98 + 20000000 x98 <= 20000000

a1 = 0
a2 >= 7200
a3 >= 14400
a4 >= 14400
a5 >= 14400
a6 >= 21600
a7 >= 21600
a8 >= 28800
a9 >= 36000
a2 <= 14400
a3 <= 21600
a4 <= 21600
a5 <= 21600
a6 <= 28800
a7 <= 28800
a8 <= 36000
a9 <= 43200

Bounds

Binaries

x11 x12 x13 x14 x15 x16 x17 x18 x19
x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x28 x29
x31 x32 x33 x34 x35 x36 x37 x38 x39
x41 x42 x43 x44 x45 x46 x47 x48 x49
x51 x52 x53 x54 x55 x56 x57 x58 x59
x61 x62 x63 x64 x65 x66 x67 x68 x69
x71 x72 x73 x74 x75 x76 x77 x78 x79
x81 x82 x83 x84 x85 x86 x87 x88 x89
x91 x92 x93 x94 x95 x96 x97 x98 x99

End

12. Výstupní model Trasy 1
s výsledky

GurobiOptimizerversion 7.0.2 build v7.0.2rc1 (win64)
Copyright (c) 2017, GurobiOptimization, Inc.

Read LP format model fromfile c:\gurobi\lp1b.lp
Readingtime = 0.00 seconds
: 163 rows, 172 columns, 627 nonzeros
Optimize a model with 163 rows, 172 columns and 627 nonzeros
Variabletypes: 91 continuous, 81 integer (81 binary)
Coefficientstatistics:
Matrix range [1e+00, 2e+07]
Objectiverange [1e+00, 1e+07]
Boundsrange [1e+00, 1e+00]
RHS range [1e+00, 2e+07]
Presolverremoved 59 rows and 62 columns
Presolvetime: 0.00s
Presolved: 104 rows, 110 columns, 553 nonzeros
Variabletypes: 56 continuous, 54 integer (54 binary)

Rootrelaxation: objective 2.234131e+03, 26 iterations, 0.00 seconds

Nodes		CurrentNode		ObjectiveBounds		Work		
ExplUnexpl		ObjDepthIntInf		IncumbentBestBd	Gap		It/Node	Time
0	0	2234.13130	0	4	- 2234.13130	- -	0s	
H	0	0		1.000223e+07	2234.13130	100%	-	0s
H	0	0		1.000221e+07	2234.13130	100%	-	0s
H	0	0		1.000220e+07	2234.13130	100%	-	0s
H	0	0		2425.0000000	2234.13130	7.87%	-	0s
*	0	0	0	2331.0000000	2331.00000	0.00%	-	0s

Explored 0 nodes (37 simplex iterations) in 0.01 seconds
Threadcountwas 4 (of 4 availableprocessors)

Solutioncount 5: 2331 2425 1.00022e+07 ... 1.00022e+07
Pool objectivebound 2331

Optimalsolutionfound (tolerance 1.00e-04)
Best objective 2.331000000000e+03, bestbound 2.331000000000e+03, gap 0.0000%

Wroteresultfile 'c:\gurobi\lp1b.sol'

# Objectivevalue = 2331	x63 0	v13 10008788
x11 0	x64 0	a4 14400
x12 1	x65 0	v14 10007169
x13 0	x66 0	a5 15590
x14 0	x67 0	v15 10008391
x15 0	x68 1	a6
x16 0	x69 0	2.2952000000000015e+
x17 0	x71 0	04
x18 0	x72 0	v16 10015484
x19 0	x73 0	a7 21600
x21 0	x74 0	v17 10014258
x22 0	x75 0	a8 28800
x23 0	x76 1	v18 10021607
x24 1	x77 0	a9 36000
x25 0	x78 0	v19 10028833
x26 0	x79 0	w2 6216
x27 0	x81 0	v23 10001583
x28 0	x82 0	v24 0
x29 0	x83 0	v25 10001036
x31 0	x84 0	v26 10008168
x32 0	x85 0	v27 10007053
x33 0	x86 0	v28 10014243
x34 0	x87 0	v29 10021514
x35 0	x88 0	w3 2770
x36 0	x89 1	v32 9985497
x37 1	x91 1	v34 9992674
x38 0	x92 0	v35 9993889
x39 0	x93 0	v36 10001021
x41 0	x94 0	v37 0
x42 0	x95 0	v38 10007096
x43 0	x96 0	v39 10014274
x44 0	x97 0	w4 0
x45 1	x98 0	v42 9991795
x46 0	x99 0	v43 10000547
x47 0	W1 0	v45 0
x48 0	W2 0	v46 10007132
x49 0	W3 0	v47 10006017
x51 0	W4 0	v48 10013207
x52 0	W5 0	v49 10020474
x53 1	W6 0	w5 0
x54 0	W7 0	v52 9991081
x55 0	W8 0	v53 0
x56 0	W9 0	v54 9998258
x57 0	a1 0	v56 10006630
x58 0	a2 7200	v57 10005470
x59 0	w1 4241	v58 10012906
x61 0	v12 0	v59 10019861
x62 0	a3 16069	w6 2625

v62 9978366
v63 9987285
v64 9985543
v65 9986794
v67 9992755
v68 0
v69 10007145
w7 0

v72 9984476
v73 9993509
v74 9991653
v75 9992868
v76 0
v78 10006075
v79 10013253
w8 6056

v82 9971210
v83 9980129
v84 9978387
v85 9979829
v86 9986759
v87 9985599
v89 0
w9

9.9629199999999963e+06
v92 7.20000000000037253e+03
v93 1.6135000000003725e+04
v94 1.4377000000003725e+04
v95 1.5586000000003725e+04
v96 2.2718000000003740e+04
v97 2.1605000000003725e+04
v98 2.8793000000003725e+04