Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Studijní materiály do diferenciální geometrie

Vypracoval:	**Tomáš Bucher**
Studijní program:	B0114A170003 Matematika pro vzdělávání
Studijní obor:	Matematika pro vzdělávání / Fyzika pro vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Patrik Peška, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Patrika Pešky, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamů použitých pramenů.

V Olomouci dne 6. května 2024

....

Tomáš Bucher

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Tomáš Bucher
Název práce	Studijní materiály do diferenciální geometrie
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Patrik Peška, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2024
Abstrakt	Cílem této diplomové práce je vypracovat studijní materiály pro studenty diferenciální geometrie. Čtenář v práci najde teoretické poznatky, řešené a neřešené příklady a příklady jejího užití v praxi.
Klíčová slova	Diferenciální geometrie, sbírka úloh
Počet stran	63
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Tomáš Bucher
Title	Study materials for differential geometry
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Patrik Peška, Ph.D.
The year of presentation	2024
Abstract	The goal of this masters thesis is to make study materials for students of differential geometry. The reader of this thesis will find theoretical knowledge, solved and unsolved problems and examples of its use in practice.
Keywords	Differential geometry, problem collection
Number of pages	63
Number of appendices	0
Language	Czech

Obsah

Úvod

Diplomová práce je věnována klasické diferenciální geometrii křivek v třídimenzionálním eukleidovském prostoru.

Předpokládáme znalost matematické analýzy v rámci prvního ročníku vysokých škol a samozřejmě analytické geometrie v objemu střední školy.

V jednotlivých kapitolách se budeme postupně věnovat vektorovým funkcím jedné proměnné, definici křivek v E_3, parametrizací a její změnou, tečnou křivky, oskulační rovinou, flexí a torzí, Frenetovými-Serretovými formulemi, kanonickými rovnicemi a nakonec stykem křivek.

Velká část každé kapitoly jsou příklady, ať už řešené, tak neřešené, na kterých si čtenář může vyzkoušet, zda-li dané látce dostatečně rozumí.

Kromě toho většinu kapitol obohatíme o využití diferenciální geometrie ve fyzice, především mechanice pohybu hmotného bodu v prostoru.

Všechny obrázky v práci vytvořil autor v programu GeoGebra Klasik.

Kapitola 1

Vektorové funkce

1.1 Teoretický základ

Než se začneme věnovat samotné diferenciální geometrii, je potřeba si připomenout už známé pojmy a definovat některé nástroje, které budeme v celé této práci využívat. Jako hlavní takový nástroj nám budou sloužit právě vektorové funkce. V této kapitole čerpáme z [2, 6, 7].

Definice 1.1 *Nechť* $(V,+)$ *je komutativní grupa, jejíž prvky budeme značit* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *a nazývat vektory,* $\mathbb{T}$ *je číselné těleso, zobrazení* $\cdot : \mathbb{T} \times V \to V$ *je levá vnější operace nad* $\mathbb{T}$ *a* V*. Systém* $\mathbb{V} = (V, +, \mathbb{T}, \cdot)$ *nazveme* ***vektorový prostor*** *nad tělesem* $\mathbb{T}$*, pokud platí*

1. $\forall\, c \in \mathbb{T}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : c \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$,
2. $\forall\, c, d \in \mathbb{T}, \boldsymbol{u} \in V : (c + d) \cdot \boldsymbol{u}$,
3. $\forall\, c, d \in \mathbb{T}, \boldsymbol{u} \in V : (cd) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u})$,
4. $\forall\, \boldsymbol{u} \in V : 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Pro nulový vektor, který značíme $\mathbf{o}$, platí

$$\mathbf{o} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

a opačný vektor k vektoru $\boldsymbol{u}$ značíme $-\boldsymbol{u}$. Pro ten platí

$$(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{o}.$$

Definice 1.2 *Vektory* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *nazveme* ***lineárně nezávislé****, jestliže podmínka*

$$c_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + c_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{a}_n = \mathbf{o}$$

platí pouze v případě $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$*. V opačném případě je nazveme* ***lineárně závislé****.*

Definice 1.3 *Množina* $\bar{V} \subset V$ *se nazývá* ***lineárním podprostorem*** V*, jestliže je sama vektorovým prostorem a není* V*.*

Kritériem podprostoru je, že $\bar{V}$ je uzavřená pro operace „$\cdot$“ a „$+$“.

Definice 1.4 *Je-li M podmnožina vektorového prostoru $\mathbb{V}$, pak* ***lineárním obalem*** *množiny M ve $\mathbb{V}$ nazveme průnik všech podprostorů prostoru $\mathbb{V}$, které množinu M obsahují. Lineární obal budeme značit $[M]$.*

Definice 1.5 *Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{T}$. Platí-li pro podmnožinu $M \neq \emptyset$ prostoru $\mathbb{V}$, že $[M] = V$, pak M se nazývá* ***množina generátorů*** *prostoru $\mathbb{V}$.*

Definice 1.6 *Množinu generátorů prostoru $\mathbb{V}$, které jsou lineárně nezávislé nazveme* ***báze vektorového prostoru*** *$\mathbb{V}$.*

Definice 1.7 ***Dimenze*** *vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je počet vektorů v jeho libovolné bázi.*

Vektorové prostory jsme definovali, teď ještě dodefinujeme ve vektorovém prostoru pojmy délka a úhel.

Definice 1.8 ***Eukleidovský vektorový prostor*** *je vektorový prostor $\mathbb{E}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ uvažovaný spolu se zobrazením $g : E \times E \to \mathbb{R}$, pro které platí*

1. $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E : g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$,
2. $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in E : g(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$,
3. $\forall\, c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E : g(c \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c \cdot g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,
4. $\mathbf{o} \neq \boldsymbol{u} \in E : g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$.

Operace g se nazývá ***skalární součin*** a označuje se „$\cdot$“.

Definice 1.9 ***Délkou*** *vektoru $\boldsymbol{u}$ budeme rozumět číslo*

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}.$$

Pokud má vektor délku 1, nazveme jej ***jednotkový***, ***nulový*** *vektor má délku 0.*

Definice 1.10 ***Úhlem*** *mezi nenulovými vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v eukleidovském vektorovém prostoru $\mathbb{E}$ nazveme číslo φ, pro které platí*

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}.$$

Pokud je úhel mezi vektory $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ roven $\frac{\pi}{2}$, pak vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ nazveme ***ortogonální****.*

Definice 1.11 *Je-li báze M eukleidovského vektorového prostoru složena z ortogonálních vektorů, pak tuto bázi nazveme* ***ortogonální****. Pokud navíc každý vektor báze M má délku 1, nazveme ji* ***ortonormální****.*

Dále budeme pracovat v 3 dimenzionálním eukleidovském prostoru, který budeme označovat E_3. Proto zavedeme klasickým způsobem ortonormální bázi prostoru $\mathbb{E}$: $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Tyto vektory jsou ***jednotkové***, navzájem ***ortogonální*** a tvoří ***pravý repér*** (co to znamená řekneme později).

Nechť $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak skalární součin můžeme vypočítat jako

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

Navíc délku vektoru můžeme spočítat jako

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Definice 1.12 ***Vektorovým součinem*** *vektorů* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{v}$ *nazýváme vektor*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Jak známo, platí

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin \varphi,$$

kde φ *je úhel, který vektory* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *svírají, navíc vektor* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ *je kolmý k vektorům* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *a vektory* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *a* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ *tvoří pravoorientovanou trojici.*

Věta 1.1 *Vektorový součin má následující vlastnosti:*

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$,
2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$,
3. $c(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (c\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v}$,
4. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$.

Definice 1.13 ***Smíšeným součinem*** *vektorů* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ *nazýváme číslo* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Smíšený součin můžeme zapsat také jako determinant matice

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jsou lineárně nezávislé, právě když

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq 0,$$

a v případě, že

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) > 0,$$

tvoří pravě orientovanou trojici vektorů. Pro výše zmíněný pravý repér $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ tedy platí $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = 1$.

Věta 1.2 *Pro smíšený součin platí*

1. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$
2. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$
3. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Definice 1.14 ***Vektorovou funkcí*** $\boldsymbol{p}(t)$ *proměnné* t *na intervalu* $I \in \mathbb{R}$ *nazýváme zobrazení intervalu* I *do vektorového prostoru* V*, což zapisujeme*

$$\boldsymbol{p} : I \to V.$$

Vektorovou funkci $\boldsymbol{p}(t)$ můžeme zapisovat v souřadnicovém tvaru:

$$\boldsymbol{p}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} = (x(t), y(t), z(t)) \,,$$

kde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, x, y, z jsou souřadnice a $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ jsou souřadnicové funkce.

Uvědomme si, že operace $\cdot$ je násobením vektoru skalárem zleva. Stejně jako pro reálné funkce, definujeme další pojmy, které budeme v této práci používat.

Definice 1.15 *Vektorová funkce* $\boldsymbol{p}(t)$ *má limitu* $\boldsymbol{p_0}$ *v bodě* t_0*, což zapisujeme jako*

$$\boldsymbol{p}_0 = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{p}(t),$$

jestliže existuje

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p_0}| = 0.$$

Stejně tak můžeme definovat limitu zleva a zprava jako

$$\lim_{t \to t_0-}, \qquad \lim_{t \to t_0+}.$$

.

Pro vektorovou funkci $\boldsymbol{p}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ platí

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 \iff \lim_{t \to t_0} x = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z = z_0,$$

kde $\boldsymbol{p}_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$.

Analogicky zavádíme skalární a vektorový součin pro vektorové funkce, a to následovně:

Nechť $\boldsymbol{a}(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, $\boldsymbol{b}(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$, $\boldsymbol{c}(t) = (x_3(t), y_3(t), z_3(t))$ jsou vektorové funkce definované na společném intervalu I. Skalární, vektorový a smíšený součin definujeme jako

$$\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) + y_1(t) \cdot y_2(t) + z_1(t) \cdot z_2(t),$$

$$\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix},$$

$$(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix}.$$

Nechť $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{b}(t)$ jsou vektorové funkce, $k(t)$ je reálná funkce, přičemž

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_0, \qquad \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{b}_0, \qquad \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}_0, \qquad \lim_{t \to t_0} k(t) = k_0.$$

Pak platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{a}(t) \pm \boldsymbol{b}(t)) = \boldsymbol{a}_0 \pm \boldsymbol{b}_0,\\
&\lim_{t\to t_0}(k(t) \cdot \boldsymbol{a}(t)) = k_0 \cdot \boldsymbol{a}_0,\\
&\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t)) = \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_0,\\
&\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t)) = \boldsymbol{a}_0 \times \boldsymbol{b}_0,\\
&\lim_{t\to t_0}\left(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)\right) = \left(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{c}_0\right).
\end{aligned}$$

Definice 1.16 *Vektorová funkce $\boldsymbol{p}(t)$ se nazývá spojitá v bodě t_0, když existuje na nějakém okolí tohoto bodu a zároveň platí*

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(t_0).$$

Definice 1.17 *Nechť vektorová funkce $\boldsymbol{p}(t)$ je definovaná na intervalu I. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{p}(t)$ má v bodě $t_0 \in I$ derivaci, když existuje limita*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{p}(t_0+h) - \boldsymbol{p}(t_0)}{h}.$$

Tuto limitu budeme klasicky značit $\boldsymbol{p}'(t_0)$.

Pro vektorové funkce $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)$ a reálnou funkci $f(t)$, které mají v bodě t_0 derivaci platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}
&(f\boldsymbol{a})' = f'\boldsymbol{a} + f\boldsymbol{a}',\\
&(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' \pm \boldsymbol{b}',\\
&(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})' = (\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}'),\\
&(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})' = (\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}'),\\
&(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})' = (\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}') \cdot \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}'
\end{aligned}$$

Stejně jako jsme definovali derivaci vektorové funkce, můžeme definovat i druhou derivaci $(\boldsymbol{p}'(t))' = \boldsymbol{p}''(t)$, třetí derivaci atd.

Zaveďme si ještě jeden pomocný pojem.

Definice 1.18 *Nechť interval $I \in \mathbb{R}$ je otevřená množina a reálná funkce f je na této množině definovaná. Říkáme, že funkce f náleží třídě diferencovatelnosti C^k, pokud existují derivace f', f'', ..., $f^{(k)}$. Platí $C^\omega \subset C^\infty \subset ... \subset C^1 \subset C^0$.*

Funkce náležící C^0 jsou ***spojité***, funkce náležící C^∞ nazýváme ***hladké*** a funkce náležící C^ω nazýváme ***analytické***.

Definice 1.19 *Mějme vektorovou funkci $\boldsymbol{p}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$. Vektorová funkce $\boldsymbol{p}(t)$ náleží **třídě diferencovatelnosti** C^k, právě když této třídě náleží každá funkce $x(t), y(t), z(t)$.*

Poslední pojem, který zmíníme, je Taylorův polynom a Taylorova řada.

Definice 1.20 *Jestliže existují všechny derivace funkce f v bodě a, Taylorův polynom funkce f v bodě a je výraz*

$$\mathbb{T}_{(f,a)} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Vraťme se k třídám diferencovatelnosti. Funkce f náleží třídě C^ω, když v každém jejím bodě a konverguje její Taylorův polynom k nějaké funkci v okolí tohoto bodu. Ukažme si funkci, která náleží třídě C^∞, ale nenáleží už třídě C^ω.

Definujme funkci $f(x)$ jako

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Tato funkce má všechny řády derivací ve všech bodech včetně bodu $x = 0$. V okolí tohoto bodu ale Taylorův polynom nekonverguje k funkci $f(x)$, ale k 0:

$$\mathbb{T}_{(f,0)} = 0 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + ... + \frac{0(a)}{n!}0^n + ... = 0.$$

1.2 Řešené příklady

1. Dokažte, že ze spojistosti vektorové funkce $\boldsymbol{p}(t)$ plyne spojitost funkce $|\boldsymbol{p}(t)|$.
2. Najděte derivace funkcí $\boldsymbol{p}^2, \sqrt{\boldsymbol{p}^2}, \sqrt{(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')^2}$, kde $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$.
3. Na intervalu $(t_1; t_2)$ pro funkci $\boldsymbol{p}(t)$ platí $|\boldsymbol{p}(t)| = k$, kde k je konstanta (tj. velikost vektoru $\boldsymbol{p}(t)$ je konstantní. Dokažte, že na tomto intervalu platí $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{p}'$. Platí i obrácené tvrzení?
4. Rozhodněte, zda platí $|\boldsymbol{p}'(t)| = |\boldsymbol{p}(t)|'$?
5. Na uzavřeném intervalu $\langle t_1; t_2 \rangle$ je vektorová funkce $\boldsymbol{p}(t)$ spojitá i se svou první derivací, přičemž na celém intervalu platí $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}' \neq 0$. Dokažte, že $\boldsymbol{p}(t)$ je rovnicí přímky, případně její částí na tomto intervalu.

1.2.1 Řešení

1. Vektorová funkce $\boldsymbol{p}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ je spojitá, právě když jsou spojité funkce $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. $|\boldsymbol{p}(t_0)|$ značí velikost vektoru $\boldsymbol{p}$ v bodě t_0. Pokud jsou tedy spojité funkce $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, tak je spojitá i funkce
$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$
2. První funkci řešíme následovně:
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p}^2)' &= (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p})' \\ &= (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}') \\ &= 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}').\end{aligned}$$
Podobně pro druhou funkci derivaci řešíme jako derivaci složené funkce
$$\begin{aligned}(\sqrt{\boldsymbol{p}^2})' &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}') \\ &= \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}'}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2}}\end{aligned}$$
Než zderivujeme třetí funkci, spočítejme derivaci $(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')'$.
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')' &= (\boldsymbol{p}'' \times \boldsymbol{p}'') + (\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}''') \\ &= \boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'''.\end{aligned}$$
První člen je roven $\mathbf{o}$, protože vektory jsou rovnoběžné. Teď už můžeme vyřešit zbytek příkladu.
$$\begin{aligned}(\sqrt{(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')^2})' &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot ((\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')' \cdot (\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')) + ((\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'') \cdot (\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')') \\ &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2((\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'') \cdot (\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}''')) \\ &= \frac{(\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}')(\boldsymbol{p}'' \cdot \boldsymbol{p}''') - (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}')(\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}''')}{\sqrt{(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')^2}} \\ &= \frac{(\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}')((\boldsymbol{p}'' \cdot \boldsymbol{p}''') - (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}'''))}{\sqrt{(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}'')^2}}.\end{aligned}$$

3. Víme, že velikost vektoru $\boldsymbol{p}$ pro každé $t \in (t_1;\ t_2)$ je konstantní. To znamená, že

$$\boldsymbol{p}(t) \cdot \boldsymbol{p}(t) = k.$$

Z toho plyne, že

$$(\boldsymbol{p}(t) \cdot \boldsymbol{p}(t))' = 0.$$

Už ale víme, že

$$(\boldsymbol{p}(t) \cdot \boldsymbol{p}(t))' = 2(\boldsymbol{p}(t) \cdot \boldsymbol{p}'(t)),$$

z čehož už plyne $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{p}'$.

4. Můžeme snadno najít protipříklad. Pro $\boldsymbol{p}(t) = (\cos t;\ \sin t)$ je $\boldsymbol{p}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$, takže $|\boldsymbol{p}'(t)| = 1$ a přitom $|\boldsymbol{p}(t)|' = 0$

5. Z rovnoběžnosti plyne $\boldsymbol{p} = (a,\, b,\, c)$, $\boldsymbol{p}' = (k \cdot a,\, k \cdot b,\, k \cdot c)$. Pro $k = \frac{l}{t}$, kde l je konstanta je řešení už jasné.

Kapitola 2

Definice křivky

2.1 Teoretický základ

Teď, když jsme zakončili úvodní kapitolu a připomněli si důležité pojmy, se kterými budeme po zbytek práce pracovat, začněme se zabývat diferenciální geometrií. Prvním a nejdůležitějším pojmem je křivka. V této kapitole si křivky definujeme a zmíníme některé jejich základní vlastnosti. Přestože křivky budeme definovat v E_3, stejně můžeme pracovat i v E_2. V této kapitole budeme čerpat z [1, 2, 3, 4, 5, 7, 9].

Nejdříve si definujme několik pomocných pojmů.

Definice 2.1 *Nechť E_3 je eukleidovský prostor, I je nějaký interval z $\mathbb{R}$, V je jeho zaměření a $P \in E_3$ jeho počátek. Zobrazení $f : I \to E_3$ určuje vektorovou funkci $\overrightarrow{Pf} : I \to V$ takovou, že $\overrightarrow{Pf}(t) = \overrightarrow{Pf(t)}$. Vektorová funkce $\overrightarrow{Pf}$ se nazývá* ***průvodič zobrazení*** *f.*

Definice 2.2 *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Zobrazení $f : I \to E_3$ nazveme pohyb v prostoru E_3. Říkáme, že f je* ***pohyb třídy*** *C^r, když $\overrightarrow{Pf}$ je vektorová funkce třídy C^r.*

Definice 2.3 *Pohyb $f : I \to E_3$ nazveme* ***jednoduchý****, pokud je f injektivní.*

Definice 2.4 *Pohyb $f : I \to E_3$ nazveme* ***regulární****, jestliže*

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

pro každé $t \in I$. Bod o parametru t_0, pro který by rovnost platila, se nazývá ***singulární bod pohybu*** *f.*

Průvodič zobrazení f tedy hraje roli vektorové funkce a pohyb je množina bodů prostoru touto funkcí definovaná. S definovaným pojmem pohyb je křivku už jednoduché korektně definovat.

Definice 2.5 *Množinu $C \subset E_3$ nazveme* ***jednoduchá křivka třídy*** *C^r, pokud existuje takový jednoduchý regulární pohyb $f : I \to E_3$ třídy C^r, že platí $C = f(I)$.*

Někdy se může stát, že pohyb nebude jednoduchý (jako příklad uveďme periodický pohyb po lemniskátě), nebo nebude regulární (přímka zadaná ve tvaru $(t^3, t^3, 0)$ v bodě $t_0 = 0$. V tomto případě by se nejednalo o regulární křivku. Proto je vhodné pojem křivka definovat trochu obecněji.

Definice 2.6 *Podmnožinu $C \subset E_3$ nazveme* ***křivka třídy*** *C^r, jestliže pro každý bod $p \in C$ existuje takové jeho okolí U, že $C \cap U$ je jednoduchá křivka třídy C^r.*

Křivka je tedy „sjednocení“ jednoduchých křivek.

2.1.1 Způsoby zadání křivky

Křivku C jsme definovali jako množinu bodů eukleidovského prostoru. Tyto body můžeme zapsat v **bodovém tvaru**, tedy

$$C : p = p(t), \qquad t \in I, p(t) \in E_3.$$

Protože počátek kartézské soustavy souřadnic je bod $P = [0, 0, 0]$, můžeme křivku C zadat i ve **vektorovém tvaru**, a to

$$C : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t), \qquad t \in I, \boldsymbol{p}(t) \in V.$$

Právě kvůli souřadnicím počátku souřadnic je mezi těmito dvěma zadáními následující vztah:

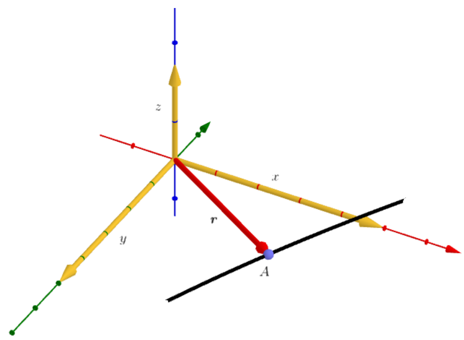
$$\begin{aligned} p(t) &= P + \boldsymbol{p}(t), \\ \boldsymbol{p}(t) &= p(t) - P. \end{aligned}$$

Každý takto zadaný vektor a bod mají souřadnice x, y, z. Můžeme jich tedy využít k třetímu způsobu zadání, a to **souřadnicovému**, které je ve tvaru

$$C : x = x(t), \, y = y(t), \, z = z(t), \quad t \in I, \qquad x(t), \, y(t), \, z(t) \in \mathbb{R}.$$

Vztah mezi souřadnicovým, bodovým a vektorovým zadáním je

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}(t) = x(t) \cdot \boldsymbol{i} + y(t) \cdot \boldsymbol{j} + z(t) \cdot \boldsymbol{k} = (x(t), \, y(t), \, z(t)), \\ &p(t) = [x(t), \, y(t), \, z(t)] \end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Bod A je příkladem bodového zadání křivky. Červený (rádius) vektor je příkladem vektorového zadání, žluté vektory jsou příkladem souřadnicového zadání.

Křivky můžeme zadat ještě dalšími dvěma způsoby.

Definice 2.7 *Nechť funkce*

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

jsou definovány na společném otevřeném intervalu I a jsou nejméně jednou diferencovatelné. Potom množinu bodů v prostoru E_3, které lze zapsat ve tvaru

$$p(x) = [x, \, f(x), \, g(x)]$$

nazýváme regulární křivkou definovanou ***explicitně****. Výše uvedené rovnice nazýváme* ***explicitní rovnice*** *křivky.*

Poslední způsob zadání křivky je následující.

Definice 2.8 *Mějme dvě funkce*

$$g(x,\, y,\, z), \quad l(x,\, y\; z),$$

které jsou definovány na společném otevřené trojrozměrné oblasti $\Omega \in E_3$ a které jsou zde spojité i se všemi svými prvními parciálními derivacemi. Dále nechť množinu bodů $[x,\, y,\, z]$, pro které v oblasti Ω platí

$$g(x,\, y,\, z) = 0, \quad l(x,\, y,\, z) = 0,$$

tato množina je neprázdná a v každém bodě této množiny platí pro matici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial l}{\partial z} \end{pmatrix},$$

*že $h(A) = 2$, kde $h(A)$ je hodnost matice A. Potom tuto množinu nazveme regulární **křivkou zadanou implicitně**.*

2.2 Řešené příklady

1. Pojmenujte křivku $\boldsymbol{r}(t) = (a,\, bt,\, ct^2)$, kde $a,\, b,\, c,\, t \in \mathbb{R}$.

2. Kterou křivku popisuje souřadnicový zápis ve tvaru

$$x = t,\, y = r \cdot \cos t,\, z = r \cdot \sin t,$$

   kde $t \in \mathbb{R}$?

3. Napište parametrické rovnice křivky zadané implicitně

$$y^2 = 2px,\, x + y - z = 0.$$

4. Určete singulární body křivky $\boldsymbol{r}(t) = (t^2,\; \cos 2t,\, 4)$, kde $t \in \langle 0,\, \pi)$.

5. Hyperbola je vyjádřena implicitně ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

   Vyjádřete tuto hyperbolu parametricky, pokud $a > b$.

2.2.1 Řešení

1. První souřadnice je konstanta, zabývat se jí tedy nemusíme. y-ovou a z-ovou souřadnici si vyjádříme explicitně:

$$y = bt \Rightarrow t = \frac{y}{b} z = ct^2 z = c\,\frac{y^2}{b^2},$$

   což je rovnice paraboly. Popsaná rovnice je tedy parabola.

2. V yz-ové rovině jde o rovnici kružnice, v x-ové souřadnici se jedná o přímku. Výslednou křivkou je tedy šroubovice.

3. Jako proměnnou si můžeme zvolit x. Vyjádříme-li y, vychází nám explicitní rovnice
$$y = \sqrt{2px},\ z = x + \sqrt{2px}.$$
Pokud ale za x dosadíme parametr t, parametrické vyjádření této křivky je dáno rovnicemi
$$x = t,\ y = \sqrt{2pt},\ z = t + \sqrt{2pt}.$$

4. V prvé řadě zjistíme, kdy se výraz $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$ rovná nule. Jednotlivé derivace mají tvar
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2 \cdot \sin 2t,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0.$$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ je rovno nule pouze pro $t = 0$. Pro tuto hodnotu t je i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$, takže singulární bod je pro parametr $t = 0$, takže po jeho dosazení za parametry x, y, z zjistíme, že se jedná o bod [0,1,4].

5. Pro parametrické vyjádření musíme najít funkce
$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$
Jedná se o hyperbolické funkce, tedy
$$f(t) = a\,\frac{e^t + e^{-t}}{2} = a\cosh t, \qquad g(t) = b\,\frac{e^t - e^{-t}}{2} = b\sinh t.$$
Parametrické vyjádření hyperboly je
$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cosh t, b\sinh t)\,.$$

2.3 Neřešené příklady

1. Najděte parametrické rovnice elipsy, pokud je zadána implicitně jako
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Jaké jsou singulární body křivky zadané vektorovou funkcí
$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t,\ \sin 2t, 2 - \cos 2t)?$$

3. Křivka je zadána parametricky vektorovou rovnicí
$$\boldsymbol{p}(t) = (t^3, 3t - 3, e^t),\ t \in \mathbb{R}.$$
Najděte některé její explicitní zadání.

4. Najděte singulární body křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t, 2\cos t,\ \cos^2 t),\ t \in \mathbb{R}.$$

5. Zjistěte, jestli křivka zadaná vektorovou funkcí

$$\boldsymbol{p}(t) = \left(2\sqrt{t} - 3t^2, t^3\right)$$

je na intervalu $(0, 2)$ jednoduchá křivka.

6. Najděte parametrické zadání křivky zadané iplicitně jako

$$y^2 = x, \qquad x^2 = z.$$

7. Jaké třídě diferencovatelnosti náleží křivka zadaná parametricky jako

$$\begin{aligned} x &= e^{\frac{1}{t}}, \\ y &= t, \\ z &= e^{-\frac{1}{t}}, \end{aligned}$$

pro $t \in \mathbb{R}^+$.

8. Zjistěte, zda křivka daná vektorovou funkcí

$$\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$

je jednoduchá křivka.

9. Určete singulární body asteroidy dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t. \end{aligned}$$

10. Dokažte, že křivka zadaná implicitně jako

$$3x^2 + 2y^2 + 6x - 3 = 0$$

je křivka třídy C^r pro libovolné r. Najděte některé parametrické zadání této křivky.

2.3.1 Řešení

1. $\boldsymbol{p}(t) = (a\cos t, b\sin t)$
2. Křivka nemá singulární body.
3. $x = \frac{y^3}{27} + \frac{y^2}{3} + y + 1$
   $z = e^{\frac{y}{3}+1}$
4. $t = 0$
5. Ano, křivka nemá singulární body a $\boldsymbol{p}(t)$ je na intervalu injektivní.
6. (t^2, t^4, t)
7. Křivka náleží třídě diferencovatelnosti C^ω
8. Ano, na libovolném intervalu.

9. Body dané $t = \frac{k\pi}{4}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$, body jsou

$$p_1 = [a, 0]$$
$$p_2 = [0, a]$$
$$p_3 = [-a, 0]$$
$$p_4 = [0, -a].$$

10. Jde o elipsu

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{3}\sin t\right).$$

2.4 Fyzikální využití

Značný přínos měla diferenciální geometrie v teoretické mechanice. Polohu tělesa popíšeme pomocí polohového vektoru $\boldsymbol{r}(t)$, což není nic jiného, než vektorové zadání křivky. Parametr t hraje roli času. Ve fyzice místo pojmu křivka budeme užívat pojmu trajektorie.

Zmíníme si některé běžně zkoumané pohyby.

2.4.1 Rovnoměrný přímočarý pohyb

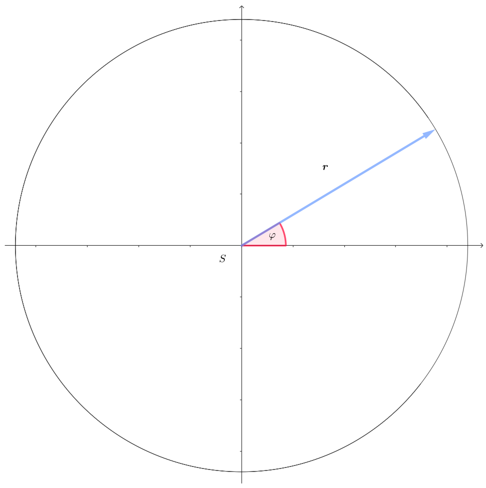
Toto je nejjednodušší pohyb, který může hmotný bod vykonávat. Hmotný bod se pohybuje po přímce konstantní rychlostí. Předpokládejme, že se bod pohybuje po ose x a uvažujme nějakou počáteční dráhu x_0. Pak parametrické vyjádření této trajektorie je ve tvaru

$$x = vt + x_0,\ v,\ t \in \mathbb{R}.$$

2.4.2 Rovnoměrný pohyb po kružnici

Vzhledem k tomu, že popisujeme pohyb hmotného bodu, nebude nám stačit pouze vyjádřit kružnici. Předpokládejme, že se hmotný bod pohybuje v xy-ové rovině po kružnici se středem v počátku souřadnic a poloměrem r. Hmotný bod se pohybuje s rychlostí o konstantní velikosti, ale její směr se mění. To můžeme vyjádřit jako konstantní úhlovou rychlost ω, s počátečním úhlem φ_0 sevřeným s x-ovou osou. S takovými požadavky pak trajektorii tohoto pohybu v závislosti na čase vyjádříme jako

$$x = r \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y = r \cdot \sin(\omega t + \varphi_0).$$



Obrázek 2.2: Trajektorie rovnoměrného pohybu po kružnici s rádius vektorem pro $t = 0$.

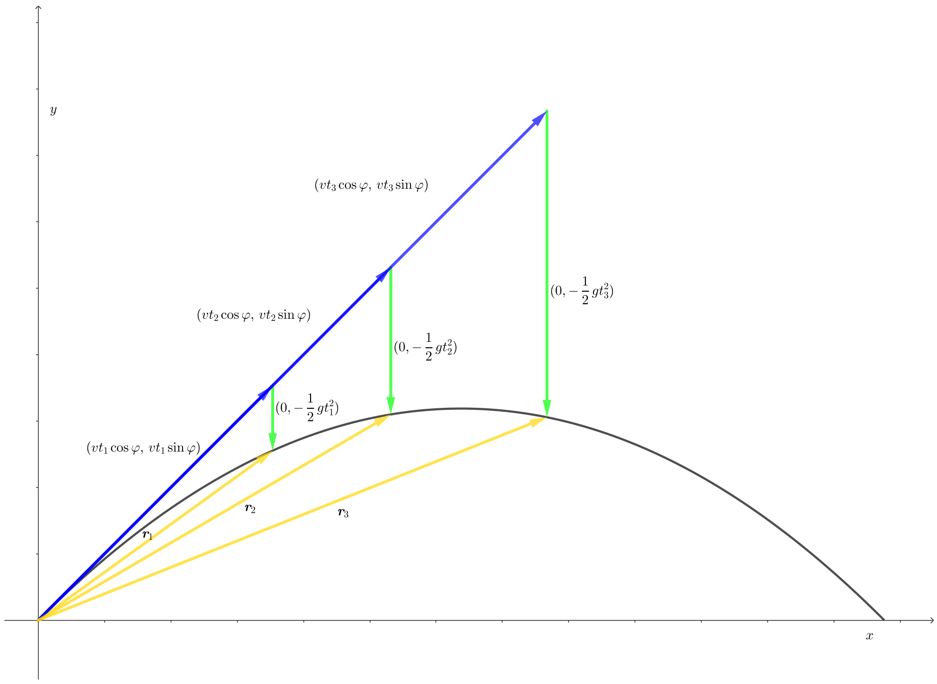
2.4.3 Vrh hmotného bodu

Vrh hmotného bodu je asi nejsložitější typ pohybu, na který ve středoškolské fyzice narazíme. Budeme předpokládat, že pohyb probíhá v xy-ové rovině, kde x-ová osa znázorňuje povrch země a y-ová osa vyjadřuje výšku nad zemí. Hmotný bod je vržen počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$ z počátku souřadnic pod úhlem φ vzhledem k x-ové ose. Hmotný bod je zároveň v tíhovém poli, takže je přitahován proti směru y-ové osy k zemi. Ve fyzice platí princip superpozice, který říká, že složený pohyb skončí ve stejném společném bodě, jako by jednoduché pohyby byly konány postupně. Tyto dva pohyby si tedy můžeme vyjádřit jako jejich součet. Parametrické vyjádření takového pohybu pak je

$$x = v_x t, \qquad y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Složky v_x a v_y jsou velikosti průmětů vektoru rychlosti do x-ové a y-ové osy, takže je můžeme vyjádřit pomocí goniometrických funkcí jako

$$x = tv \cos\varphi, \qquad y = tv \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2.$$



Obrázek 2.3: Trajektorie vrhu hmotného bodu, žluté (rádius) vektory jsou výsledkem součtu rovnoměrného přímočarého pohybu (modrý vektor) a volného pádu v tíhovém poli (zelený vektor). Pro ukázku byly zvoleny vektory pro časy t_1, t_2, t_3.

Poznámka: Zatím jsme derivace podle parametru t značili $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. V některých částech práce budeme používat pro zjednodušení Newtonovu notaci $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Toto značení se využívá právě v mechanice.

Kapitola 3

Transformace parametru křivky

Uvažujme křivku zadanou vektorovou funkcí $\boldsymbol{r}(t) = (t^3,\ t^3,\ 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Jedná se o rovnici přímky. Toto ale není jediné zadání stejné přímky. Stejnou přímku můžeme zapsat i ve tvaru $\boldsymbol{r}(\bar{t}) = (\bar{t}, \bar{t}, 0)$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Z prvního zadání na druhé jsme přešli pomocí jisté reparametrizace. My teď zavedeme takovou reparametrizaci korektně. Čerpali jsme z [2, 3, 4].

3.1 Regulární parametrizace

Definice 3.1 *Nechť je na daném intervalu $\bar{I}$ definovaná funkce t, která je s nějakou funkcí $\bar{t}$ svázána vztahem*

$$t = t(\bar{t}),$$

a která je zde spojitá i se svou první derivací. Nechť dále platí, že v každém bodě intervalu $\bar{I}$ je

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} \neq 0.$$

*Potom funkci $t = t(\bar{t})$ nazýváme **přípustnou funkcí**.*

Označme I obor hodnot funkce t. Přípustná funkce je vlastně bijekcí množiny $\bar{I}$ na množinu I. Uvažujme křivku zadanou vektorovou funkcí $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Potom je vektorovou funkcí téže křivky i funkce $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(\bar{t}))$, kde $t \in I$, $\bar{t} \in \bar{I}$.

Definice 3.2 *Přechod z jedné vektorové rovnice na druhou vektorovou rovnici pomocí přípustné funkce nazveme **regulární transformace parametru**.*

Co by nás mohlo při parametrizaci zajímat je, jak vzniká daná křivka pro jednotlivé parametry.

Definice 3.3 *Dvě parametrizace dané křivky nazýváme **souhlasné**, pokud*

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} > 0.$$

Pokud jsou parametrizace ***souhlasné***, znamená to, že mají obě parametrizace počátek ve stejném bodě a zachovává se orientace křivky. Parametrizace, které souhlasné nejsou, nazýváme ***nesouhlasné*** a po reparametrizaci má křivka orientaci opačnou.

3.1.1 Délka křivky

Vzhledem k tomu, že křivky jsou množiny bodů v eukleidovském prostoru, pomocí již zavedených zobrazení známe vzdálenost mezi jednotlivými body tohoto prostoru. Vezměme infinitizemálně malou délku $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$, kde $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ jsou infinitizemální projekce do jednotlivých os souřadnicové soustavy. My budeme studovat, jak bude narůstat délka křivky se změnou parametru t. Infinitizemální změnu v závislosti na t studujeme takto: Souřadnice x, y, z můžeme diferencovat podle t

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,$$

takže z toho vyplývá

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tento výzaz integrujeme podle t a výsledkem je

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Tuto funkci nazýváme ***oblouk křivky*** a značí délku křivky pro danou parametrizaci. Samotný oblouk křivky s můžeme ale také uvažovat jako parametr křivky, který má pro studium křivek větší význam. Užitím Newtonovy notace můžeme vzorec pro výpočet oblouku vyjádřit jako

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}}\,\mathrm{d}t.$$

Jeho derivací pak získáváme výraz

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}}.$$

Stejně jako u každé jiné reparametrizace, budeme chtít najít inverzní funkci $t(s)$. Využijeme pro to první derivace, takže provedeme úpravy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}}}.$$

Parametr s pak budeme nazývat ***oblouk***. Role oblouku křivky je v tom, že je jakousi normou křivky. Co tím myslíme si ukážeme v kapitole o tečnách křivek.

3.2 Řešené příklady

1. Vypočtěte délku křivky zadanou vektorovou funkcí

   $$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t,\, 4\cos\frac{t}{2}),$$

   pokud $t \in (0, 2\pi)$.

2. Vypočtěte délku křivky zadané explicitně

   $$y = f(x),\, z = g(x).$$

3. Najděte přirozenou parametrizaci křivky zadanou vektorovou funkcí

$$\boldsymbol{r}(t) = (a \cdot \cos t,\, a \cdot \sin t,\, ht)$$

3.2.1 Řešení

1. Vycházíme z rovnice (3.1), takže

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}(t-\sin t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}(1-\cos t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}(4\cos\frac{t}{2})}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t + \left(-2\sin\frac{t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + \left(-2\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t + 2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}[-2\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} \\
&= 4\sqrt{2}[\cos\frac{t}{2}]_{2\pi}^{0} \\
&= 4\sqrt{2}(\cos\pi - \cos 0) \\
&= 8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Délka této křivky je tedy $8\sqrt{2}$.

2. Tentokrát nebudeme funkce f, g diferencovat podle t, ale podle x, tedy

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Délku křivky pak počítáme analogicky jako

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x^2} \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Tím je úloha vyřešena.

3. Začněme tím, že vyjádříme oblouk jako funkci $\bar{t}$ a potom vyjádříme t pomocí parametru s. Značení $\bar{t}$ v tomto případě využíváme pro přehlednost (t použijeme pro meze integrálu a $\bar{t}$ pro proměnnou, podle které integrujeme. Nejedná se tedy o dvě různé parametrizace. Tedy

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + h^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 + h^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= t\sqrt{a^2 + h^2} \end{aligned}$$

Teď když máme vyjádřený oblouk jako funkcí parametru t, najít inverzní funkci (pokud je funkce prostá) $t(s)$ je už snadné, tedy

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

3.3 Neřešené příklady

1. Jakou délku má křivka daná vektorovou funkcí

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^{\frac{3}{2}}, t, 2\right)$$

na intervalu $t \in (0, 4)$?

2. Jakou délku má křivka zadaná parametricky

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}t^2, \\ y &= \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \\ z &= 2t \end{aligned}$$

na intervalu $t \in (1, 4)$?

3. Vypočtěte délku křivky zadané vektorovou funkcí

$$\boldsymbol{p}(t) = \left(ct, c\sqrt{2}\ln t, \frac{c}{t}\right)$$

pro $t \in (1, 10)$.

4. Jakou délku má uzavřená křivka

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ \cos 2t\right)?$$

5. Určete délku asteroidy

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right).$$

6. Spočítejte délku křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cosh t, a\sinh t, at)$$

pro $t \in (0, t_0)$.

7. Určete funkcí $f(t)$ tak, aby v parametrickém vyjádření křivky

$$\boldsymbol{p}(t) = \left((1-at)^{\frac{3}{2}}, (1+at)^{\frac{3}{2}}, f(t))\right)$$

byl parametr oblouk.

8. Vypočtěte délku křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right)$$

pro $t \in (0, 3)$.

3.3.1 Řešení

1. $\frac{\sqrt{64000}}{27}$
2. $\frac{27}{2}$
3. 9,9c
4. $s = 10$
5. $\frac{3}{2}a$
6. $a\sqrt{2}\sinh t_0$
7. Jen pro $|a| < \frac{\sqrt{2}}{3}$, pak $f(t) = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{2}a^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
8. $\frac{45\sqrt{2}}{2}$

3.4 Fyzikální využití

V druhé kapitole jsme zjistili, že pomocí parametru t můžeme vyjádřit závislost polohy hmotného bodu na čase a teď pomocí zavedení oblouku jsme schopni spočítat dráhu, kterou hmotný bod při pohybu urazí. Je to tedy tatáž myšlenka, jen v tomto případě místo termínu délka křivky používáme dráha. Dráhu značíme opět s. Ukažme si výpočet dráhy už dříve zmíněných trajektorií z kapitoly 2.

3.4.1 Rovnoměrný přímočarý pohyb

Protože je tento pohyb pouze po jedné ose, je integrace jednoduchá. Jako počáteční hodnotu t volíme 0 jakožto začátek měření času.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{v^2}\, \mathrm{d}\bar{t} = vt,$$

což je předvídatelný výsledek.

3.4.2 Rovnoměrný pohyb po kružnici

Spočítáme dráhu opět od počátečního času 0. Z toho vychází

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{(\omega r \sin(\omega \bar{t}))^2 + (\omega r \cos(\omega \bar{t}))^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \int_0^t \sqrt{(\omega r)^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \omega r t. \end{aligned}$$

3.4.3 Vrh hmotného bodu

Uvědomme si, že dráha závisí pouze na čase t, počáteční rychlost v a tíhová konstanta g jsou konstanty. Úpravy jsou pak už jednoduché.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{(\bar{t} \sin v)^2 + (\bar{t} \cos v - gt)^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \int_0^t \sqrt{\bar{t}^2(\cos^2 v + \sin^2 v) - 2g\bar{t}^2 \cos v + g^2\bar{t}^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \int_0^t \bar{t}\sqrt{1 - 2g\cos v + g^2}\, \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \frac{t^2}{2}\sqrt{1 - 2g\cos v + g^2} \end{aligned}$$

Kapitola 4

Tečna křivky

V práci už jsme několikrát používali derivace vektorové funkce křivek podle proměnné t, případně s. Zkoumejme teď sečny křivek a jejich limitní případy - tečny. V této kapitole čerpáme z [1, 2, 3, 4].

4.1 Teoretický základ

Mějme křivku k zadanou vektorovou funkcí $\boldsymbol{r}(t)$ a její dva body $X(t_0)$, $X(t_0 + + h)$. Přímka daná jedním z těchto bodů a vektorem $\boldsymbol{r}(t_0+h) - \boldsymbol{r}(t_0)$ je sečnou křivky k. Budeme-li číslo $|h|$ limitně zmenšovat, body $X(t_0)$ a $X(t_0 + h)$ se budou k sobě přibližovat, dokud oba body téměř nesplynou. Tímto způsobem vznikne tečna.

Definice 4.1 *Mějme bod $X(t_0)$ regulární křivky k popsané vektorovou funkcí $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in I$. Tečnu křivky k v bodě $X(t_0)$ rozumíme přímku, která je pro $h \to 0$ limitní polohou sečny procházející body $X(t_0)$ a $X(t_0 + h)$ křivky k. Bod $X(t_0)$ nazýváme dotykový bod tečny.*

Zatím jsme používali výraz $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ jako derivaci vektorové funkce $\boldsymbol{r}$ podle proměnné t. V kontextu tečen křivky toto značení také využijeme, a to následovně.

Definice 4.2 *Vektor*

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h}$$

nazveme tečný vektor křivky v bodě t_0.

Mohlo by nás zajímat, jaký vliv bude mít na směr tečny reparametrizace křivky. Pokud máme křivku zadanou vektorovou funkcí $\boldsymbol{r}(t)$ a reparametrizujeme ji na tvar $\boldsymbol{r}(t(\bar{t}))$, pak derivace této vektorové funkce bude mít tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}.$$

Už výše jsme zmínili, že výraz $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}$ může nabýt právě jedné z hodnot $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} > 0$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} < 0$. Protože je to jen číselný násobek, můžeme říct že tečný vektor $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ a $\dot{\boldsymbol{r}}(\bar{t_0})$ mají stejný, nebo opačný směr.

Vraťme se k oblouku křivky. Ukážeme, že má, jakožto parametr křivky, některé zajímavé vlastnosti. Tečný vektor budeme při parametrizaci obloukem značit $\boldsymbol{r}'$. Ten vyjádříme pomocí složené derivace jako

$$\boldsymbol{r}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

Zkoumejme velikost tohoto vektoru. V předchozí kapitole jsme ukázali vztah

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}}}.$$

Víme také, že

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| = \dot{s}(t) = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}},$$

čímž jsme odvodili, že jestliže s je oblouk, pak

$$|\boldsymbol{r}'(s)| = 1$$

pro každé $s \in J$. Protože jsme využili při odvození vztahu pouze ekvivalentní úpravy, opačná implikace platí také.

4.2 Řešené úlohy

1. Určete tečný vektor na křivku zadanou vektorovou funckí $\boldsymbol{r}(t)$ v bodě $X(t_0)$, pokud

   a) $\boldsymbol{r} = (e^t, e^{-t}, t^2)$, $t_0 = 1$,

   b) $\boldsymbol{r} = (a \cosh t, a \sinh t, ht)$, t_0 je libovolný bod

2. Najděte tečnu ke křivce zadanou parametricky ve tvaru

   $$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3,$$

   která je kolmá na vektor $\boldsymbol{a} = (3{,}1{,}1)$.

3. Určete jednotkový vektor tečny ke křivce zadané parametricky ve tvaru

   $$x = t \sin t, \quad y = t \cos t, \quad z = e^t, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

   v bodě $t_0 = 0$.

4.2.1 Řešení

1. Jednotlivé souřadnice vždy zderivujeme a dosadíme t_0 za t.

   a) $\dot{\boldsymbol{r}} = (e^t, \; - e^{-t}, 2t)$, po dosazení $t_0 = 1$ vychází

   $$\dot{\boldsymbol{r}}(1) = (e, -\frac{1}{e}, 2).$$

   b) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (a \sinh t, a \cosh t, h)$

2. Jako první derivujeme jednotlivé souřadnice.

   $$\dot{x} = 3 - 3t^2, \dot{y} = 6t, \dot{z} = 3 + 3t^2$$

. Aby takový vektor byl kolmý k vektoru $\boldsymbol{a}$, musí platit $\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{a} = 0$. Z toho spočítáme

$$\begin{aligned}
3(3-3t^2)+6t+3+3t^2 &= 0\\
9-9t^2+6t+3+3t^2 &= 0\\
-6t^2+6t+12 &= 0\\
t^2-t-2 &= 0\\
(t-2)(t+1) &= 0.
\end{aligned}$$

Tečna ke křivce $\boldsymbol{r}$ je kolmá na vektor $\boldsymbol{a}$ pro hodnoty parametru $t \in \{2, -1\}$, takže se jedná o vektory $\boldsymbol{r}_1(t) = (-1, 12, 15)$ a $\boldsymbol{r}_2(t) = (0, -6, 6)$.

3. Pro řešení příkladu stačí vypočítat vektor $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ a podělit jej jeho velikostí. Tedy

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= (\sin t + t\cos t,\ \cos t - t\sin t,\ e^t)\\
&= (\sin 0 + ,\ \cos 0,\ e^0)\\
&= (0,1,1).
\end{aligned}$$

Spočítáme velikost tohoto vektoru.

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Výsledek tedy je tečný vektor ve tvaru $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

4.3 Neřešené příklady

1. Najděte tečnu křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left(\ln t^2, e^{3t}, t^2+t-1\right)$$
v bodě $t_0 = 1$.

2. Najděte tečnu křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t, te^t, \sin t\cos t\right)$$
v bodě $t_0 = \pi$.

3. Najděte tečnu křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos 2t,\ \sin\frac{t}{2},\ \sin t\cos 2t\right)$$
v libovolném bodě.

4. Najděte tečnu křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left(t^2, 4t, e^t\right)$$
v libovolném bodě.

5. Zjistěte, jestli křivka
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\ln t, \frac{t^2}{2}\right)$$
je zadána parametrem oblouk.

6. Zjistěte, jestli křivka
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\sin 2t,\, \sin^2 t\right)$$
je zadána parametrem oblouk.

7. V kterém bodě křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t,\, \sin t, 3t)$$
je její tečna rovnoběžná s rovinou
$$x + y + 2 = 0?$$

8. V kterém bodě křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2,\, \sin(t-1), 2t\right)$$
je její tečna rovnoběžná s rovinou
$$2x - 2y - z = 0?$$

9. V kterém bodě křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left(3t\cos t, e^t,\, \sin t\right)$$
je její tečna kolmá na rovinu
$$y + z + -1 = 0?$$

4.3.1 Řešení

1. $(2, 3e^{3t}, 3)$
2. $(1, e^{\pi}(1+\pi), 1)$
3. $\left(-2\sin 2t, \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},\, \cos(-t) - \sin t \sin 2t\right)$
4. $(2t, 4, e^t)$
5. **Není** zadána parametrem oblouk.
6. **Je** zadána parametrem oblouk.
7. V bodech $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
8. $(1, 0, 2)$
9. $(0, 1, 0)$

4.4 Fyzikální využití

Tečný vektor křivky ve fyzice vyjadřuje vektor okamžité rychlosti hmotného bodu v daném bodě trajektorie. Značíme jej buď $\boldsymbol{v}(t_0)$ nebo stejně jako ve studiu křivek $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$. Parametr s ve fyzice značí dráhu, kterou hmotný bod po trajektorii za čas t urazí. Připomeňme, že i v diferenciální geometrii jsme oblouk definovali jako délku křivky. Řekli jsme si, že parametr s je obloukem, právě když $r' = 1$. I to pro nás má v mechanice smysl; jedná se o jednotkový vektor ve směru rychlosti hmotného bodu, píšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau},$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je právě jednotkový vektor ve směru rychlosti v daném bodě trajektorie. Člen $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ tedy určuje velikost rychlosti v daném bodě trajektorie, značíme $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}|$.

Podívejme se, jak vypadá rychlost pro některé důležité pohyby, které v mechanice studujeme.

4.4.1 Rovnoměrný přímočarý pohyb

Připomínáme, že tento pohyb má konstantní rychlost $\boldsymbol{v}$ podél x-ové osy. Okamžitou rychlost v libovolný okamžik tedy můžeme spočítat jako

$$\dot{x} = v.$$

4.4.2 Rovnoměrný pohyb po kružnici

Opět si vyjádříme derivaci jednotlivých souřadnic:

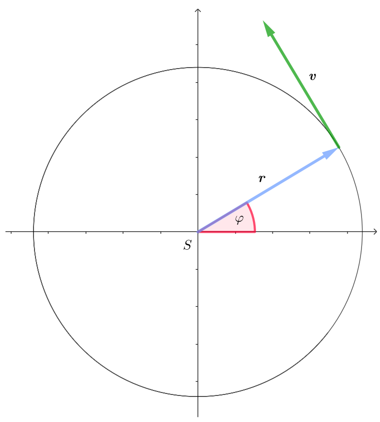
$$\dot{x} = -\omega r \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad \dot{y} = \omega r \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Můžeme zjistit, jaký úhel svírají vektorové funkce $\boldsymbol{r}$ a $\dot{\boldsymbol{r}}$. Z již známého vzorce dostáváme

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}||\dot{\boldsymbol{r}}|} =$$

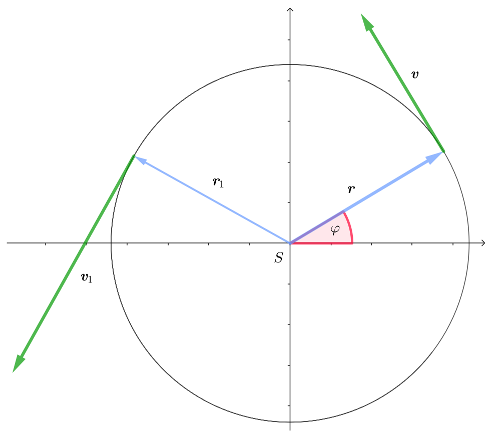
$$= \frac{-\omega r^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega r^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))}{|\boldsymbol{r}||\dot{\boldsymbol{r}}|} = 0.$$

To znamená, že v každém bodě kružnice jsou na sebe vektory polohy a rychlosti kolmé.



Obrázek 4.1: Trajektorie rovnoměrného pohybu po kružnici s vektorem okamžité rychlosti v.

4.4.3 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici



Obrázek 4.2: Trajektorie rovnoměrně zrychleného pohybu s vektory okamžité rychlosti v a v_1 ve dvou různých bodech trajektorie.

Při tomto pohybu se velikost okamžité rychlosti hmotného bodu zvětšuje, ale hmotný bod se pořád pohybuje po kružnici. K počáteční obvodové dráze φ_0 a počáteční obvodové rychlosti ω_0 zavádíme ještě obvodové zrychlení ε. V takovém případě jsou pak parametrické rovnice

$$x = r \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0\right),$$

$$y = r \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Parametrická rovnice rychlosti už bude tedy složitější, protože

$$\dot{x} = -(\varepsilon t + \omega_0) r \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0\right)$$

$$\dot{y} = (\varepsilon t + \omega_0) r \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Z toho, že se goniometrické funkce nemění vychází, že se mění pouze velikost rychlosti a směr vektoru rychlosti zůstává stejný.

Kapitola 5

Oskulační rovina

V předchozí kapitole jsme definovali tečnu křivky. V této kapitole si zavedeme další důležité vektory a roviny, které spolu nesou informace o dané křivce. Budeme čerpat z [1, 3, 4].

5.1 Teoretický základ

Začneme definicí oskulační roviny, která nám pomůže definovat a uvést do kontextu zbývající pojmy.

Definice 5.1 *Mějme křivku $\boldsymbol{r}(t)$ a na ní definované body $X(t_0)$, $X(t_0+h)$.* ***Oskulační rovinou*** *křivky C v bodě $X(t_0)$ se nazývá rovina daná vektory $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$, $\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)$ pro $h \to 0$ v bodě $X(t_0)$. Oskulační rovinu budeme značit ω.*

V oskulační rovině můžeme najít další důležitý vektor. Místo vektoru $\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)$ můžeme uvažovat vektor

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)-h\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{h^2}.$$

Po úpravě s pomocí L'Hospitalova pravidla získáváme

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} 2\frac{\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)-h\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} 2\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t_0+h)-\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{2h} \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}}(t_0). \end{aligned}$$

Místo značení $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ budeme ve vhodných situacích užívat značení $\boldsymbol{t}$.

Definice 5.2 *Normála v bodě $X(t_0)$ je každá přímka kolmá na tečnu v bodě $X(t_0)$. Normála, která leží v oskulační rovině se nazývá* ***hlavní normála****. Hlavní normálu budeme značit $\boldsymbol{n}$.*

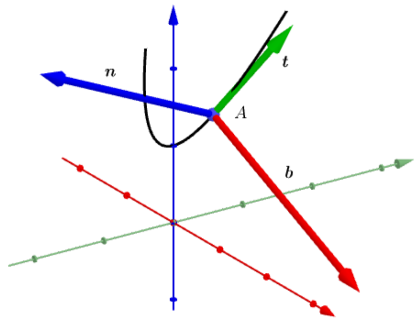
Definice 5.3 *Normála kolmá k oskulační rovině se nazývá* ***binormála****. Binormálu budeme značit $\boldsymbol{b}$.*

Definice 5.4 *Rovinu danou normálou a binormálou nazýváme* ***normálová rovina****. Rovina daná tečnou a binormálou se nazývá* ***rektifikační rovina****.*

Tečna, normála a binormála jsou navzájem kolmé. Toho můžeme využít při konstrukci báze specifické pro danou křivku.

Definice 5.5 *Trojhran určený vektory* $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ *nazveme* ***Frenetův-Serretův doprovodný trojhran*** *nebo také* ***Frenetův repér****.*

Připomeňme, že repér je báze vektorového prostoru V. Frenetův-Serretův repér je ortogonální, ale nemusí být nutně ortonormální.



Obrázek 5.1: Frenetův-Serretův doprovodný trojhran. Zelený vektor je tečna, červený je binormála a modrý je normála.

5.2 Řešené příklady

1. Najděte rovnici oskulační roviny křivky $\boldsymbol{r}(t) = (e^{2t}, t+2, \frac{e^t}{2t})$, v bodě $t_0 = 1$.

2. Určete směrové vektory tečny, hlavní normály a binormály v libovolném bodě křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = (at\cos t, bt\sin t, ct).$$

3. Najděte tečnu ke křivce
$$\boldsymbol{r}(t) = (t^2, t, e^t)$$
rovnoběžnou s rovinou $x - 2y - 5 = 0$.

4. Určete Frenetův-Serretův doprovodný trojhran křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = (4t^2, 3t^3, e^{2t}).$$

5.2.1 Řešení

1. Oskulační rovina je dána vektory $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ a $\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$. Normálu k oskulační rovině můžeme tedy spočítat jako
$$\boldsymbol{n}_\omega = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t).$$

Spočítejme první a druhou derivaci vektorové funkce $\boldsymbol{r}(t)$.

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \left(2e^{2t},\, 1,\, \frac{e^t \cdot 2t - 2e^t}{4t^2}\right)\\
\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= \left(4e^{2t},\, 0,\, \frac{(2e^t(t-1)+2e^t)4t^2 - 2e^t(t-1)8t}{16t^4}\right)\\
&= \left(4e^{2t},\, 0,\, \frac{8t^2e^t(t-1)+8t^2e^t - 16e^tt(t-1)}{16t^4}\right)\\
&= \left(4e^{2t},\, 0,\, \frac{e^t(t^2-t+t-t+1)}{2t^3}\right)\\
&= \left(4e^{2t},\, 0,\, \frac{e^t(t^2-t+1)}{2t^3}\right)
\end{aligned}$$

Za t nyní dosadíme t_0.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(1) &= \left(e^2,\, 3,\, \frac{e}{2}\right)\\
\dot{\boldsymbol{r}}(1) &= (2e^2,\, 1,\, 0)\\
\ddot{\boldsymbol{r}}(1) &= \left(4e^2,\, 0,\, \frac{e}{2}\right)
\end{aligned}$$

A nyní provedeme vektorový součin, čímž, najdeme normálu k oskulační rovině.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}_\omega &= \dot{\boldsymbol{r}}(1) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(1)\\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2e^2 & 1 & 0\\ 4e^2 & 0 & \frac{e}{2} \end{vmatrix}\\
&= \frac{e}{2}\boldsymbol{i} - e^3\boldsymbol{j} - 4e^2\boldsymbol{k}\\
&= \left(\frac{e}{2},\, -e^3,\, -4e^2\right)
\end{aligned}$$

Oskulační rovina má tedy obecnou rovnici ve tvaru

$$\frac{e}{2}x - e^3y - 4e^2z + c = 0.$$

Hodnotu c zjistíme po dosazení souřadnic vektoru $\boldsymbol{r}(1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{e}{2}\cdot e^2 - 3e^3 - 4e^2\frac{e}{2} + c = 0&\\
c &= 3e^3 + 2e^3 - \frac{e^3}{2}\\
c &= \frac{9e^3}{2}
\end{aligned}$$

Obecná rovnice hledané oskulační roviny je tedy

$$\frac{e}{2}x - e^3y - 4e^2z + \frac{9e^3}{2} = 0.$$

2. Rovnice tečny je jasná, ve tvaru

$$\boldsymbol{t} = \dot{\boldsymbol{r}} = (a\cos t - at\sin t,\, b\sin t + bt\cos t, c).$$

Binormálu najdeme jako vektor kolmý na oskulační rovinu, takže

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a\cos t - at\sin t & b\sin t + bt\cos t & c \\ -2a\sin t - at\cos t & 2b\cos t - bt\sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= bc(t\sin t - 2\cos t)\boldsymbol{i} - ac(t\cos t + 2\sin t)\boldsymbol{j} + (2ab\cos^2 t - 3abt\sin t\cos t + \\
&+ abt^2\sin^2 t + 2ab\sin^2 t + 3abt\sin t\cos t + abt^2\cos^2 t)\boldsymbol{k} \\
&= bc(t\sin t - 2\cos t)\boldsymbol{i} - ac(t\cos t + 2\sin t)\boldsymbol{j} + (2ab + abt^2)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Tím jsme tedy dostali vektor binormály, zapíšeme

$$\boldsymbol{b} = \left(bc(t\sin t - 2\cos t),\ -ac(t\cos t + 2\sin t),\, 2ab + abt^2\right).$$

Nakonec tedy najdeme normálu jakožto vektor kolmý na $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{b}$, tedy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a(\cos t - t\sin t) & b(\sin t + t\cos t) & c \\ bc(t\sin t - 2\cos t) & -ac(t\cos t + 2\sin t & ab(2t^2) \end{vmatrix} \\
&= (ab^2(\sin t + t\cos t)(2 + t^2))\boldsymbol{i} + \\
&+ (bc^2(t\sin t - 2\cos t) - a^2b(\cos t - t\sin t)(2 + t^2))\boldsymbol{j} + \\
&+ \left(-a^2c(\cos t - t\sin t)(t\cos t + 2\sin t) - b^2c(\sin t + t\cos t)(t\sin t - 2\cos t)\right)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Výsledek pro přehlednost necháme v tomto tvaru.

3. Rovnice tečny pro libovolný bod křivky $\boldsymbol{r}(t)$ je

$$\boldsymbol{t} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (2t,\, 1,\, e^t).$$

Souřadnice takové tečny stačí dosadit do obecné rovnice zadané roviny a rovnici vyřešit.

$$\begin{aligned}
2t - 2 - 5 &= 0 \\
t &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Po dosazení tedy zjistíme, že tečna rovnoběžná se zadanou rovinou je dána vektorem

$$\boldsymbol{t} = \left(7,\, 1,\, e^{\frac{7}{2}}\right).$$

4. Budeme postupovat stejně jako v příkladu 2. Jako první spočítáme vektor tečny a druhou derivaci vektorové funkce $\boldsymbol{r}(t)$, tedy

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= (8t,\, 9t^2,\, 2e^{2t}) \\
\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= (8,\, 18t,\, 4e^{2t}).
\end{aligned}$$

Vektor binormály spočítáme jako

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8t & 9t^2 & 2e^{2t} \\ 8 & 18t & 4e^{2t} \end{vmatrix} \\
&= (9t^2 \cdot 4e^{2t} - 18t \cdot 2e^{2t})\boldsymbol{i} + (16e^{2t} - 8t \cdot 4e^{2t})\boldsymbol{j} + (8t \cdot 18t - 9t^2 \cdot 8)\boldsymbol{k} \\
&= 36te^{2t}(t-1)\boldsymbol{i} + 16e^{2t}(1-2t)\boldsymbol{j} + 72t^2\boldsymbol{k},
\end{aligned}$$

takže

$$\boldsymbol{b} = \left(36e^{2t}t(t-1),\, 16e^{2t}(1-2t),\, 72t^2\right).$$

Nakonec normálu spočítáme jako kolmici na tečnu a binormálu, takže

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8t & 9t^2 & 2e^{2t} \\ 9e^{2t}t(t-1) & 2e^{2t}(1-2t) & 9t^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(81t^4 - 4e^{4t}(1-2t)\right)\boldsymbol{i} + \left(18e^{4t}t(t-1) - 72t^3\right)\boldsymbol{j} + \\
&+ \left(16e^{2t}t(1-2t) - 81e^{2t}t^3(t-1)\right)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Rovnicí normály je tedy vektor

$$\boldsymbol{n} = \left(81t^4 - 4e^{4t}(1-2t),\, 18e^{4t}t(t-1) - 72t^3,\, 16e^{2t}t(1-2t) - 81e^{2t}t^3(t-1)\right).$$

5.3 Neřešené příklady

1. Najděte oskulační rovinu křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = (\ln t,\, \cos t,\, \sin t)$$

   v bodě $t_0 = \pi$.

2. Najděte oskulační rovinu křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2, 3t, t^2\right)$$

   v bodě $t_0 = 2$.

3. Najděte rektifikační rovinu křivky

$$\boldsymbol{p}(t) = \left(e^t,\, \ln t,\, \frac{t^2}{2}\right)$$

   v bodě $t_0 = 1$.

4. Najděte rektifikační rovinu křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3},\, \cos 2t,\, \sin^2 t\right)$$

   v libovolném bodě.

5. Najděte normálovou rovinu křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(e^t, e^{2t}, e^{3t}\right)$$
v libovolném bodě.

6. Najděte normálovou rovinu křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = (4\cos 2t, 2\sin 2t, 2t)$$
v libovolném bodě.

7. Najděte Frenetův-Serretův repér křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos(et),\ \sin(et), e^{2t}\right)$$
v libovolném bodě.

8. Najděte Frenetův-Serretův repér křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2, t,\ \ln t\right)$$
v libovolném bodě.

5.3.1 Řešení

1. $\omega : -x + \frac{1}{\pi^2}y + \frac{1}{\pi}z + 1 + \ln\pi = 0$
2. $\omega : 6x - 6z = 0$
3. $\rho : -2ex + 2e^2y - 2z + 2e^2 + 1 = 0$
4. $\rho : -5x\sin 2t + 2t^2y + t^2z + t^2\left(\frac{5}{3}t\sin 2t + 2\cos 2t + \sin^2 t\right)$
5. $\nu : x + 2e^ty + 3e^{2t}z - e^t - 2e^{3t} - 3e^{5t} = 0$
6. $\nu : -4\sin 2tx + 2\cos 2ty + z + 6\sin 4t - 2t = 0$
7. $\boldsymbol{t} = (-e\sin(et), e\cos(et), 2e^{2t})$
   $\boldsymbol{b} = (2e^{2t+1}(2\cos(et) + e\sin(et)), 2e^{2t+1}(2\sin(et) - e\cos(et)), e^3)$
   $\boldsymbol{n} = (e^4\cos(et) - 4e^{4t+1}, 4e^4\sin(et) + 4e^{4t+1},\ - 2e^{2t+2}(\sin(et) + \cos(et)))$
8. $\boldsymbol{t} = \left(2t, 1\ \frac{1}{t}\right)$
   $\boldsymbol{b} = \left(-\frac{1}{t^2}, \frac{4}{t}, 2\right)$
   $\boldsymbol{n} = \left(2 - \frac{4}{t^2},\ -\left(\frac{1}{t^3} + 4t\right), 8 + \frac{1}{t^2}\right)$

5.4 Fyzikální využití

Vraťme se k vektoru $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. V mechanice má tento vektor význam vektoru okamžitého zrychlení hmotného bodu, značíme $\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. Se zrychlením souvisí i normála a tečna. Zrychlení hmotného bodu můžeme rozložit na dvě k sobě kolmé složky, a to tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$ ve směru tečny a normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_n$ ve směru normály. Samozřejmě platí
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}_n|^2 + |\boldsymbol{a}_t|^2}.$$

Někdy tečné a normálové zrychlení budeme nazývat přirozené složky zrychlení.

5.4.1 Rovnoměrně zrychlený pohyb

Jedná se o pohyb po přímce s konstantním zrychlením. V takovém případě už víme (pokud se omezíme na x-ovou osu), že dráha je dána jako

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

rychlost je dána jako

$$v_x = at + v_0$$

a nakonec zrychlení je konstantní

$$a_x = c.$$

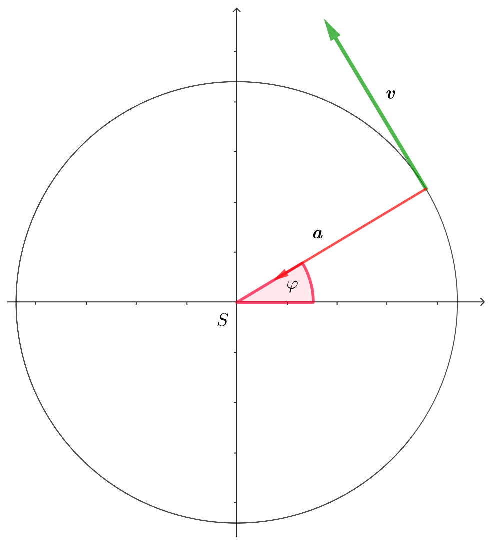
Vektor okamžitého zrychlení je ve směru tečného vektoru, jediná složka zrychlení je tedy tečná. Že vektor rychlosti má pořád stejný směr není náhoda, na dalších příkladech pohybu si ukážeme, že složka tečného zrychlení popisuje změnu velikosti rychlosti hmotného bodu a složka normálového zrychlení popisuje změnu směru vektoru okamžité rychlosti.

5.4.2 Rovnoměrný pohyb po kružnici

Vypišme si znovu parametrické rovnice trajektorie hmotného bodu, jeho rychlost a zrychlení.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= (r\cos{(\omega t + \varphi_0)}, r\sin{(\omega t + \varphi_0)}), \\ \boldsymbol{v}(t) &= (-\omega r\sin{(\omega t + \varphi_0)}, \omega r\cos{(\omega t + \varphi_0)}), \\ \boldsymbol{a}(t) &= (-\omega^2 r\cos{(\omega t + \varphi_0)}, \, -\omega^2 r\sin{(\omega t + \varphi_0)}). \end{aligned}$$

Z rovnic je hned jasné, že $\boldsymbol{r}(t) \parallel \boldsymbol{a}(t)$ a také $\boldsymbol{v}(t) \perp \boldsymbol{a}(t)$. Protože ω je kladná konstanta, $\boldsymbol{a}(t)$ má opačný směr, než $\boldsymbol{r}(t)$ a směřuje do středu kružnice. Kromě toho z kolmosti vektoru rychlosti na vektor zrychlení plyne, že jediná složka zrychlení je normálová. Velikost rychlosti se tedy nemění, mění se pouze směr rychlosti.



Obrázek 5.2: Trajektorie rovnoměrného pohybu po kružnici s vektorem okamžitého zrychlení a vektorem okamžité rychlosti v počátečním bodě. Polohový vektor byl pro přehlednost vynechán.

5.4.3 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici

Opět si vypíšeme rovnice polohového vektoru, vektoru rychlosti a vektoru zrychlení:

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(r\cos(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0),\, r\sin(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) \right),$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \left(-(\varepsilon t + \omega_0) r \cdot \sin(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0),\, (\varepsilon t + \omega_0) r \cdot \cos(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) \right).$$

Zrychlení si pro přehlednost rozepíšeme souřadnicově

$$\ddot{x} = -r(\varepsilon \sin(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) + (\varepsilon t + \omega_0)^2 \cos(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0)),$$
$$\ddot{y} = r(\varepsilon \cos(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) - (\varepsilon t + \omega_0)^2 \sin(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0)).$$

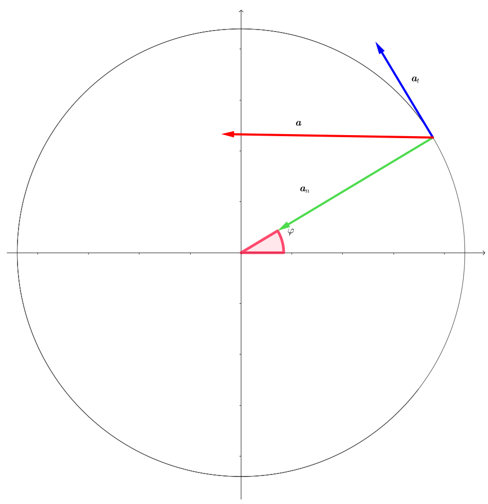
Vzhledem k vhodnému zadání trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ můžeme rovnou vidět tečnou a normálovou složku zrychlení. Tečná složka je rovnoběžná s vektorem rychlosti, takže tečné zrychlení vyjádříme jako

$$\boldsymbol{a}_t = \left(-r\varepsilon \sin(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0),\, r\varepsilon \cos(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) \right).$$

Stejně tak normálová složka zrychlení je ve tvaru

$$\boldsymbol{a}_n = \left(-r(\varepsilon t + \omega_0)^2 \cos(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0),\; -r(\varepsilon t + \omega_0)^2 \sin(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) \right).$$

Co z těchto výsledků můžeme vyčíst? Tečné zrychlení je konstantní co se týče velikosti, mění pouze směr. S rostoucí okamžitou rychlostí ale roste normálové zrychlení, přesný vztah si ukážeme v následující kapitole.



Obrázek 5.3: Vektor okamžitého zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici a jeho přirozené složky. Polohový vektor i vektor okamžité rychlosti byly pro přehlednost vynechány.

Kapitola 6

Flexe a torze

V předchozí kapitole jsme zkoumali, mimo jiné, druhé derivace vektorové funkce popisující křivku. V této kapitole budeme v tomto zkoumání pokračovat, tentokrát specificky pro parametr oblouk. Budeme čerpat z [1, 2, 3, 5, 6].

6.1 Flexe

Definice 6.1 *Vektor $\boldsymbol{r}''(s)$ nazveme* ***vektorem první křivosti*** *křivky l v bodě $X(s)$. Velikost tohoto vektoru označíme $k(s)$ a nazýváme jej* ***flexe*** *nebo* ***první křivost*** *křivky l v bodě $X(s)$.*

Z příkladu 3. v první kapitole víme, že jsou na sebe vektory $\boldsymbol{r}'(s)$ a $\boldsymbol{r}''(s)$ kolmé (protože $|r'(s)| = 1$ v každém bodě intervalu, na kterém je křivka zadána). Dále víme, že vektor $\boldsymbol{r}''$ leží v oskulační rovině, takže má stejný směr jako normála křivky.

Definice 6.2 *Jednotkový vektor $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|}$ nazýváme* ***vektor hlavní normály****.*

Uvažujme vektory $\boldsymbol{r}(s)$ a $\boldsymbol{r}(s+h)$. Tyto vektory spolu svírají orientovaný úhel α. Flexe může vyjádřit, jak se mění úhel α pro $h \to 0$, a to jako

$$k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}. \tag{6.1}$$

Rozepišme si vektor $\boldsymbol{r}''$ jako

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{t}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}.$$

Také víme, že

$$\boldsymbol{t}' = k\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n}.$$

Z těchto dvou rovnic dostáváme

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{6.2}$$

Protože $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'$ a $\boldsymbol{n}$ jsou jednotkové vektory, tak je jednotkový i vektor binormály $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$. Stejně, jako jsme odvodili pojem flexe, tak s pomocí binormály odvodíme pojem torze.

Protože $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 1$, tak zase víme, že $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}'$. Z tohoto faktu můžeme říct, že vektor $\boldsymbol{b}'$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{n}$, takže

$$\boldsymbol{b}' = A\boldsymbol{t} + B\boldsymbol{n}.$$

Pokud rovnici vynásobíme vektorem $\boldsymbol{t}$, z kolmosti $\boldsymbol{t}$ na $\boldsymbol{n}$ dostaneme

$$\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{t} = A.$$

Víme, že $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{t} = 0$, tento výraz zderivujeme, dostaneme $\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{t}' = 0$. Druhý člen víme, že je roven 0 ($\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{n}$), takže získáváme

$$A = 0.$$

Vrátíme-li se na začátek našich úvah, dostáváme

$$\boldsymbol{b}' = B\boldsymbol{n}.$$

Skalár B přeznačíme na $-\varkappa$. Derivaci binormály tedy zapíšeme jako

$$\boldsymbol{b}' = -\varkappa\boldsymbol{n}.$$

Definice 6.3 *Skalár $\varkappa(s)$ nazýváme* ***druhá křivost*** *nebo* ***torze*** *křivky l v bodě $X(s)$.*

Ještě bez důkazu si uveďme pomocný vzorec

$$k^2 = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}{(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})^3}. \tag{6.3}$$

Flexi křivky můžeme tedy spočítat s libovolnou parametrizací, nejen s obloukovým parametrem. Stejně tak torzi můžeme spočítat buď jako

$$\varkappa = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k^2}, \tag{6.4}$$

pokud je křivka zadaná parametrem oblouk, nebo jako

$$\varkappa = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}})}, \tag{6.5}$$

pokud je zadaná libovolným jiným parametrem.

6.2 Řešené příklady

1. Spočtěte flexi elipsy

$$f(t) = (a\cos t, b\sin t, 0).$$

2. Vypočtěte flexi a torzi křivky

$$\boldsymbol{p}(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right).$$

3. Určete funkci $f(t)$ tak, aby měla křivka

$$\boldsymbol{p}(t) = (r\cos t, r\sin t, f(t))$$

nulovou torzi.

6.2.1 Řešení

1. Nejprve si vypíšeme derivace $\dot{\boldsymbol{r}}$ a $\ddot{\boldsymbol{r}}$.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}} &= (-a\sin t,\, b\cos t,\, 0)\\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= (-a\cos t,\, -b\sin t,\, 0)\end{aligned}$$

Křivost můžeme spočítat podle (6.1) jako

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}{(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})^3}\\ &= \frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}\\ k &= \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Pro zajímavost, největší flexe křivka $\boldsymbol{r}$ nabývá v bodech pro $t \in \{0, \pi\}$ v případě, že x-ová osa je hlavní a v bodech $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ pokud je y-ová osa hlavní.

2. Derivace vektorové funkce $\boldsymbol{p}$ jsou

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= \left(3 - 3t^2,\, 6t,\, 3 + 3t^2\right)\\ \ddot{\boldsymbol{p}} &= (-6t,\, 6\; 6t).\end{aligned}$$

Flexi spočítáme tedy jako

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{(\dot{\boldsymbol{p}} \cdot \ddot{\boldsymbol{p}})^3}\\ &= \frac{648(t^2+1)^2}{18(t^2+1)^2}\\ &= 36\\ k &= 6\end{aligned}$$

Flexe křivky je konstantní. První spočtěme smíšený součin $(\dot{\boldsymbol{p}}, \ddot{\boldsymbol{p}}, \dddot{\boldsymbol{p}})$.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} &= 108(1-t^2) - 216t^2 + 216t^2 + 108(1+t^2)\\ &= 108(1 - t^2 + 1 + t^2)\\ &= 216\end{aligned}$$

Dále torzi spočítáme nasledovně:

$$\begin{aligned}\varkappa &= \frac{(\dot{\boldsymbol{p}}, \ddot{\boldsymbol{p}}, \dddot{\boldsymbol{p}})}{(\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}})}\\ &= \frac{216}{648(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

3. Jako první spočítáme $(\dot{\boldsymbol{p}}, \ddot{\boldsymbol{p}}, \dddot{\boldsymbol{p}})$.

$$\begin{vmatrix} -r\sin t & r\cos t & \dot{f}(t) \\ -r\cos t & -r\sin t & \ddot{f}(t) \\ r\sin t & -r\cos t & \dddot{f}(t) \end{vmatrix} = r^2\sin^2 t\,\dddot{f}(t) - r^2\sin t\cos t\ddot{f}(t) + r^2\sin t\cos t\ddot{f}(t) +$$
$$+ r^2\cos^2 t\,\dddot{f}(t) + r^2\cos^2 t\dot{f}(t) + r^2\sin^2 t\dot{f}(t)$$
$$= \dot{f}(t) + \dddot{f}(t) = 0$$

Tato diferenciální rovnice má výsledek

$$f(t) = a + b\cos t + c\sin t,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Křivka $\boldsymbol{p}(t)$ má torzi rovnu nule, právě když má funkce $f(t)$ tvar $f(t) = a + b\cos t + c\sin t$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

6.3 Neřešené příklady

1. Spočtěte flexi křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2,\ \ln t,\ \ln t^2\right).$$
2. Spočtěte flexi křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, 0).$$
3. Spočtěte flexi křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3},\ \cos 2t,\ \sin^2 t\right).$$
4. Spočtěte torzi křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(e^t, e^{2t}, e^{3t}\right).$$
5. Spočtěte torzi křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left(t^t, t^3,\ \ln t\right).$$
6. Spočtěte torzi křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left(2t - t^2, 2 - 3t^3 + t^2, t^3 - t^2\right).$$
7. Najděte nějakou křivku, která má konstantní flexi.
8. Spočítejte flexi křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(2t^2, t^3,\ \ln t\right).$$

6.3.1 Řešení

1. $k = \sqrt{\frac{80t^4}{64t^{12}+80t^8+10t^4+125}}$
2. $k = \frac{2\cos^2 t - 3t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$
3. $k = \sqrt{\frac{5\left(\sin^2 2t - t\sin 4t + t^2\cos^2 2t\right)}{t^4 + 5\sin^2 2t}}$

4. $\varkappa = \frac{5}{9e^{4t}+9e^{2t}+1}$

5. $\varkappa = \frac{12t^{t-1}-12t^{t}+6t^{t-2}}{81+t^{2t-2}+2t^{2t-3}+t^{2t-4}+36t^{2t+2}-36t^{2t+3}+9t^{2t+4}}$

6. $\varkappa = -\frac{6}{63t^4-18t^3+204t^2-30t+2}$

7. Kružnice, šroubovice.

8. $k = \sqrt{\frac{144t^{10}+81t^6+64t^4}{(9t^6+16t^4+1)^3}}$

6.4 Fyzikální využití

V předchozí kapitole jsme se zmínili o rozkladu vektoru okamžitého zrychlení na jeho přirozené složky. Tento rozklad teď ukážeme korektně. Vektor okamžitého zrychlení zapíšeme jako

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Protože $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$, kde v je velikost okamžité rychlosti, vektor okamžitého zrychlení derivujeme jako součin a získáváme

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\tau} + v\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$

Protože z (6.1) platí $\mathrm{d}\alpha = k\,\mathrm{d}s$ a navíc $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$, tak α je funkcí s a s je funkcí t. Člen $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$ díky tomu můžeme rozložit na

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

kde

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\alpha} = \boldsymbol{n}, \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = k.$$

Vektor okamžitého zrychlení můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v^2k\boldsymbol{n},$$

kde $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ je velikost tečného zrychlení a v^2k je velikost normálového zrychlení.

Kapitola 7

Frenetovy-Serretovy formule

V následující kapitole zavedeme rovnice, které budeme využívat po zbytek této práce. K tomu použijeme pojmy, které známe z předchozích dvou kapitol. Čerpat budeme z [3, 5].

7.1 Teoretický základ

V předchozí kapitole jsme zavedli křivost a torzi a v páté kapitole jsme zavedli Frenetův-Serretův repér. V tomto ortonormálním repéru si vyjádřeme vektory $\boldsymbol{t}', \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b}'$. Obecně tyto rovnice budou budou ve tvaru

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}' &= a_{11}\boldsymbol{t} + a_{12}\boldsymbol{n} + a_{13}\boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{n}' &= a_{21}\boldsymbol{t} + a_{22}\boldsymbol{n} + a_{23}\boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{b}' &= a_{31}\boldsymbol{t} + a_{32}\boldsymbol{n} + a_{33}\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Protože využíváme obloukové parametrizace, s jistotou víme, že

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}' &= k\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{b}' &= -\varkappa\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Stačí nám tedy ještě vyjádřit vektor $\boldsymbol{n}'$. Víme, že vektor $\boldsymbol{n}$ je jednotkový, takže $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}'$ a tedy $a_{22} = 0$. Vektor $\boldsymbol{n}'$ tedy vyjádříme jako

$$\boldsymbol{n}' = a_{21}\boldsymbol{t} + a_{23}\boldsymbol{b},$$

kde a_{21}, a_{23} jsou funkce parametru s. Jako další postup využijeme kolmosti vektorů $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{n}$. Pokud zderivujeme jejich skalární součin, tak

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n})' &= 0\\
\boldsymbol{t}' \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}' &= 0\\
\boldsymbol{t}' \cdot \boldsymbol{n} &= -\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}'\\
k\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} &= -\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}'\\
\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}' &= -k,
\end{aligned}$$

z čehož plyne, že $a_{21} = -k$. Stejným postupem bychom získali $a_{23} = \varkappa$, čímž jsme dokončili odvození Frenetových-Serretových rovnic.

Definice 7.1 *Vztahy*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}' &= \qquad k\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{n}' &= -k\boldsymbol{t} \qquad + \varkappa\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{b}' &= \qquad -\varkappa\boldsymbol{n}
\end{aligned}$$

se nazývají ***Frenetovy-Serretovy rovnice (formule)****.*

7.2 Řešené příklady

1. Pomocí Frenetových-Serretových formulí najděte derivaci vektoru hlavní normály kružnice
$$\boldsymbol{r}(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, 0)\,.$$

2. Dokažte, že křivka $\boldsymbol{r}(s)$ je přímkou nebo její částí, právě když je $k = 0$ pro každý bod křivky $\boldsymbol{r}(s)$.

3. Dokažte, že křivka $\boldsymbol{r}(s)$ je rovinná (tj. leží v jedné rovině), právě když je $\varkappa = 0$ v každém bodě křivky $\boldsymbol{r}(s)$.

7.2.1 Řešení

1. Nejdřív kružnici reparametrizujeme na obloukový parametr:
$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t r\,\mathrm{d}t \\
&= rt.
\end{aligned}$$
Křivku tedy vyjádříme jako
$$\boldsymbol{r}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right).$$
Tečna na křivku má tvar
$$\boldsymbol{t} = \left(-\sin\frac{s}{r},\, \cos\frac{s}{r}, 0\right).$$
Jako další najdeme vektor hlavní normály pomocí derivace tečny.
$$\boldsymbol{t}' = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},\, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, 0\right)$$
Velikost tohoto vektoru je hodnota flexe, takže $k = \frac{1}{r}$ a $\boldsymbol{n} = \left(-\cos\frac{s}{r},\, -\sin\frac{s}{r}\right)$. Zbývá nám najít vektor binormály a torzi. Víme, že $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$. Z toho získáváme
$$\boldsymbol{b} = (0, 0, 1)\,.$$
Protože je derivace binormály nulový vektor, pak je torze nulová. Derivace vektoru hlavní normály je tedy
$$\boldsymbol{n}' = -\frac{1}{r}\left(-\sin\frac{s}{r},\, \cos\frac{s}{r}, 0\right).$$

2. Předpokládejme, že křivka $\boldsymbol{r}$ je přímka. Tuto křivku jde vyjádřit jako

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} + s\boldsymbol{t},$$

kde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}$ jsou pevně dané vektory. První a druhá derivace takové křivky je rovna

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}'' = \mathbf{o},$$

což ale znamená, že $k = 0$. Opačně předpokládejme, že $k = 0$ pro každé s. To ale znamená, že $\boldsymbol{r}'' = \mathbf{o}$. Po integraci dostáváme

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{c}_1,$$

kde předpokládáme, že $\boldsymbol{c}_1$ je jednotkový vektor. Po druhé integraci dostáváme

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_2 + s\boldsymbol{c}_1,$$

což je vyjádření přímky a úloha je tak vyřešena.

3. Předpokládejme, že je křivka $\boldsymbol{r}$ rovinná. Pro každou hodnotu parametru s je jednotkový vektor binormály konstantní. Protože

$$\|\boldsymbol{b}'\| = \varkappa,$$

tak je jasné, že $\varkappa = 0$. Opačně předpokládejme, že $\varkappa = 0$. Protože derivace binormály je nulový vektor, vektor binormály je konstantní. Z toho plyne, že pro každé s platí $\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Pokud tuto rovnici zintegrujeme od s_0 po s, dostáváme

$$(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

To znamená, že oba vektory $r(s)$ a r_0 jsou na binormálu kolmé a oba leží v oskulační rovině. Křivka je proto rovinná.

7.3 Neřešené příklady

1. Najděte Frenetovy-Serretovy rovnice křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)\,.$$

2. Najděte Frenetovy-Serretovy rovnice křivky

$$\boldsymbol{p}(t) = \left((1 - \frac{1}{3}s)^{\frac{3}{2}}, (1 + \frac{1}{3}s)^{\frac{3}{2}}, s\sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

7.3.1 Řešení

1. $\boldsymbol{t}' = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\sqrt{2}s}{2},\ -\sin\frac{\sqrt{2}s}{2}, 0\right)$
   $\boldsymbol{n}' = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\sqrt{2}s}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   $\boldsymbol{b}' = -\frac{1}{8}\left(-\cos\frac{\sqrt{2}s}{2},\ -\sin\frac{\sqrt{2}s}{2}, 0\right)$

2. $\boldsymbol{t}' = \frac{1}{12\left(1-\frac{1}{9}s^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}s},\ \sqrt{1-\frac{1}{3}s},\ 0\right)$
   $\boldsymbol{n}' = -\frac{1}{144\left(1-\frac{1}{9}s^2\right)}\left(-\left(1-\frac{1}{3}s\right)^{\frac{1}{2}},\ \left(1+\frac{1}{3}s\right)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{2}\right) +$
   $+\frac{1}{141\left(1-\frac{1}{9}s^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{3}s},\ \sqrt{1+\frac{1}{3}s},\ -\sqrt{2}\right)$
   $\boldsymbol{b}' = -\frac{\sqrt{2}}{141\left(1-\frac{1}{9}s^2\right)}\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}s},\ \sqrt{1-\frac{1}{3}s},\ 0\right)$

Kapitola 8

Kanonické rovnice

V této kapitole si vyjádříme křivku pouze pomocí parametru s, flexe k a torze $\varkappa$. K tomu použijeme Taylorův rozvoj. Čerpat budeme z [3, 5].

8.1 Teoretický základ

Mějme křivku $\boldsymbol{r}$ zadanou parametrem oblouk (tedy $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$). Ukažme si několik derivací této křivky:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{t} \\
\boldsymbol{r}'' &= \boldsymbol{t}' = k\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{r}''' &= k'\boldsymbol{n} + k\boldsymbol{n}' = k'\boldsymbol{n} + k(-k\boldsymbol{t} + \varkappa\boldsymbol{b}) = -k^2\boldsymbol{t} + k'\boldsymbol{n} + k\varkappa\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{r}^{(4)} &= -\boldsymbol{t}(3kk') + \boldsymbol{n}(-k^3 + k'' - k\varkappa^2) + \boldsymbol{b}(2k'\varkappa + k\varkappa')...
\end{aligned}$$

Takto bychom mohli pokračovat až do libovolného řádu za předpokladu, že tyto deriavace existují. Taylorův rozvoj provedeme v okolí bodu $s_0 = 0$. Taylorův polynom má tedy tvar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(s) &= \boldsymbol{r}_0 + \frac{\boldsymbol{r}_0'}{1!}s + \frac{\boldsymbol{r}_0''}{2!}s^2 + \frac{\boldsymbol{r}_0'''}{3!}s^3 + ... \\
&= 0 + \boldsymbol{t}_0 s + \frac{1}{2}k_0^2\boldsymbol{n}_0 s^2 + \frac{1}{6}s^3\left(-k_0^2\boldsymbol{t}_0 + k_0'\boldsymbol{n}_0 + k_0^2\varkappa_0\boldsymbol{b}_0\right) + ...
\end{aligned}$$

Vektory $\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0$ tvoří ortonormální soustavu, vektor $\boldsymbol{r}(s)$ můžeme tedy vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{t}_0 &\left(s - \frac{1}{6}k_0^2 s^3 + \frac{1}{8}k_0 k_0' s^4 + ...\right) + \\
&+ \boldsymbol{n}_0\left(\frac{1}{2}k_0 s^2 + \frac{1}{6}k_0' s^3 + ...\right) + \boldsymbol{b}_0\left(\frac{1}{6}k\varkappa s^3 + ...\right).
\end{aligned}$$

Definice 8.1 *Souřadnicové vyjádření vektoru $\boldsymbol{r}(s)$ nazveme **kanonické rovnice křivky** $\boldsymbol{r}(s)$.*

Definice 8.2 *Veličiny s, k, $\varkappa$ se nazývají **přirozené souřadnice** a rovnice $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$ se nazývají **přirozené rovnice křivky**.*

8.2 Řešené příklady

1. Najděte přirozené rovnice kružnice

$$\boldsymbol{r}(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)\,.$$

2. Najděte přirozené rovnice křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))\,.$$

3. Najděte parametrické vyjádření křivky, jejíž přirozené rovnice jsou zadány explicitně

$$k = \frac{s}{a^2}$$

8.2.1 Řešení

1. Už víme, že

$$\begin{aligned} s(t) &= rt, \\ k(s) &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Zároveň je kružnice rovinná křivka, takže

$$\varkappa = 0.$$

Vidíme, že flexe je konstantní, a proto přirozené rovnice nezávisí na parametru s a přirozené rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{r} \\ \varkappa &= 0. \end{aligned}$$

2. Z příkladu 1. v kapitole 3 víme, že

$$\begin{aligned} s(t) &= -4a\cos\frac{t}{2}. \\ \cos t &= \frac{s^2}{8a^2} - 1 \end{aligned}$$

První křivost spočítáme podle (6.3), dostáváme

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}{(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})^3} \\ &= \frac{(a^2\cos t - a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t)^2}{\big((a - a\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\big)^3} \\ &= \frac{a^4\cos^2 t - 2a^4\cos t + a^4}{\big(2a^2(1-\cos t)\big)^3} \\ &= \frac{a^4(\cos t - 1)^2}{8a^6(1-\cos t)^3} \\ &= \frac{1}{8a^2(1-\cos t)}, \end{aligned}$$

za $\cos t$ dosadíme a získáme

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{8a^2\left(1 - \frac{s^2}{8a^2} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{16a^2 - s^2}. \end{aligned}$$

Přirozené rovnice křivky $\boldsymbol{r}$ jsou tedy

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}} \\ \varkappa &= 0. \end{aligned}$$

3. Protože platí (6.1), můžeme úlohu řešit jako diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} k &= \frac{s}{a^2} \\ \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} &= \frac{s}{a^2} \\ \mathrm{d}\alpha &= \frac{s}{a^2}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Úhel α můžeme rozepsat jako souřadnice x', y' :

$$\begin{aligned} x' &= \cos \mathrm{d}\alpha, \\ y' &= \sin \mathrm{d}\alpha, \end{aligned}$$

po dosazení za $\mathrm{d}\alpha$ už dostáváme pro x

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= \cos \frac{s^2}{2a^2} \\ \mathrm{d}x &= \cos \frac{s^2}{2a^2}\mathrm{d}s \\ x &= \int_{s_0}^{s} \cos \frac{s^2}{2a^2}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Pro y je výsledek analogický, křivka je zadána v souřadnicovém tvaru jako

$$\begin{aligned} x &= \int_{s_0}^{s} \cos \frac{s^2}{2a^2}\mathrm{d}s \\ y &= \int_{s_0}^{s} \sin \frac{s^2}{2a^2}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

8.3 Neřešené příklady

1. Najděte přirozené rovnice křivky

$$\boldsymbol{p}(t) = \left(a(\ln \cot \frac{t}{2} - \cos t), a \sin t\right).$$

2. Najděte přirozené rovnice křivky zadané explicitně

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

3. Určete přirozené rovnice křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a \sin \frac{t}{2}\right).$$
4. Najděte parametrické vyjádření křivky, jejíž přirozené rovnice jsou zadány implicitně
$$2ask^2 = 1.$$
5. Najděte parametrické vyjádření křivky, jejíž přirozené rovnice jsou zadány explicitně
$$k = \frac{1}{as}.$$

8.3.1 Řešení

1. $\frac{1}{k^2} + a^2 = a^2 e^{-\frac{2s}{a}}$
2. $k = \frac{a}{a^2+s^2}$
3. $k = \frac{1}{4a}\sqrt{1 + \sin^2 \frac{s}{4a}}, \qquad \varkappa = -\frac{1}{4a} \cos \frac{s}{4a} \frac{2+\sin^2 \frac{s}{4a}}{1+\sin^2 \frac{s}{4a}}$
4. $\boldsymbol{r}(t) = \left(a\left(\cos\sqrt{\frac{2s}{a}} + \sqrt{\frac{2s}{a}} \sin\sqrt{\frac{2s}{a}}\right), a\left(\sin\sqrt{\frac{2s}{a}} - \sqrt{\frac{2s}{a}}\cos\sqrt{\frac{2s}{a}}\right)\right)$
5. $\boldsymbol{p}(t) = \big(\frac{ae^{\alpha a}}{a^2+1}(a\cos\alpha + \sin\alpha, \frac{ae^{\alpha a}}{a^2+1}(a\sin\alpha - \cos\alpha\big)$, kde $k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

Kapitola 9

Styk křivek

V poslední kapitole se budeme studovat styk křivek. Stejně jako v předchozích několika odstavcích, budeme užívat parametr oblouk s. Práci nakonec zakončíme poznatky o oskulačních kružnicích. Čerpat budeme z [1, 3, 5, 8].

9.1 Teoretický základ

Uvažujme dvě křivky, k a l, zadané vektorovými funkcemi $\boldsymbol{r}(s)$ a $\boldsymbol{p}(s)$, které mají společný počáteční bod $s_0 = 0$. Nyní uvažujme nějakou jinou hodnotu parametru s_1 a zkoumejme vektor $\boldsymbol{d}(s_1) = \boldsymbol{r}(s_1) - \boldsymbol{p}(s_1)$.

Definice 9.1 *Křivky $\boldsymbol{p}(s)$ a $\boldsymbol{r}(s)$ mají v bodě $\boldsymbol{r}(s_0) = \boldsymbol{p}(s_0)$* ***styk nejméně q-tého řádu****, jestliže platí*

$$\lim_{s_1 \to 0} \frac{\boldsymbol{d}(s_1)}{s_1^p} = 0, \qquad p \in \{0, 1, \ldots, q\}.$$

Bylo by vhodné zjistit, kdy křivky $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{r}$ mají styk q-tého řádu. Odpověď nabízí následující věta.

Věta 9.1 *Křivky $\boldsymbol{p}(s)$ a $\boldsymbol{r}(s)$ mají v bodě s_0 styk alespoň q-tého řádu právě tehdy, když*

$$\boldsymbol{r}(s_0) = \boldsymbol{p}(s_0), \quad \boldsymbol{r}'(s_0) = \boldsymbol{p}'(s_0),$$
$$\ldots, \quad \boldsymbol{r}^{(q)}(s_0) = \boldsymbol{p}^{(q)}(s_0).$$

Definice styku nám teď umožní definovat hlavní pojem této kapitoly.

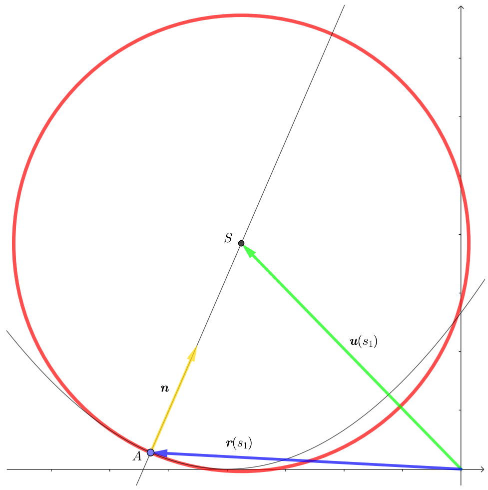
Definice 9.2 *Kružnice procházející bodem křivky $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, v němž $k \neq 0$ a má v něm s touto křivkou styk nejméně druhého řádu, se nazývá* ***oskulační kružnice*** *křivky v daném bodě. Střed této kružnice nazýváme* ***střed křivosti****, její poloměr nazýváme* ***poloměr křivosti****.*

Oskulační kružnice je tedy taková kružnice, která má v bodě dotyku tečnu, která má stejnou velikost i směr, jako tečna této dané křivky. Oskulační kružnice je úzce spjatá i s flexí křivky. Oskulační kružnice leží v oskulační rovině křivky. Navíc, pokud její poloměr označíme r, tak platí

$$r = \frac{1}{k}. \tag{9.1}$$

Polohový vektor středu křivosti $\boldsymbol{u}(s_1)$ najdeme jako

$$\boldsymbol{u}(s_1) = \boldsymbol{r}(s_1) + r\boldsymbol{n}. \tag{9.2}$$



Obrázek 9.1: Oskulační kružnice křivky v bodě dotyku A daném polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(s_1)$ (modrý vektor). Vektor $\boldsymbol{u}(s_1)$ (zelený) je polohový vektor středu křivosti, vektor $\boldsymbol{n}$ (žlutý) je vektor hlavní normály.

9.2 Řešené příklady

1. Určete střed křivosti pro libovolný bod křivky

$$\boldsymbol{p}(t) = (r\cos t, r\sin t, ct).$$

2. Určete poloměr křivosti křivky

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\right).$$

3. Vypočtěte flexi a střed křivosti elipsy zadané parametricky ve tvaru

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$$

   v některém z vrcholů elipsy.

4. Určete poloměr křivosti Bernoulliovy lemniskáty v bodě $(a\sqrt{2}, 0)$.

9.2.1 Řešení

1. Jako první reparametrizujeme křivku na parametr oblouk

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + c^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^t \sqrt{r^2 + c^2}\,\mathrm{d}t \\ &= t\sqrt{r^2 + c^2}. \end{aligned}$$

   Po reparametrizaci je křivka ve tvaru

$$\boldsymbol{p}(s) = \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, \frac{cs}{r^2+c^2}\right).$$

Dále vypočítáme rovnici vektoru hlavní normály.

$$\begin{aligned}
k\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{p}'' \\
&= \left(-\frac{r}{r^2+c^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, -\frac{r}{r^2+c^2}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{n} &= \left(\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, 0\right).
\end{aligned}$$

Teď už stačí spočítat poloměr křivosti, ten označíme r_1.

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{\frac{r}{r^2+c^2}} \\
&= \frac{r^2+c^2}{r}
\end{aligned}$$

Střed křivosti spočítáme z (9.2), takže

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{p} + r\boldsymbol{n} \\
&= \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, \frac{s}{r^2+c^2}\right) + \left(\cos\frac{s}{r^2+c^2}, \sin\frac{s}{r^2+c^2}, 0\right) \\
\boldsymbol{u} &= (r+1)\cdot\left(\cos\frac{s}{r^2+c^2}, \sin\frac{s}{r^2+c^2}, \frac{s}{r^2+c^2}\right).
\end{aligned}$$

2. Stačí nám spočítat první křivost křivky a využít její převrácenou hodnotu. Pro přehlednost začněme flexí.

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{\left(\sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^{-t}, 2\right)^2}{\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)^3} \\
&= \frac{2e^{2t}+2e^{-2t}+4}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^3} \\
&= \frac{2}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^2}
\end{aligned}$$

Poloměr křivosti tedy vychází jako

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\sqrt{2}(e^{2t}+2+e^{-2t})}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})^2}{2}.
\end{aligned}$$

3. První a druhá derivace fuknce $\boldsymbol{r}(t)$ jsou

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= (-a\sin t, b\cos t, 0), \\
\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= (-a\cos t, -b\sin t, 0).
\end{aligned}$$

Flexe vychází jako

$$k = \frac{ab}{(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t})^3}.$$

Vrchol elipsy je v bodě daným polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(0) = (a, 0, 0)$, střed křivosti tedy vychází

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{r}(0) + r\boldsymbol{n} \\ &= (a, 0, 0) + \frac{b^2}{a}(-1, 0, 0) \\ &= (a - \frac{b^2}{a}, 0, 0).\end{aligned}$$

4. Bernoulliova lemniskáta je dána vektorovou funkcí

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{2}a\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \sqrt{2}a\frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}\right).$$

Bod $A = (\sqrt{2}a, 0)$ získáme pro $t = 0$.

Dále musíme vypočítat vektory $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ a $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. Výsledné vektory jsou

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \left(-\sqrt{2}a\left(\frac{\sin t}{1+\sin^2 t} - \frac{\cos t \sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2}\right), \sqrt{2}a\left(\frac{\cos 2t}{1+\cos^2 t} + \frac{\sin^2 2t}{2(1+\cos^2 t)^2}\right)\right) \\ \ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= (-\sqrt{2}a(\frac{\cos t(1+\sin^t) - \sin^2 t \cos t}{(1+\sin^2 t)^2} - \frac{(-\sin t \sin 2t + 2\cos t \cos 2t)}{(1+\cos^2 t)^4} - \\ &- \frac{4\sin^2 2t(1+\cos^2 t)\sin 2t}{(1+\cos^2 t)^4}), \sqrt{2}a(\frac{-2\sin 2t(1+\sin^2 t) - \sin t \sin 2t}{(1+\cos^2 t)^2} + \\ &+ \frac{4\sin 4t(1+\cos^2 t)^2 + 4\sin^3 2t(1+\cos^2 t)}{4(1+\cos^2 t)^4}))\end{aligned}$$

Po dosazení $t = 0$ se výrazy zjednodušší a výsledné vektory v bodě $(a\sqrt{2}, 0)$ jsou

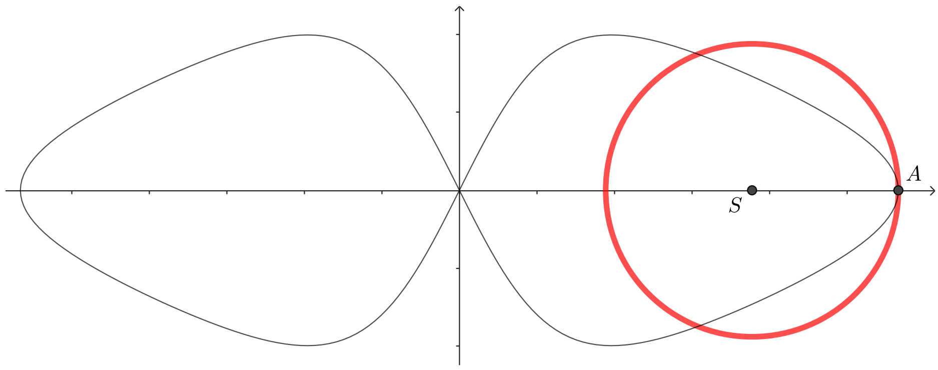
$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}(0) &= (0, \sqrt{2}a) \\ \ddot{\boldsymbol{r}}(0) &= (3\sqrt{2}a, 0).\end{aligned}$$

Flexi spočítáme již známým způsobem, dostáváme

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{(|\dot{r} \times \ddot{r}|)^2}{(\dot{r} \cdot \dot{r})^3} \\ &= \frac{36a^4}{8a^6} \\ k &= \frac{3\sqrt{2}}{2a}.\end{aligned}$$

Poloměr křivosti Bernoulliovy lemniskáty v bodě $(\sqrt{2}a, 0)$ tedy vychází jako

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}a.$$



Obrázek 9.2: Bernoulliova lemniskáta a její oskulační kružnice s bodem styku z příkladu 4.

9.3 Neřešené příklady

1. Určete středy křivosti křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t, \sqrt{2}\ln t, \frac{1}{t}\right).$$

2. Určete středy křivosti křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t), 0).$$

3. Najděte poloměr křivosti v libovolném bodě křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left((1-at)^{\frac{3}{2}}, (1+at)^{\frac{3}{2}}, t\sqrt{1-\frac{9}{2}a^2}\right)$$

4. Spočtěte poloměr křivosti v libovolném bodě křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^3, \ln t, \frac{3t}{2}\right).$$

5. Spočtěte poloměr křivosti v libovolném bodě křivky
$$\boldsymbol{p}(t) = \left(\cos 2t, \sin^2 t, \frac{t^3}{3}\right).$$

6. Spočtěte poloměr křivosti v libovolném bodě křivky
$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^{\frac{3}{2}}, t^2, \ln t\right).$$

9.3.1 Řešení

1. $\boldsymbol{u} = \left(t, \sqrt{2}\ln t, \frac{1}{t}\right) + \sqrt{t^2+1}\left(\frac{-\sqrt{3t^6+4t^4+4t^2+4}(4t^2+1)}{t^{15}}, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3t^6+4t^4+4t^2+4}}{t^{12}}, \frac{-2\sqrt{3t^6+4t^4+4t^2+4}}{t^{12}}\right)$
2. $\boldsymbol{u} = (a(t+\sin t),\ -a(1-\cos t)\ 0)$
3. $r = \frac{4\sqrt{1-a^2t^2}}{18\left(1-\frac{9}{2}a^2\right)^4+81}$

4. $r = \frac{\left(36t^6+9t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12t\sqrt{36t^6+36t^4+1}}$

5. $r = \frac{\sqrt{20}\left(5\sin^2 2t+t^4\right)^{\frac{3}{2}}}{20t(\sin 2t-t\cos t)}$

6. $r = \sqrt{\frac{64t^5+36t^2+t}{48t^4+256t+81}}$

Závěr

Cílem práce bylo zpracovat studijní materiály pro potřeby studentů diferenciální geometrie křivek. Hlavním přínosem práce jsou řešené příklady, které pomohou studentovi pochopit postup jejich řešení, a neřešené příklady, na kterých si své znalosti může sám vyzkoušet. Kromě toho si studenti mohou přečíst i o praktickém využití diferenciální geometrie ve studiu kinematiky hmotného bodu.

Literatura

[1] KOLÁŘ I., POSPÍŠILOVÁ L.7 *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* Brno: Masarykova univerzita, 2007

[2] KOVANCOV N. I., ZRAŽEVSKAJA G. M., KOČAROVSKIJ V. G., MICHAJLOVSKIJ V. I. *Differencialnaja geometria, topologija, tenzornyj analiz Sbornik zadač.* 2. Vydání 1989, ISBN 5-11-001416-7

[3] BUDINSKÝ B., KEPR B. *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi.* SNTL Praha, 1970

[4] TILICH J., RICHTEREK L. *Klasická mechanika.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2007

[5] DOUPOVEC M. *Diferenciální geometrie a tenzorový počet.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1999, ISBN 80-214-1470-7

[6] HORT D., RACHŮNEK J. *Algebra 1.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2005, ISBN 80-244-0631-4

[7] MIKEŠ J. et al. *Differential geometry of special mappings.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2019, ISBN 978-80-xxx

[8] KUSOVÁ L. *Vlastnosti vybraných rovinných křivek.* České Budějovice, 2015. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Vedoucí práce prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

[9] SUCHOMEL J. *Parametrický popis křivek.* 2014. Maturitní práce. Smíchovská střední průmyslová škola. Garant Mgr. Zbyněk Nechanický.