



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

URČOVÁNÍ VÝSLEDNÝCH VNITŘNÍCH ÚČINKŮ UZAVŘENÝCH PRUTŮ

DETERMINATION OF STRESS RESULTANTS IN CLOSED FRAMES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Richard Horák

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jiří Vaverka

BRNO 2021

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Richard Horák
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Jiří Vaverka
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Určování výsledných vnitřních účinků uzavřených prutů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Určování výsledných vnitřních účinků (VVÚ) je v případě prutů, jejichž střednicí je uzavřená křivka, vždy úloha staticky neurčitá. VVÚ tedy u těchto prutů nezávisí jen na vnějším zatížení a výchozí geometrii střednice, ale také na materiálových vlastnostech a geometrických charakteristikách příčného průřezu. Při výpočtu je tedy nutné – na rozdíl od staticky určitých úloh – uvažovat současně také deformaci prutu. Obecně se navíc jedná o úlohy s vyšším stupněm statické neurčitosti, a to i tehdy, omezíme-li se na rovinné případy; řešení proto může být značně pracné. Významného zjednodušení je možné dosáhnout, je-li prut symetrický z hlediska geometrie a materiálových vlastností a současně na něj působí symetrická nebo antisymetrická vnější silová soustava. V takovém případě je možné úlohu zredukovat a řešit pouze některou ze symetrických částí. V případě nesymetrického zatížení je stejná redukce možné dosáhnout, využijeme-li princip superpozice.

Cíle bakalářské práce:

1. Vysvětlit pojem VVÚ ve vztahu k plošným silám v příčném průřezu (statická ekvivalence), vysvětlit praktický význam VVÚ pro výpočet napětí v prutech, popsat princip určování VVÚ s důrazem na specifika uzavřených prutů.
2. Samostatně provést a přehledně zpracovat řešení vzorových úloh, které budou zahrnovat: symetrické pruty zatížené symetricky nebo antisymetricky (redukce úlohy využitím symetrie), symetrické pruty zatížené obecně (řešení superpozicí), nesymetrické pruty (obecné řešení, ukázka různých možností částečného uvolnění).

Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, Přemysl. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vyd. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-21-2592-X.

GERE, James M. a GOODNO, Barry J. Mechanics of materials. 7th ed. Stamford: Cengage Learning, 2009. 1002 s. ISBN 978-0-495-43807-6.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá určováním výsledných vnitřních účinků (VVÚ) rovinných prutů s uzavřenou střednicí. V první části práce je uveden teoretický základ, který je následně aplikován v druhé části práce k vyřešení tří vzorových příkladů. V první úloze je aplikována teorie symetrického a antisymetrického průběhu VVÚ ke snížení stupně statické neurčitosti symetrického rovinného prutu zatíženého symetrickou a antisymetrickou silovou soustavou. V druhé úloze je využit princip superpozice k nahrazení obecného vnějšího zatížení prutu symetrickým a antisymetrickým vnějším zatížením. Úloha je dále řešena stejně jako v případě první úlohy. Třetí úloha je řešena obecným postupem s uvedením vícero možností částečného uvolnění. Dále je ověřen předpoklad umožňující řešení energie napjatosti vlivem pouze ohybového momentu. Na závěr třetí úlohy jsou analyticky zjištěné hodnoty porovnané s hodnotami určenými numerickou metodou pomocí programu ANSYS.

Abstract

The bachelor's thesis deals with the determination of the internal stress resultants (ISR) of planar beams with a closed centerline. The first part of the thesis presents a theoretical basis, which is then applied in the second part to solve three tasks. In the first task, the theory of symmetrical and antisymmetrical course of ISR is applied to reduce the degree of static indeterminacy of a symmetrical planar beam loaded by a symmetrical and antisymmetrical force system. In the second task the method of superposition is used to replace the general external load of the beam by symmetrical and antisymmetrical external loads. The task is further solved in the same way as in the case of the first task. The third task is solved by a general procedure with several options of released structures. Furthermore, the assumption enabling the solution of the stress energy due to the bending moment only is verified. At the end of the third task, the analytically determined values are compared with the values determined by the numerical method using the software ANSYS.

Klíčová slova

výsledné vnitřní účinky (VVÚ), uzavřený prut, symetrie, antisymetrie, deformace, Castiglianova věta, energie napjatosti

Keywords

internal stress resultants (ISR), closed beam, symmetry, antisymmetry, deformation, Castigliano's theorem, strain energy

Bibliografická citace

HORÁK, Richard. *Určování výsledných vnitřních účinků uzavřených prutů*. Brno, 2021. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132646>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Vaverka.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že předloženou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením svého vedoucího bakalářské práce pana Ing. Jiřího Vaverky za použití uvedené literatury.

V Brně dne

Richard Horák

Poděkování

Rád bych zde upřímně poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Jířimu Vaverkovi za velmi cenné rady, čas, ochotu a skvělé odborné vedení při tvorbě mé bakalářské práce. Velké dík patří také mé rodině a přátelům, kteří mě podporovali po celou dobu mého studia.

Obsah

1	Úvod.....	12
2	Teorie lineární pružnosti	13
2.1	Vlastnosti lineárně pružného materiálu	13
2.2	Deformační práce a energie napjatosti	14
2.3	Vybrané věty lineární pružnosti.....	14
2.3.1	Saint Venantův princip	14
2.3.2	Věta o superpozici napjatosti a deformace	14
2.3.3	Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)	15
2.3.4	Věta o vzájemnosti posuvů	16
2.3.5	Věta o deformační práci silové soustavy	16
2.3.6	Věta Castiglianova.....	16
3	Prut v pružnosti a pevnosti.....	18
3.1	Prutové předpoklady	18
3.1.1	Geometrické předpoklady.....	18
3.1.2	Vazbové a zatěžovací předpoklady	18
3.1.3	Deformační předpoklady	18
3.1.4	Napjatostní předpoklady	19
3.2	Geometrické charakteristiky příčného průřezu.....	19
3.3	Uzavřené pruty – rámy	20
3.4	Statická určitost uzavřených rovinných prutů	21
4	Výsledné vnitřní účinky (VVÚ).....	22
4.1	Vnitřní síly a VVÚ prutu	22
4.2	VVÚ v závislosti na typu namáhání prutu.....	24
4.3	Přístupy k určování průběhů VVÚ	24
4.3.1	Diferenciální přístup	24
4.3.2	Integrální přístup.....	25
4.4	Symetrické a antisymetrické složky VVÚ	27
4.5	Závislost symetrických a antisymetrických složek VVÚ na deformaci	28
4.6	Využití symetrie a antisymetrie u uzavřených prutů.....	29
4.7	Příklady částečného uvolnění	30
5	Závislost napětí na VVÚ	31
5.1	Namáhání tahem a tlakem	31
5.2	Namáhání ohybem	31
5.3	Namáhání smykem	32
6	Energie napjatosti a deformace prutu.....	33
6.1	Energie napjatosti	33
6.2	Deformace prutu	35
7	První úloha – využití symetrie	36
7.1	Rozbor úlohy	36
7.2	Úplné a částečné uvolnění celého rámu.....	36
7.3	Úplné a částečné uvolnění s využitím dvou os symetrie	37
7.4	Průběh VVÚ	37
7.5	Vyjádření deformační podmínky $w_B = -\frac{\delta}{2}$ v silovém tvaru	39

7.6	Vyjádření deformační podmínky $\varphi_B = 0$ v silovém tvaru.....	39
7.7	Řešení neznámých silových účinků.....	40
7.8	Grafické zobrazení průběhu VVÚ.....	40
7.9	Maximální ohybový moment.....	41
8	Druhá úloha – využití superpozice	42
8.1	Rozbor úlohy	42
8.2	Uvolnění vazeb	42
8.3	Využití superpozice	43
8.4	Řešení prutu symetricky zatíženého	44
8.4.1	Částečné uvolnění	44
8.4.2	Průběh VVÚ	44
8.4.3	Vyjádření deformační podmínky $u_C = 0$ v silovém tvaru	47
8.4.4	Vyjádření deformační podmínky $\varphi_C = 0$ v silovém tvaru.....	47
8.5	Řešení prutu antimetricky zatíženého.....	48
8.5.1	Částečné uvolnění antimetricky zatíženého prutu	48
8.5.2	Průběh VVÚ	49
8.5.3	Vyjádření deformační podmínky $w_C = 0$ v silovém tvaru.....	51
8.5.4	Řešení neznámých silových účinků.....	52
8.6	Průběh VVÚ celého prutu	53
8.7	Grafické zobrazení VVÚ	56
8.8	Maximální ohybový moment.....	56
9	Třetí úloha – obecné řešení.....	57
9.1	Rozbor úlohy	57
9.2	Uvolnění vazeb	57
9.3	Typy částečného uvolnění	58
9.4	Vyjádření stykových výslednic.....	59
9.5	Průběh VVÚ	60
9.6	Vyjádření deformační podmínky $u_{A1} = -u_{A2}$ v silovém tvaru	62
9.7	Vyjádření deformační podmínky $\varphi_{A1} = -\varphi_{A2}$ v silovém tvaru	63
9.8	Vyjádření deformační podmínky $\varphi_{B1} = -\varphi_{B2}$ v silovém tvaru.....	63
9.9	Řešení neznámých silových účinků.....	64
9.10	Grafické zobrazení průběhu VVÚ.....	65
9.11	Maximální ohybový moment.....	66
9.12	Vliv všech složek VVÚ a numerické řešení	66
10	Závěr.....	68
	Seznam použité literatury.....	70
	Seznam použitých symbolů a zkratk	71
	Seznam obrázků	73
	Seznam tabulek.....	75
	Seznam příloh.....	76

1 Úvod

Bezpečnost je jedním z nejdůležitějších faktorů při návrhu a konstrukci výrobků. Navrhovaná součást musí být zkonstruována tak, aby se předešlo mezním stavům, které by mohly ohrozit životnost této součásti nebo bezpečnost vůči okolí. Při návrhu součásti jsou potřeba znalosti z různých vědních disciplín, dle kterých se volí např. vhodná konstrukce nebo materiál.

Mezi tyto disciplíny patří také mechanika těles, jejíž součástí je pružnost a pevnost zabývající se napjatostí a deformací těles. Tato tělesa se v pružnosti a pevnosti nahrazují vhodnými výpočtovými modely, mezi nimiž jsou právě prutová tělesa, která budou blíže rozebrána v této práci. Model prutového tělesa umožňuje zavést předpoklady, kterými lze usnadnit určování napjatosti a deformace. Problematiku určování napětí lze u prutových těles nahradit určováním výsledných vnitřních účinků (VVÚ) a ty pak zpětně převést na napětí [1]. Výhodou VVÚ je jejich jednoduché grafické znázornění, díky kterého lze velmi snadno určit potenciální kritická místa v prutu. Výjimkou jsou však uzavřené pruty, které jsou vždy staticky neurčitě a při jejich řešení je potřeba uvažovat také s deformací prutu, čímž se zvýší náročnost řešení úlohy.

V dnešní době se však analytické řešení, díky rozvíjející se výpočetní a simulační technice, nahrazuje numerickými výpočty v moderních výpočetních softwarech, založených např. na metodě konečných prvků (MKP) [7]. O rozdílech vypočtených hodnot (analyticky a numericky) je poté krátce hovořeno na závěr této práce.

Teoretická část bakalářské práce se zabývá základy lineární pružnosti a teorií prutových těles se zaměřením na rovinná prutová tělesa s uzavřenou střednicí. Dále se práce zabývá analytickým určováním průběhu VVÚ v prutu. V případě uzavřených prutů jsou zavedena kritéria, podle kterých lze určování VVÚ značně zjednodušit. V praktické části práce jsou tyto teoretické základy aplikovány na řešení tří vzorových příkladů.

Bakalářská práce je koncipována tak, aby doplnila vědomosti problematiky určování VVÚ uzavřených prutů, vycházejících z literatury [1] (základní literatura k předmětu Pružnost a pevnost 1, vyučovaném na Fakultě strojního inženýrství, VUT v Brně), ve které se z důvodu časové náročnosti analytického řešení, probírají úlohy s uzavřenými pruty pouze okrajově.

2 Teorie lineární pružnosti

Pojem lineární pružnost je pro tuto bakalářskou práci velmi zásadní. Řešení pomocí lineární pružnosti vychází z toho, že veškerá problematika má lineární charakter. Bude-li se vyšetřovat napjatost a deformace těles, zavede se předpoklad, který zavádí lineární závislost mezi parametry vnějšího zatížení, napětí a deformace. Tento předpoklad značně sníží náročnost řešeného problému, avšak vyvolává nutnost zavést potřebné podmínky lineární pružnosti [1]:

- materiál tělesa je dokonale pružný,
- deformace tělesa je malá,
- složky tenzoru přetvoření jsou malé,
- okrajové podmínky jsou lineární,
- napjatost a deformace je určena okamžitými parametry zatížení.

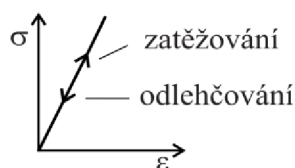
2.1 Vlastnosti lineárně pružného materiálu

Je-li zaveden pojem dokonale pružný materiál v závislosti k pojmu lineární pružnost, je potřeba definovat chování materiálu také lineární závislostí. Výhodou je, že většina konstrukčních materiálů v praxi vykazuje do určité míry zatížení právě lineární chování. Takové materiály lze považovat za tzv. Hookovské materiály. Lineární závislost mezi napětím a deformací poté popisuje Hookův zákon [1]:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.1)$$

kde σ je napětí, E Youngův modul (modul pružnosti v tahu) a ε přetvoření. Tato závislost má charakter přímky (obr. 2.1), kde E je směrnice zátěžné přímky a zároveň jednou z charakteristik pružného materiálu. Další charakteristikou je Poissonovo číslo μ (součinitel příčné kontrakce), které v závislosti s délkovým přetvořením udává příčnou kontrakci materiálu. Je-li například těleso natahováno, pak pro délkové přetvoření ε_x a příčná přetvoření $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ platí vztah [1]:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x. \quad (2.2)$$



Obr. 2.1: Závislost napětí na přetvoření lineárně pružného materiálu. Převzato z [3].

U prutů se objevuje tzv. prutová napjatost (viz kap. 3.1.4), která rovněž obsahuje složky smykového napětí. Z tohoto důvodu je potřeba Hookův zákon definovat také pro smykové napětí [1]:

$$\tau = G\gamma, \quad (2.3)$$

kde γ je úhlové přetvoření a G modul pružnosti ve smyku, který se získá ze vztahu:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.4)$$

Jedná-li se o izotropní materiál (vlastnosti nezávisí na směru zatěžování), stačí znát pro popis lineárně pružného chování materiálu pouze dvě materiálové charakteristiky, a to E a μ [3].

2.2 Deformační práce a energie napjatosti

Je-li těleso deformováno, musí na něj působit vnější zatížení. Toto zatížení po celou dobu zatěžování koná deformační práci A , a pokud v tělese vznikají pouze pružné deformace, „pak podle zákona o zachování energie se tato deformační práce přemění v energii napjatosti, která je akumulována v tělese“ [1]. Pro přírůstek deformační práce a přírůstek energie napjatosti tělesa poté platí:

$$dA = dW . \quad (2.5)$$

Je-li těleso zatěžováno z nezatíženého stavu (není v něm naakumulovaná žádná energie napjatosti) a je v pružném stavu po celou dobu zatěžování, je celková deformační práce rovna celkové energii napjatosti [1]:

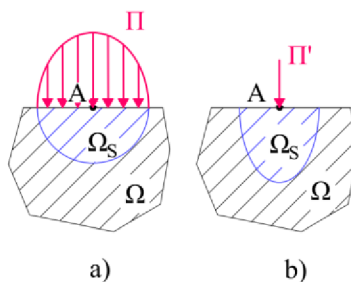
$$A = W . \quad (2.6)$$

2.3 Vybrané věty lineární pružnosti

V praktické části bakalářské práce je využíváno postupů, které zavádějí následující věty lineární pružnosti, přičemž je přidána také věta o mechanické ekvivalenci, neboli Saint Venantův princip.

2.3.1 Saint Venantův princip

Nahradí-li se silová soustava Π (obr. 2.2a), která působí v blízkém okolí bodu A tělesa Ω ekvivalentní silovou soustavou Π' (obr. 2.2b), pak napjatost tělesa Ω bude pro oba typy zatížení téměř stejná s výjimkou blízkého okolí náhrady Ω_S [1].



Obr. 2.2: Saint Venantův princip. Převzato a upraveno z [1].

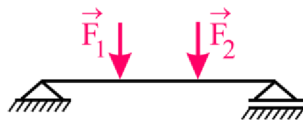
Saint Venantův princip dovoluje reálné zatížení a reálné vazby mezi tělesy nahradit modelovým zatížením a modelovými vazbami mezi tělesy, které jsou pro analytický výpočet mnohem výhodnější. Tato náhrada je však závislá na skutečném řešeném problému, a je tedy potřeba zvážit, zdali je možná [1].

2.3.2 Věta o superpozici napjatosti a deformace

Napjatost a deformace tělesa, která je způsobená silovou soustavou Π je rovna součtu napjatostí a deformací tělesa, způsobených jednotlivými složkami silové soustavy Π [1].

2.3.3 Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

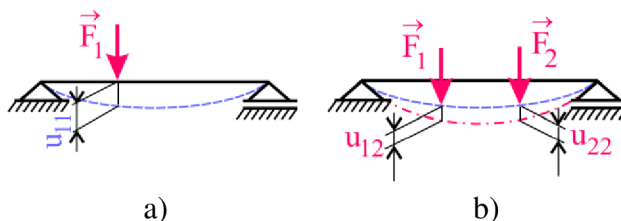
Bettiho věta říká, že „práce silové soustavy Π_1 na složkách deformace vyvolaných silovou soustavou Π_2 , je rovna práci silové soustavy Π_2 na složkách deformace vyvolaných silovou soustavou Π_1 “ [1]. Odvození je provedeno pomocí nosníku (obr. 2.3), který je z nezatíženého stavu zatížený silami \vec{F}_1 a \vec{F}_2 . Pro přehlednost je posuv působíště síly \vec{F}_i po její nositelce vyvolaný silou \vec{F}_j označen u_{ij} .



Obr. 2.3: Bettiho věta – zatížený nosník. Převzato z [3].

Zatíží-li se nosník nejdříve silou \vec{F}_1 (obr. 2.4a), vyvolá tato síla posuv u_{11} a vykoná deformační práci A_{11} . Přidá-li se síla \vec{F}_2 (obr. 2.4b), vyvolá posuv u_{22} a vykoná práci A_{22} . Síla \vec{F}_2 taktéž způsobí posuv působíště síly \vec{F}_1 , označen u_{12} a síla \vec{F}_1 tak vykoná další deformační práci A_{12} . Součet těchto prací je roven [1]:

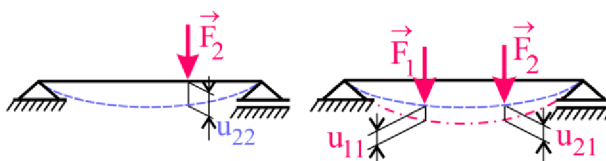
$$A_1 = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{1}{2} F_1 u_{11} + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}. \quad (2.7)$$



Obr. 2.4: Bettiho věta – zatížení prvně silou \vec{F}_1 . Převzato z [3].

Analogicky, pokud se začne zatěžovat nejdříve silou \vec{F}_2 (obr. 2.5) bude celková deformační práce:

$$A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{11} + \frac{1}{2} F_2 u_{21}. \quad (2.8)$$



Obr. 2.5: Bettiho věta – zatížení prvně silou \vec{F}_2 . Převzato z [3].

V lineární pružnosti deformace ani napjatost nezávisí na historii zatěžování, a proto ani deformační práce nezávisí na historii zatěžování. Potom platí:

$$A_1 = A_2. \quad (2.9)$$

Dosazením rovnic (2.7) a (2.8) do rovnice (2.9) a úpravě vyjde vztah, jenž je označován jako Bettiho věta [1]:

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21}. \quad (2.10)$$

2.3.4 Věta o vzájemnosti posuvů

Vyjde-li se z Bettiho věty, pak zavedením jednotkových sil do rovnice (2.10) a náhradou posuvů u_{12} a u_{21} , tzv. příčinkovými součiniteli η_{12} a η_{21} vyjde vztah popisující vzájemnost posuvů

$$\eta_{12} = \eta_{21} . \quad (2.11)$$

Jinak řečeno, posuv η_{12} je posuv působitě síly F_1 od jednotkové síly F_2 a obráceně posuv η_{21} je posuv působitě síly F_2 od jednotkové síly F_1 . Poté lze např. posuv působitě síly F_1 vyjádřit ve tvaru [3]:

$$u_1 = F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12} . \quad (2.12)$$

2.3.5 Věta o deformační práci silové soustavy

Pro vyjádření věty o deformační práci jsou využita pouze zatížení, objevující se ve výpočetní části bakalářské práce. Celé znění věty lze nalézt v literatuře [1, s. 41].

Je-li pružné těleso Ω zatíženo silovou soustavou Π , která obsahuje osamělé síly $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_n$, osamělé silové dvojice $\vec{M}_1 \dots \vec{M}_m$ a liniové síly určené rozložením \vec{q} na střednici prutu γ , pak deformační práce A vykonaná touto silovou soustavou je dle [1]:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j + \frac{1}{2} \int_{\gamma} q u ds , \quad (2.13)$$

kde u je posuv působitě osamělých nebo elementárních sil ve směru jejich nositelek, φ úhlové natočení (dále jen natočení) přímky pevně spojené s působitěm osamělé silové dvojice a ds značí integraci po délce střednice.

2.3.6 Věta Castiglianova

Castiglianova věta je ze všech dříve zmíněných vět ta nejdůležitější, jelikož umožňuje řešit posuvy a natočení pružně deformovaného tělesa, je-li známa energie napjatosti tohoto tělesa. Obecné odvození Castiglianovy věty lze nalézt v [1, s. 41]. V této práci je k odvození Castiglianové věty využito předchozích vět aplikovaných na nosník dle obr. 2.3 [3].

V kap. 2.3.4 je určen posuv působitě síly F_1 pomocí příčinkových součinitelů η . Tento posuv se vyjádří také pro působitě síly F_2 v následujícím tvaru [3]:

$$u_2 = F_2\eta_{22} + F_1\eta_{21} . \quad (2.14)$$

Pro celkovou deformační práci A vykonanou silami F_1 a F_2 se využije věty o deformační práci silové soustavy:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i = \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 , \quad (2.15)$$

kde po dosazení posuvů z rovnic (2.12), (2.14) a úpravě získá deformační práce tvar:

$$A = \frac{1}{2} (F_1^2 \eta_{11} + F_1 F_2 \eta_{12} + F_2^2 \eta_{22} + F_1 F_2 \eta_{21}) . \quad (2.16)$$

Pro přírůstek dF kterékoliv síly, poté odpovídá přírůstek deformační práce dA . Bude-li se předpokládat přírůstek síly dF_1 , lze rovnici (2.16) derivovat podle této síly do tvaru (2.17). Příčinkoví součinitelé byli definováni pro jednotkové zatížení a vystupují v derivaci jako konstanty.

$$\frac{\partial A}{\partial F_1} = \frac{1}{2} (2F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12} + F_2\eta_{21}). \quad (2.17)$$

Z věty o vzájemnosti posuvů platí $\eta_{12} = \eta_{21}$ a pro lineární pružnost také $\partial A = \partial W$, poté pro přírůstek energie napjatosti se získá vztah:

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \frac{1}{2} (2F_1\eta_{11} + 2F_2\eta_{12}). \quad (2.18)$$

Vynásobí-li se závorka $\frac{1}{2}$, bude pravá strana rovnice rovna posuvu u_1 podle (2.12). Stejnou úpravou lze pro přírůstek síly dF_2 získat posuv u_2 . V tomto případě lze výsledný vztah zobecnit a získat tak 1. část Castiglianovy věty [3]:

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (2.19)$$

Pokud by na nosník působila osamělá silová dvojice \vec{M} , lze stejným postupem pro natočení φ_i v místě působení silové dvojice \vec{M}_i odvodit 2. část Castiglianovy věty [3]:

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad (2.20)$$

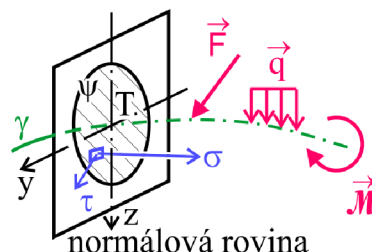
První a druhou část Castiglianovy věty lze slovně vyjádřit následovně: „*Posuv působitě síly \vec{F}_i po její nositelce je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této síly. Úhel natočení v místě působení silové dvojice \vec{M}_i v rovině jejího působení je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této silové dvojice*“ [3].

Nevýhodou Castiglianovy věty je, že pomocí ní lze řešit pouze posuvy a natočení v místech, kde působí buď osamělá síla \vec{F} nebo osamělá silová dvojice \vec{M} . Pokud by bylo potřeba vyřešit posuv či natočení v místě, kde nepůsobí žádné z těchto dvou zatížení, je nezbytné do tohoto místa tato zatížení zavést a při vyjádření posuvu nebo natočení tato zatížení položit rovny nule [1].

Dále je potřeba si uvědomit, že posuv u_i , resp. natočení φ_i řešené pomocí Castiglianovy věty respektují směr působení síly \vec{F}_i , resp. silové dvojice \vec{M}_i . Vyjde-li tedy posuv u_i , resp. natočení φ_i se záporným znaménkem, pak je tento posuv, resp. natočení v opačném smyslu než působící síla \vec{F}_i , resp. silová dvojice \vec{M}_i .

3 Prut v pružnosti a pevnosti

V pružnosti a pevnosti (PP) je nejjednodušším modelem reálného tělesa z hlediska napjatosti a deformace tzv. prutové těleso (obr. 3.1). Toto modelové těleso však musí splňovat určité geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady. Tyto předpoklady jsou pak společně označovány jako prutové předpoklady [1].



Obr. 3.1: Prut v pružnosti a pevnosti. Převzato z [3].

3.1 Prutové předpoklady

Tato kapitola vychází z literatury [1], není-li uvedeno jinak.

3.1.1 Geometrické předpoklady

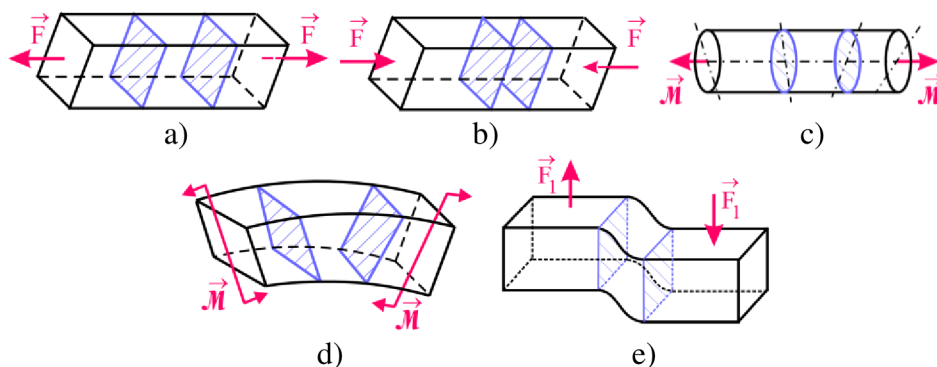
- Prut je jasně definován střednicí γ a v každém bodě střednice příčným průřezem ψ , který leží v rovině kolmé na tečnu střednice (normálová rovina). Střednice γ je soustava bodů, tvořená těžišti T jednotlivých příčných průřezů ψ .
- Střednice γ je hladká a spojitá křivka konečné délky.
- Délka střednice γ je řádově větší než největší rozměr příčného průřezu ψ .
- Příčný průřez ψ je tvořen jednonásobně nebo vícenásobně spojitou rovinnou oblastí, kterou lze popsat charakteristikami příčného průřezu.

3.1.2 Vazbové a zatěžovací předpoklady

- Vazby omezují pouze posuvy a natočení střednice.
- Veškeré vnější zatížení působí pouze na střednici a jedná se o osamělé a liniové síly nebo silové dvojice. Pokud zatížení nepůsobí na střednici, je potřeba jej nahradit staticky ekvivalentním zatížením, které již působí na střednici.

3.1.3 Deformační předpoklady

- Během deformace prutu zůstává střednice stále spojitou a hladkou křivkou.
- Během deformace prutu zůstávají příčné průřezy stále rovinné a vždy kolmé k deformované střednici. Dle typu zatěžování se příčné průřezy:
 - vzájemně oddalují (tah), přibližují (tlak) a deformují (obr. 3.2a, obr. 3.2b),
 - natáčejí kolem osy ležící v příčném průřezu a deformují (ohyb) (obr. 3.2d),
 - natáčejí kolem osy kolmé k příčnému průřezu a nedeformují (krut) (obr. 3.2c),
 - posouvají kolmo ke střednici a nedeformují (smyk) (obr. 3.2e).



Obr. 3.2: Deformace příčných průřezů: a) tah, b) tlak, c) ohyb, d) krut, e) smyk. Převzato z [3].

3.1.4 Napjatostní předpoklady

V prutu vzniká zvláštní typ dvojosé napjatosti, která se označuje jako prutová napjatost. Tu lze popsat tenzorem napětí, jehož jedinými nenulovými složkami je normálové napětí a smykové napětí působící v rovině příčného průřezu [3]:

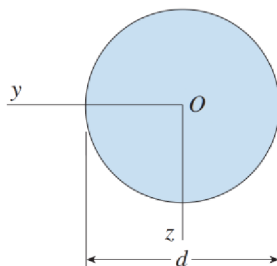
$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Geometrické charakteristiky příčného průřezu

V předchozí kapitole byl prutu přiřazen model tělesa, jenž je popsán střednicí γ a příčným průřezem ψ . V následujících kapitolách je zaveden předpoklad, který umožní řešit pouze zatížení střednice. Napětí se pak získá vztahem silového působení na střednici ke geometrii příčného průřezu, jenž je definován průřezovými charakteristikami. Mezi tyto charakteristiky pak patří např. plocha příčného průřezu S , hlavní kvadratické momenty k osám příčného průřezu J_y, J_z nebo polární kvadratický moment J_p . Pro jednoduché tvary příčných průřezů, které obsahují aspoň jednu osu symetrie lze zavést následující vztahy např. pro [6]:

- kruhový příčný průřez (obr. 3.3):

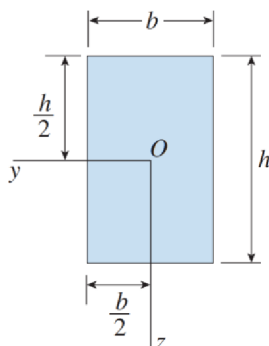
$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64} \quad a \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (3.1) \text{ a } (3.2)$$



Obr. 3.3: Kruhový příčný průřez. Převzato a upraveno z [6].

- obdélníkový příčný průřez (obr. 3.4):

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \quad a \quad J_z = \frac{b^3h}{12}. \quad (3.3) \text{ a } (3.4)$$

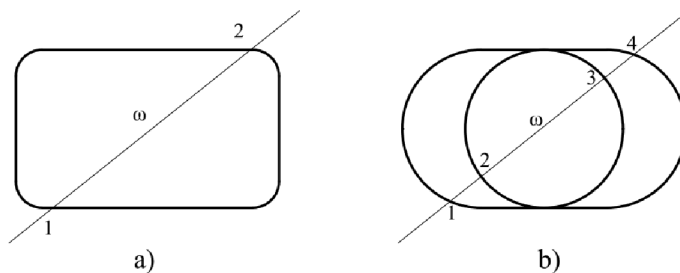


Obr. 3.4: Obdélníkový příčný průřez. Převzato a upraveno z [6].

3.3 Uzavřené pruty – rámy

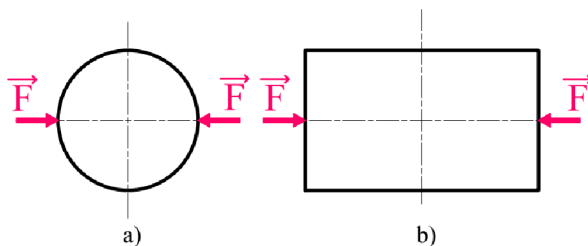
Prutové předpoklady pouze definují model reálného prutového tělesa. Tato reálná tělesa však v praxi vykazují vysokou různorodost, co se týče geometrie, zatížení nebo vazeb. Pro účely definice uzavřených prutů je potřeba rozlišovat určitá kritéria, podle kterých lze pruty rozlišovat. Všechna kritéria lze nalézt v [1, s. 59]. Tato kapitola se zaměří přímo na uzavřené pruty.

Uzavřený prut je takový prut, jenž lze rozdělit na dva prvky řezem vedeným právě $(n+1)$ body střednice. O takovém prutu lze říct, že je n -krát uzavřený. V případě obr. 3.5a lze prut rozdělit řezem vedeným dvěma body střednice a je tedy jedenkrát uzavřený. V případě obr. 3.5b je prut třikrát uzavřený [1].



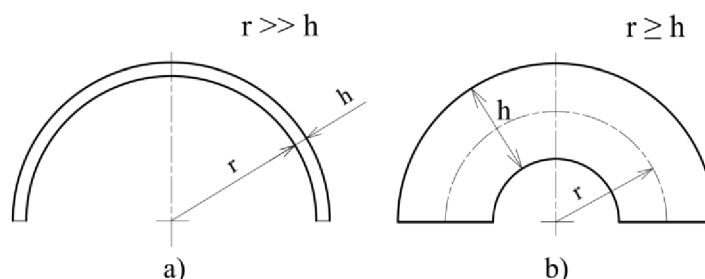
Obr. 3.5: Pruty s uzavřenou střednicí. Převzato a upraveno z [1].

Z principu uzavřenosti prutu, musí jejich střednice obsahovat zakřivené úseky (obr. 3.6a) nebo konečný počet bodů nespojitosti hladkosti střednice. Pokud je v těchto bodech zamezena vzájemná pohyblivost prvků, hovoří se o lomených prutech nebo tzv. rámech (obr. 3.6) [1].



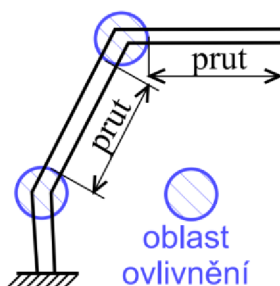
Obr. 3.6: a) Zkřivený prut, b) Rám

Zakřivené části prutu lze rozlišovat dle poměru charakteristického rozměru h příčného průřezu vzhledem k poloměru křivosti střednice r na pruty slabě (obr. 3.7a) a silně (obr. 3.7b) zakřivené. U slabě zakřivených prutů ($r \gg h$) lze napjatost a deformace řešit stejně jako u přímých prutů. U silně zakřivených prutů ($r \geq h$) se musí napjatost a deformace řešit pomocí teorie silně zakřivených prutů, a proto zde pro jednoduchost budou uvažovány pouze pruty slabě zakřivené [1].



Obr. 3.7: a) Slabě zakřivený prut, b) Silně zakřivený prut. Převzato a upraveno z [1].

V případě lomených prutů nejsou v místech zlomu splněny prutové předpoklady, protože zde není hladký průběh střednice a nelze tedy tato místa řešit pomocí prosté pružnosti. Pokud však součet délek prutu ovlivněných zlomy je mnohonásobně menší než celková délka řešeného prutu (obr. 3.8), lze zlomy považovat za tuhé a lze řešit pouze blízké okolí těchto zlomů. Pro tuhý zlom platí, že po celou dobu zatěžování zůstává zlom nedeformovaný a pouze se natačí nebo posouvá jako celek. Pokud se ve zlomech neuvazuje s deformací lze energie napjatosti tělesa řešit pouze pro části prutu s hladkou střednicí [3].



Obr. 3.8: Prut ovlivněný zlomy. Převzato z [3].

3.4 Statická určitost uzavřených rovinných prutů

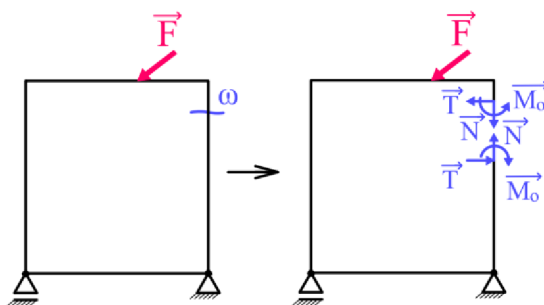
Je-li rovinné prutové těleso vázáno nepohyblivě, a zároveň na něj působí obecná rovinná silová soustava, poté mohou nastat dva případy [5]:

- prut je uložen staticky určitě ($\nu = \mu$),
- prut je uložen staticky neurčitě ($\nu < \mu$),

kde ν je počet použitelných rovnic statické rovnováhy (pro prut zatížený obecnou rovinnou silovou soustavou je $\nu = 3$) a μ je počet neznámých vazbových parametrů. Stupeň vnější statické neurčitosti se určí z:

$$s = \mu - \nu. \quad (3.5)$$

Je-li $s = 0$, jedná se o úlohu vně staticky určitou. Je-li $s > 0$, je úloha vně staticky neurčitá.



Obr. 3.9: Otevření uzavřeného prutu.

Problém však nastává při částečném uvolnění uzavřeného prutu (obr. 3.9). Uvolněním vzniknou v řezu tři neznámé parametry $NP = \{\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o\}$, které zajišťují hladkost a spojitost střednice. Pro tyto neznámé parametry lze sestavit tři rovnice vnitřní statické rovnováhy, avšak všechny tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení ($0 = 0$). To z hlediska počtu použitelných rovnic vnitřní statické rovnováhy dává $\nu = 0$ a uzavřený prut je vždy 3-krát vnitřně staticky neurčitý [1].

Uzavřený prut se nedá řezem rozdělit na dva prvky, ale pouze se z uzavřeného prutu vytvoří prut otevřený. U uzavřených prutů také platí závislost stupně vnitřní statické neurčitosti na stupni uzavřenosti prutu. Např. pro rovinné úlohy platí, je-li prut n -krát uzavřený, tak je také $3n$ -krát vnitřně staticky neurčitý [1].

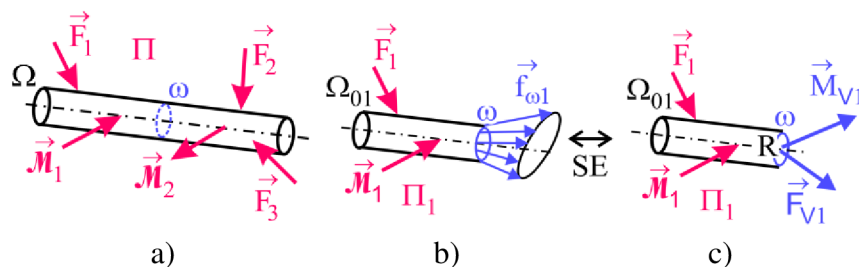
4 Výsledné vnitřní účinky (VVÚ)

Jak je uvedeno v [1, s. 76]: „Znalost určování VVÚ je nutným předpokladem zvládnutí problému pružnosti prutů,“ a proto je této kapitole věnována největší pozornost.

4.1 Vnitřní síly a VVÚ prutu

Vnitřní síly v tělese vznikají jako reakce materiálu na vnější zatížení a jeho deformaci. Působí-li v oblasti elastických deformací, pak tyto síly po odlehčení navracejí deformované těleso do jeho původního nedeformovaného stavu [2]. Je-li těleso v nezátženém stavu, pak v něm nepůsobí žádné vnitřní síly.

Pokud je těleso (prut) Ω (obr. 4.1a) ve statické rovnováze (SR), musí být ve statické rovnováze každá jeho uvolněná část Ω_{01} (obr. 4.1b), případně Ω_{02} . Je-li těleso (prut) Ω zatížené silovou soustavou Π , pak na jeho uvolněnou část Ω_{01} působí silová podsoustava Π_1 . Aby byl uvolněný prvek Ω_{01} opět ve statické rovnováze, musí v uvolňovacím řezu ω působit elementární plošné síly $\vec{f}_{\omega 1}$ (obr. 4.1b), neboli také obecná napětí v bodech řezu ω [3].

Obr. 4.1: Prutové těleso: a) působení silové soustavy Π , b) uvolněný prvek Ω_{01} , c) statická ekvivalence vnitřních sil. Převzato a upraveno z [3].

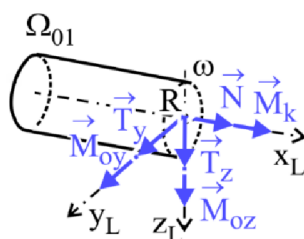
Vyjde-li se z obecných prutových předpokladů (viz kap. 3.1), poté vnější zatížení působí na střednici γ prutu a je potřeba obecná napětí $\vec{f}_{\omega 1}$ nahradit staticky ekvivalentní (SE) silovou výslednicí \vec{F}_{V1} a momentovou výslednicí \vec{M}_{V1} (obr. 4.1c), které působí v těžišti příčného průřezu R (těžiště je značeno R místo obvyklého T, aby nedošlo k záměně s označením posouvající síly T). Výslednice $\vec{F}_{V1}, \vec{M}_{V1}$ musí být ve statické rovnováze s vnější silovou soustavou Π_1 [3].

Analogicky to stejné platí pro uvolněný prvek Ω_{02} . Protože jsou prvky Ω_{01} a Ω_{02} ve statické rovnováze, musí pro výslednice platit podmínky [1]:

$$\vec{F}_{V1} + \vec{F}_{V2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\vec{M}_{V1} + \vec{M}_{V2} = 0. \quad (4.2)$$

Pro uvolněný prvek Ω_{01} lze do těžiště R zavést lokální souřadnicový systém (obr. 4.2), kde osa x_L je totožná se směrem normály řezu ω a osy y_L, z_L vedou v tečném směru k rovině řezu ω , neboli k příčnému průřezu ψ . Takto zavedené směry jsou využívány v literatuře [1], a aby nedocházelo ke komplikacím, jsou tyto směry zavedeny i v této práci, ačkoliv je volba souřadnicového systému individuální.

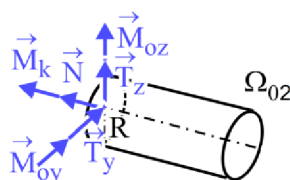


Obr. 4.2: Rozklad výslednic \vec{F}_V a \vec{M}_V . Převzato a upraveno z [3].

Již obecně značené výslednice \vec{F}_V a \vec{M}_V , které jsou obecně orientovány v prostoru lze rozložit do těchto os a získají se tak jednotlivé složky výslednic \vec{F}_V a \vec{M}_V , které se označují jako *výsledné vnitřní účinky* (VVÚ) (obr. 4.2) [3]. Složky VVÚ se označují podle směru jejich působení, v závislosti k rovině příčného průřezu ψ . Ve směru

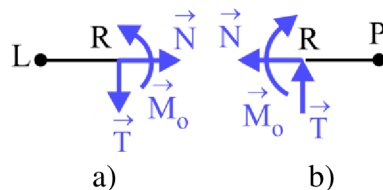
- normály působí normálová síla \vec{N} a kroutící moment \vec{M}_k ,
- tečném působí posouvající síly \vec{T}_y, \vec{T}_z a ohybové momenty $\vec{M}_{oy}, \vec{M}_{oz}$.

Analogicky totéž platí, uvolní-li se prvek Ω_{02} . Aby byla zachována znaménková konvence, je potřeba složky VVÚ zavést v opačném smyslu lokálního souřadnicového systému (obr. 4.3). Musí tedy platit výslednicová podmínka (4.1), (4.2) [3].



Obr. 4.3: Znaménková konvence VVÚ uvolněného prvku Ω_{02} . Převzato a upraveno z [3].

V případě rovinných úloh, vnější zatížení vyvolává pouze složky VVÚ $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o$, přičemž ohybový moment \vec{M}_o je chápán jako silová dvojice působící v této rovině. Znaménkovou konvenci lze zavést dle obr. 4.4.



Obr. 4.4: Znaménková konvence VVÚ v rovině. Převzato a upraveno z [3].

Jak je uvedeno v kap. 3.3, musí se u uzavřených prutů objevovat zlomy nebo zakřivené části, což způsobuje natáčení lokálního souřadnicového systému. Pokud se bude postupně uvolňovat levá část prutu (L), bude znaménková konvence zachována dle obr. 4.4a a pokud se bude řešit pravá část prutu (P), platí znaménková konvekce dle obr. 4.4b.

4.2 VVÚ v závislosti na typu namáhání prutu

Bakalářská práce se zabývá rovinnými úlohami, a proto bude od této kapitoly veškerá teorie vztažena pouze na rovinné úlohy.

Pojem VVÚ byl zaveden v závislosti k vnějšímu zatížení, přičemž VVÚ jsou popsány funkcemi závislými právě na vnějším zatížení a také na tvaru střednice. Je-li prut definován přímou střednicí, můžou pro něj nastat tyto typy namáhání [3]:

- a) jednoduché – v celém průběhu střednice působí pouze jedna nenulová složka VVÚ. Namáhání lze označit jako:
 - prostý tah – $N > 0$ (obr. 3.2a),
 - prostý tlak – $N < 0$ (obr. 3.2b),
 - prostý smyk – $T \neq 0$ – (obr. 3.2e),
 - prostý ohyb – $M_o \neq 0$ – (obr. 3.2d), realizován pouze osamělým momentem.
- b) kombinované – vzniká tehdy, působí-li alespoň v jednom bodě střednice dvě nenulové složky VVÚ.

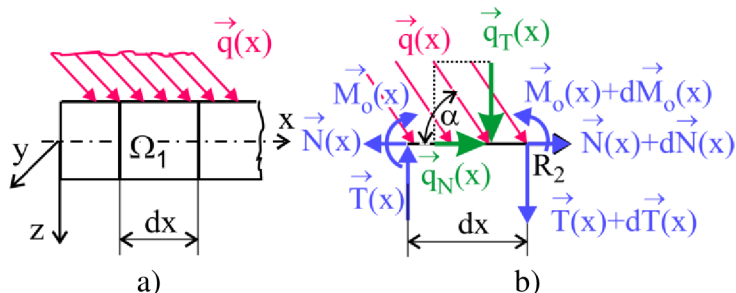
Uzavřené pruty jsou nejčastěji namáhány kombinovaně, avšak v případech, kdy je jeden typ namáhání převládající nad ostatními, například namáhání ohybem, lze úlohu řešit zohledněním pouze ohybového momentu (viz kap. 6.1) [1].

4.3 Přístupy k určování průběhů VVÚ

Průběh VVÚ lze určit diferenciálním nebo integrálním přístupem. V praktické části bakalářské práce je využit integrální přístup, který je pro určení průběhu VVÚ vhodnější, z hlediska jeho obecné použitelnosti.

4.3.1 Diferenciální přístup

Diferenciální přístup vychází z podmínek SR elementárního prvku prutu. Například u přímého rovinného prutu (obr. 4.5a), zatíženého obecným liovým zatížením $\vec{q}(x)$, se uvolní jednonásobně elementární prvek (obr. 4.5b) a do řezů se zavedou patřičné složky VVÚ. Je-li zaveden počátek souřadnicového systému v levé části prutu, je potřeba do pravého řezu uvolněného elementárního prvku také přidat elementární přírůstky $d\vec{N}(x)$, $d\vec{T}(x)$, $d\vec{M}_o(x)$ [3].



Obr. 4.5: Diferenciální přístup – uvolnění prvku prutu Ω_1 . Převzato z [3].

Působení liniového zatížení na elementární prvek lze považovat za konstantní co se týče jeho velikosti i směru. Uvolněný prvek musí být ve statické rovnováze, a lze zapsat následující podmínky:

$$\sum F_x = 0: -N(x) + q_N(x)dx + N(x) + dN(x) = 0, \quad (4.3)$$

$$\sum F_z = 0: -T(x) + q_T(x)dx + T(x) + dT(x) = 0, \quad (4.4)$$

$$\sum M_{R_2} = 0: -M_o(x) + q_T(x)dx \frac{dx}{2} - T(x)dx + M_o(x) + dM_o(x) = 0, \quad (4.5)$$

kde: $q_N(x) = q(x) \cos \alpha$, $q_T(x) = q(x) \sin \alpha$. (4.6), (4.7)

Protože se jedná o velmi malé přírůstky, lze zanedbat diferenciály 2. řádu a upravit rovnice do následujících vztahů:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_N(x), \quad (4.8)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q_T(x), \quad (4.9)$$

$$\frac{dM_o(x)}{dx} = T(x), \quad (4.10)$$

které se značí jako Schwedlerovy věty [3]. Derivací vztahu (4.10) se získá výraz:

$$\frac{d^2 M_o(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q_T(x), \quad (4.11)$$

který udává závislost ohybového momentu a posouvající síly na vnějším zatížení. Ačkoliv je v praktické části využit integrální přístup, znalost právě této závislosti (4.11) značně usnadní grafické znázornění průběhu VVÚ.

4.3.2 Integrální přístup

Určení průběhu VVÚ integrálním přístupem je názorně ukázáno v praktické části práce, avšak je k tomu potřeba nejdříve zavést pár podmínek. Integrální přístup vychází z podmínek SR konečného prvku prutu. V kterémkoli bodě R střednice rozdělit řezem ω a v něm zavést příslušné složky VVÚ. Jelikož jsou složky VVÚ na pravém a levém uvolněném prvku staticky rovnovážné, pak z hlediska určování průběhu VVÚ nezáleží, který prvek je pro určování VVÚ zvolen.

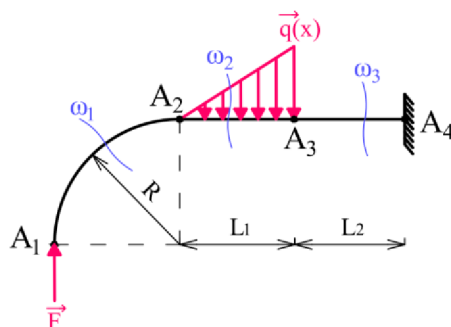
Volí se ten prvek, který je pro určování VVÚ jednodušší [3]. Pro uvolněný prvek se zavedou podmínky statické rovnováhy:

- silové: $\sum F_x = 0$, $\sum F_z = 0$ pro normálový a tečný směr,
- momentové: $\sum M_{oR} = 0$,

přičemž momentová podmínka je určena k těžišti R, kde moment od neznámých účinků posouvající síly \vec{T} a normálové síly \vec{N} je nulový. Potom platí, že složky VVÚ jsou dány součtem VVÚ vzniklých od jednotlivého vnějšího silového působení, což umožní princip superpozice (viz kap. 2.3.2) [3].

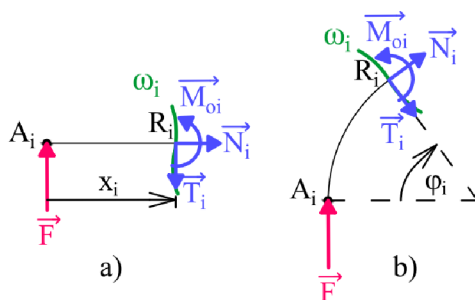
Průběh VVÚ podél celé střednice lze určit, jako funkci s konečným počtem bodů nespojitosti A_i (obr. 4.6), ve kterých nemusí mít funkce průběhu VVÚ spojitý průběh ani spojitou derivaci. Body A_i a A_{i+1} tvoří hranice intervalů, ve kterých je volen vždy jeden řez ω_i . Body nespojitosti je potřeba volit v místech, kde dochází ke změně průběhu vnějšího zatížení, nebo ke změně tvaru střednice (místa kde dochází ke zlomu střednice nebo ke změně křivosti střednice) [3]. V případě staticky neurčitých prutů je potřeba k určení průběhu VVÚ volit bod nespojitosti také v místě změny příčného průřezu [1]. Na výsledný průběh VVÚ tento bod sice nemá vliv, ale je potřeba vymezit intervaly s různými příčnými průřezy, jelikož v každém z nich se naakumuluje jiná energie napjatosti.

Např. u prutu na obr. 4.6, pro určení průběhu VVÚ podél celé střednice stačí zavést tři intervaly a v nich tři řezy ω_1 až ω_3 .



Obr. 4.6: Integrovní přístup – volba řezů ω_i a body nespojitosti A_i .

Polohu řezu ω_i (bodu R_i střednice) definuje kartézská lokální souřadnice x_i (obr. 4.7a) v případě přímých prutů a v případě zakřivených prutů polární lokální souřadnicí φ_i (obr. 4.7b) [3]. Lokální souřadnice mají počátek a konec určený hranicemi A_i a A_{i+1} každého i -tého intervalu, přičemž počáteční hodnota lokální souřadnice je rovna nule. To značně zjednoduší řešení integrálů vyskytujících se v energii napjatosti (viz kap. 6.1.), neboť právě hranice intervalů jsou také mezemi řešených integrálů.

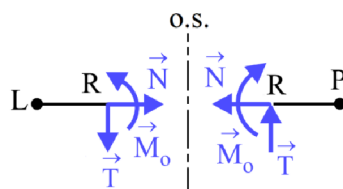


Obr. 4.7: Souřadnice polohy řezu ω_i : a) kartézská, b) polární.

4.4 Symetrické a antimetrické složky VVÚ

Značného zjednodušení řešení průběhu VVÚ lze dosáhnout, je-li prut symetrický z hlediska materiálu, geometrie a vazeb, viz kap. 4.6. Zavede-li se řez na ose symetrie (o.s.) prutu (obr. 4.8) a zakreslí složky VVÚ, pak vůči ose symetrie prutu jsou v řezu [1]:

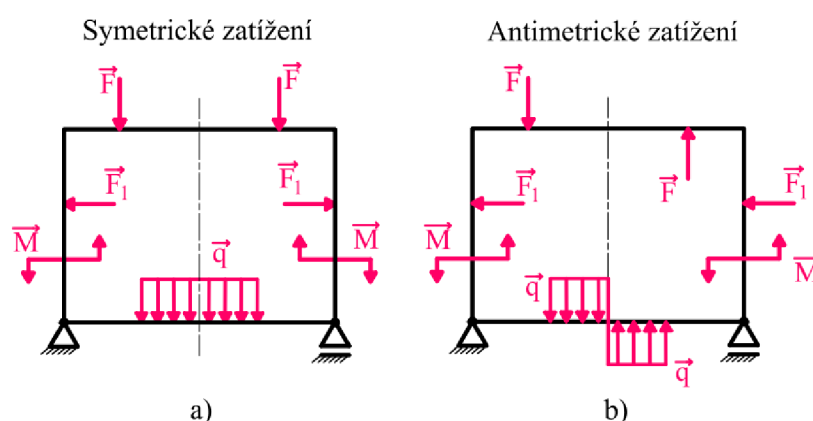
- \vec{N}, \vec{M}_o – symetrické,
- \vec{T} – antimetrické.



Obr. 4.8: Symetrické a antimetrické složky VVÚ. Převzato a upraveno z [3].

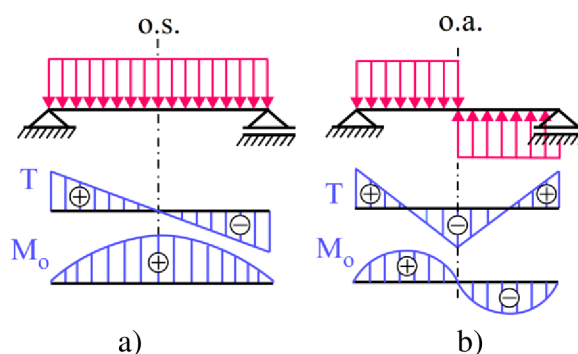
Pro symetrický prut, mohou nastat dva speciální typy vnějšího zatížení [1]:

- symetrické zatížení – jedná se o symetrický prut (obr. 4.9a),
- antimetrické zatížení – jedná se o antimetricky zatížený symetrický prut (obr. 4.9b).



Obr. 4.9: Symetrické (a) a antimetrické (b) zatížení uzavřeného prutu. Převzato a upraveno z [1].

Je-li prut zatížený symetricky nebo antimetricky vůči ose symetrie prutu, platí že průběhy VVÚ budou mít vůči této ose také symetrický nebo antisymetrický průběh. Z průběhu VVÚ na obr. 4.10 lze vidět, že průběh ohybového momentu M_o je vůči ose symetrie symetrický a vůči ose antimetrie (o.a.) antimetrický. Průběh posouvající síly T je vůči ose symetrie antimetrický a vůči ose antimetrie symetrický.



Obr. 4.10: Průběh VVÚ prutu a) symetricky, b) antimetricky zatíženého. Převzato a upraveno z [3].

Z tohoto poznatku lze zavést, že [1]

- symetrické složky VVÚ (N, M_o) – mají symetrický průběh vůči ose symetrie a antimetrický průběh vůči ose antimetrie,
- antimetrické složky VVÚ (T) – mají antimetrický průběh vůči ose symetrie a symetrický průběh vůči ose symetrie.

Pro složky VVÚ (obr. 4.10) také platí, že na ose symetrie jsou

- symetrické složky VVÚ – $N, M_o \neq 0$,
- antimetrické složky VVÚ – $T = 0$,

a na ose antimetrie jsou

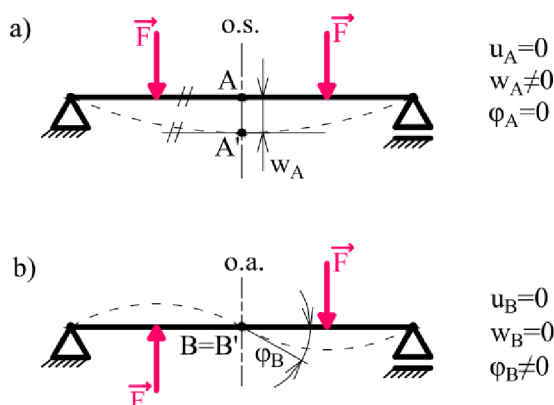
- symetrické složky VVÚ – $N, M_o = 0$,
- antimetrické složky VVÚ – $T \neq 0$.

4.5 Závislost symetrických a antimetrických složek VVÚ na deformaci

V případě symetrického/antimetrického zatížení prutu vůči ose symetrie prutu, musí být taktéž i deformace prutu symetrická/antimetrická podle této osy (obr. 4.11).

Je volen bod A na ose symetrie (obr. 4.11a) a bod B na ose antimetrie (obr. 4.11b) nezatíženého prutu. Aplikací vnějšího zatížení se bod A přesune do bodu A' (posuv v příčném směru bodu A je značen jako průhyb w_A). Pro natočení střednice v bodě A platí $\varphi_A = 0$, a aby byla zachována nulovost natočení musí v bodě A působit ohybový moment M_{oA} . Protože na prut nepůsobí žádné vnější zatížení ve vodorovném směru, je normálová síla N nulová a rovněž posuv $u_A = 0$. V bodě A střednice tedy působí jediná nenulová složka VVÚ M_{oA} . Posouvající síla $T_A = 0$ nebrání průhybu střednice w_A [1].

Pro antimetrické zatížení (obr. 4.11b) v bodě B platí kromě posuvu $u_B = 0$ také $w_B = 0$, čemuž odpovídá nenulová posouvající síla T_B . V bodě B také dochází k nenulovému natočení φ_B , čemuž odpovídá moment $M_{oB} = 0$.

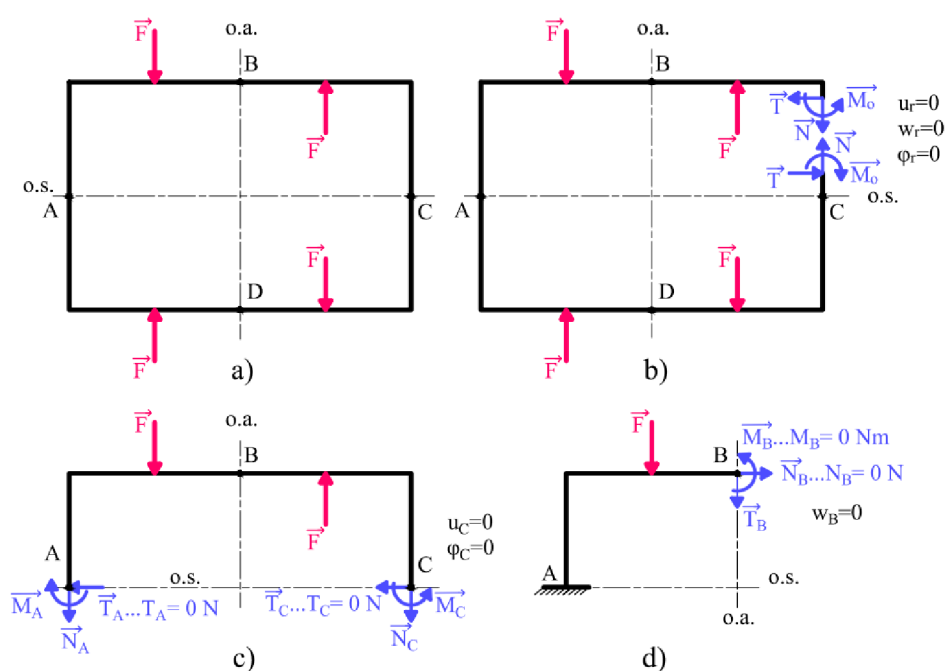


Obr. 4.11: Deformace prutu symetricky (a) a antimetricky (b) zatíženého.

4.6 Využití symetrie a antimetrie u uzavřených prutů

V kap. 3.4 jsou uvedeny uzavřené pruty jako minimálně vždy třikrát vnitřně staticky neurčité a pro určení průběhu VVÚ je potřeba vyřešit tři rovnice o třech neznámých, které se získají z deformačních podmínek zajišťujících nulovost relativních posuvů u_r , w_r a natočení φ_r v místě otevření prutu (obr. 4.12b) [1].

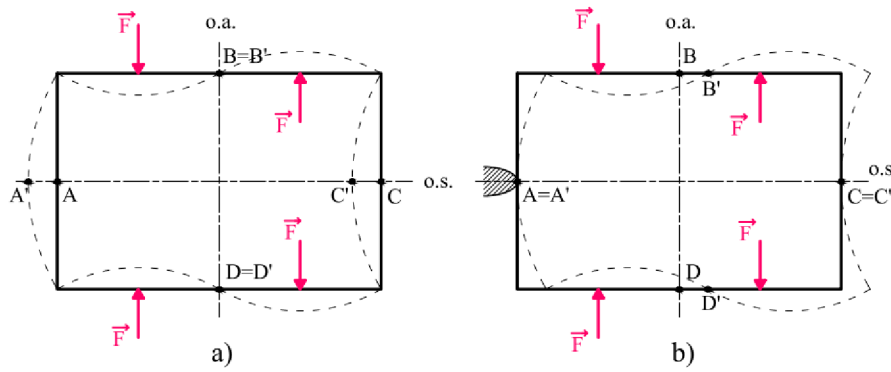
Analytické řešení třikrát staticky neurčitých úloh by bylo značně pracné, a proto zkombinují-li se znalosti z kap. 4.4 a 4.5, dojde k značnému zjednodušení výpočtu. Prut dle obr. 4.12a je symetrický podle dvou os, a zatížení je vůči jedné ose symetrické a vůči druhé antimetrické. Pokud se prut rozdělí na dvě poloviny řezem vedeným osou symetrie (obr. 4.12c), poté stačí řešit VVÚ pouze na jedné polovině prutu, protože deformace a odpovídající složky VVÚ budou vůči této ose symetrické či antimetrické, viz kap. 4.4. Posouvající síly T_A , T_C budou nulové a pro zbylé nenulové složky VVÚ v bodě C, se předepíšou deformační podmínky pro nulový posuv $u_C = 0$ a natočení $\varphi_C = 0$ (viz kap. 4.5). Úloha se takto zredukuje na dvakrát staticky neurčitou. Využije-li se i osa antimetrie (obr. 4.12d), kde je známa nulová normálová síla N_B a nulový ohybový moment M_{oB} , lze úlohu zredukovat na jedenkrát staticky neurčitou, přičemž se zavede deformační podmínka pro nulový průhyb v bodě B $w_B = 0$. Platí, že s každým využitím osy symetrie nebo antimetrie se statická neurčitost úlohy zredukuje vždy o jeden stupeň [1].



Obr. 4.12: Redukce úlohy využitím osy symetrie a antimetrie.

Při částečném uvolňování uzavřených prutů je vhodné volit vazbu vetknutím na ose symetrie. V případě prutu na obr. 4.12d je to bod A, avšak zobrazí-li se deformovaný tvar prutu (obr. 4.13a), lze vidět, že v bodě A dochází k průhybu w_A a vazba vetknutím by zde tedy nebyla možná.

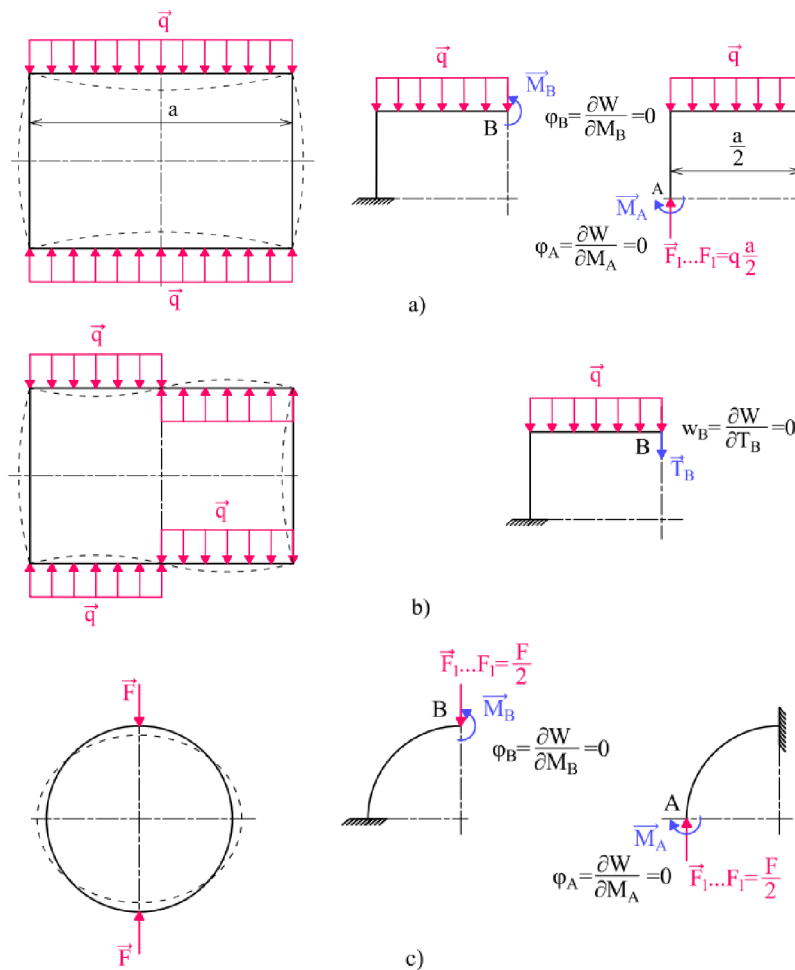
Z hlediska řešení energie napjatosti (viz kap. 6.1) je však potřeba zachovat pouze deformovaný tvar prutu, nikoliv jeho polohu v prostoru. Lze přidat vazbu A (obr. 4.13b), přičemž nedojde ke změně vnějšího zatížení, protože ze statické rovnováhy vyplývá, že silový účinek od vazby A je nulový. Deformovaný tvar zůstane zachován a v bodě A jsou nyní zamezeny posuvy i natočení a je zde možné aplikovat vazbu vetknutím [1].

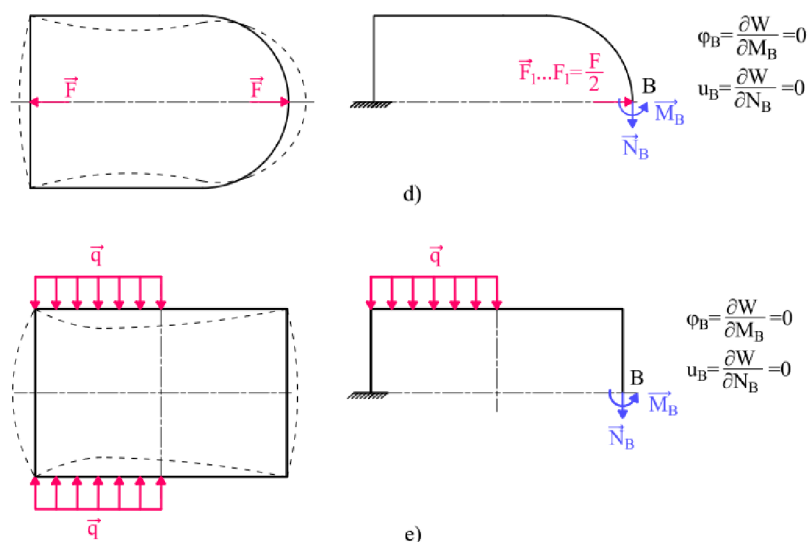


Obr. 4.13: Zachování deformovaného tvaru v prostoru.

4.7 Příklady částečného uvolnění

Na obr. 4.14 lze vidět různé způsoby částečného uvolnění s využitím symetrie a antimetrie pro řešení různě zatížených uzavřených rovinných prutů. Na obr. 4.14a, 4.14b, a 4.14c jsou rámy symetrické dle dvou os, a proto je možné úlohy zredukovat na jedenkrát staticky neurčitě a řešit pouze čtvrtinu rámu. Rám na obr. 4.14d je symetrický pouze podle jedné osy (dvakrát staticky neurčitá úloha) a rám na obr. 4.14e je sice symetrický z hlediska geometrie i materiálu vůči dvěma osám, avšak zatížení je symetrické pouze vůči jedné ose, a proto lze tuto úlohu zredukovat pouze na dvakrát staticky neurčitou.





Obr. 4.14: Typy částečného uvolnění rámu s využitím symetrie/antisymetrie.

5 Závislost napětí na VVÚ

V pružnosti a pevnosti prutů k určování různých mezních stavů je potřeba znát průběhy napětí v prutu. Vyjádření napětí v prutu přímo v závislosti k vnějšímu zatížení je sice možné, avšak došlo by k značnému zkomplikování analytického výpočtu, protože by bylo potřeba do výpočtu také zahrnout geometrii příčných průřezů [1]. Předpokládá-li se, že vlastnosti prutového tělesa, které jsou jasně definované prutovými předpoklady, lze vztáhnout na střednici prutu, pak pro řešení úlohy již není potřeba znát geometrii příčných průřezů. Takto bylo nahrazeno řešení průběhů napětí průběhy VVÚ, jenž mají silový charakter a jejich závislost vůči vnějšímu zatížení je lineární. Vyřešením VVÚ je možné získat přibližný náhled na průběhy napětí, avšak pro určení přesného průběhu napětí je potřeba se vrátit zpět a vztáhnout silové působení VVÚ k dané geometrii příčného průřezu. V této kapitole jsou zavedeny vztahy pro určení napětí pro rovinné způsoby namáhání, a tedy i závislosti napětí na VVÚ a charakteristikách příčného průřezu prutu.

5.1 Namáhání tahem a tlakem

Normálové napětí, které je konstantní v celém příčném průřezu ψ a je vyvolané normálovou silou N [3]:

$$\sigma_N = \frac{N}{S}, \quad (5.1)$$

kde S je plocha příčného průřezu ψ .

5.2 Namáhání ohybem

Napětí vyvolané ohybem má také charakter normálového napětí, které má po výšce z příčného průřezu lineární průběh. Pro přímé a slabě zakřivené pruty lze zavést neutrální osu příčného průřezu, která je totožná s osou y pro dané příčné průřezy. Neutrální osa jej poté rozděljuje na dvě poloviny [4], z čehož také vyplývá, že normálové napětí vyvolané ohybovým momentem má na jedné straně charakter tahového napětí a na druhé straně charakter tlakového napětí, přičemž normálové napětí na neutrální ose ($z = 0$) jsou nulová.

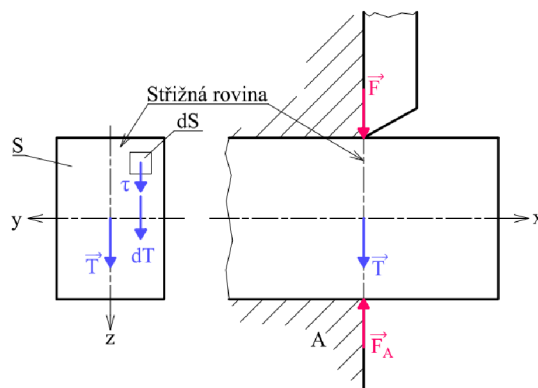
Normálové napětí má poté v daném příčném průřezu průběh:

$$\sigma_{Moy} = \frac{M_{oy}}{J_y} z. \quad (5.2)$$

5.3 Namáhání smykem

Smykové napětí lze určit dvěma způsoby. Pokud se vnější zatížení přenáší pouze z jedné části tělesa na druhou, např. u velmi přesného stříhání materiálu (obr. 5.1), a předpokládá se rovnoměrně rozložené napětí po průřezu [1], lze pak zavést tzv. smluvní hodnotu smykového napětí τ_s . Smykové napětí působí pouze ve střížné rovině a má stejný směr jako posouvající síla [4]. Lze jej určit ze vztahu:

$$\tau_s = \frac{T}{S}. \quad (5.3)$$



Obr. 5.1: Namáhání smykem ve střížné rovině. Převzato a upraveno z [4].

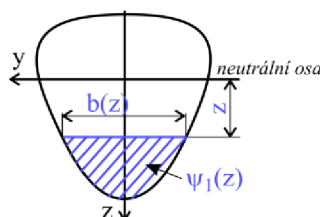
Toto namáhání je však velmi ojedinělé. V ostatních případech lze za předpokladu, že se jedná o prizmatický prut určit smykové napětí vyvolané posouvající silou T pro následující případy [3]:

- a) příčné průřezy s alespoň jednou osou symetrie,
- b) tenkostěnné příčné průřezy – např. profily I, T, U.

Je-li nositelka posouvající síly T zároveň i osou symetrie příčného průřezu ψ a smyková napětí jsou po šířce ψ rozložena rovnoměrně, lze odvodit tzv. Žuravského vzorec pro smyková napětí (obr. 5.2) [3]:

$$\tau(x, z) = \frac{T(x)U_y\psi_1(z)}{b(z)J_y}, \quad (5.4)$$

kde $T(x)$ je posouvající síla, $U_y\psi_1(z)$ lineární moment plochy ψ_1 k neutrální ose y , $b(z)$ šířka příčného průřezu a J_y osový kvadratický moment k neutrální ose y .



Obr. 5.2: Odvození Žuravského vzorce. Převzato z [3].

6 Energie napjatosti a deformace prutu

V úvodu o větách lineární pružnosti byl zaveden pojem Castiglianova věta, která umožňuje velmi snadno řešit posuvy a natočení střednice prutu při znalosti celkové energie napjatosti tělesa. Vztahy pro energii napjatosti a jejich odvození pro jednotlivé typy namáhání lze nalézt v literatuře [1]. V této kapitole je využit obecnější přístup řešení deformace a energie napjatosti označován jako Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty [1].

6.1 Energie napjatosti

Stejně jako u Castiglianovy věty i v případě Maxwell-Mohrovy varianty musí být splněny všechny podmínky lineární pružnosti, které byly zmíněny dříve. Maxwell-Mohrovu variantu lze zavést na základě následujících předpokladů [1]:

- materiálové a geometrické charakteristiky, které vystupují ve vztazích pro energii napjatosti jsou nezávislé na veličinách F a M , podle kterých se energie napjatosti derivuje,
- složky VVÚ jsou lineárně závislé na veličinách F a M .

Obecný tvar energie napjatosti pro jednotlivá jednoduchá namáhání je ve tvaru [1]:

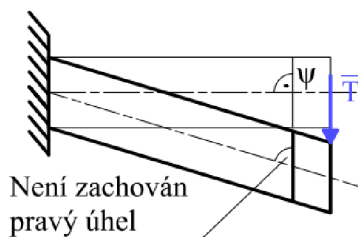
$$W = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{V^2}{K_{\psi}} ds, \quad (6.1)$$

kde V je složka VVÚ a K_{ψ} je tuhost příčného průřezu pro jednoduchá namáhání. Za tyto výrazy lze dosadit pro jednotlivá namáhání veličiny z následující tabulky:

Tab. 6.1: Výrazy V a K_{ψ} pro různé typy jednoduchého namáhání. Převzato z [1].

Namáhání	Prostý tah/tlak	Prostý ohyb
V	N	M_o
K_{ψ}	ES	EJ_y

Pokud je těleso namáháno kombinovaně, je potřeba sečíst energie napjatosti pro všechny typy namáhání. V tab. 6.1 je záměrně vynecháno namáhání prostým smykem vlivem posouvající síly T . Pokud by byl prut namáhán pouze smykem, docházelo by k deformaci dle obr. 6.1 a byly by porušeny prutové předpoklady. Namáhání prostým smykem z tohoto důvodu není možné [1].

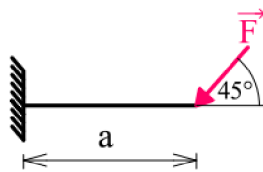


Obr. 6.1: Deformace prutu namáhaném prostým smykem. Převzato a upraveno z [1].

V některých případech však vliv posouvající síly T nelze zanedbat. Například u prutu zatíženém na ohyb dle obr. 6.2 dochází kromě vzniku normálového napětí vlivem ohybového momentu M_o a normálové síly N , také ke vzniku smykového napětí vlivem posouvající síly T . Do řešení celkové energie napjatosti se přírůstek od posouvající síly T vyjádří dosazením smykového napětí z Žuravského vzorce, přičemž výsledný vztah pro energii napjatosti je [3]:

$$W_T = \frac{\beta}{2} \int \frac{T^2}{GS} ds, \quad (6.2)$$

kde β je tvarový součinitel příčného průřezu, který je závislý pouze na tvaru příčného průřezu ψ a nabývá hodnot např. pro kruhový průřez $\beta = 1,185 \doteq 1,2$ nebo pro obdélníkový průřez $\beta = 1,2$.



Obr. 6.2: Vetknutý nosník zatížený osamělou silou.

Před dokončením odvození Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty, je vhodné také zmínit vliv ohybového momentu na energii napjatosti. Značného zjednodušení lze dosáhnout, pokud se jedná o dlouhé a štíhlé pruty. Jeli prut zatížen dle obr. 6.2, celkovou energii napjatosti lze vyjádřit vztahem [1]:

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M_o^2}{EJ_y} ds + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{ES} ds + \frac{\beta}{2} \int \frac{T^2}{GS} ds, \quad (6.3)$$

Vyjádřením složek VVÚ, lze upravit vztah do podoby:

$$W = \left[\frac{1}{2} \int_0^a \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}F}{2} x\right)^2}{EJ_y} dx \right] + \left[\frac{1}{2} \int_0^a \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}F}{2}\right)^2}{ES} ds \right] + \left[\frac{\beta}{2} \int_0^a \frac{\left(\frac{\sqrt{2}F}{2}\right)^2}{GS} ds \right]. \quad (6.4)$$

Pro prut kruhového průřezu o průměru d lze celkovou energii napjatosti upravit do tvaru:

$$W = \left(5,33 \frac{a^3}{d^4} + \frac{a}{d^2} + \frac{2,4(1 + \mu)a}{d^2} \right) \frac{F^2}{E\pi}, \quad (6.5)$$

kde v závorce jsou jednotlivé přírůstky od ohybového momentu (první výraz), normálové síly (druhý výraz) a posouvající síly (třetí výraz). Z pohledu na vztah pro energii napjatosti (6.5) je patrné, že pokud by se zvětšovala délka a a zmenšoval průměr d , neboli prut by byl štíhlejší, pak přírůstek do energie napjatosti od ohybového momentu bude narůstat oproti zbylým přírůstkům o a^2 a $\frac{1}{d^2}$.

Dá se dokázat, že je-li $a \geq 10d$, výpočet s uvažováním energie napjatosti pouze od ohybového momentu se dopouští maximálně 1% chyby [1] oproti výpočtu s uvažováním energie napjatosti od všech složek VVÚ. V třetí úloze (kap. 9.12) jsou tyto rozdíly porovnány.

6.2 Deformace prutu

Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty se pro posuv získá dosazením energie napjatosti (6.1) do Castiglianovy věty (2.19) přičemž vztah [1]

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{2V}{K_{\psi}} \frac{\partial V}{\partial F_i} ds, \quad (6.6)$$

lze upravit do finální podoby Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty pro posuv působící síly F_i :

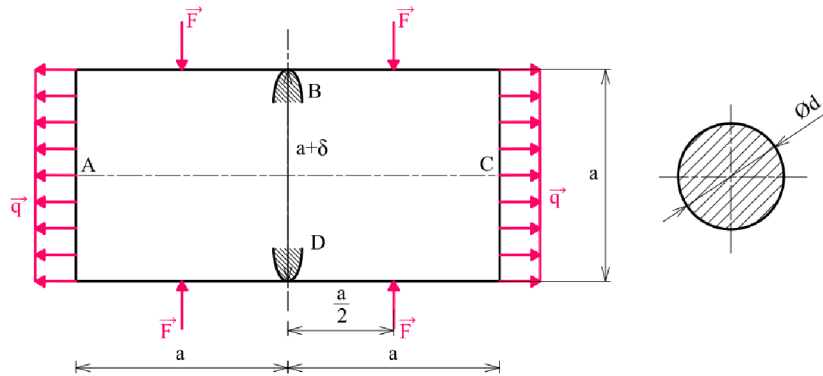
$$u_i = \int_{\gamma} \frac{V}{K_{\psi}} \frac{\partial V}{\partial F_i} ds. \quad (6.7)$$

Analogicky pro natočení v místě působení silové dvojice M_i je [1]:

$$\varphi_i = \int_{\gamma} \frac{V}{K_{\psi}} \frac{\partial V}{\partial M_i} ds. \quad (6.8)$$

7 První úloha – využití symetrie

U uzavřeného rovinného rámu (obr. 7.1) je určen průběh VVÚ a vyhledáno místo s maximálním ohybovým momentem. Rám má rozměry $a = 400 \text{ mm}$ a kruhový příčný průřez s průměrem $d = 10 \text{ mm}$. Je zatížen osamělými silami $F = 100 \text{ N}$ a liovým zatížením $q = 0,8 \text{ Nm}^{-1}$. Rám je uložen na dvou podporách, které jsou z důvodu montážní nepřesnosti rozšířené o vzdálenost $\delta = 10 \text{ mm}$ a je vyroben z oceli s modulem pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$. K řešení a úpravě rovnic je využit program MATLAB.



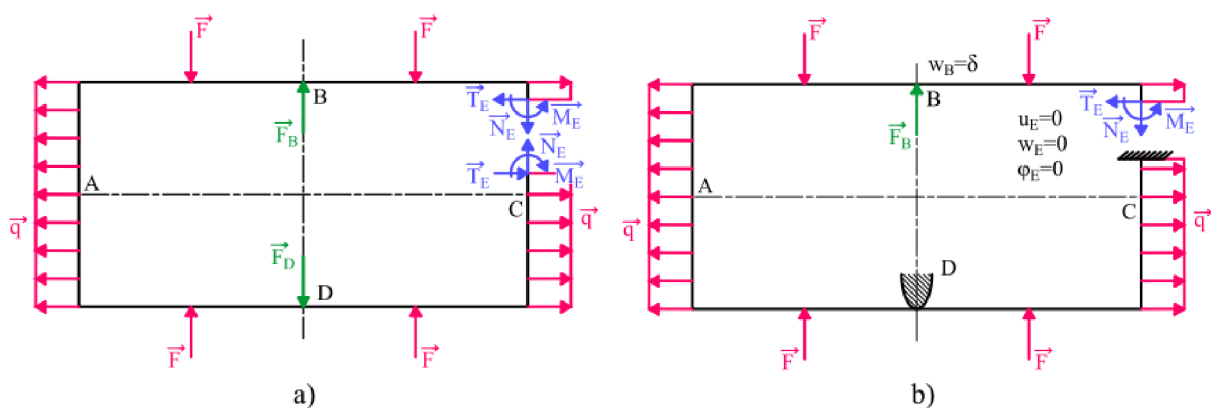
Obr. 7.1: Symetricky zatížený rovinný rám.

7.1 Rozbor úlohy

Jedná se o symetrický rám z hlediska geometrie i materiálu. Rám je jako celkové těleso ve statické rovnováze. Vnější zatížení je symetrické a to ve dvou nezávislých osách symetrie procházejících body AC a BD. Proto se nabízí využití obou os symetrie a tím redukce náročnosti řešení úlohy.

7.2 Úplné a částečné uvolnění celého rámu

Uvolnění vazeb a otevření prutu řezem v obecném bodě E se provede dle obr. 7.2a. Zavedou se potřebné složky VVÚ a takto uvolněný prut je třikrát vnitřně staticky neurčitý a jedenkrát vně staticky neurčitý (viz kap. 3.4). Při částečném uvolnění a sepsání deformačních podmínek (obr. 7.2b) by vyřešení vyžadovalo čtyři rovnice o čtyřech neznámých, přičemž v každé by bylo potřeba vyřešit 11 integrálů, což je vzhledem k analytickému řešení úlohy velmi nepraktické.



Obr. 7.2: Symetricky zatížený rovinný rám – a) úplné uvolnění, b) částečné uvolnění.

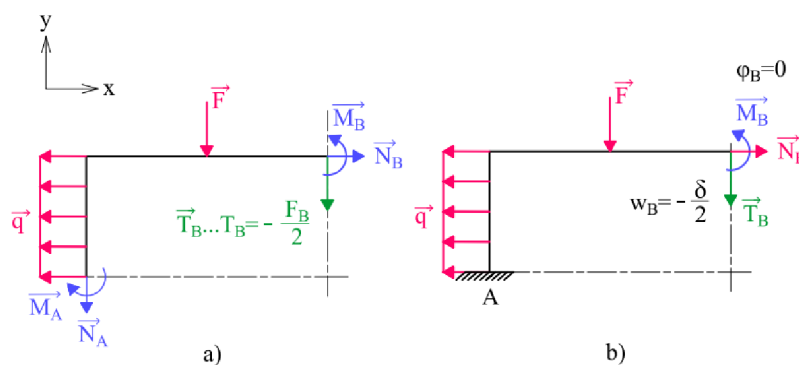
7.3 Úplné a částečné uvolnění s využitím dvou os symetrie

Z poznatků z kap. 4.6 se využije obou os symetrie a prut se úplně uvolní dle obr. 7.3a, přičemž se do bodu B ležícím na ose symetrie zavedou patřičné nenulové složky VVÚ. Jedinou neznámou silou v ose x je normálová síla \vec{N}_B , kterou lze ihned vyřešit z rovnice statické rovnováhy

$$N_B = q \frac{a}{2}. \quad (7.1)$$

Provede se částečné uvolnění čtvrtiny prutu (obr. 7.3b) a předepíšou se deformační podmínky pro natočení střednice v bodě B $\varphi_B = 0$ a posuv bodu B horní čtvrtiny rámu $u_B = -\frac{\delta}{2}$, kde hodnota posuvu je záporná dle teorie uvedené v kap. 2.6.4. Protože síla F_B působila v ose symetrie, pak dle Saint Venantova principu (kap. 2.3.1) musí na levou polovinu prutu působit pouze poloviční síla

$$T_B = -\frac{F_B}{2}. \quad (7.2)$$



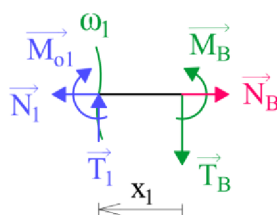
Obr. 7.3: Symetricky zatížený rovinný rám – a) úplné, b) částečné uvolnění s využitím dvou os symetrie.

Využitím obou os symetrie se úloha zredukovala na dvakrát staticky neurčitou a je potřeba řešit pouze dvě rovnice o dvou neznámých, přičemž v každé budou pouze tři integrály. Z hlediska analytického řešení je toto mnohem přívětivější.

7.4 Průběh VVÚ

Průběh VVÚ se určí integrálním přístupem (viz kap. 4.3.2). Prut je potřeba rozdělit třemi řezy a v každém intervalu určit podmínky statické rovnováhy uvolněného prvku. Uvolňování se provede od volného konce, přičemž VVÚ vyjdou pro:

1. interval



Obr. 7.4: Symetricky zatížený rovinný rám – 1. interval.

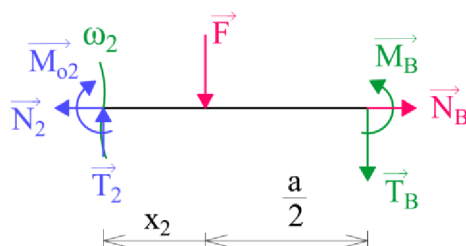
$$N_1 = N_B, \quad (7.3)$$

$$T_1 = T_B, \quad (7.4)$$

$$M_{o1} = M_B - T_B x_1, \quad (7.5)$$

$$x_1 \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

2. interval



Obr. 7.5: Symetricky zatížený rovinný rám – 2. interval.

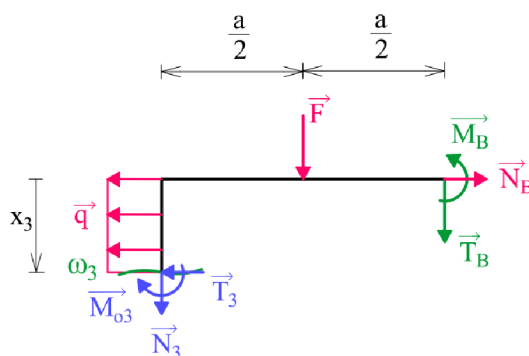
$$N_2 = N_B, \quad (7.6)$$

$$T_2 = F + T_B, \quad (7.7)$$

$$M_{o2} = M_B - T_B \left(\frac{a}{2} + x_2\right) - F x_2, \quad (7.8)$$

$$x_2 \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

3. interval



Obr. 7.6: Symetricky zatížený rovinný rám – 3. interval.

$$N_3 = -T_B - F, \quad (7.9)$$

$$T_3 = N_B - q x_3, \quad (7.10)$$

$$M_{o3} = M_B - T_B a - F \frac{a}{2} - N_B x_3 + q \frac{x_3^2}{2}, \quad (7.11)$$

$$x_3 \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

7.5 Vyjádření deformační podmínky $w_B = -\frac{\delta}{2}$ v silovém tvaru

K vyjádření posuvu vlivem ohybového momentu se využije Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty, viz rov. (6.7) pro posuv bodu B ve tvaru:

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial T_B} = \int_{\gamma} \frac{M_o(x)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(x)}{\partial T_B} dx = -\frac{\delta}{2}. \quad (7.12)$$

Vyjádří-li se energie napjatosti celého prutu pro jednotlivé řešené intervaly a dosadí parciální derivace momentů podle T_B , lze rovnici (7.12) upravit následovně:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_B - T_B x_1}{E \frac{J_y}{2}} (-x_1) dx_1 + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_B - T_B \left(\frac{a}{2} + x_2\right) - F x_2}{EJ_y} \left(-\frac{a}{2} - x_2\right) dx_2 + \\ & + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_B - T_B a - F \frac{a}{2} - N_B x_3 + q \frac{x_3^2}{2}}{EJ_y} (-a) dx_3 = -\frac{\delta}{2}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

přičemž meze integrálů jsou mezemi intervalů hledaných ohybových momentů. Vyřešením integrálů a dosazením síly N_B ze vztahu (7.1) lze deformační podmínku $w_B = -\frac{\delta}{2}$ upravit do tvaru:

$$\frac{a^2}{EJ_y} \left(\frac{40T_B a - 48M_B + 17Fa + 2qa^2}{48} \right) = -\frac{\delta}{2}. \quad (7.14)$$

7.6 Vyjádření deformační podmínky $\varphi_B = 0$ v silovém tvaru

Pro natočení střednice v bodě B má Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty tvar:

$$\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_{\gamma} \frac{M_o(x)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(x)}{\partial M_B} dx = 0. \quad (7.15)$$

Opět se vyjádří energie napjatosti a parciální derivace momentů pro jednotlivé intervaly:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_B - T_B x_1}{E \frac{J_y}{2}} 1 dx_1 + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_B - T_B \left(\frac{a}{2} + x_2\right) - F x_2}{EJ_y} 1 dx_2 + \\ & + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_B - T_B a - F \frac{a}{2} - N_B x_3 + q \frac{x_3^2}{2}}{EJ_y} 1 dx_3 = 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Úpravou se získá finální tvar deformační podmínky $\varphi_B = 0$:

$$24T_B a - 36M_B + 9Fa + qa^2 = 0. \quad (7.17)$$

7.7 Řešení neznámých silových účinků

Deformační podmínky jsou již vyjádřené v silovém tvaru a vhodnou metodou se vyřeší soustava dvou lineárních rovnic (7.14) a (7.17) o dvou neznámých. Silové účinky lze vyjádřit vztahy:

$$N_B = q \frac{a}{2}, \quad (7.18)$$

$$T_B = -\frac{2qa^4 + 15Fa^3 + 72J_y \delta E}{24a^3}, \quad (7.19)$$

$$M_B = -\frac{qa^4 + 6Fa^3 + 72J_y \delta E}{36a^2}. \quad (7.20)$$

V rovnicích také vystupuje kvadratický modul kruhového průřezu, jenž je dán vztahem:

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Dosazením hodnot ze zadání vyjdou výsledné silové účinky následovně:

$$N_B = 160,0 \text{ N},$$

$$T_B \doteq -137,5 \text{ N},$$

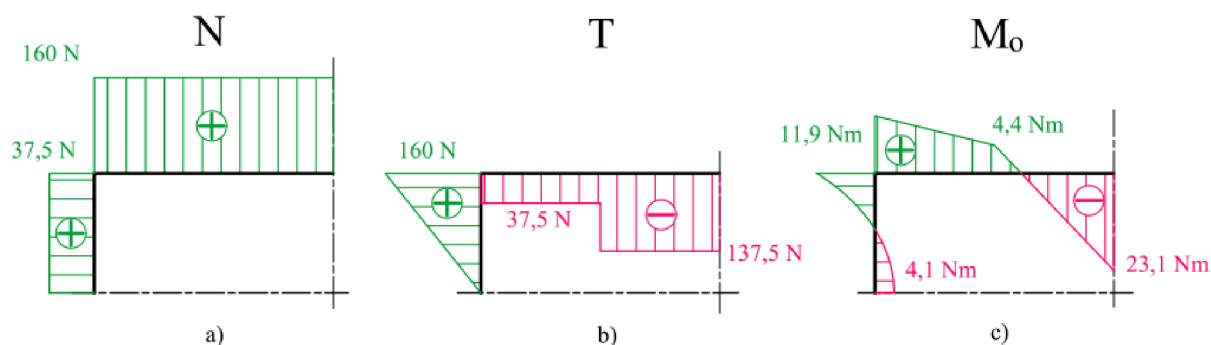
$$M_B \doteq -23,1 \text{ Nm}.$$

Síly ve vazbě B a D se určí z rovnice (7.2):

$$F_B = F_D = 275,0 \text{ N}.$$

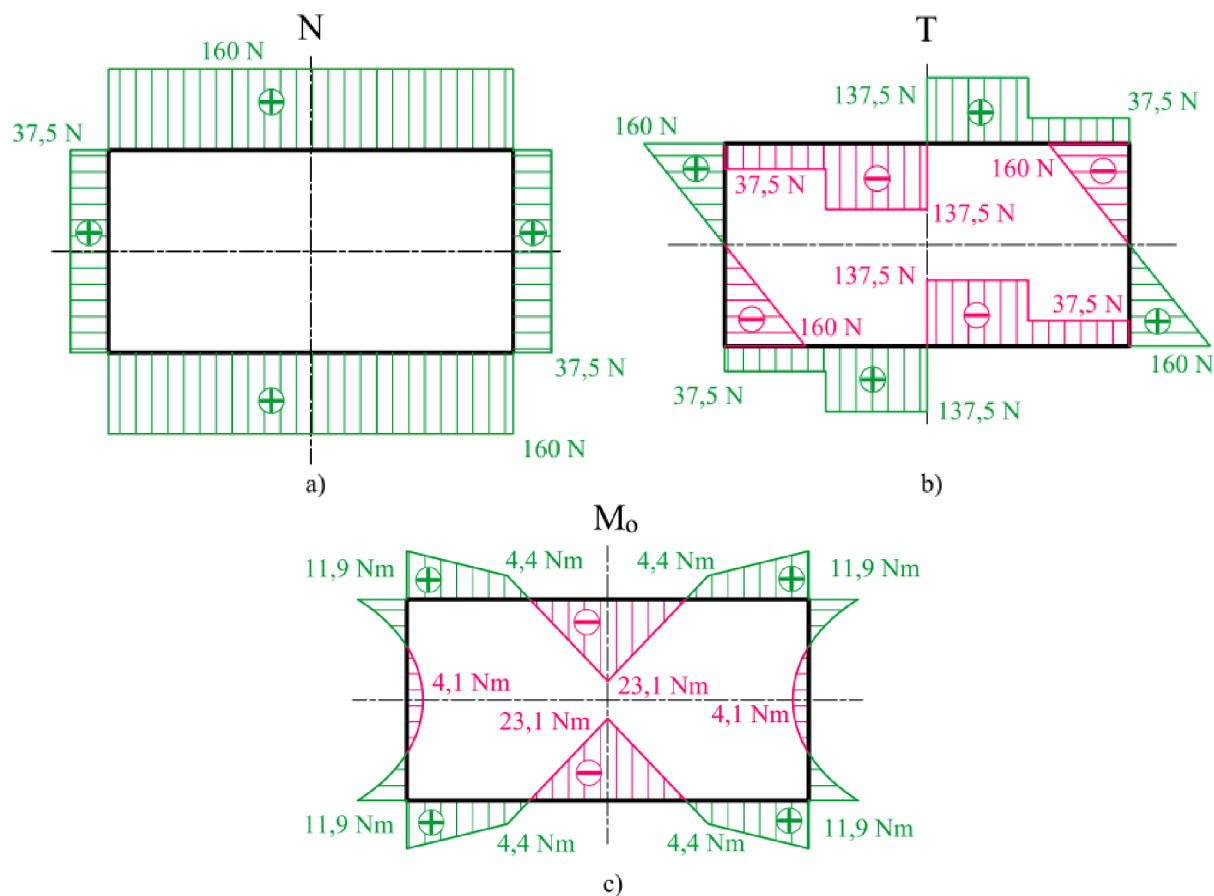
7.8 Grafické zobrazení průběhu VVÚ

Nyní jsou známy všechny síly a momenty působící na čtvrt rámu a je možné vykreslit průběhy VVÚ. Nejprve se vykreslí průběhy pouze na jedné čtvrtině (obr. 7.7).



Obr. 7.7: Průběh VVÚ na čtvrtině rámu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.

Průběhy VVÚ v celém rámu (obr. 7.8) se získají pouhým symetrickým/antimetrickým zobrazením dle os symetrie viz kap. 4.4.



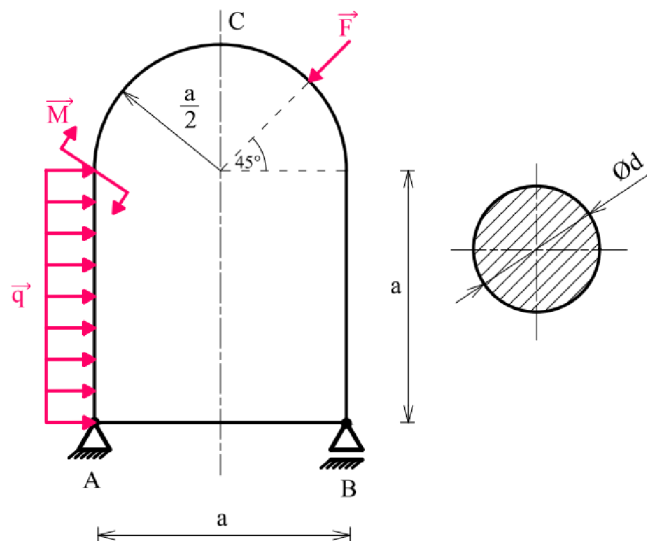
Obr. 7.8: Průběh VVÚ celého rámu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.

7.9 Maximální ohybový moment

Vykreslením průběhu VVÚ lze ihned nalézt místo s maximálním ohybovým momentem. Ten se nachází v místě podpory B a D a má velikost $M_{oMAX} = 23,1 \text{ Nm}$.

8 Druhá úloha – využití superpozice

U uzavřeného rovinného prutu (obr. 8.1) je určen průběh VVÚ a vyhledáno místo s maximálním ohybovým momentem. Prut má rozměry $a = 400 \text{ mm}$, poloměr zaoblění $\frac{a}{2}$ a kruhový příčný průřez s průměrem $d = 10 \text{ mm}$. Je zatížen osamělou silou $F = 100 \text{ N}$, liniovým zatížením $q = 0,6 \text{ Nmm}^{-1}$ a momentem $M = 10 \text{ Nm}$. Prut je vyroben z oceli s modulem pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$. K řešení a úpravě rovnic je využit program MATLAB.



Obr. 8.1: Obecně zatížený symetrický uzavřený prut.

8.1 Rozbor úlohy

Prut je tvořen přímými a slabě zakřivenými částmi. Je uložen staticky určitě a je třikrát vnitřně staticky neurčitý. Řešení vyžaduje tři deformační podmínky a tři rovnice o třech neznámých, ve kterých je dle volby místa částečného uvolnění minimálně pět integrálů. Prut je z hlediska geometrie a materiálu symetrický vůči jedné ose a je zatížen obecnou rovinnou silovou soustavou.

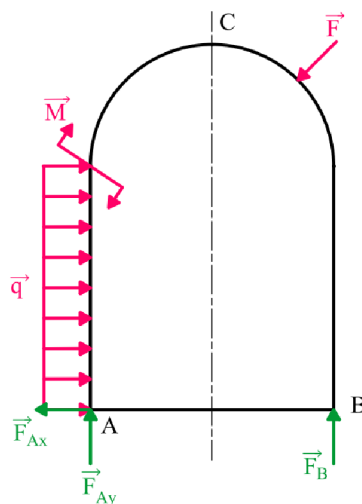
8.2 Uvolnění vazeb

Uvolněním vazeb dle obr. 8.2 lze silové účinky ve vazbách určit z rovnic statické rovnováhy:

$$F_{Ax} = qa - F \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (8.1)$$

$$F_{Ay} = F \frac{3\sqrt{2}}{4} - q \frac{a}{2} - \frac{M}{a}, \quad (8.2)$$

$$F_B = q \frac{a}{2} + \frac{M}{a} - F \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (8.3)$$



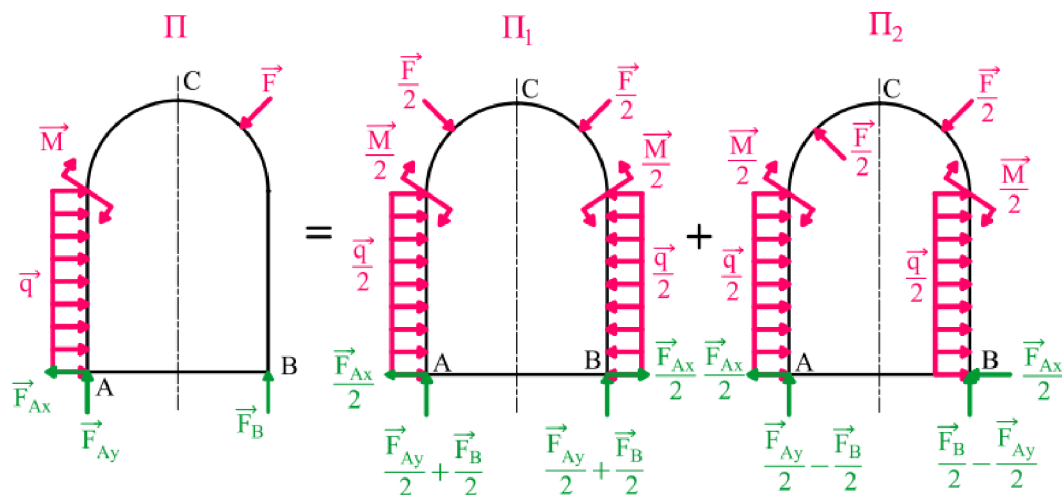
Obr. 8.2: Obecně zatížený symetrický uzavřený prut – uvolnění vazeb.

8.3 Využití superpozice

Využitím principu superpozice, viz kap 2.3.2, lze prut zatížený obecnou vnější silovou soustavou Π nahradit dvěma pruty zatížené silovými soustavami Π_1 a Π_2 (obr. 8.3). Součet energií napjatosti vlivem těchto silových soustav je stejný jako energie napjatosti vlivem původní silové soustavy Π :

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi. \quad (8.4)$$

Princip superpozice má smysl pouze tehdy, nahradí-li se původní silová soustava silovými soustavami, které jsou vůči ose symetrie prutu symetrické nebo antisymetrické (obr. 8.3) a lze tak zredukovat úlohu na polovinu prutu dle teorie v kap. 4.6.



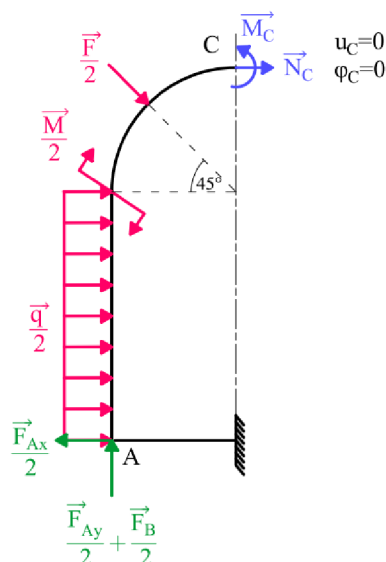
Obr. 8.3: Obecně zatížený symetrický uzavřený prut – využití superpozice.

Jak je uvedeno níže, tak původní úloha o třech rovnicích a třech neznámých se zredukovala na řešení dvou rovnic o dvou neznámých a jedné samostatné rovnice, což značně sníží náročnost analytického výpočtu.

8.4 Řešení prutu symetricky zatíženého

8.4.1 Částečné uvolnění

Nyní se přejde na řešení prutu zatíženého soustavou Π_1 . Částečné uvolnění již s využitím osy symetrie (obr. 8.4) se provede zavedením vazby vetknutím na osu symetrie a do bodu C se zavedou příčné nenulové složky VVÚ \vec{N}_C , \vec{M}_C . Deformační podmínky v bodě C jsou pro nulový posuv $u_C = 0$ a nulové natočení $\varphi_C = 0$.



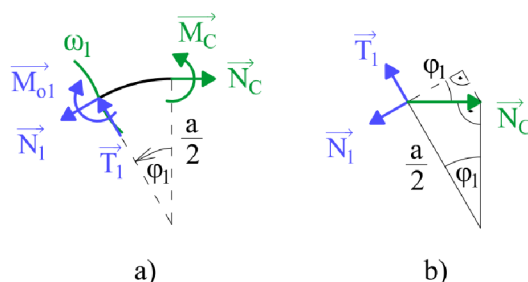
Obr. 8.4: Částečné uvolnění poloviny symetricky zatíženého prutu.

8.4.2 Průběh VVÚ

Pokud se do energie napjatosti uvažuje pouze vliv ohybového momentu, je v této fázi zbytečné určovat průběh normálové \vec{N} a posouvající síly \vec{T} , které by se určily až po vyjádření neznámých silových parametrů. Tato úloha má však demonstrovat využití principu superpozice, a proto jsou zde řešeny i průběhy normálové a posouvající síly, které s využitím superpozice dají výsledné průběhy pro levou část původně zatíženého prutu (viz kap. 8.6).

1. interval

Uvolněný prvek pro první interval je na obr. 8.5a. Protože se jedná o zakřivenou část, je kartézská souřadnice x_1 nahrazena polární souřadnicí φ_1 . K určení průmětu síly \vec{N}_C do jednotlivých složek VVÚ lze využít pravoúhlého trojúhelníku (obr. 8.5b). Obdobně se dá určit i rameno síly \vec{N}_C pro ohybový moment.



Obr. 8.5: První interval symetricky zatíženého prutu.

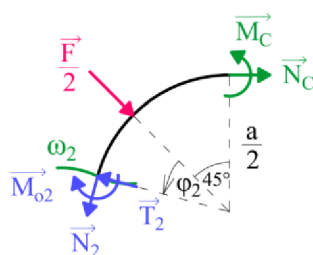
$$N_1 = N_C \cos \varphi_1, \quad (8.5)$$

$$T_1 = N_C \sin \varphi_1, \quad (8.6)$$

$$M_{o1} = M_C - N_C \frac{a}{2} (1 - \cos \varphi_1), \quad (8.7)$$

$$\varphi_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

2. interval



Obr. 8.6: Druhý interval symetricky zatíženého prutu.

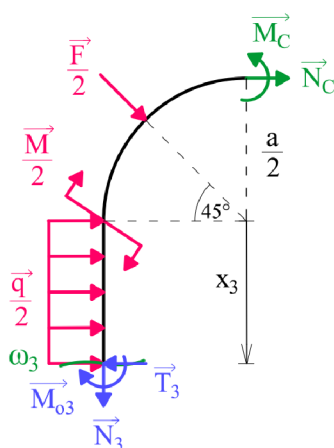
$$N_2 = N_C \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{F}{2} \sin(\varphi_2), \quad (8.8)$$

$$T_2 = N_C \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{F}{2} \cos(\varphi_2), \quad (8.9)$$

$$M_{o2} = M_C - N_C \frac{a}{2} \left(1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) \right) - F \frac{a}{4} \sin \varphi_2, \quad (8.10)$$

$$\varphi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

3. interval



Obr. 8.7: Třetí interval symetricky zatíženého prutu.

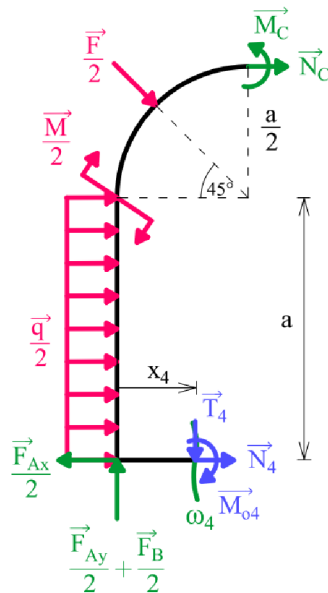
$$N_3 = -F \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (8.11)$$

$$T_3 = N_C + F \frac{\sqrt{2}}{4} + q \frac{x_3}{2}, \quad (8.12)$$

$$M_{o3} = M_C - N_C \left(\frac{a}{2} + x_3 \right) - F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} + x_3 \right) - \frac{M}{2} - q \frac{x_3^2}{4}, \quad (8.13)$$

$$x_3 \in \left(0; a \right).$$

4. interval



Obr. 8.8: Čtvrtý interval symetricky zatíženého prutu.

$$N_4 = -N_C - F \frac{\sqrt{2}}{4} - q \frac{a}{2} + \frac{F_{Ax}}{2}, \quad (8.14)$$

$$T_4 = -F \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{F_{Ay} + F_B}{2}, \quad (8.15)$$

$$M_{o4} = M_C - N_C \frac{3a}{2} - F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3a}{2} - x_4 \right) - \frac{M}{2} - q \frac{a^2}{4} - \frac{F_{Ay} + F_B}{2} x_4, \quad (8.16)$$

$$x_4 \in \left(0; \frac{a}{2} \right).$$

Za síly F_{Ax} , F_{Ay} , F_B je potřeba dosadit z rovnic statické rovnováhy (8.1) až (8.3). Průběhy VVÚ pak jsou:

$$N_4 = -N_C - F \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (8.17)$$

$$T_4 = 0, \quad (8.18)$$

$$M_{o4} = M_C - N_C \frac{3a}{2} - F \frac{3a\sqrt{2}}{8} - \frac{M}{2} - q \frac{a^2}{4}, \quad (8.19)$$

$$x_4 \in \left(0; \frac{a}{2} \right).$$

8.4.3 Vyjádření deformační podmínky $u_C = 0$ v silovém tvaru

K vyjádření deformační podmínky je opět využita Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty pro posuv bodu B. Protože se u prutu objevují zakřivené části, je potřeba deformační podmínku zapsat v obecném tvaru:

$$u_C = \frac{\partial W}{\partial N_C} = \int_{\gamma} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial N_C} ds = 0. \quad (8.20)$$

Pro přímé části lze ds nahradit diferenciálem dx , a protože se pracuje s diferenciály, je v případě zakřivené části prutu možné délku oblouku ds nahradit úsečkou, která je dána součinem poloměru křivosti $\frac{a}{2}$ a diferenciálem úhlu $d\varphi$. Následně, pro jednotlivé energie napjatosti a parciální derivace momentů podle N_C , získá deformační podmínka tvar:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_C - N_C \frac{a}{2} (1 - \cos \varphi_1)}{EJ_y} \frac{a}{2} (\cos \varphi_1 - 1) \frac{a}{2} d\varphi_1 + \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_C - N_C \frac{a}{2} \left(1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right)\right) - F \frac{a}{4} \sin \varphi_2}{EJ_y} \frac{a}{2} \left(\cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) \frac{a}{2} d\varphi_2 + \\ & + \int_0^a \frac{M_C - N_C \left(\frac{a}{2} + x_3\right) - F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} + x_3\right) - \frac{M}{2} - q \frac{x_3^2}{4}}{EJ_y} \left(-\frac{a}{2} - x_3\right) dx_3 + \\ & + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_C - N_C \frac{3a}{2} - F \frac{3a\sqrt{2}}{8} - \frac{M}{2} - q \frac{a^2}{4}}{EJ_y} \left(-\frac{3a}{2}\right) dx_4 = 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Úpravou se získá finální tvar deformační podmínky:

$$\begin{aligned} & M_C(9600 - 168a - 4800\pi) + N_C a(212a - 9600 + 3600\pi) \\ & + Fa(2400 + \sqrt{2}(53a - 1800 + 150\pi)) + 84Ma + 28qa^3 = 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

8.4.4 Vyjádření deformační podmínky $\varphi_C = 0$ v silovém tvaru

Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty pro natočení střednice v bodě B:

$$\varphi_C = \frac{\partial W}{\partial M_C} = \int_{\gamma} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial M_C} ds = 0. \quad (8.23)$$

Energie napjatosti pro jednotlivé intervaly:

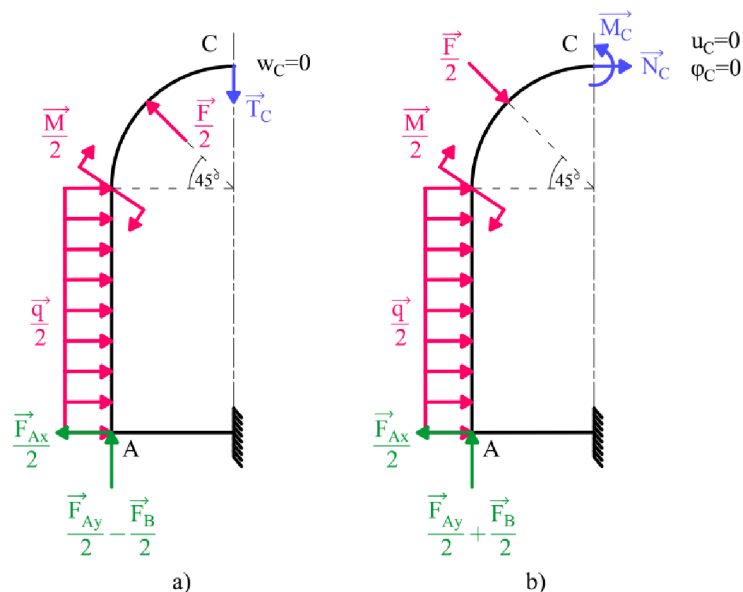
$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_C - N_C \frac{a}{2} (1 - \cos \varphi_1)}{EJ_y} (1) \frac{a}{2} d\varphi_1 + \\
 & + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_C - N_C \frac{a}{2} \left(1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right)\right) - F \frac{a}{4} \sin \varphi_2}{EJ_y} (1) \frac{a}{2} d\varphi_2 + \\
 & + \int_0^a \frac{M_C - N_C \left(\frac{a}{2} + x_3\right) - F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} + x_3\right) - \frac{M}{2} - q \frac{x_3^2}{4}}{EJ_y} (1) dx_3 + \\
 & + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M_C - N_C \frac{3a}{2} - F \frac{3a\sqrt{2}}{8} - \frac{M}{2} - q \frac{a^2}{4}}{EJ_y} (1) dx_4 = 0. \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

Vyřešení integrálů a úprava rovnice do tvaru:

$$M_C(36 + 6\pi) - N_C a(36 + 3\pi) - Fa(3 + 9\sqrt{2}) - 18M - 5a^2q = 0. \quad (8.25)$$

8.5 Řešení prutu antimetricky zatíženého

8.5.1 Částečné uvolnění antimetricky zatíženého prutu



Obr. 8.9: Částečné uvolnění prutu zatíženého silovou soustavou: a) antimetrickou, b) symetrickou.

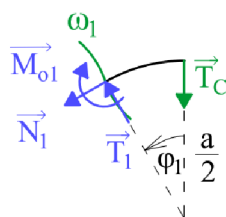
V případě antimetrického zatížení prutu silovou soustavou Π_2 , je potřeba prut částečně uvolnit (obr. 8.9a) stejně jako v případě symetricky zatíženého prutu (obr. 8.9b). Deformační podmínka je pro nulový průhyb v bodě C $w_C = 0$. V bodě C působí jediná nenulová složka VVÚ a to posouvající síla \vec{T}_C .

V kap. 4.6. je uvedeno, že není vhodné volit vazbu vetknutím na osu antimetrie z důvodu nenulového natočení, avšak pro určení energie napjatosti, je potřeba zachovat pouze deformovaný tvar a není potřeba zachovat polohu prutu v prostoru. Pokud se vazba vetknutím uvolní a sestaví se rovnice statické rovnováhy, vyjde ve vazbě nulový moment a nulová síla ve směru osy x. Vazba tedy přenáší pouze silové působení v ose y, což také odpovídá antimetričnosti úlohy (viz kap. 4.4).

8.5.2 Průběh VVÚ

Průběh VVÚ se určí obdobným způsobem jako u symetricky zatíženého prutu.

1. interval



Obr. 8.10: První interval antimetricky zatíženého prutu.

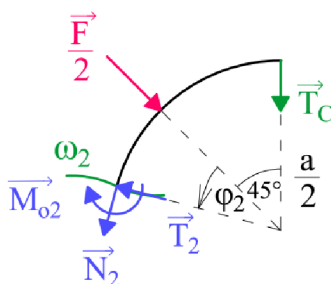
$$N_1 = -T_c \sin \varphi_1, \quad (8.26)$$

$$T_1 = T_c \cos \varphi_1, \quad (8.27)$$

$$M_{o1} = -T_c \frac{a}{2} \sin(\varphi_1), \quad (8.28)$$

$$\varphi_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

2. interval



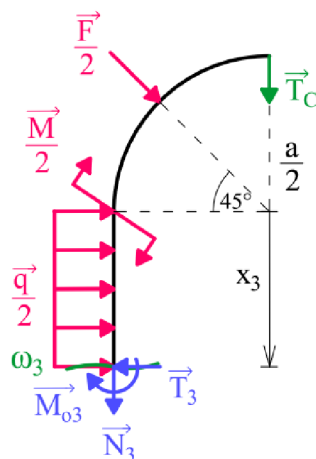
Obr. 8.11: Druhý interval antimetricky zatíženého prutu.

$$N_2 = -T_c \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{F}{2} \sin(\varphi_2), \quad (8.29)$$

$$T_2 = T_c \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{F}{2} \cos(\varphi_2), \quad (8.30)$$

$$M_{o2} = -T_c \frac{a}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) + F \frac{a}{4} \sin \varphi_2, \quad (8.31)$$

$$\varphi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

3. interval


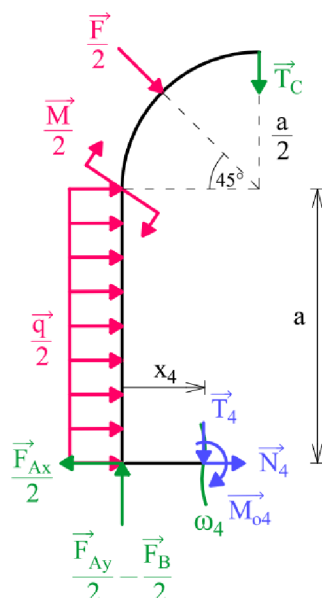
Obr. 8.12: Třetí interval antimetricky zatíženého prutu.

$$N_3 = -T_C + F \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (8.32)$$

$$T_3 = -F \frac{\sqrt{2}}{4} + q \frac{x_3}{2}, \quad (8.33)$$

$$M_{o3} = -T_C \frac{a}{2} + F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} + x_3 \right) - \frac{M}{2} - q \frac{x_3^2}{4}, \quad (8.34)$$

$$x_3 \in \langle 0; a \rangle.$$

4. interval


Obr. 8.13: Čtvrtý interval antimetricky zatíženého prutu.

$$N_4 = F \frac{\sqrt{2}}{4} - q \frac{a}{2} + \frac{F_{Ax}}{2}, \quad (8.35)$$

$$T_4 = -T_C + F \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{F_{Ay} - F_B}{2}, \quad (8.36)$$

$$M_{o4} = -T_C \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) + F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3a}{2} - x_4 \right) - \frac{M}{2} - q \frac{a^2}{4} - \frac{F_{Ay} - F_B}{2} x_4, \quad (8.37)$$

$$x_4 \in \left(0; \frac{a}{2} \right).$$

Opět se za síly F_{Ax}, F_{Ay}, F_B dosadí z rovnic statické rovnováhy (8.1) až (8.3) a průběhy VVÚ vyjdou:

$$N_4 = 0, \quad (8.38)$$

$$T_4 = -T_C + F \frac{3\sqrt{2}}{4} - q \frac{a}{2} - \frac{M}{a}, \quad (8.39)$$

$$M_{o4} = -T_C \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) + F \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) + M \left(\frac{x_4}{a} - \frac{1}{2} \right) + q \frac{a}{2} \left(x_4 - \frac{a}{2} \right), \quad (8.40)$$

$$x_4 \in \left(0; \frac{a}{2} \right).$$

8.5.3 Vyjádření deformační podmínky $w_C = 0$ v silovém tvaru

Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty pro průhyb střednice v bodě C:

$$w_C = \frac{\partial W}{\partial T_C} = \int_V \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial T_C} ds = 0. \quad (8.41)$$

Energie napjatosti pro jednotlivé intervaly:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-T_C \frac{a}{2} \sin(\varphi_1)}{EJ_y} \left(-\frac{a}{2} \sin(\varphi_1) \right) \frac{a}{2} d\varphi_1 + \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-T_C \frac{a}{2} \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + F \frac{a}{4} \sin\varphi_2}{EJ_y} \left(-\frac{a}{2} \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right) \frac{a}{2} d\varphi_2 + \\ & + \int_0^a \frac{-T_C \frac{a}{2} + F \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} + x_3 \right) - \frac{M}{2} - q \frac{x_3^2}{4}}{EJ_y} \left(-\frac{a}{2} \right) dx_3 + \\ & + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{-T_C \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) + F \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) + M \left(\frac{x_4}{a} - \frac{1}{2} \right) + q \frac{a}{2} \left(x_4 - \frac{a}{2} \right)}{EJ_y} \left(x_4 - \frac{a}{2} \right) dx_4 = 0. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Vyřešení integrálů a úprava:

$$T_C a(224 + 24\pi) - \sqrt{2}Fa(120 + 3\pi) + 224M + 48a^2q = 0. \quad (8.43)$$

8.5.4 Řešení neznámých silových účinků

Vhodnou metodou se vyřeší soustava dvou lineárních rovnic (8.22), (8.25) o dvou neznámých a z rovnice (8.43) se vyjádří síla T_C . Výsledné vztahy jsou:

$$\begin{aligned} N_C = & M \frac{3(1200\pi - 2400 - 7\pi a)}{2a(33a + 16\pi a - 1500\pi + 150\pi^2)} \\ & + F \frac{(84a - 19200 + \sqrt{2}(-3600 - 66a - 53\pi a + 8100\pi - 150\pi^2))}{8(33a + 16\pi a - 1500\pi + 150\pi^2)} \\ & + q \frac{a(1000\pi - 2000 - 7a - 7\pi a)}{2(33a + 16\pi a - 1500\pi + 150\pi^2)}, \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} M_C = & M \frac{3(1800\pi - 4800 - 7\pi a + 22a)}{4(33a - 1500\pi + 16\pi a + 150\pi^2)} \\ & + F \frac{a(1200\pi - 38400 + 212a + \sqrt{2}(10800\pi - 7200 - 150\pi^2 - 53\pi a))}{16(33a - 1500\pi + 16\pi a + 150\pi^2)} \\ & + q \frac{a^2(4500\pi - 12000 + 13a - 21\pi a)}{12(33a - 1500\pi + 16\pi a + 150\pi^2)}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$T_C = \frac{-224M + Fa\sqrt{2}(120 + 3\pi) - 48a^2q}{8a(3\pi + 28)}. \quad (8.46)$$

Dosazením hodnot ze zadání vyjde silové působení následovně:

$$\begin{aligned} N_C & \doteq -87,7 \text{ N}, \\ T_C & \doteq 4,0 \text{ N}, \\ M_C & \doteq -5,5 \text{ Nm} \end{aligned}$$

a síly ve vazbách z rovnic (8.1) až (8.3) vyjdou:

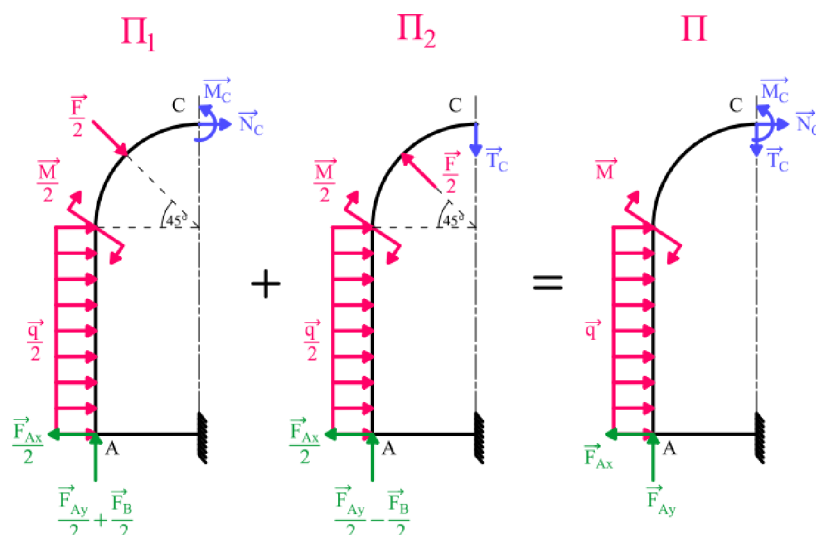
$$\begin{aligned} F_{Ax} & \doteq 169,3 \text{ N}, \\ F_{Ay} & \doteq -38,9 \text{ N}, \\ F_B & \doteq 109,6 \text{ N}. \end{aligned}$$

8.6 Průběh VVÚ celého prutu

Platí-li pro silové soustavy:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi,$$

pak součet složek VVÚ v bodě C ($\overline{N}_C + \overline{M}_C$) + (\overline{T}_C) pro silové soustavy Π_1 a Π_2 , musí dát výsledné složky VVÚ v bodě C \overline{N}_C , \overline{T}_C , \overline{M}_C , pro silovou soustavu Π (obr. 8.14).



Obr. 8.14: Silové působení v bodě C prutu, zatíženého silovou soustavou Π .

Jelikož na levou část prutu nyní působí jiné vnější zatížení, bylo by potřeba průběh VVÚ určit znovu, již se známým silovým působením v bodě C. Jak je zmíněno v kap. 8.4.2, pokud už je znám průběh VVÚ pro silovou soustavu Π_1 a Π_2 , potom celkový průběh VVÚ levé části prutu je dán součty průběhů VVÚ silových soustav Π_1 a Π_2 a platí:

1. interval:

$$(8.5) + (8.26) \quad N_1 = N_C \cos \varphi_1 - T_C \sin \varphi_1, \quad (8.47)$$

$$(8.6) + (8.27) \quad T_1 = N_C \sin \varphi_1 + T_C \cos \varphi_1, \quad (8.48)$$

$$(8.7) + (8.28) \quad M_{o1} = M_C - N_C \frac{a}{2} (1 - \cos \varphi_1) - T_C \frac{a}{2} \sin(\varphi_1), \quad (8.49)$$

$$\varphi_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

2. interval:

$$(8.8) + (8.29) \quad N_2 = N_C \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) - T_C \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right), \quad (8.50)$$

$$(8.9) + (8.30) \quad T_2 = N_C \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) + T_C \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right), \quad (8.51)$$

$$(8.10) + (8.31) \quad M_{o2} = M_C - N_C \frac{a}{2} \left(1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) \right) - T_C \frac{a}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right), \quad (8.52)$$

$$\varphi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

3. interval:

$$(8.11) + (8.32) \quad N_3 = -T_C, \quad (8.53)$$

$$(8.12) + (8.33) \quad T_3 = N_C + qx_3, \quad (8.54)$$

$$(8.13) + (8.34) \quad M_{o3} = M_C - N_C \left(\frac{a}{2} + x_3 \right) - T_C \frac{a}{2} - M - q \frac{x_3^2}{2}, \quad (8.55)$$

$$x_3 \in \langle 0; a \rangle.$$

4. interval:

$$(8.17) + (8.38) \quad N_4 = -N_C - F \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (8.56)$$

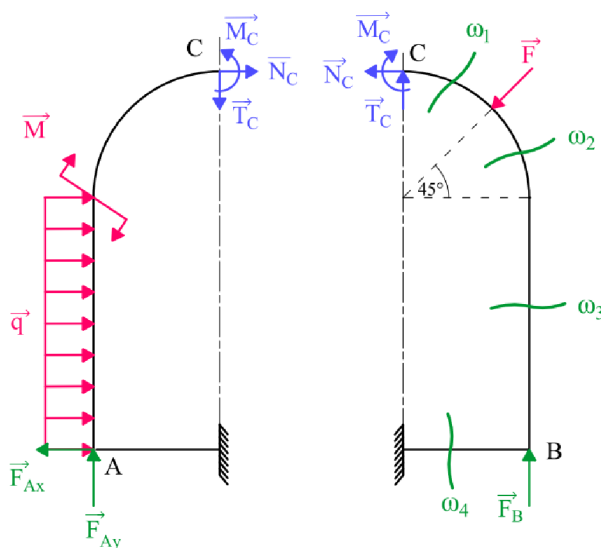
$$(8.18) + (8.39) \quad T_4 = -T_C + F \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{M}{a} - q \frac{a}{2}, \quad (8.57)$$

$$(8.19) + (8.40) \quad M_{o4} = M_C - N_C \frac{3a}{2} - T_C \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) - F \frac{3\sqrt{2}}{4} x_4$$

$$+ M \left(\frac{x_4}{a} - 1 \right) + q \frac{a}{2} (x_4 - a), \quad (8.58)$$

$$x_4 \in \left\langle 0; \frac{a}{2} \right\rangle.$$

Lze si všimnout, že poté co vypadla síla $\frac{F}{2}$ z řešení, jsou VVÚ v prvním a druhém intervalu popsány stejnou funkcí a stačily by pouze tři intervaly. Interval zakřivené části prutu by poté byl vyjádřen úhlem $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Hledání průběhu VVÚ pravé části prutu je obdobné jako u levé části, a proto jsou v této práci uvedené již výsledné vztahy pro čtyři řešené intervaly. Pro silové výslednice v bodě C musí platit zákon akce a reakce (obr. 8.15).



Obr. 8.15: Zákon akce a reakce silového působení v bodě C a dělení pravé části prutu na čtyři intervaly.

1. interval

$$N_1 = N_C \cos \varphi_1 + T_C \sin \varphi_1, \quad (8.59)$$

$$T_1 = -N_C \sin \varphi_1 + T_C \cos \varphi_1, \quad (8.60)$$

$$M_{o1} = M_C - N_C \frac{a}{2} (1 - \cos \varphi_1) + T_C \frac{a}{2} \sin \varphi_1, \quad (8.61)$$

$$\varphi_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

2. interval

$$N_2 = N_C \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) + T_C \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) - F \sin(\varphi_2), \quad (8.62)$$

$$T_2 = -N_C \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) + T_C \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) - F \cos(\varphi_2), \quad (8.63)$$

$$M_{o2} = M_C - N_C \frac{a}{2} \left(1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) \right) + T_C \frac{a}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right) - F \frac{a}{2} \sin(\varphi_2), \quad (8.64)$$

$$\varphi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

3. interval

$$N_3 = T_C - \frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad (8.65)$$

$$T_3 = -N_C - \frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad (8.66)$$

$$M_{o3} = M_C - N_C \left(\frac{a}{2} + x_3 \right) + T_C \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} F \left(\frac{a}{2} + x_3 \right), \quad (8.67)$$

$$x_3 \in (0; a).$$

4. interval

$$N_4 = -N_C - \frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad (8.68)$$

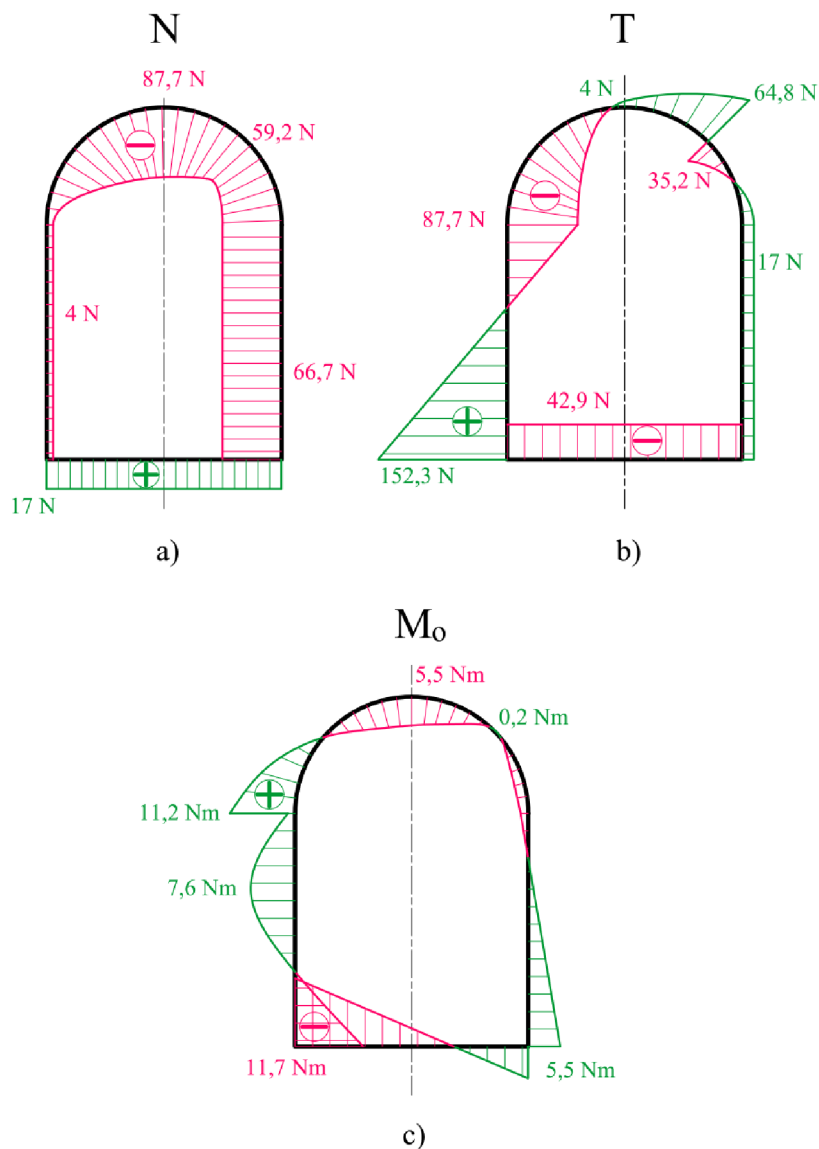
$$T_4 = -T_C + \frac{3\sqrt{2}}{4} F - q \frac{a}{2} - \frac{M}{a}, \quad (8.69)$$

$$M_{o4} = M_C - N_C \frac{3a}{2} + T_C \left(\frac{a}{2} - x_4 \right) - F \frac{3\sqrt{2}}{4} (a - x_4) - q \frac{a}{2} x_4 - \frac{M}{a} x_4, \quad (8.70)$$

$$x_4 \in \left(0; \frac{a}{2} \right).$$

8.7 Grafické zobrazení VVÚ

Vykreslením a spojením průběhu VVÚ pravé a levé části prutu se získá průběh VVÚ po celé délce prutu (obr. 8.16). Pokud v ose symetrie prutu nepůsobí žádné vnější zatížení, musí zde být průběh všech složek VVÚ spojitý a hladký.



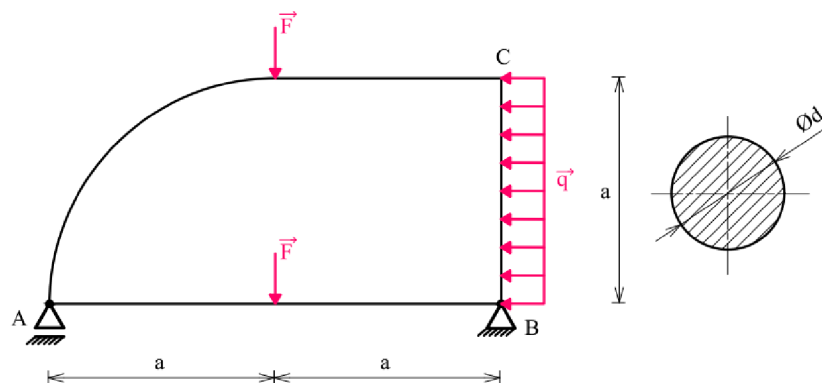
Obr. 8.16: Průběh VVÚ po celé délce prutu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.

8.8 Maximální ohybový moment

Lokálních extrémů ohybového momentu je po délce prutu více a bylo by potřeba vyčíslit všechny extrémy, aby se našlo nebezpečné místo, avšak z grafického znázornění (obr. 8.16c), lze předpokládat, že největší ohybový moment je v místě rotační vazby o velikosti $M_{oMAX} = 11,7 \text{ Nm}$.

9 Třetí úloha – obecné řešení

U uzavřeného rovinného rámu (obr. 9.1) je určen průběh VVÚ a vyhledáno místo s maximálním ohybovým momentem. Rám má rozměry $a = 400 \text{ mm}$ a kruhový příčný průřez s průměrem $d = 10 \text{ mm}$. Je zatížen osamělými silami $F = 100 \text{ N}$ a liovým zatížením $q = 0,4 \text{ Nmm}^{-1}$. Rám je vyroben z oceli s modulem pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$. K řešení a úpravě rovnic je využit program MATLAB.



Obr. 9.1: Obecný rovinný rám.

9.1 Rozbor úlohy

Jedná se o obecný rovinný uzavřený prut zatížený obecnou rovinnou silovou soustavou. Z tohoto důvodu nelze využít žádné redukce jako u minulých úloh a k určení VVÚ je potřeba vyřešit třikrát vnitřně staticky neurčitý rám. V tomto případě se nabízí vícero možností částečného uvolnění, z nichž je jedno vybráno k řešení úlohy.

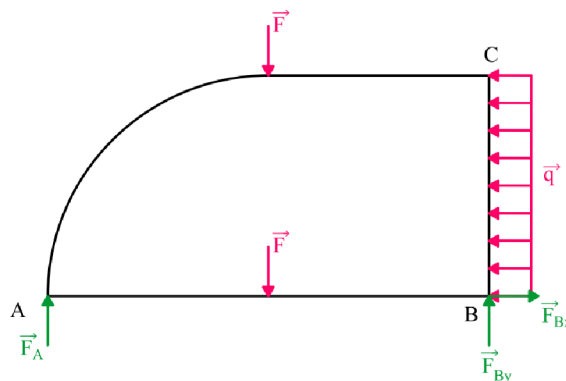
9.2 Uvolnění vazeb

Uvolněním vazeb dle obr. 9.2, lze silové účinky ve vazbách určit z rovnic statické rovnováhy:

$$F_A = F + q \frac{a}{4}, \quad (9.1)$$

$$F_{Bx} = qa, \quad (9.2)$$

$$F_{By} = F - q \frac{a}{4}. \quad (9.3)$$

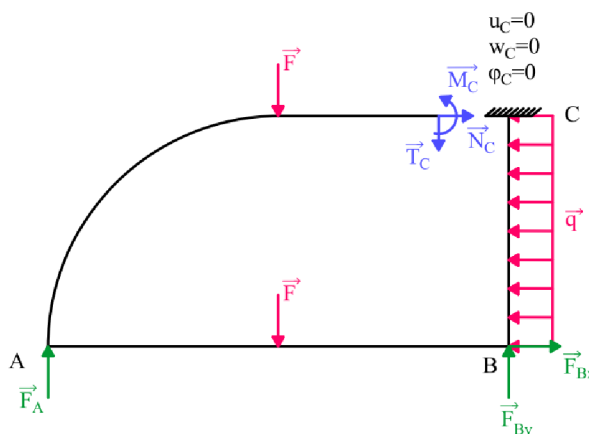


Obr. 9.2: Obecný rovinný rám – uvolnění vazeb.

9.3 Typy částečného uvolnění

Jednou z možností částečného uvolnění je otevření prutu a zavedení vazby vetknutím (obr. 9.3). Vazbu vetknutím je vhodné volit v místě zlomu prutu, jelikož pak z řešení vypadne právě tento zlom. Poté se předepíší deformační podmínky, které zajišťují nulové relativní posuvy a natočení střednice v bodě C [1]:

$$u_C = \frac{\partial W}{\partial N_C} = 0, \quad w_C = \frac{\partial W}{\partial T_C} = 0, \quad \varphi_C = \frac{\partial W}{\partial M_C} = 0.$$

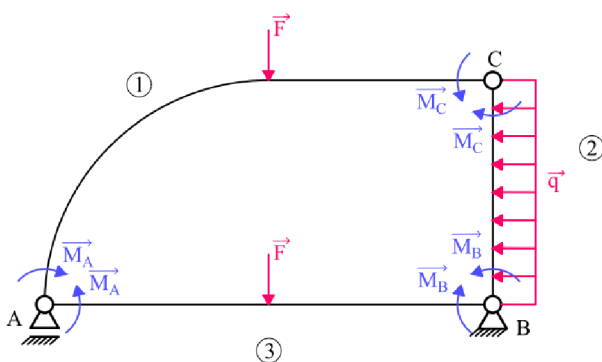


Obr. 9.3: Částečné uvolnění vazbou vetknutím.

Další možností je uvolnění tuhých zlomů a jejich nahrazení rotační vazbou (obr. 9.4). Deformační podmínky pak vyjadřují nulové relativní úhly natočení v uvolněných zlomech:

$$\varphi_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = 0, \quad \varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0, \quad \varphi_C = \frac{\partial W}{\partial M_C} = 0.$$

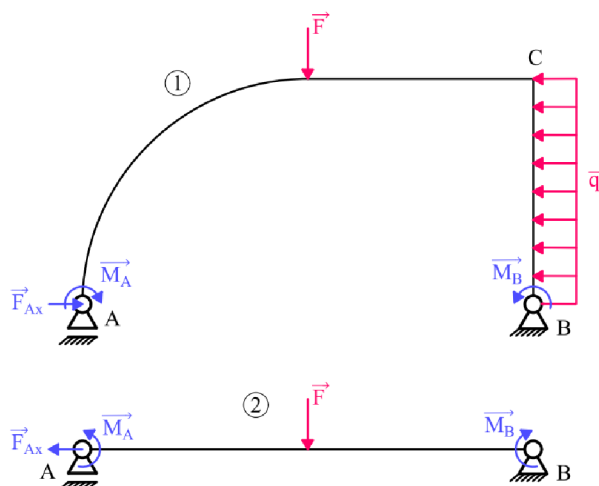
Ty zajišťují momenty $\vec{M}_A, \vec{M}_B, \vec{M}_C$, které působí na jednotlivé pruty 1, 2, 3 (obr. 9.4).



Obr. 9.4: Částečné uvolnění tuhých zlomů rotační vazbou.

Částečné uvolnění, které je využito k řešení úlohy lze vidět na obr. 9.5. Zlom B se uvolní rotační vazbou a zavedením momentu \vec{M}_B . Zlom A je nahrazen momentem \vec{M}_A a silou \vec{F}_{Ax} , která zajišťuje nulový relativní posuv prutu 1 a 2 v bodě A. Deformační podmínky prutu 1 a 2 s uvažováním směru působení neznámých složek vypadají následovně:

$$u_{A1} = -u_{A2}, \quad \varphi_{A1} = -\varphi_{A2}, \quad \varphi_{B1} = -\varphi_{B2}.$$



Obr. 9.5: Částečné uvolnění s využitím momentu \vec{M}_A, \vec{M}_B a síly \vec{F}_{Ax} .

9.4 Vyjádření stykových výslednic

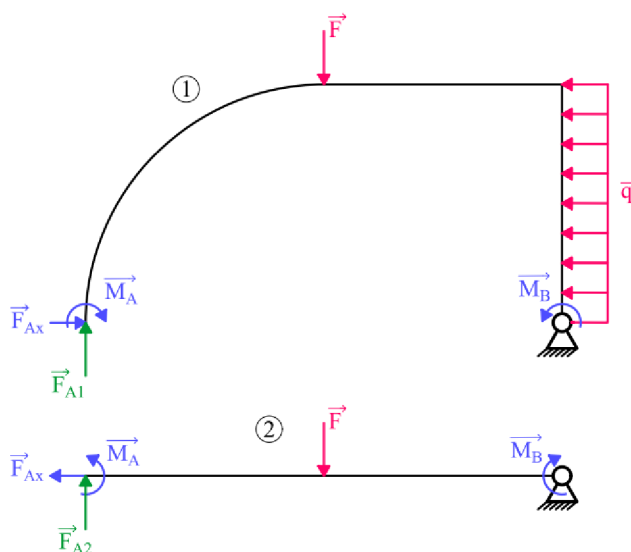
Průběh VVÚ se určí od bodu A, a proto je potřeba stykovou výslednici vazby A správně vyjádřit. Každý prut přenáší pouze část silového působení od vazby A, přičemž stykové výslednice $\vec{F}_{A1}, \vec{F}_{A2}$ (obr. 9.6) se vyjádří jako funkce vnějšího zatížení (\vec{F}, \vec{q}) a stykových výslednic ($\vec{F}_{Ax}, \vec{M}_A, \vec{M}_B$), podle kterých je derivována energie napjatosti [1]. Síly $\vec{F}_{A1}, \vec{F}_{A2}$ je vhodné vyjádřit z rovnic momentové rovnováhy k bodu B pro jednotlivé pruty:

$$F_{A1} = \frac{M_B - M_A + Fa + q \frac{a^2}{2}}{2a}, \quad (9.4)$$

$$F_{A2} = \frac{M_A - M_B + Fa}{2a}, \quad (9.5)$$

přičemž platí

$$F_{A1} + F_{A2} = F_A. \quad (9.6)$$

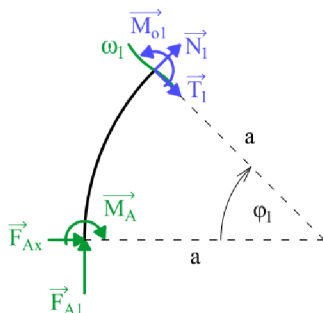


Obr. 9.6: Obecný rovinný rám – vyjádření stykových výslednic.

9.5 Průběh VVÚ

Průběhy VVÚ budou určeny již s dosazenými stykovými výslednicemi $\vec{F}_{A1}, \vec{F}_{A2}$ a průběhy ohybových momentů budou upraveny tak, aby se snadno poté dala vyjádřit parciální derivace. VVÚ prutu 1:

1. interval



Obr. 9.7: Obecný rovinný rám – 1. interval.

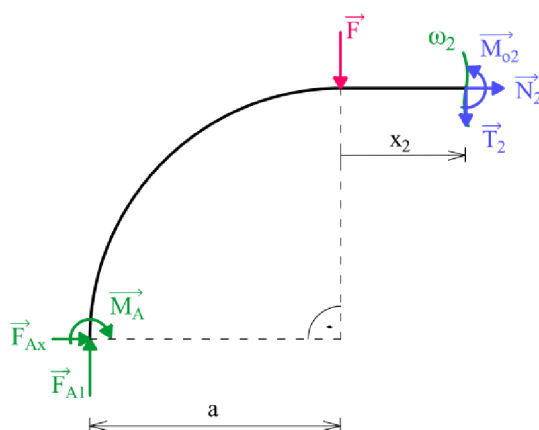
$$N_1 = \left(\frac{M_A}{2a} - \frac{M_B}{2a} - \frac{F}{2} - q \frac{a}{4} \right) \cos(\varphi_1) - F_{Ax} \sin(\varphi_1), \quad (9.7)$$

$$T_1 = \left(\frac{M_B}{2a} - \frac{M_A}{2a} + \frac{F}{2} + q \frac{a}{4} \right) \sin(\varphi_1) - F_{Ax} \cos(\varphi_1), \quad (9.8)$$

$$M_{o1} = M_A \frac{1 + \cos(\varphi_1)}{2} + M_B \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{2} + \left(\frac{Fa}{2} + q \frac{a^2}{4} \right) (1 - \cos(\varphi_1)) - F_{Ax} a (\sin(\varphi_1)). \quad (9.9)$$

$$\varphi_1 \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

2. interval



Obr. 9.8: Obecný rovinný rám – 2. interval.

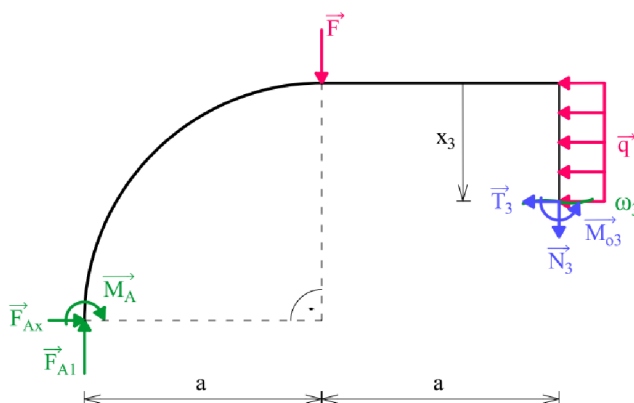
$$N_2 = -F_{Ax}, \quad (9.10)$$

$$T_2 = \frac{M_B}{2a} - \frac{M_A}{2a} - \frac{F}{2} + q \frac{a}{4}, \quad (9.11)$$

$$M_{o2} = M_A \frac{a - x_2}{2a} + M_B \frac{a + x_2}{2a} - F_{Ax}a + F \frac{a - x_2}{2} + q \frac{a^2 + ax_2}{4}, \quad (9.12)$$

$$x_2 \in \langle 0; a \rangle.$$

3. interval



Obr. 9.9: Obecný rovinný rám – 3. interval.

$$N_3 = \frac{M_B}{2a} - \frac{M_A}{2a} - \frac{F}{2} + q \frac{a}{4}, \quad (9.13)$$

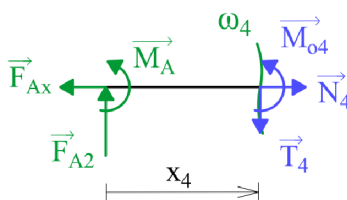
$$T_3 = F_{Ax} - qx_3, \quad (9.14)$$

$$M_{o3} = M_B + q \frac{a^2 - x_3^2}{2} - F_{Ax}(a - x_3), \quad (9.15)$$

$$x_3 \in \langle 0; a \rangle.$$

Průběh VVÚ prutu 2:

4. interval



Obr. 9.10: Obecný rovinný rám – 4. interval.

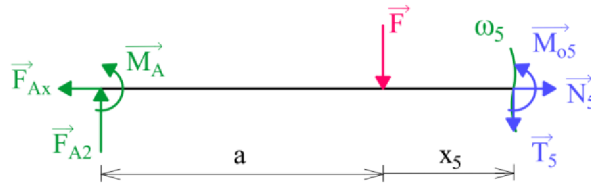
$$N_4 = F_{Ax}, \quad (9.16)$$

$$T_4 = \frac{M_A}{2a} - \frac{M_B}{2a} + \frac{F}{2}, \quad (9.17)$$

$$M_{o4} = M_A \frac{x_4 - 2a}{2a} - M_B \frac{x_4}{2a} + F \frac{x_4}{2}, \quad (9.18)$$

$$x_4 \in \langle 0; a \rangle.$$

5. interval



Obr. 9.11: Obecný rovinný rám – 5. interval.

$$N_5 = F_{Ax}, \quad (9.19)$$

$$T_5 = \frac{M_A}{2a} - \frac{M_B}{2a} - \frac{F}{2}, \quad (9.20)$$

$$M_{o5} = M_A \frac{x_5 - a}{2a} - M_B \frac{a + x_5}{2a} + F \frac{a - x_5}{2}, \quad (9.21)$$

$$x_5 \in \langle 0; a \rangle.$$

9.6 Vyjádření deformační podmínky $u_{A1} = -u_{A2}$ v silovém tvaru

Využije se Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty:

$$u_{A1} = \frac{\partial W_1}{\partial F_{Ax}} = \int_{\gamma_1} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial F_{Ax}} ds = - \int_{\gamma_2} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial F_{Ax}} ds = - \frac{\partial W_2}{\partial F_{Ax}} = -u_{A2}, \quad (9.22)$$

kde W_1 je energie napjatosti prutu 1 a W_2 energie napjatosti prutu 2. Dosazením momentů a parciálních derivací do rov. (9.22) se získá:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_A \frac{1 + \cos(\varphi_1)}{2} + M_B \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{2} + \left(\frac{Fa}{2} + q \frac{a^2}{4}\right) (1 - \cos(\varphi_1)) - F_{Ax} a (\sin(\varphi_1))}{EJ_y} \cdot (-a(\sin(\varphi_1))) a d\varphi_1 +$$

$$+ \int_0^a \frac{M_A \frac{a - x_2}{2a} + M_B \frac{a + x_2}{2a} - F_{Ax} a + F \frac{a - x_2}{2} + q \frac{a^2 + ax_2}{4}}{EJ_y} (-a) dx_2 +$$

$$+ \int_0^a \frac{M_B + q \frac{a^2 - x_3^2}{2} - F_{Ax} (a - x_3)}{EJ_y} (x_3 - a) dx_3 =$$

$$= - \int_0^a \frac{M_A \frac{x_4 - 2a}{2a} - M_B \frac{x_4}{2a} + F \frac{x_4}{2}}{EJ_y} (0) dx_4$$

$$- \int_0^a \frac{M_A \frac{x_5 - a}{2a} - M_B \frac{a + x_5}{2a} + F \frac{a - x_5}{2}}{EJ_y} (0) dx_5. \quad (9.23)$$

Finální tvar deformační podmínky je poté:

$$24M_A + 36M_B - F_{Ax}a(32 + 6\pi) + 12Fa + 17qa^2 = 0. \quad (9.24)$$

9.7 Vyjádření deformační podmínky $\varphi_{A1} = -\varphi_{A2}$ v silovém tvaru

Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty:

$$\varphi_{A1} = \frac{\partial W_1}{\partial M_A} = \int_{\gamma_1} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial M_A} ds = - \int_{\gamma_2} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial M_A} ds = - \frac{\partial W_2}{\partial M_A} = -\varphi_{A2}. \quad (9.25)$$

Dosažení momentů a parciálních derivací:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_A \frac{1 + \cos(\varphi_1)}{2} + M_B \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{2} + \left(\frac{Fa}{2} + q \frac{a^2}{4}\right) (1 - \cos(\varphi_1)) - F_{Ax}a(\sin(\varphi_1))}{EJ_y} \\ & \cdot \frac{1 + \cos(\varphi_1)}{2} a d\varphi_1 + \\ & + \int_0^a \frac{M_A \frac{a - x_2}{2a} + M_B \frac{a + x_2}{2a} - F_{Ax}a + F \frac{a - x_2}{2} + q \frac{a^2 + ax_2}{4} a - x_2}{EJ_y} \frac{a - x_2}{2a} dx_2 + \\ & + \int_0^a \frac{M_B + q \frac{a^2 - x_3^2}{2} - F_{Ax}(a - x_3)}{EJ_y} (0) dx_3 = \\ & = - \int_0^a \frac{M_A \frac{x_4 - 2a}{2a} - M_B \frac{x_4}{2a} + F \frac{x_4}{2} x_4 - 2a}{EJ_y} \frac{x_4 - 2a}{2a} dx_4 \\ & - \int_0^a \frac{M_A \frac{x_5 - a}{2a} - M_B \frac{a + x_5}{2a} + F \frac{a - x_5}{2} x_5 - a}{EJ_y} \frac{x_5 - a}{2a} dx_5. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Finální tvar deformační podmínky:

$$M_A(120 + 18\pi) + M_B(48 + 6\pi) - 96F_{Ax}a + Fa(6\pi - 16) + qa^2(8 + 3\pi) = 0. \quad (9.27)$$

9.8 Vyjádření deformační podmínky $\varphi_{B1} = -\varphi_{B2}$ v silovém tvaru

Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty:

$$\varphi_{A1} = \frac{\partial W_1}{\partial M_B} = \int_{\gamma_1} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial M_B} ds = - \int_{\gamma_2} \frac{M_o(s)}{EJ_y} \frac{\partial M_o(s)}{\partial M_B} ds = - \frac{\partial W_2}{\partial M_B} = -\varphi_{B2}. \quad (9.28)$$

Dosazení momentů a parciálních derivací:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_A \frac{1 + \cos(\varphi_1)}{2} + M_B \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{2} + \left(\frac{Fa}{2} + q \frac{a^2}{4}\right) (1 - \cos(\varphi_1)) - F_{Ax} a (\sin(\varphi_1))}{EJ_y} \\
& \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{2} a d\varphi_1 + \\
& + \int_0^a \frac{M_A \frac{a - x_2}{2a} + M_B \frac{a + x_2}{2a} - F_{Ax} a + F \frac{a - x_2}{2} + q \frac{a^2 + ax_2}{4} \frac{a + x_2}{2a}}{EJ_y} dx_2 + \\
& + \int_0^a \frac{M_B + q \frac{a^2 - x_3^2}{2} - F_{Ax} (a - x_3)}{EJ_y} (1) dx_3 = \\
& = - \int_0^a \frac{M_A \frac{x_4 - 2a}{2a} - M_B \frac{x_4}{2a} + F \frac{x_4}{2} \left(-\frac{x_4}{2a}\right)}{EJ_y} dx_4 \\
& - \int_0^a \frac{M_A \frac{x_5 - a}{2a} - M_B \frac{a + x_5}{2a} + F \frac{a - x_5}{2} \frac{x_5 - a}{2a}}{EJ_y} dx_5. \tag{9.29}
\end{aligned}$$

Finální tvar deformační podmínky:

$$M_A(48 + 6\pi) + M_B(168 + 18\pi) - 144F_{Ax}a + Fa(18\pi - 56) + qa^2(36 + 9\pi) = 0. \tag{9.30}$$

9.9 Řešení neznámých silových účinků

Vyřeší se soustava třech rovnic (9.24), (9.27), (9.30) o třech neznámých a vyjádří se neznámé silové působení:

$$F_{Ax} = \frac{F(1488 + 56\pi - 24\pi^2) + qa(594 + 80\pi - \pi^2)}{2(3\pi^3 + 64\pi^2 + 280\pi - 184)}, \tag{9.31}$$

$$M_A = \frac{Fa(2304 - 280\pi - 12\pi^2) + qa^2(896 + 15\pi)}{6(3\pi^3 + 64\pi^2 + 280\pi - 184)}, \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned}
M_B = & - \frac{Fa(18\pi^3 + 156\pi^2 - 520\pi - 2800)}{6(3\pi^3 + 64\pi^2 + 280\pi - 184)} \\
& - \frac{qa^2(9\pi^3 + 144\pi^2 + 293\pi - 1508)}{6(3\pi^3 + 64\pi^2 + 280\pi - 184)}. \tag{9.33}
\end{aligned}$$

Dosažením hodnot ze zadání vyjde silové působení:

$$F_{Ax} \doteq 97,3 \text{ N},$$

$$M_A \doteq 13,2 \text{ Nm},$$

$$M_B \doteq 2,6 \text{ Nm},$$

$$F_{A1} \doteq 76,7 \text{ N},$$

$$F_{A2} \doteq 63,3 \text{ N}$$

a ze statické rovnováhy (9.1) až (9.3) síly ve vazbách:

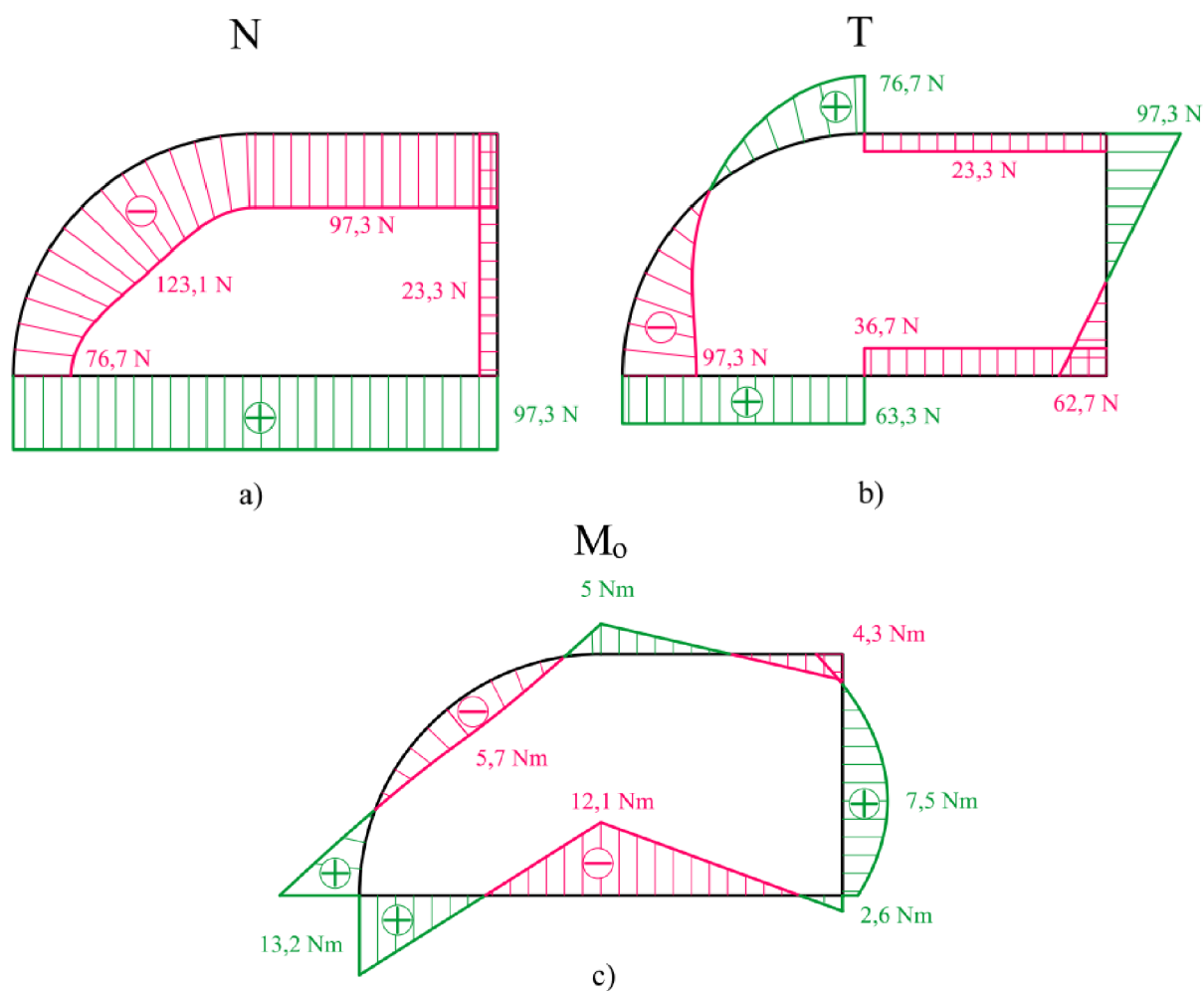
$$F_A = 140 \text{ N},$$

$$F_{Bx} = 160 \text{ N},$$

$$F_{By} = 60 \text{ N}.$$

9.10 Grafické zobrazení průběhu VVÚ

Průběhy VVÚ lze vidět na obr. 9.12.



Obr. 9.12: Průběh VVÚ obecného rovinného rámu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.

9.11 Maximální ohybový moment

Maximální ohybový moment se nachází v místě vazby A o velikosti $M_{oMAX} = 13,2 Nm$ (obr. 9.12c).

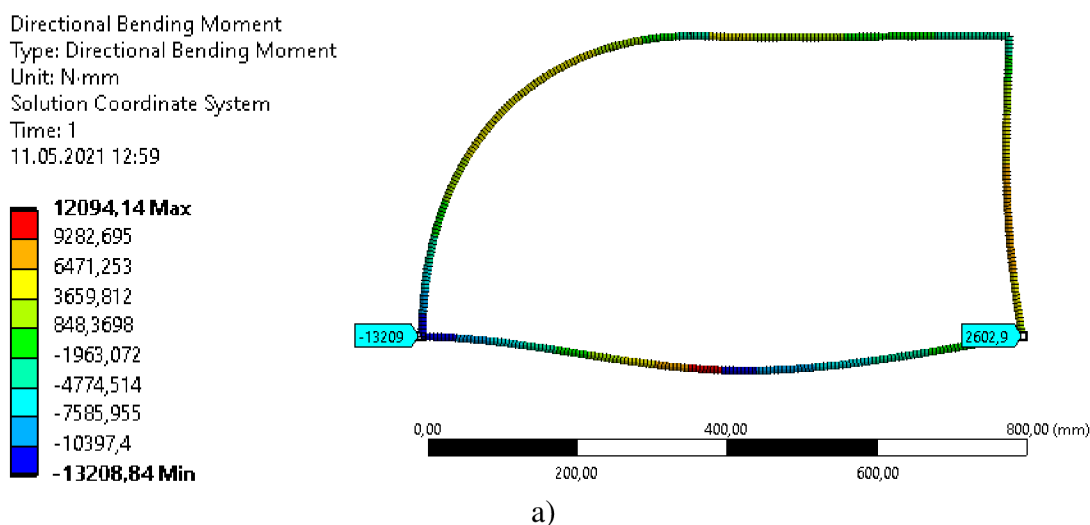
9.12 Vliv všech složek VVÚ a numerické řešení

V kap. 6.1 je zaveden předpoklad, který umožnil řešit energii napjatosti pouze vlivem ohybového momentu. Tento předpoklad do řešení vnáší určitou chybu, která je ale u štíhlých prutů minimální. Aby byl vystižen přesnější výsledek je potřeba do energie napjatosti zahrnout také vliv normálové a posouvající síly, viz rov. (6.3). V dnešní době už se ani analytické řešení moc nepoužívá a je častěji využíváno numerické řešení. V následující tabulce lze vidět porovnání hodnot F_{Ax} , M_A , M_B pro analytické řešení s uvažováním ohybového momentu, analytické řešení s uvažováním všech složek VVÚ a numerické řešení, provedené v programu ANSYS Workbench, který pracuje na základě metody konečných prvků. Pro numerickou metodu byly voleny prvky typu BEAM [7] o velikosti 5 mm a 20 mm.

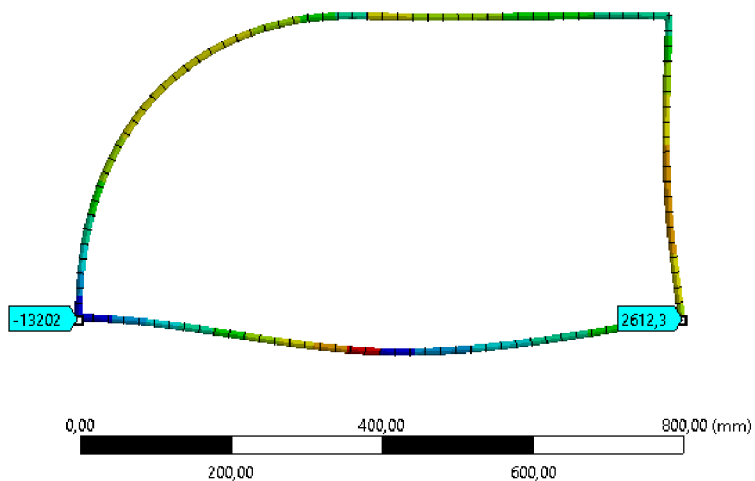
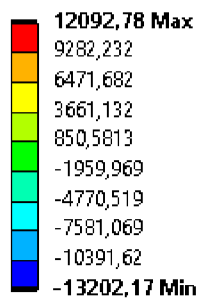
Tab. 9.1: Porovnání hodnot F_{Ax} , M_A , M_B řešených různými metodami.

Metoda	Analytická – vliv M_o	Analytická – vliv N, T, M_o	Numerická – prvek 5 mm	Numerická – prvek 20 mm
F_{Ax} [N]	97,295	97,272	96,792	93,437
M_A [Nmm]	13212,6	13209,3	13208,8	13202,2
M_B [Nmm]	2607,1	2602,2	2602,9	2612,3

Jak je patrné z tab. 9.1, rozdíl mezi výsledky analytického výpočtu s uvažováním vlivu ohybového momentu a všech složek VVÚ je pouze v řádech setin procent. Tím byl také ověřen předpoklad z kap. 6.1. Na rozdíl od analytického řešení, numerické řešení pouze aproximuje výsledné řešení a jeho přesnost tak velmi závisí na velikosti konečných prvků [7]. Prvky o velikosti 5 mm tedy lépe aproximují analytické řešení (vliv všech VVÚ) než prvky o velikosti 20 mm. Toto srovnání lze vidět na obr. 9.13, kde vyznačené hodnoty jsou ohybové momenty M_A (vlevo) a M_B (vpravo).



Directional Bending Moment
 Type: Directional Bending Moment
 Unit: N·mm
 Solution Coordinate System
 Time: 1
 11.05.2021 13:08



b)

Obr. 9.13: Hodnoty ohybových momentů M_A, M_B v závislosti na velikosti konečných prvků: a) prvky 5 mm, b) prvky 20 mm.

10 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo určování výsledných vnitřních účinků (VVÚ) uzavřených prutů. I když se práce zaměřuje pouze na rovinné případy, jsou úlohy rovinných uzavřených prutů vždy minimálně třikrát staticky neurčité.

V úvodní části práce byly uvedeny základy teorie lineární pružnosti a vybrané věty lineární pružnosti, které se využily při řešení vzorových příkladů. Dále bylo definováno prutové těleso pomocí prutových předpokladů a jeho možné tvarové varianty, mezi které patří právě uzavřený prut.

Rozsáhlou částí práce byla kapitola věnující se výsledným vnitřním účinkům (VVÚ) v prutu a jejich určování. Zavedením VVÚ bylo možné průběhy napětí v prutovém tělese nahradit silovými průběhy na střednici prutu, jenž mají vzhledem k vnějšímu zatížení lineární charakter. K určení průběhu VVÚ uzavřených prutů, byla nutnost zavést deformační podmínky v místě otevření prutu, které zajišťovaly spojitý a hladký průběh střednice prutu v místě otevření. K jejich vyjádření byla využita Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty.

U prutů, jejichž geometrie a materiálové charakteristiky byly symetrické podle jedné nebo více os, došlo k značnému zjednodušení určování VVÚ. Pokud byl prut zatížen symetrickou nebo antisymetrickou silovou soustavou vůči osám symetrie prutu, bylo možné stanovit průběh VVÚ a deformaci prutu jako taktéž symetrickou nebo antisymetrickou vůči osám symetrie prutu. Na ose symetrie a antisymetrie byly zavedeny závislosti mezi složkami VVÚ a deformaci prutu, které umožnily snížit stupeň statické neurčitosti a řešit pouze část prutového tělesa, čímž se také snížil počet řešených integrálů v energii napjatosti.

Tento postup byl využit v první úloze, přičemž řešení původně celého prutu, který byl čtyřikrát staticky neurčitý, bylo možné nahradit řešením čtvrtiny prutu, která byla dvakrát staticky neurčitá. Kromě redukce stupně statické neurčitosti došlo také téměř ke čtyřnásobnému snížení počtu integrálů.

U druhé úlohy byl využit princip superpozice. Řešení třikrát staticky neurčitého symetrického prutu, zatíženého obecnou rovinnou silovou soustavou, se nahradilo součtem řešení dvou stejných symetrických prutů, zatížených symetrickou a antisymetrickou rovinnou silovou soustavou. Následnou aplikací stejného postupu jako v první úloze, byly jednotlivé pruty řešeny jako dvakrát a jednou staticky neurčité.

V třetí úloze byl demonstrován obecný přístup řešení uzavřených prutů. Jelikož prut nebyl symetrický dle žádné osy, nebylo možné využití této osy, ani principu superpozice. Z tohoto důvodu se nabízelo vícero způsobů částečného uvolnění, z nichž nejobecnější bylo částečné uvolnění vazbou vetknutím, podobně jako v předcházejících úlohách. Pro účely práce bylo vybráno méně tradiční částečné uvolnění. Prut byl rozložen na dvě samostatná tělesa a v místech styku těles byly zavedeny patřičné deformační podmínky, zajišťující nulové relativní posuvy a natočení střednic prutů.

Při řešení všech úloh bylo možné zanedbat energii napjatosti od normálové a posouvající síly. To dovoľoval předpoklad, zavedený v teoretické části práce, který zavádí míru vlivu jednotlivých složek VVÚ do celkové energie napjatosti u štíhlých prutů. Tento předpoklad byl ověřen v závěru třetího příkladu, kde hodnoty neznámého silového působení vyřešené s uvažováním vlivu pouze ohybového momentu se lišily pouze v řádech setin procent, oproti přesného řešení s uvažováním vlivu všech složek VVÚ. Zanedbáním normálové a posouvající síly u štíhlých prutů, došlo takto k výraznému snížení náročnosti analytického řešení, aniž by došlo k znehodnocení výsledků.

K ověření výsledků třetí úlohy byl rovněž využit program ANSYS Workbench. Numerické řešení, oproti analytickému, pouze aproximovalo výslednou hodnotu, a jeho přesnost byla závislá na volbě velikosti konečných prvků. Byly voleny prvky velikosti 5 a 20 mm.

V případě prvků velikosti 20 mm, byla aproximace výsledných hodnot nedostatečná a bylo potřeba prvky zjemnit. Protože hodnoty vyřešené analyticky byly zaokrouhleny na desetinná místa, byla aproximace hodnot numerického řešení s prvky velikosti 5 mm dostatečná.

Shrnutím celé problematiky lze na závěr uvést, že i analytické řešení poměrně náročných úloh s vyšším stupněm statické neurčitosti, lze značně zjednodušit, pokud je známa závislost VVÚ na vnějším zatížení, tvaru a deformaci prutového tělesa.

Seznam použité literatury

- [1] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK a Jan VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 2. vyd. Brno: VUT, 1992. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojní). ISBN 802140468X.
- [2] VRBKA, Jan. *Pružnost a pevnost I: Učební text* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012 [cit. 2021-03-22]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~tprofant/_downloads/UMTMB-ucebni_text-PPI-def-130201.pdf
- [3] HORNÍKOVÁ, Jana, Jiří BURŠA a Pavel ŠANDERA. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text*. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-7204-268-8.
- [4] VALENDIN, Miroslav. *Mechanika II: vybrané statě z pružnosti a pevnosti: teorie a základní část*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2005. ISBN 80-7318-228-9.
- [5] FLORIAN, Zdeněk, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘÍKRYL. *Mechanika těles: statika*. Vyd. 7., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3440-0.
- [6] GERE, J. M. a Barry J. GOODNO. *Mechanics of materials*. 7th ed. Stamford: Cengage Learning, c2009. ISBN 978-0-495-43807-6.
- [7] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství [cit. 2021-05-02]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>

Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbols

A	[J]	deformační práce
A_i		bod nespojitosti
a	[m]	délkový rozměr
b	[m]	šířka příčného průřezu
d	[m]	průměr příčného průřezu
E	[Pa]	Youngův modul
F	[N]	osamělá síla
F_V	[N]	silová výslednice
f_ω	[Pa]	obecné napětí v řezu
G	[Pa]	modul pružnosti ve smyku
h	[m]	výška příčného průřezu
J_p	[m ⁴]	polární kvadratický moment
J_y, J_z	[m ⁴]	osové kvadratické momenty
K_ψ	[Nm ²]	tuhost příčného průřezu
M	[Nm]	osamělá silová dvojice
M_k	[Nm]	krouťící moment
M_o	[Nm]	ohybový moment
M_{oMAX}	[Nm]	maximální ohybový moment
M_V	[Nm]	momentová výslednice
N	[N]	normálová síla
q	[Nm ⁻¹]	liniová síla
r	[m]	poloměr zakřivení střednice
S	[m ²]	plocha příčného průřezu
s	[m]	délka střednice
s	[-]	stupeň statické neurčitosti
T, R		těžiště příčného průřezu
T	[N]	posouvající síla
T_σ		tenzor napětí
U_y	[m ³]	lineární moment k ose y
u	[m]	posuv
V		složka VVÚ
W	[J]	energie napjatosti
w	[m]	průhyb
x, y, z	[m]	souřadnice kartézského souřadnicového systému
β	[-]	tvarový součinitel příčného průřezu
γ		střednice
γ	[rad]	úhlové přetvoření
δ	[m]	přesah
ε	[-]	délkové přetvoření
η	[m]	příčinkový součinitel
μ	[-]	Poissonovo číslo
μ	[-]	počet neznámých vazbových parametrů

ν	[-]	počet použitelných rovnic statické rovnováhy
Π		silová soustava
σ	[Pa]	normálové napětí
τ	[Pa]	smykové napětí
τ_s	[Pa]	smluvní hodnota smykového napětí
φ	[rad]	úhel natočení
φ_i	[rad]	polární souřadnice
ψ		příčný průřez
Ω		lineárně pružné těleso
ω		řez prutem

Zkratky

L	levá část prutu
MKP	metoda konečných prvků
o.a.	osa antimetrie
o.s.	osa symetrie
P	pravá část prutu
PP	pružnost a pevnost
SE	statická ekvivalence
SR	statická rovnováha
VUT	vysoké učení technické
VVÚ	výsledné vnitřní účinky

Seznam obrázků

2.1	Závislost napětí na přetvoření lineárně pružného materiálu. Převzato z [3].	13
2.2	Saint Venantův princip. Převzato a upraveno z [1].	14
2.3	Bettiho věta – zatížený nosník. Převzato z [3].	15
2.4	Bettiho věta – zatížení prvně silou \vec{F}_1 . Převzato z [3].	15
2.5	Bettiho věta – zatížení prvně silou \vec{F}_2 . Převzato z [3].	15
3.1	Prut v pružnosti a pevnosti. Převzato z [3].	18
3.2	Deformace příčných průřezů: a) tah, b) tlak, c) ohyb, d) krut, e) smyk. Převzato z [3].	19
3.3	Kruhový příčný průřez. Převzato a upraveno z [6].	19
3.4	Obdélníkový příčný průřez. Převzato a upraveno z [6].	20
3.5	Pruty s uzavřenou střednicí. Převzato a upraveno z [1].	20
3.6	a) Zkřivený prut, b) Rám.	20
3.7	a) Slabě zakřivený prut, b) Silně zakřivený prut. Převzato a upraveno z [1].	21
3.8	Prut ovlivněný zlomy. Převzato z [3].	21
3.9	Otevření uzavřeného prutu.	22
4.1	Prutové těleso: a) působení silové soustavy Π , b) uvolněný prvek Ω_{01} , c) statická ekvivalence vnitřních sil. Převzato a upraveno z [3].	22
4.2	Rozklad výslednic \vec{F}_V a \vec{M}_V . Převzato a upraveno z [3].	23
4.3	Znaménková konvence VVÚ uvolněného prvku Ω_{02} . Převzato a upraveno z [3].	23
4.4	Znaménková konvence VVÚ v rovině. Převzato a upraveno z [3].	24
4.5	Diferenciální přístup – uvolnění prvku prutu Ω_1 . Převzato z [3].	25
4.6	Integrální přístup – volba řezů ω_i a body nespojitosti A_i .	26
4.7	Souřadnice polohy řezu ω_i : a) kartézská, b) polární.	26
4.8	Symetrické a antisymetrické složky VVÚ. Převzato a upraveno z [3].	27
4.9	Symetrické (a) a antisymetrické (b) zatížení uzavřeného prutu. Převzato a upraveno z [1].	27
4.10	Průběh VVÚ prutu a) symetricky, b) antisymetricky zatíženého. Převzato a upraveno z [3].	27
4.11	Deformace prutu symetricky (a) a antisymetricky (b) zatíženého.	28
4.12	Redukce úlohy využitím osy symetrie a antisymetrie.	29
4.13	Zachování deformovaného tvaru v prostoru.	30
4.14	Typy částečného uvolnění rámu s využitím symetrie/antisymetrie.	31
5.1	Namáhání smykem ve střižné rovině. Převzato a upraveno z [4].	32
5.2	Odvození Žuravského vzorce. Převzato z [3].	32
6.1	Deformace prutu namáhaném prostým smykem. Převzato a upraveno z [1].	33
6.2	Vetknutý nosník zatížený osamělou silou.	34
7.1	Symetricky zatížený rovinný rám.	36
7.2	Symetricky zatížený rovinný rám – a) úplné uvolnění, b) částečné uvolnění.	36
7.3	Symetricky zatížený rovinný rám – a) úplné, b) částečné uvolnění s využitím dvou os symetrie.	37
7.4	Symetricky zatížený rovinný rám – 1. interval.	37
7.5	Symetricky zatížený rovinný rám – 2. interval.	38
7.6	Symetricky zatížený rovinný rám – 3. interval.	38
7.7	Průběh VVÚ na čtvrtině rámu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.	40
7.8	Průběh VVÚ celého rámu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.	41

8.1	Obecně zatížený symetrický uzavřený prut.	42
8.2	Obecně zatížený symetrický uzavřený prut – uvolnění vazeb.	43
8.3	Obecně zatížený symetrický uzavřený prut – využití superpozice.	43
8.4	Částečné uvolnění poloviny symetricky zatíženého prutu.	44
8.5	První interval symetricky zatíženého prutu.	44
8.6	Druhý interval symetricky zatíženého prutu.	45
8.7	Třetí interval symetricky zatíženého prutu.	45
8.8	Čtvrtý interval symetricky zatíženého prutu.	46
8.9	Částečné uvolnění prutu zatíženého silovou soustavou: a) antimetrickou, b) symetrickou.	48
8.10	První interval antimetricky zatíženého prutu.	49
8.11	Druhý interval antimetricky zatíženého prutu.	49
8.12	Třetí interval antimetricky zatíženého prutu.	50
8.13	Čtvrtý interval antimetricky zatíženého prutu.	50
8.14	Silové působení v bodě C prutu, zatíženého silovou soustavou Π	53
8.15	Zákon akce a reakce silového působení v bodě C a dělení pravé části prutu na čtyři intervaly.	54
8.16	Průběh VVÚ po celé délce prutu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.	56
9.1	Obecný rovinný rám.	57
9.2	Obecný rovinný rám – uvolnění vazeb.	57
9.3	Částečné uvolnění vazbou vetknutím.	58
9.4	Částečné uvolnění tuhých zlomů rotační vazbou.	58
9.5	Částečné uvolnění s využitím momentu M_A , M_B a síly F_{Ax}	59
9.6	Obecný rovinný rám – vyjádření stykových výslednic.	59
9.7	Obecný rovinný rám – 1. interval.	60
9.8	Obecný rovinný rám – 2. interval.	60
9.9	Obecný rovinný rám – 3. interval.	61
9.10	Obecný rovinný rám – 4. interval.	61
9.11	Obecný rovinný rám – 5. interval.	62
9.12	Průběh VVÚ obecného rovinného rámu. a) normálová síla, b) posouvající síla, c) ohybový moment.	65
9.13	Hodnoty ohybových momentů M_A , M_B v závislosti na velikosti konečných prvků: a) prvky 5 mm, b) prvky 20 mm.	67

Seznam tabulek

Tab. 6.1: Výrazy V a K_ψ pro různé typy jednoduchého namáhání. Převzato z [1].....	33
Tab. 9.1: Porovnání hodnot F_{Ax} , M_A , M_B řešených různými metodami.....	66

Seznam příloh

- (1) prvni_uloha.m
- (2) druha_uloha.m
- (3) treti_uloha.m