UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Dvojný integrál

Bakalářská práce

Nikola Janković

Olomouc 2023 Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Dvojný integrál“ zpracoval sám s použitím literatury uvedené ve zdrojích. Seznam zdrojů je součástí bakalářské práce.

V Mostě dne 19.04.2023 ……..…..…………….

Nikola Janković

Poděkování

Rád bych poděkoval paní Doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení mé bakalářské práce, za její ochotu, rady a hlavně její volný čas, který tomu věnovala.

Abstrakt

Cílem práce je vysvětlit dvojný integrál a vytvořit soubor příkladů, tento soubor by měl sloužit studentům 1. ročníků matematických, technických nebo ekonomických oborů.

Práce je rozdělena do dvou částí. První část je teoretická, kde jsou vysvětleny metody výpočty dvojného integrálu a možnosti aplikace dvojného integrálu. Druhá část je praktická část, která navazuje na teoretickou část. V praktické části jsou řešené příklady na jednotlivé metody výpočtu a na jednotlivé aplikace dvojného integrálu.

Klíčová slova

Dvojný integrál, dvojnásobný integrál, aplikace integrálu

Abstract

The goal of this thesis is to describe the double integral and to create a set of problems, this set should be of use to first-year students of mathematics, technical or economic studies.

The thesis is divided into two parts. The first theoretical part focuses on describing methods of calculating the double integral and the possibilities of its application. The second, practical part, follows-up to the first part. The second part focuses on solving problems of each method of calculating and on the application of the double integral.

Key words

Double integral, iterated integral, integral application

Obsah

Úvod

Pro svou bakalářskou práci jsem si zvolil téma Dvojný integrál. Cílem bakalářské práce je vytvořit soubor příkladů sloužící především pro studenty prvních ročníků matematických oborů vysokých škol jako podpůrný prostředek při studiu tohoto tématu. Zpracované teoretické poznatky a praktické příklady jsou založeny na předpokladu, že čtenář ovládá základní principy a pravidla výpočtu jednoduchých integrálů.

Motivací pro zpracování tohoto tématu je především vytvoření uceleného přehledu této problematiky a navazujících příkladů včetně postupu jejich řešení, včetně využití různých postupů výpočtu. Ambicí této práce je pak usnadnit studentům prvních ročníků matematických oborů vysokých škol studium v oblasti dvojných integrálů, a to jak prostřednictvím shrnutí teoretických poznatků k tomuto tématu, tak i prostřednictvím řešených příkladů.

Zpracovávané téma je rozděleno na dva větší celky, a to na část teoretickou a část praktickou. V teoretické části budou nejprve v krátkosti shrnuty poznatky k jednorozměrnému integrálu a uvedena motivace k výpočtu dvojného integrálu. Dále bude zaveden pojem dvojný integrál a základní definice a věty. Následně budou vysvětleny metody výpočtu dvojného integrálu, konkrétně metoda přímého dosazení, per partes a substituce. Pozornost bude věnována jak možnosti zadání v kartézských souřadnicích, tak i v souřadnicích polárních. Závěrem budou popsány aplikace dvojného integrálu, který lze využít pro výpočet obsahu rovinného obrazce, obsahu plochy, objemu válcového tělesa, či pro fyzikální aplikace.

Praktická část velice úzce navazuje na část teoretickou a vysvětlené metody v teoretické části budou aplikovány na jednotlivé příklady. Praktická část je rozdělena na dvě kapitoly, přičemž první z nich je věnována příkladům výpočtu dvojného integrálu pomocí přímého dosazení, metody per partes či substituce. Ve druhé kapitole budou řešeny příklady na obsah rovinného obrazce, obsah plochy, objem válcového tělesa a fyzikální aplikace. Příklady jsou vytvořeny tak, aby bylo možné názorně ukázat postup řešení jak v kartézských, tak i v polárních souřadnicích.

TEORETICKÁ ČÁST

Pro následné zavedení pojmu dvojný integrál je provedeno shrnutí základní poznatků z oblasti jednorozměrného integrálu, byť tato práce předpokládá, že je čtenář s problematikou jednorozměrných integrálů seznámen. Tato část je tedy věnována pouze připomenutí, na které dále naváže problematika dvojného integrálu. Z tohoto důvodu jsou v této části věnované připomenutí jednorozměrného integrálu uvedeny věty bez důkazu.

Motivace a zavedení jednouchého integrálu je založena na řešení úlohy výpočtu obsahu geometrického útvaru vymezeného grafem spojité nezáporné funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, osou x a přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$. V případě, že je daná funkce $f(x)$ monotónní či lineární, tato úloha je zjednodušena na výpočet obsahu obdélníku (ve speciálním případě čtverce) či lichoběžníku (ve speciálním případě trojúhelníku). V případě, kdy je funkce $f(x)$ zadaná obecně, je tato úloha řešitelná pomocí určitého integrálu.

Kvůli zaměření této práce na dvojná integrál zde není uvedena podrobná definice jednoduchého integrálu a jeho odvození. Níže jsou uvedena pouze ta tvrzení, která v navazujícím textu poslouží pro odvození výpočtu a vlastností dvojného integrálu.

Věta.[1] *Nechť je funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá nebo monotónní. Pak existuje integrál této funkce*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Tato věta o existenci jednorozměrného integrálu poměrně přesně vymezuje, jaké vlastnosti musí mít daná funkce, aby určitý integrál existoval. Požadavkem je především její spojitost či monotónnost na daném intervalu $\langle a, b\rangle$. Určitý integrál bude také existovat v případech, kdy funkce f bude po částech spojitá (nebo analogicky po částech monotónní). Vlastní výpočet určitého integrálu je možný pomocí následující věty.

Věta.[2] *Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má na intervalu $\langle a, b\rangle$ (zobecněnou) primitivní funkci F. Potom platí*

[1] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných.* Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.
[2] BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza I.* Praha: SNTL, 1989.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Tato věta, tzv. Newtonův-Leibnizův vzorec, je důležitá pro výpočet jednoduchého integrálu, někdy je označována také jako věta o výpočtu Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce. Zejména proto je také nazývána základní větou integrálního počtu.[3] Vlastnosti Riemannova integrálu lze shrnout následující větou.

Věta. *Nechť jsou dány funkce f, g, které jsou definované, omezené a integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a \le c \le b \tag{4}$$

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{5}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{6}$$

Ačkoli bylo provedeno připomenutí jednorozměrného integrálu jen velice stručně, pro potřeby práce zaměřené na dvojný integrál by mělo být postačující. V následujících částech práce je popsána motivace a zavedení pojmu dvojný integrál, jeho základní vlastnosti, metody výpočtu a také aplikace dvojného integrálu.

Pro výpočet jak jednorozměrného, tak dvojného integrálu se nelze obejít bez základních integračních vzorců. Ty jsou sice odvoditelné, leč při samotných výpočtech se vychází z platnosti těchto vztahů. Pro přehlednost jsou uspořádány v následující tabulce.

Tabulka 1 – Přehled základních integračních vzorců

Integrační vzorec	**Poznámka**	
$\int 0\,dx = C$		(7)

[3] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II* . Praha: Academia, 1984.

$\int a\,dx = ax + C$		(8)
$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$x > 0; a \neq -1$	(9)
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$	(10)
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$		(11)
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$		(12)
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$	(13)
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$	(14)
$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$		(15)
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$		(16)
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$		(17)
$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\operatorname{cotgh} x + C$	$x \neq 0$	(18)
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$	$x \in (-1; 1)$	(19)
$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$x \in (-a; a)$	(20)
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$		(21)
$\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	$a > 0$	(22)
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0; a \neq 1$	(23)
$\int e^x\,dx = e^x + C$		(24)

Zdroj:[4]

[4] *Tabulkové integrály.* [online]. 2023. [Cit. 2023-04-11]. Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3db3a.htm

Při výpočtu určitého integrálu je pak využíván tzv. Newton-Leibnizův vzorec, který je předmětem následující věty.

Věta.[5] Nechť je dána funkce f na $\langle a,b\rangle$ a funkce F, která je primitivní funkcí k funkci f na daném intervalu $\langle a,b\rangle$. Pro určitý integrál potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{25}$$

1 Motivace a zavedení pojmu dvojný integrál

K vícerozměrné integraci obecně vede několik typů úloh, přičemž mezi základní z nich patří úloha o objemu a také úloha o hmotnosti. Výše byla v krátkosti popsána motivace výpočtu jednorozměrného integrálu jako určení obsahu plochy

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle a,b\rangle, 0 \le y \le f(x)\} \tag{26}$$

vymezené grafem spojité nezáporné funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$, osou x a přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$. Analogickou úlohou v prostoru je pak úloha určení objemu tělesa *P* pro nezápornou funkci f na *I*, kde *I* je podmnožinou $\mathbb{R}^2$:[6]

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in I, 0 \le z \le f(x,y)\} \tag{27}$$

Řada veličin je počítána jako násobek určitého parametru a obsahu oblasti. Příkladem může být například výpočet hmotnosti jako součinu obsahu a plošné hmotnosti, výpočet objemu jako součinu výšky tělesa a obsahu podstavy, nebo také například výpočet tlakové síly, které je dána součinem tlaku a obsahu. Tento přístup je využitelný, jestliže je sledovaný parametr konstantní na celé ploše. V případě, že tento parametr konstantní není, jsou tyto úlohy řešitelné pomocí dvojného integrálu.[7]

Věta.[8] *Nechť je dán uzavřený obdélník T a na tomto uzavřeném obdélníku nezáporná spojitá funkce f. Zobrazení, které funkci f na T přiřadí dvojnásobný integrál, vyhovuje axiomům monotonie a aditivity. Hodnota násobných integrálů tedy nezávisí na pořadí integrace.*

[5] BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza I*. Praha: SNTL, 1989.
[6] BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza I*. Praha: SNTL, 1989.
[7] MAŘÍK, Robert. *Dvojný integrál.* [online]. 2023. [Cit. 2023-04-11]. Dostupné z: https://user.mendelu.cz/marik/mtk/mat-slidy/dvojny_integral.pdf
[8] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. Integrální počet funkcí více proměnných. 3. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2022. ISBN 978-80-01-06945-5.

Důkaz. [9] Důkaz lze rozdělit na dvě části, a to ověření axiomu monotonie a ověření axiomu aditivity. Důkaz bude proveden pro jedno pořadí integrace, a to proto, že se jedná o symetrické zobrazení. Pro ověření monotonie definujme obdélník $H = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle$, který je podmnožinou obdélníku T. Pak platí:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx \leq \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} \max(f)\,dy\right)dx = \int_{a_1}^{b_1} \max(f)\,(b_2-a_2)dx = \\ = \max(f)(b_2-a_2)(b_1-a_1) = \max(f)\cdot S_H \tag{28}$$

kde S_H je obsah oblasti H. Obdobným způsobem platí:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx \geq \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} \min(f)\,dy\right)dx = \int_{a_1}^{b_1} \min(f)\,(b_2-a_2)dx = \\ = \min(f)(b_2-a_2)(b_1-a_1) = \min(f)\cdot S_H \tag{29}$$

Výše uvedené dvě nerovnosti (28) a (29) dávají společně axiom monotonie:

$$\min(f)\cdot S_H \leq \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx \leq \max(f)\cdot S_H \tag{30}$$

Pro ověření aditivity daného zobrazení budou ověřeny dva případy. Prvním případem je situace, kdy obdélník $H = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle$ lze rozdělit na dva obdélníky $H_1 = \langle a_1; c_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle$ a $H_2 = \langle c_1; b_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle$. V tomto případě dvojnásobný integrál přes obdélník H je určen vztahem:

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_1}^{c_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{c_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx \tag{31}$$

Druhým případem je pak situace, kdy obdélník $H = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle$ lze rozdělit na dva obdélníky $H_1 = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle a_2; c_2\rangle$ a $H_2 = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle c_2; b_2\rangle$. V tomto případě dvojnásobný integrál přes obdélník H je určen vztahem:

[9] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 3. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2022. ISBN 978-80-01-06945-5.

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{c_2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{a_1}^{b_1}\int_{c_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx \tag{32}$$

V obou případech je dvojnásobný integrál, který přísluší obdélníku H, součtem integrálů pro obdélníky H_1 a H_2. Tím je dokázáno, že dané zobrazení také vyhovuje axiomu aditivity. Jelikož dané zobrazení vyhovuje jak axiomu aditivity, tak i axiomu monotonie, vyplývá z této skutečnosti, že nezáleží na pořadí integrace a platí

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy \tag{33}$$

Definice[10] *Nechť je dána funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a dále nechť je tato funkce spojitá na uzavřeném intervalu J. Pak je tato funkce integrovatelná, a tedy existuje dvojný integrál, který zapisujeme ve tvaru*

$$\iint_J f(x,y)\,dx\,dy$$

2 Vlastnosti dvojného integrálu

Úvodem připomeňme některé základní vlastnosti jednorozměrného integrálu:

Věta. *Nechť jsou dány funkce f, g, které jsou definované, omezené a integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx \tag{34}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a \le c \le b \tag{35}$$

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{36}$$

[10] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{37}$$

Obdobně lze také vymezit vlastnosti dvojnásobného integrálu. Základní vlastnosti dvojného integrálu, které jsou následně používány pro jejich výpočet, lze shrnou následující větou.

Věta.[11] *Nechť jsou dány funkce f, g, která jsou integrovatelné na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Potom platí:*

a)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \iint_M \alpha f(x, y)\, dxdy = \alpha \iint_M f(x, y)\, dxdy \tag{38}$$

b)

$$\iint_M \big(f(x, y) + g(x, y)\big)\, dxdy = \iint_M f(x, y)\, dxdy + \iint_M g(x, y)\, dxdy \tag{39}$$

c) pro $M = M_1 \cup M_2$, pro které $M_1 \cap M_2 = 0$ je

$$\iint_M f(x, y)\, dxdy = \iint_{M_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{M_1} f(x, y)\, dxdy \tag{40}$$

d) platí-li, že $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro všechna $(x, y) \in M$, pak platí také

$$\iint_M f(x, y)\, dxdy \leq \iint_M g(x, y)\, dxdy \tag{41}$$

e)

$$\left| \iint_M f(x, y)\, dxdy \right| \leq \iint_M |f(x, y)|\, dxdy \tag{42}$$

[11] DANĚČEK, Josef, Oldřich DLOUHÝ a Oto PŘIBYL. *Matematika II: studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-7204-453-2.

3 Metody výpočtu dvojného integrálu

Metody výpočtu dvojného integrálu je možné rozdělit do tří skupin. První představuje přímé dosazení, tedy případ, který vede na převedení dvojného integrálu na dvojnásobný a dále na některý ze vztahů (7) až (24). Druhým případem je metoda per partes, třetím a posledním je pak substituce, jejímž speciálním případem je transformace do polárních souřadnic.

3.1 Přímé dosazení

Výše uvedená věta „*Nechť je dán uzavřený obdélník T a na tomto uzavřeném obdélníku nezáporná spojitá funkce f. Zobrazení, které funkci f na T přiřadí dvojnásobný integrál, vyhovuje axiomům monotonie a aditivity. Hodnota násobných integrálů tedy nezávisí na pořadí integrace.*“ je označována také jako Fubiniova věta, která říká, že hodnota dvojného integrálu (nebo v obecnějším znění hodnota násobného integrálu) nezávisí na pořadí integrace. Pomocí této věty je možné provedení výpočtu dvojného integrálu na daném intervalu, a to převedením na dvojnásobný integrál a jeho postupnou integraci. Při výpočtu mohou nastat dva případy, a to případ, kdy je funkce integrovatelná na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b\rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \tag{43}$$

přičemž funkce g_1 i g_2 jsou na $\langle a, b\rangle$ spojité a zároveň platí, že $g_1(x) \leq g_2(x)$. Je-li splněno, že funkce $f(x, y)$ je integrovatelná na intervalu $\langle g_1(x); g_2(x)\rangle$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, lze dvojný integrál převést na dvojnásobný integrál pomocí vztahu

$$\iint_M f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \tag{44}$$

Druhým případem je případ, kdy je integrovatelná na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle a, b\rangle \wedge g_1(x) \leq x \leq g_2(x)\} \tag{45}$$

přičemž funkce g_1 i g_2 jsou na $\langle a, b\rangle$ stejně jako v předchozím případě spojité a zároveň platí, že $g_1(x) \leq g_2(x)$. Je-li splněno, že funkce $f(x, y)$ je integrovatelná na intervalu $\langle g_1(x); g_2(x)\rangle$ pro každé $y \in \langle a, b\rangle$, lze dvojný integrál převést na dvojnásobný integrál pomocí vztahu

$$\iint_M f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dx \right) dy \tag{46}$$

Tyto dvě možnosti se vzájemně nevylučují a může nastat i situace, že je funkce integrovatelná na (43) a zároveň je integrovatelná na (45). Tedy vlastní výpočet je možný provést jak pomocí vztahu (44), tak i pomocí vztahu (46).

3.2 Per partes

Pro použití metody per partes a odvození vztahu pro výpočet je možné vyjít ze znalostí o derivacích. Máme-li funkce $f(x), g(x)$, můžeme zderivovat jejich součin a provést následující úpravu:[12]

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{47}$$

$$f(x)g'(x) = \big(f(x)g(x)\big)' - f'(x)g(x) \tag{48}$$

Obě strany nyní zintegrujeme

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \Big(\big(f(x)g(x)\big)' - f'(x)g(x)\Big)\,dx \tag{49}$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \big(f(x)g(x)\big)'\,dx - \int f'(x)g(x) \tag{50}$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \tag{51}$$

Při užití metody per partes se však častěji setkáme se značením $u(x), v(x)$, namísto výše uvedeného značení $f(x), g(x)$. To však bylo použito zejména z toho důvodu, že s tímto značením bývají definovány derivace funkcí, ze kterých výše uvedené odvození vychází. Shrňme tedy metodu per partes.

Věta.[13] *Nechť jsou dány funkce $u(x), v(x)$ které jsou definovány na intervalu I a na tomto intervalu mají také definovány první derivace $u'(x), v'(x)$. Potom platí*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \tag{52}$$

3.3 Substituce

Ne vždy je dvojný integrál řešitelný přímým dosazením, resp. v některých případech je vhodnější využití jiných metod výpočtu. Možný způsob výpočtu představuje použití substituce,

[12] KOLÁŘ, Petr. *Elektronická učebnice matematických metod fyziky.* [online]. nedatováno. [Cit. 2023-04-01]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/matematicke_metody/materialy/Ucebnice_2.pdf
[13] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988.

či využití transformace do polárních souřadnic, které je speciálním případem využití substituce ve dvojném integrálu.

Pro připomenutí se nyní vraťme k substituci na jednorozměrném integrálu. Užití substituční metody lze shrnout platností následující věty.

Věta.[14] *Nechť je dána funkce φ a funkce f. Dále nechť funkce φ má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou první derivaci a zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ a nechť je funkce f spojitá na tomto intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Potom platí:*

$$\int_{\alpha(a)}^{\beta(b)} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f\big(\varphi(u)\big) \cdot \varphi'(u)\,du \tag{53}$$

Pro zavedení substituce ve dvojném integrálu je nejprve nutné zavedení tzv. Jacobiánu.

Věta.[15] *Nechť je dáno zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je na prosté otevřené na množině $\Omega_{uv} \subseteq \mathbb{R}^2$ a je dáno následujícími rovnicemi*

$$\left.\begin{aligned} x &= g_1(u,v) \\ y &= g_2(u,v) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

tedy toto zobrazení lze také zapsat jako $\Phi(u,v) = \big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$. Nechť mají dále funkce g_1, g_2 na množině $\Omega_{uv} \subseteq \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace 1. řádu. Pro každé $(u,v) \in M_{uv}$ je tzv. Jacobián:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{55}$$

Tímto je zaveden Jacobián a pro užití substituce ve dvojném integrálu platí následující věta.

Věta.[16] *Nechť je dána prostá otevřená množina $\Omega_{uv} \subseteq \mathbb{R}^2$a zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je na množině Ω_{uv} dáno rovnicemi (66). Dále nechť $M_{uv} \subseteq \Omega_{uv}$ a také nechť$M_{xy} = \Phi(M_{uv})$ a M_{uv} jsou uzavřené a měřitelné a nechť je dána funkce f, která je na M_{xy} spojitá. Potom platí*

[14] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.
[15] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 3. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2022. ISBN 978-80-01-06945-5.
[16] DANĚČEK, Josef, Oldřich DLOUHÝ a Oto PŘIBYL. *Matematika II: studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-7204-453-2.

$$\iint\limits_{M_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{M_{uv}} f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) \cdot |J(u,v)|\,du\,dv \tag{56}$$

Jak již bylo výše zmíněno, speciálním případem substituce je transformace do polárních souřadnic. Jedná se o substituci

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\varphi \qquad \big(x = g_1(\rho,\varphi)\big) \\ y &= \rho \cdot \sin\varphi \qquad \big(y = g_2(\rho,\varphi)\big) \end{aligned} \tag{57}$$

kde $\rho \geq 0 \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tato substituce je užívána především v těch případech, kdy hranice množiny, na které je integrováno, obsahuje kružnice, nebo jejich části. Nyní můžeme ukázat pro tento typ substituce upravený Jacobián a také upravený vztah pro samotnou integraci pomocí této substituce.[17]

Pro určení Jacobiánu budou nejprve určeny jednotlivé parciální derivace:

$$\begin{gathered} \frac{\partial g_1(\rho,\varphi)}{\partial \rho} = \cos\varphi \\ \frac{\partial g_1(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} = -\rho \cdot \sin\varphi \\ \frac{\partial g_2(\rho,\varphi)}{\partial \rho} = \sin\varphi \\ \frac{\partial g_2(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} = \rho \cdot \cos\varphi \end{gathered} \tag{58}$$

Jacobián v tomto případě bude mít následující tvar:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(\rho,\varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial g_1(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2(\rho,\varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial g_2(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \cdot \cos^2\varphi + \rho \cdot \sin^2\varphi = \rho \tag{59}$$

V případě transformace do polárních souřadnic bude mít rovnice (56) následující tvar:

$$\iint\limits_{M_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{M_{\rho\varphi}} f\big(g_1(\rho,\varphi), g_2(\rho,\varphi)\big) \cdot |J(\rho,\varphi)|\,d\rho\,d\varphi = \tag{60}$$

[17] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 3. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2022. ISBN 978-80-01-06945-5.

$$= \iint_{M_{\rho\varphi}} f\big(g_1(\rho,\varphi), g_2(\rho,\varphi)\big) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi$$

Dle vztahu (56) by ve vztahu výše mělo odpovídat $|J(\rho,\varphi)| = |\rho|$, jelikož však $\rho \geq 0$ není zde absolutní hodnota uváděna, hodnota ρ je vždy kladná.

4 Aplikace dvojného integrálu

Aplikací dvojného integrálu existuje celá řada. Jak již vyplývá ze samotné definice dvojného integrálu a uvedené motivaci k jeho výpočtu, výpočet je možné použít pro stanovení obsahu rovinného obrazce, obsahu plochy či objemu válcového tělesa. Mezi fyzikální aplikace je pak řazeno výpočet hmotnosti rovinného obrazce, statických momentů, pomocí kterých je pak možné určit souřadnice těžiště rovinného obrazce. Možnou fyzikální aplikací je také výpočet momentu setrvačnosti při rotaci rovinného hmotného obrazce kolem osy x, y, nebo kolem osy z.

4.1 Obsah rovinného obrazce

Pro obsah rovinného obrazce je využíván dvojný integrál, přičemž integrovaná funkce je konstantní a je rovna jedné. Vztah pro výpočet uvádí následující věta.

Věta.[18] *Nechť je dána spojitá množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$, která je měřitelná. Pro obsah S rovinného obrazce, který je vymezen množinou Mplatí:*

$$S(M) = \iint_M dx \, dy \qquad (61)$$

Pouze pro srovnání je možno uvést, že obsah plochy je řešitelný také pomocí jednoduchého integrálu. V případě jednoduchého integrálu je však důležité si uvědomit, že jednoduchý integrál udává obsah plochy pod křivkou. V praktické části bude provedena ukázka výpočtu pomocí jak dvojného, tak jednoduchého integrálu.

[18] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.

4.2 Obsah plochy

Dvojný integrál je také možné využít pro výpočet obsahu plochy v prostoru. K samotnému výpočtu se použije následující věta.

Věta.[19] Nechť je dána neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$, která je uzavřená a měřitelná. Dále mějme zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, pro které platí, že $M \subseteq \Omega$, a tedy f má na Ω spojité parciální derivace. Plocha τ je definovaná:

$$\tau = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\} \tag{62}$$

jako graf funkce f. Obsah plochy τ je dán vztahem

$$V(\tau) = \iint_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2}\, dx\, dy \tag{63}$$

4.3 Objem tělesa

V případě výpočtu obsahu rovinného obrazce byl využíván dvojný integrál, přičemž integrovaná funkce je konstantní a je rovna jedné. Obdobou je výpočet objemu tělesa, které je dáno funkcí, které je od jedné různá. Vztah pro výpočet uvádí následující věta.

Věta.[20] *Mějme dáno těleso T, pro které platí*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

přičemž množina $M \in \mathbb{R}^2$ je měřitelná a uzavřená a dále funkce f je spojitá a nezáporná na $M \in \mathbb{R}^2$. Pro objem V tělesa T platí:

$$V(T) = \iint_M f(x, y)\, dx\, dy \tag{64}$$

[19] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.
[20] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.

4.4 Fyzikální aplikace

V rámci fyzikálních aplikací lze uvést například výpočet těžiště rovinného obrazce, a to pomocí statických momentů. Pro tento typ úlohy označme na oblasti M hustotu funkcí $\sigma(x,y)$. Pro výpočet hmotnosti m daného rovinného útvaru platí vztah[21]:

$$m = \iint_M \sigma(x,y)\,dx\,dy \tag{65}$$

Pro výpočet těžiště je nutné nejprve určení statických momentů oblasti M vzhledem k ose x (statický moment S_x) a ose y (statický moment S_y). Níže jsou uvedeny vztahy pro výpočet statického momentu oblasti Mvzhledem k jednotlivým osám a také vztahy pro výpočet souřadnice těžiště dané oblasti. [22]

Statický moment oblasti M vzhledem k ose x:

$$S_x = \iint_M y\sigma(x,y)\,dx\,dy \tag{66}$$

Statický moment oblasti M vzhledem k ose y:

$$S_y = \iint_M x\sigma(x,y)\,dx\,dy \tag{67}$$

Souřadnice těžiště $T = (T_1, T_2)$ hmotné oblasti M:

$$T_1 = \frac{S_y}{m} \tag{68}$$

$$T_2 = \frac{S_x}{m} \tag{69}$$

Druhou aplikací je pak výpočet momentu setrvačnosti rovinného obrazce při rotaci kolem osy x (moment setrvačnosti I_x), kolem osy y (moment setrvačnosti I_y) a kolem osy z (moment setrvačnosti I_z). Pro tuto aplikaci opět předpokládejme hustotu oblasti M popsanou funkcí $\sigma(x,y)$. Moment setrvačnosti oblasti M při rotaci kolem jednotlivých os uvádí následující vztahy.[23]

---

[21] BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza II*. Praha: SNTL, 1986.
[22] BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza II*. Praha: SNTL, 1986.
[23] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. Integrální počet funkcí více proměnných. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.

Moment setrvačnosti oblasti M při rotaci kolem osy x:

$$I_x = \iint_M y^2\sigma(x,y)\,dx\,dy \tag{70}$$

Moment setrvačnosti oblasti M při rotaci kolem osy y:

$$I_y = \iint_M x^2\sigma(x,y)\,dx\,dy \tag{71}$$

Moment setrvačnosti oblasti M při rotaci kolem osy z:

$$\begin{gathered} I_z = I_x + I_y = \iint_M y^2\sigma(x,y)\,dx\,dy + \iint_M x^2\sigma(x,y)\,dx\,dy \\ I_z = \iint_M (x^2 + y^2)\sigma(x,y)\,dx\,dy \end{gathered} \tag{72}$$

PRAKTICKÁ ČÁST

5 Výpočet dvojného integrálu

Příklad.

Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy^2 \, dxdy$$

na obdélníkové oblasti dané množiny $M = \langle 0; 1\rangle \times \langle 3; 6\rangle$.

Řešení.

Funkce $f = xy^2$ je spojitá na celé oblasti M. Jelikož se jedná o integraci na obdélníkové oblasti, lze pro samotný výpočet využít jak vztah (44), tak i vztah (46). Pro názornost budou využity oba tyto vztahy. Množina $M = \langle 0; 1\rangle \times \langle 3; 5\rangle$ přímo určuje integrační meze, pro které platí:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$3 \leq y \leq 6$$

Převedením na dvojnásobný integrál pomocí vztahu (44) tedy dostaneme:

$$\iint_M xy^2 \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_3^6 xy^2 \, dy \right) dx$$

V dalším kroku provedeme integraci podle proměnné y, tedy druhou proměnnou x v tomto kroku budeme považovat za konstantu, kterou lze vytknout. Pro samotnou integraci v tomto kroku využijeme základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivní funkce k zadané funkci:

$$\int_0^1 \left(\int_3^6 xy^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_3^6 dx$$

V následujícím kroku bude použit vztah (25):

$$\int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_3^6 dx = \int_0^1 x \left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} \right) dx = \int_0^1 x(72 - 9) \, dx = \int_0^1 63x \, dx$$

Nyní jsme získali určitý integrál funkce o jedné proměnné x. Opět můžeme konstantu vytknout a použít základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivní funkce.

$$\int_0^1 63x\,dx = 63\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

Opět použijeme vztah (25) a upravíme, čímž dostaneme konečný výsledek.

$$63\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 63\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{63}{2}$$

Výsledný zápis výpočtu tedy bude ve tvaru:

$$\iint_M xy^2\,dxdy = \int_0^1\left(\int_3^6 xy^2\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^6 dx = \int_0^1 x\left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x(72-9)\,dx = \int_0^1 63x\,dx = 63\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 63\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{63}{2}$$

Jelikož nezáleží na pořadí integrace, můžeme názorně ukázat také výpočet pomocí vztahu (46). Pomocí tohoto vztahu převedeme dvojný integrál na integrál dvojnásobný.

$$\iint_M xy^2\,dxdy = \int_3^6\left(\int_0^1 xy^2\,dx\right)dy$$

V dalším kroku provedeme integraci podle proměnné x, tedy druhou proměnnou y v tomto kroku budeme považovat za konstantu, kterou lze vytknout. Pro samotnou integraci v tomto kroku využijeme základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivní funkce k zadané funkci:

$$\int_3^6\left(\int_0^1 xy^2\,dx\right)dy = \int_3^6 y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy$$

V následujícím kroku bude použit vztah (25):

$$\int_3^6 y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \int_3^6 y^2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)dy = \int_3^6 \frac{y^2}{2}\,dy$$

Nyní jsme získali určitý integrál funkce o jedné proměnné y. Opět můžeme konstantu vytknout a použít základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivní funkce.

$$\int_3^6 \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^6$$

Opět použijeme vztah (25) a upravíme, čímž dostaneme konečný výsledek.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^6 = \frac{1}{2}\left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right) = \frac{1}{2}(72 - 9) = \frac{63}{2}$$

Výsledný zápis výpočtu tedy bude ve tvaru:

$$\iint_M xy^2\,dxdy = \int_3^6 \left(\int_0^1 xy^2\,dx\right) dy = \int_3^6 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \int_3^6 y^2 \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) dy = \int_3^6 \frac{y^2}{2}\,dy =$$

$$\int_3^6 \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^6 = \frac{1}{2}\left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right) = \frac{1}{2}(72 - 9) = \frac{63}{2}$$

Jak je z předchozího zřejmé, nezáleží na integrační cestě, tedy na pořadí integrace. V některých případech však může být využití jedné z integračních cest výrazně jednodušší než využití druhé.

Příklad.

Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M x + 3y$$

kde oblast M je omezena přímkami $x = 1, y = 1, x + y = 3$.

Řešení.

Nejprve obdobně jako v předchozím případě určíme integrační meze. Z tohoto důvodu budou určeny souřadnice průsečíků jednotlivých přímek. Označme tedy po řadě přímky

$$p: x = 1$$

$$q: y = 1$$

$$r: x + y = 1$$

Je zřejmé, že $p \cap q = R; R = [1; 1], p \cap r = Q, Q = [2; 1]$ a $q \cap r = P; P = [1; 2]$. Pro danou oblast platí, že $x \in \langle 1,2 \rangle$, tato oblast je zdola omezena přímkou o rovnici $y = 1$, shora pak přímkou o rovnici $y = 3 - x$. Pro integrační meze tedy bude platit:

$$1 \leq x \leq 2$$

$$1 \leq y \leq 3 - x$$

Převedením na dvojnásobný integrál pomocí vztahu (44) tedy dostaneme:

$$\iint_M x + 3y = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} (x + 3y)\, dy \right) dx$$

V dalším kroku provedeme integraci podle proměnné y, tedy druhou proměnnou x v tomto kroku budeme považovat za konstantu, kterou lze vytknout. Pro samotnou integraci v tomto kroku využijeme základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivní funkce k zadané funkci, následně použijeme vztah (25):

$$\int_1^2 \left(\int_1^{3-x} (x + 3y)\, dy \right) dx = \int_1^2 \left[xy + 3\frac{y^2}{2} \right]_1^{3-x} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x(3 - x) + 3\frac{(3 - x)^2}{2} - x \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1^2}{2} \right) dx =$$

$$\int_1^2 \left(3x - x^2 + \frac{27}{2} - 9x - x - \frac{3}{2} \right)\, dx = \int_1^2 (-x^2 - 7x - 12)\, dx$$

Nyní jsme získali určitý integrál funkce o jedné proměnné x. Opět můžeme konstantu vytknout a použít základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivní funkce a dále upravit dle (25).

$$\int_1^2 (-x^2 - 7x - 12)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 12 \cdot x \right]_1^2 =$$

$$-\frac{2^3}{3} - 7 \cdot \frac{2^2}{2} - 12 \cdot 2 + \frac{1^3}{3} + 7 \cdot \frac{1^2}{2} + 12 \cdot 1 = -\frac{149}{6}$$

Příklad.

Zaměňte pořadí integrace pro dvojný integrál

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f \, dy \, dx$$

Řešení.

Nejprve zjistíme, na jaké množině se integruje, tedy integrační meze, které byly zadány:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$x \leq y \leq \sqrt{x}$$

Uvedené podmínky vymezují danou oblast, při změně pořadí integrace bude vnější integrace podle proměnné y, namísto proměnné x. Z grafu dané oblasti je zřejmé, že pro proměnnou y bude platit $0 \leq y \leq 1$. Pro proměnnou x pak provedeme přepočet:

$$y = x \rightarrow x = y$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$

Tímto jsou jednoznačně určeny meze dané oblasti

$$0 \leq y \leq 1$$

$$y^2 \leq x \leq y$$

a integrál po změně pořadí integrace bude mít následující tvar.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} f \, dx \, dy$$

5.1 Přímé dosazení

Příklad.

Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_M xy^2 \, dx \, dy$$

kde množina M je ohraničena přímkou o rovnici $y = 2x - 2$ a křivkou o rovnici $2x = y^2$.

Řešení.

Pro zjištění integračních mezí budou zjištěny průsečíky přímky o rovnici $y = 2x - 2$ s parabolou o rovnici $2x = y^2$.

$$\frac{y+2}{2} = \frac{y^2}{2}$$

$$y + 2 = y^2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_1 = -1; y_2 = 2$$

Průsečíky mají souřadnice $\left[\frac{1}{2}; -1\right]$ a $[2; 2]$. Dvojný integrál převedeme na dvojnásobný integrál tak, že nejprve budeme integrovat podle x a následně podle y. Nejprve však určíme integrační meze

$$-1 \leq y \leq 2$$

$$\frac{y^2}{2} \leq x \leq \frac{y+2}{2}$$

Nyní převedeme dvojný integrál na dvojnásobný a upravíme:

$$\iint_M xy^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{y+2}{2}} xy^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^{2} \left[\frac{y^2}{2} \cdot x^2\right]_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{y+2}{2}} dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\frac{y^2}{2} \cdot \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^2\right) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} (y^4 + 4y^3 + 4y^2 - y^6) \, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5} + y^4 + \frac{4y^3}{3} - \frac{y^7}{7}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^5}{5} + 2^4 + \frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^7}{7} - \frac{(-1)^5}{5} - (-1)^4 - \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^7}{7}\right) = \frac{531}{70}$$

5.2 Per partes

Příklad.

Spočtěte integrál

$$\iint_M \frac{1}{y} dy\, dx$$

kde oblast M je ohraničena křivkami o rovnicích $y = \frac{1}{x}, x = y, x = 2$. Uvažujte jen pro případ $x \geq 0$.

Řešení.

Nejprve určíme integrační meze, tedy určíme průnik křivek $y = \frac{1}{x}, x = y$:

$$\frac{1}{x} = x$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Jelikož uvažujeme případ, kdy $x \geq 0$, bude jediným řešením $x = 1$. Integrační meze tedy budou ohraničeny následovně:

$$1 \leq x \leq 2$$

$$\frac{1}{x} \leq y \leq x$$

Nyní přistoupíme ke integraci, a to převedením dvojného integrálu na dvojnásobný dle vztahu (46):

$$\iint_M \frac{1}{y} dy\, dx = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y} dy\, dx = \int_1^2 [\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x}\, dx = \int_1^2 \left(\ln x - \ln \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \ln \frac{x}{\frac{1}{x}}\, dx = \int_1^2 \ln x^2\, dx = \int_1^2 2 \ln x\, dx$$

Dále použijeme metodu per partes, tedy uplatníme vztah (52)

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)$$

Přičemž položíme $u = \ln x$, $v = 2x$ a první derivace budou mít tvar $u' = \frac{1}{x}$, $v' = 2$. Aplikujeme (52):

$$\int_1^2 2 \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 2 \\ u' = \dfrac{1}{x} & v = 2x \end{vmatrix} = 2x \ln x - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot 2x \, dy =$$

$$= 2x \ln x - \int_1^2 2 \, dy = [2x \ln x - x]_1^2 = 4 \ln 2 - 2 - 2 \ln 1 + 1 = 4 \ln 2 - 1$$

5.3 Substituce

Příklad.

Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{2y}{x} dx \, dy$$

kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \le y \le x \wedge \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\right\}$

Řešení.

Pro zavedení substituce nejprve upravíme nerovnosti určující množinu M:

$$\frac{x}{2} \le y \le x \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le 1$$

$$\frac{x^2}{2} \le y \le x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{y}{x^2} \le 1$$

Zavedeme nové proměnné, a to

$$u = \frac{y}{x}; \;\; v = \frac{y}{x^2}$$

Po zavedení nových proměnných je možné množinu M popsat nerovnostmi

$$\frac{1}{2} \le u \le 1$$

$$\frac{1}{2} \le v \le 1$$

Původní proměnné vyjádříme ze vztahů ze zavedení nových proměnných

$$u = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = ux$$

$$v = \frac{y}{x^2} \Longrightarrow v = \frac{ux}{x^2} \Longrightarrow x = \frac{u}{v}$$

$$y = u \cdot \frac{u}{v} \Longrightarrow y = \frac{u^2}{v}$$

zobrazení Φ je tedy podle rovnic (54) dáno

$$x = g_1(u, v) \Longrightarrow x = \frac{u}{v} \Longrightarrow g_1(u, v) = \frac{u}{v}$$

$$y = g_2(u, v) \Longrightarrow y = \frac{u^2}{v} \Longrightarrow g_2(u, v) = \frac{u^2}{v}$$

Dále pro výpočet Jacobiánu nejprve určíme jednotlivé parciální derivace:

$$\frac{\partial g_1(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial g_1(u, v)}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

$$\frac{\partial g_2(u, v)}{\partial u} = \frac{2u}{v}$$

$$\frac{\partial g_2(u, v)}{\partial v} = -\frac{u^2}{v^2}$$

Jacobián je dán vztahem (55)

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v} \cdot \left(-\frac{u^2}{v^2}\right) - \frac{2u}{v} \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u^2}{v^3} + \frac{2u^2}{v^3} = \frac{u^2}{v^3} \neq 0$$

Pro výpočet dvojného integrálu využijeme vztah (56):

$$\iint\limits_{M_{xy}} \frac{2y}{x} dx\, dy = \iint\limits_{M_{uv}} \frac{2 \cdot \frac{u^2}{v}}{\frac{u}{v}} \cdot \left|\frac{u^2}{v^3}\right| du\, dv = \iint\limits_{M_{uv}} \frac{2u^3}{v^3} du\, dv =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2u^3}{v^3} du \right) dv = [u^2]_{\frac{1}{2}}^{1} \cdot \left[-4 \frac{1}{4v^3} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(2 \cdot 1^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) \cdot \left(-\frac{1}{1^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)^3} \right) =$$

$$= \frac{7}{4} \cdot 7 = \frac{1}{4}$$

Příklad.

Vypočtěte integrál

$$\iint_M \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} dx\, dy$$

kde množina M je omezena následujícími křivkami: $x^2 + y^2 = x$; $x^2 + y^2 = 4x$; $y = x$; $3y = x\sqrt{3}$.

Řešení.

Bude provedena transformace do polárních souřadnic. Položme

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

Pro zjištění mezí dosadíme do rovnic omezující množinu M vzhledem k neznámým x, y.

$$x^2 + y^2 = x \Longrightarrow \rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 = 4x \Longrightarrow \rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi = 4\rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = x \Longrightarrow \rho \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \sin \varphi$$

$$3y = x\sqrt{3} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \Longrightarrow \rho \cdot \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cdot \sin \varphi$$

Po úpravě:

$$\rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi = \rho \cdot \cos \varphi \Longrightarrow \rho = \cos \varphi$$

$$\rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi = 4\rho \cdot \cos \varphi \Longrightarrow \rho = 4 \cos \varphi$$

$$\rho \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \sin \varphi \Longrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1$$

$$\rho \cdot \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho \cdot \sin\varphi \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$$

Množina M je určena v polárních souřadnicích omezením:

$$\operatorname{arctg} 1 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}\sqrt{3}$$

$$\cos\varphi \leq \rho \leq 4\cos\varphi$$

První z uvedených podmínek lze upravit na tvar $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. Jelikož máme zjištěny integrační meze, známe Jacobián dle (59), můžeme využít vztah (60) pro výpočet:

$$\iint_{M_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{M_{\rho\varphi}} f\big(g_1(\rho,\varphi), g_2(\rho,\varphi)\big) \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$\iint_M \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \frac{2}{((\rho\cdot\cos\varphi)^2 + (\rho\cdot\sin\varphi)^2)^2}\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \frac{2}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \frac{2}{\rho^3}\,d\rho\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[-\frac{2}{2\rho^2}\right]_{\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[-\frac{1}{\rho^2}\right]_{\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{(4\cos\varphi)^2} + \frac{1}{(\cos\varphi)^2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{4\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{3}{4}[\tan\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}\left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Příklad.

Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M x^2 y\,dx\,dy$$

přičemž množina M je čtvrtkruh se středem v počátku o poloměru $r = 1$, který leží v prvním kvadrantu. Řešte převedením na dvojnásobný integrál a také pomocí transformace do polárních souřadnic.

Řešení.

Nejprve provedeme řešení převedením na dvojnásobný integrál podle (44). Pro určení integračních mezí vyjdeme z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, v našem případě konkrétně $x^2 + y^2 = 1$. Vyjádříme y, čímž dostaneme $y = \sqrt{1 - x^2}$. Daná oblast bude tedy shora ohraničená křivkou o rovnici $y = \sqrt{1 - x^2}$, zdola bude ohraničená přímkou o rovnici $y = 0$. Integrační meze budou ve tvaru

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$\iint\limits_M x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \cdot \frac{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2}{2} - x^2 \cdot \frac{0^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \cdot \frac{1 - x^2}{2} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} \right) = \frac{1}{15}$$

Nyní provedeme integrace pomocí transformací do polárních souřadnic. Položme

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial g_1(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial g_2(\rho, \varphi)}{\partial \rho} & \dfrac{\partial g_2(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cdot \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cdot \cos^2 \varphi + \rho \cdot \sin^2 \varphi = \rho$$

Pro určení integračních mezí si stačí uvědomit, že pro čtvrtkruh bude ρ omezeno poloměrem daného čtvrtkruhu, dále pak φ bude omezeno úhlem daného čtvrtkruhu, který se nachází v prvním kvadrantu. Integrační meze tedy budou:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Provedeme transformaci a dále upravíme

$$\iint_M x^2 y\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \rho \cdot \sin\varphi\, \rho\, d\varphi\, d\rho = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\ d\varphi\, d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\ d\varphi\, d\rho$$

Před dalšími úpravami provedeme integraci zavedením následující substituce

$$\int \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi = \left| \begin{matrix} t = \cos\varphi \\ dt = -\dfrac{1}{\sin\varphi} d\varphi \end{matrix} \right| = -\int t^2\, dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3\varphi}{3} + C$$

a vrátíme se k původní integraci

$$\int_0^1 \rho^4 \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^1 \rho^4 \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^1 \rho^4 \left(-\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\cos^3 0}{3}\right) d\rho =$$

$$\int_0^1 \rho^4 \left(-\frac{0}{3} + \frac{1}{3}\right) d\rho = \frac{1}{3}\int_0^1 \rho^4\ d\rho = \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right) = \frac{1}{15}$$

Jak je z výše uvedeného zřejmé, pomocí obou metod jsme se dostali ke stejnému výsledku, byť řešení pomocí transformace do polárních souřadnic bylo co do úprav náročnější, ačkoli oblast, na které bylo integrováno, byl čtvrtkruh. Neznamená tedy, že je v případech, kdy je integrační oblast částí kružnice, musí být řešení pomocí transformace do polárních souřadnic vždy jednodušší. Nutné je také zohlednění funkce, která má být v daném případě integrována.

6 Aplikace dvojného integrálu

6.1 Obsah rovinného obrazce

Příklad.

Vypočítejte obsah obdélníku, jehož vrcholy mají následující souřadnice:

$$A = [a; c]$$

$$B = [b; c]$$

$$C = [b; d]$$

$$D = [a; d]$$

Využijte výpočet pomocí dvojného integrálu, jednoduchého integrálu, výsledek porovnejte se vzorcem pro výpočet obsahu z planimetrie.

Řešení.

Nejprve použijeme dvojný integrál. Je zřejmé, že oblast je omezena přímkami s rovnicemi $x = a, x = b, y = c, y = d$, můžeme tedy zapsat integrační meze ve tvaru

$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq d$$

Pro výpočet obsahu plochy použijeme vztah (61) a následně pro úpravu vztah (46):

$$S = \iint_M dx\,dy = \int_a^b \int_c^d dy\,dx = \int_a^b [y]_c^d\,dx = \int_a^b (d-c)\,dx = (d-c)\int_a^b dx =$$

$$= (d-c)[x]_a^b = (d-c)(a-b)$$

Nyní můžeme ukázat výpočet pro jednoduchý integrál. Obrazec je shora ohraničen přímkou o rovnici $y = d$, zdola pak přímkou o rovnici $y = c$. Pro integrační meze platí

$$a \leq x \leq b$$

obdobně jako tomu bylo u výpočtu dvojného integrálu. Nyní můžeme přistoupit k výpočtu plochy, přičemž budeme od sebe odečítat obsahy dvou ploch – obsah plochy S_2 pod přímkou $y = c$ budeme odečítat od obsahu plochy S_1 pod přímkou $y = d$.

$$S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = \int_a^b d\,dx = d\int_a^b dx = d[x]_a^b = d(b-a)$$

$$S_2 = \int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

Po úpravě získáme

$$S = S_1 - S_2 = d(b-a) - c(b-a) = (b-a)(d-c)$$

což je výsledek stejný jako u dvojného integrálu. V poslední části stačí porovnat se vzorcem z planimetrie. Pro strany obdélníku platí, že velikost strany AB je dána rozdílem x-ových souřadnic těchto bodů, tedy $|AB| = b - a$, velikost strany BC je dána rozdílem y-ových souřadnic těchto bodů, tedy $|BC| = d - c$. Obsah obdélníku je dán jako

$$S = |AB| \cdot |BC| = (b-a)(d-c)$$

Což je totožný výsledek, jako v předchozích dvou postupech výpočtu.

Příklad.

Určete obsah čtvrtkruhu o poloměru $r = 2$ se středem v počátku, který leží v prvním kvadrantu. Zjištěný výsledek pomocí dvojného integrálu porovnejte se vztahem z planimetrie.

Řešení.

Pro výpočet použijeme dvojný integrál, a tedy konkrétně vztah (61):

$$S(M) = \iint_M dx\,dy$$

Vymezíme plochu M a provedeme transformaci do polárních souřadnic. Podle bude platit

$$x = \rho \cdot \cos\varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin\varphi$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial g_1(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial g_2(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial g_2(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cdot\cos^2\varphi + \rho\cdot\sin^2\varphi = \rho$$

Jelikož se jedná o čtvrtkruh o poloměru $r = 2$ se středem v počátku, který leží v prvním kvadrantu, jsou tím i jednoznačně dány integrační meze:

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Pro transformaci použijeme vztah (60):

$$S(M) = \iint_M dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \;\; d\varphi\, d\rho = \int_0^2 \rho[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \; d\rho = \int_0^2 \rho \cdot \frac{\pi}{2} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \rho\, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \pi$$

Nyní použijeme vztah z planimetrie. Pro obsah kruhu platí, že $S = \pi r^2$, obsah čtvrtkruhu tedy bude $S = \frac{\pi r^2}{4}$. Po dosazení známého poloměru $r = 2$ získáme

$$S = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$$

6.2 Obsah plochy

Příklad.

Vypočítejte obsah, který má plocha $\tau\!: x + y + z = 5$ při ohraničení rovinami o rovnicích $x = 1, x = 3, y = 1, y = 3$.

Řešení.

Aby bylo možné využít vztah (63), je nutné danou plochu definovat jako funkci o dvou proměnných. Vyjádříme tedy z rovnice plochy z:

$$x + y + z = 5 \Rightarrow z = 5 - x - y$$

Integrační meze lze zjistit z rovnic rovin, které danou plochu ohraničují (tedy $x = 1, x = 3$, $y = 1, y = 3$). Pro integrační meze platí:

$$1 \leq x \leq 3$$

$$1 \leq y \leq 3$$

Dále určíme parciální derivace

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -1$$

a následně dosadíme do vztahu (63):

$$V(\tau) = \iint\limits_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$V(\tau) = \int_1^3 \int_1^3 \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dx\, dy = \int_1^3 \int_1^3 \sqrt{3}\, dx\, dy = \int_1^3 \left[\sqrt{3}x\right]_1^3\, dy =$$

$$\int_1^3 \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)\, dy = \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) \int_1^2 dy = \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)[y]_1^3 =$$

$$\left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)(3 - 1) = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

6.3 Objem tělesa

Příklad.

Určete objem tělesa ohraničeného rovinami $x = 0, x = 3, y = 0, y = 3$ a plochou o rovnici $z = \frac{x^2}{3+y^2}$.

Řešení.

Integrační meze ze zadání:

$$0 \le x \le 3$$

$$0 \le y \le 3$$

Nyní můžeme použít vztah (63) pro výpočet objemu tělesa.

$$V(T) = \iint\limits_M f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^3 \frac{x^2}{3 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^3 \frac{1}{3 + y^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3\, dy =$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{3+y^2}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) dy = \int_0^3 \frac{9}{3+y^2} dy = 9\int_0^3 \frac{1}{3+y^2} dy$$

Dále použijeme vztah (22) a dopočítáme

$$9\int_0^3 \frac{1}{3+y^2} dy = 9\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]_0^3 = 9\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{0}{3}\right) = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Příklad.

Určete objem elipsoidu s poloosami $a = 1, b = 2, c = 3$.

Řešení.

Do obecné rovnice elipsoidu dosadíme známé hodnoty a následně vyjádříme z.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

$$z = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2}}$$

Pro výpočet objemu elipsoidu využijeme skutečnosti, že se jedná o dvojnásobek objemu půlelipsoidu. Podstava tohoto půlelipsoidu leží v rovině $z = 0$, pokud dosadíme do rovnice elipsoidu, získáme rovnici elipsy ve tvaru

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

ze které můžeme určit integrační meze:

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-2\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}$$

Nyní můžeme použít vztah (63) pro výpočet objemu tělesa.

$$V(T)=\iint\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint\limits_M 3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 6\int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}}\,dy\,dx$$

Tímto jsme převedli dvojný integrál na dvojnásobný a integrujeme podle y. Označme

$$u=\sqrt{1-x^2}$$

Přičemž toto u je konstantní a nezáporné. Platí tedy

$$\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}}\,dy = \int_{-2u}^{2u}\sqrt{u^2-\frac{y^2}{2^2}}\,dy$$

Dále zavedeme následující substituci a upravíme

$$\int_{-2u}^{2u}\sqrt{u^2-\frac{y^2}{2^2}}\,dy = \left|\begin{matrix} y=2u\sin t \\ dy=2u\cos t\,dt\end{matrix}\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{u^2-\frac{(2u\sin t)^2}{4}}\,2u\cos t\,dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{u^2-u^2\sin^2 t}\cdot 2u\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{u^2(1-\sin^2 t)}\cdot 2u\cos t\,dt =$$

$$= 2u^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 2u^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 2u^2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))\,dt =$$

$$= u^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))\,dt = u^2\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = u^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right) =$$

$$= \pi u^2 = \pi(1-x^2)$$

Nyní se vrátíme k původní integraci:

$$V(T) = \iint_M f(x,y)\, dx\, dy = 6 \int_{-1}^{1} \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2}} dy\, dx = 6 \int_{-1}^{1} \pi(1 - x^2)\, dx =$$

$$= 6\pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 6\pi \left(1 - \frac{1^3}{3} - (-1) + \frac{(-1)^3}{3}\right) = 8\pi$$

6.4 Fyzikální aplikace

Příklad.

Stanovte souřadnice těžiště hmotného čtverce, který je ohraničen přímkami o rovnicích $x = 0, x = e, y = 0, y = e$. Hustota daného čtverce je popsána funkcí $\sigma(x,y) = 2^x + 2xy$.

Řešení.

Nejprve určíme integrační meze. Tím, že se jedná o čtverec, je tento vymezen přímkami dle zadání, ze kterých jasně integrační meze vyplývají.

$$0 \leq x \leq e$$

$$0 \leq y \leq e$$

Abychom mohli určit souřadnice těžiště, musíme nejprve vypočítat hmotnost daného čtverce a jeho statické momenty vzhledem k ose x a také vzhledem k ose y. Nejprve vypočteme hmotnost čtverce na základě vztahu (65), a to převedením dvojného integrálu na integrál dvojnásobný, a to pomocí vztahu (46):

$$m = \iint_M \sigma(x,y)\, dx\, dy = m = \iint_M (2^x + 2xy)\, dx\, dy = \int_0^e \left(\int_0^e (2^x + 2xy)\, dx \right) dy$$

V dalším kroku budeme integrovat podle proměnné x, a tedy druhou proměnnou y považujeme za konstantu. Pro integraci využijeme základní integrační vzorec (23) a základní integrační vzorec (9) pro nalezení primitivních funkcí:

$$\int_0^e \left(\int_0^e (2^x + 2xy)\, dx \right) dy = \int_0^e \left[\frac{2^x}{\ln 2} + 2y\frac{x^2}{2}\right]_0^e dy$$

Použijeme Newton-Liebnitzův vztah (25) pro výpočet a následně upravíme:

$$\int_0^e \left[\frac{2^x}{\ln 2} + 2y\frac{x^2}{2}\right]_0^e dy = \int_0^e \left(\frac{2^e}{\ln 2} + 2y\frac{2^2}{2} - \frac{2^0}{\ln 2} + 2y\frac{0^2}{2}\right) dy = \int_0^e \left(\frac{2^e - 1}{\ln 2} + 4y\right) dy$$

Podle vztahu (39) rozdělíme na dva integrály, konstanty vytkneme před integrál a použijeme základní integrační vzorce (8) a (9) pro výpočet primitivní funkce.

$$\int_0^e \left(\frac{2^e - 1}{\ln 2} + 4y\right) dy = \int_0^e \frac{2^e - 1}{\ln 2} dy + \int_0^e 4y\, dy = \frac{2^e - 1}{\ln 2}\int_0^e dy + 4\int_0^e y\, dy =$$

$$= \frac{2^e - 1}{\ln 2}[y]_0^e + 4\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^e$$

Použijeme (25) a dále upravíme

$$\frac{2^e - 1}{\ln 2}(e - 0) + 4\left(\frac{e^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = e\frac{2^e - 1}{\ln 2} + 2e^2$$

Hmotnost daného čtverce je tedy

$$m = e\frac{2^e - 1}{\ln 2} + 2e^2$$

Pro určení souřadnic těžiště budou dále určeny statické momenty vzhledem k jednotlivým. Osám. Nejprve tedy statický moment S_x vzhledem k ose x podle vztahu (66).

$$S_x = \iint_M y\sigma(x, y)\, dx\, dy = \iint_M y(2^x + 2xy)\, dx\, dy = \iint_M (2^x y + 2xy^2)\, dx\, dy$$

Převedeme na dvojnásobný integrál podle (44) a dále upravíme.

$$\iint_M (2^x y + 2xy^2)\, dx\, dy = \int_0^e \left(\int_0^e (2^x y + 2xy^2)\, dy\right) dx$$

Provedeme integraci podle y, proměnnou x v tomto kroku považujeme za konstantu, kterou lze spolu s dalšími konstantami vytknout před integrál. Rovněž jako u výpočtu hmotnosti pomocí vztahu (39) rozdělíme na dva integrály. Následně použijeme vztah (25) a upravíme.

$$\int_0^e \left(\int_0^e (2^x y + 2xy^2)\, dy\right) dx = \int_0^e \left(2^x \int_0^e y\, dy + 2x\int_0^e y^2\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^e \left(2^x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^e + 2x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^e \right) dx = \int_0^e \left(2^x \left(\frac{e^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 2x \left(\frac{e^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \right) dx$$

$$= \int_0^e \left(2^x e^2 + \frac{2}{3} e^3 x \right) dx$$

Nyní opět použijeme pro integraci základní integrační vzorce (23) a (9), provedeme úpravu dle (25) a upravíme.

$$\int_0^e \left(2^x e^2 + \frac{2}{3} e^3 x \right) dx = e^2 \int_0^e 2^x \, dx + \frac{2}{3} e^3 \int_0^e x \, dx = e^2 \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^e + \frac{2}{3} e^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e =$$

$$= e^2 \left(\frac{2^e}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} \right) + \frac{2}{3} e^3 \left(\frac{e^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = e^2 \frac{2^e - 1}{\ln 2} + \frac{1}{3} e^5 - \frac{2}{3} e^3$$

Statický moment vzhledem k ose x je tedy:

$$S_x = e^2 \frac{2^e - 1}{\ln 2} + \frac{1}{3} e^5 - \frac{2}{3} e^3$$

Nyní bude vypočten statický moment S_y vzhledem k ose y podle (67).

$$S_y = \iint_M x\sigma(x, y) \, dx \, dy = \iint_M x(2^x + 2xy) \, dx \, dy = \iint_M (2^x x + 2x^2 y) \, dx \, dy$$

Převedeme na dvojnásobný integrál podle (44) a dále upravíme.

$$\iint_M (2^x x + 2x^2 y) \, dx \, dy = \int_0^e \left(\int_0^e (2^x x + 2x^2 y) \, dx \right) dy$$

Pro výpočet bude použita metody per partes pro výpočet první části integrálu:

$$\int 2^x x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & v' = 2^x \\ u' = 1 & v = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{bmatrix} = \frac{x 2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x \, dx =$$

$$\frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C$$

Nyní se můžeme vrátit k původnímu výpočtu.

$$\int_0^e \left(\int_0^e (2^x x + 2x^2 y)\, dx \right) dy = \int_0^e \left(\left[\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + \frac{2}{3} y x^3 \right]_0^e \right) dy =$$

$$\int_0^e \left(\frac{e \cdot 2^e}{\ln 2} - \frac{2^e}{\ln^2 2} + \frac{2}{3} y e^4 - \frac{0 \cdot 2^0}{\ln 2} + \frac{2^0}{\ln^2 2} - \frac{2}{3} y \cdot 0^3 \right) dy = \int_0^e \left(\frac{e \cdot 2^e}{\ln 2} + \frac{1 - 2^e}{\ln^2 2} + \frac{2}{3} y e^4 \right) dy =$$

$$= \left[\frac{e \cdot 2^e}{\ln 2} y + \frac{1 - 2^e}{\ln^2 2} y + \frac{1}{3} e^4 y^2 \right]_0^e = \frac{e \cdot 2^e}{\ln 2} \cdot e + \frac{1 - 2^e}{\ln^2 2} \cdot e + \frac{1}{3} e^4 \cdot e^2$$

$$S_y = \frac{e^2 \cdot 2^e}{\ln 2} + \frac{(1 - 2^e) \cdot e}{\ln^2 2} + \frac{1}{3} e^6$$

Pro zjištění souřadnic těžiště čtverce stačí dosadit do vztahů (68) a (69):

$$T_1 = \frac{S_y}{m} \qquad\qquad T_2 = \frac{S_x}{m}$$

$$T_1 = \frac{\frac{e^2 \cdot 2^e}{\ln 2} + \frac{(1 - 2^e) \cdot e}{\ln^2 2} + \frac{1}{3} e^6}{e \frac{2^e - 1}{\ln 2} + 2e^2} \qquad\qquad T_2 = \frac{e^2 \frac{2^e - 1}{\ln 2} + \frac{1}{3} e^5 - \frac{2}{3} e^3}{e \frac{2^e - 1}{\ln 2} + 2e^2}$$

Příklad.

Určete momenty setrvačnosti čtverce vzhledem ose x, y a z. Tento čtverec je tedy ohraničen přímkami o rovnicích $= 0, x = 2$, $y = 0, y = 2$ a jeho hustota je popsána funkcí $\sigma(x, y) = 2xy^2 + 2x^2 y$.

Řešení.

Nejprve určíme integrační meze. Tím, že se jedná o čtverec, je tento vymezen přímkami dle zadání, ze kterých jasně integrační meze vyplývají.

$$0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 2$$

Moment setrvačnosti při rotaci kolem osy x bude stanoven na základě (70):

$$I_x = \iint_M y^2 \sigma(x, y)\, dx\, dy = \iint_M y^2\, (2xy^2 + 2x^2 y) dx\, dy = \iint_M (2xy^4 + 2x^2 y^3)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^2 (2xy^4 + 2x^2y^3)\, dx \right) dy = \int_0^2 \left[2y^4 \frac{x^2}{2} + 2y^3 \frac{x^3}{3} \right]_0^2 dy = \int_0^2 \left[y^4x^2 + \frac{2}{3}y^3x^3 \right]_0^2 dy =$$

$$= \int_0^2 \left(y^4 \cdot 2^2 + \frac{2}{3}y^3 \cdot 2^3 - y^4 \cdot 0^2 - \frac{2}{3}y^3 \cdot 0^3 \right) dy = \int_0^2 \left(4y^4 + \frac{16}{3}y^3 \right) dy =$$

$$= \left[4\frac{y^5}{5} + \frac{16}{3} \cdot \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 4 \cdot \frac{2^5}{5} + \frac{16}{3} \cdot \frac{2^4}{4} - 4 \cdot \frac{0^5}{5} - \frac{16}{3} \cdot \frac{0^4}{4} = \frac{32}{5} + \frac{4}{3} = \frac{111}{15}$$

Moment setrvačnosti při rotaci kolem osy y dle (71):

$$I_y = \iint_M x^2\sigma(x,y)\, dx\, dy = \iint_M x^2(2xy^2 + 2x^2y)\, dx\, dy = \iint_M (2x^3y^2 + 2x^4y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^2 (2x^3y^2 + 2x^4y)\, dx \right) dy = \int_0^2 \left[2y^2 \cdot \frac{x^4}{4} + 2y \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^2 dy =$$

$$\int_0^2 \left(y^2 \cdot \frac{2^4}{4} + 2y \cdot \frac{2^5}{5} - y^2 \cdot \frac{0^4}{4} - 2y \cdot \frac{0^5}{5} \right) dy = \int_0^2 \left(4y^2 + \frac{64}{5}y \right) dy =$$

$$\left[4 \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{64}{5} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 4 \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{64}{5} \cdot \frac{2^2}{2} - 4 \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{64}{5} \cdot \frac{0^2}{2} = \frac{32}{3} + \frac{128}{5} = \frac{544}{15}$$

Moment setrvačnosti při rotaci kolem osy z dle (72):

$$I_z = I_x + I_y = \frac{111}{15} + \frac{544}{15} = \frac{131}{3}$$

Závěr

Tématem této bakalářské práce byl dvojný integrál a jejím cílem bylo vytvořit soubor příkladů sloužící především pro studenty prvních ročníků matematických oborů vysokých škol jako podpůrný prostředek při studiu tohoto tématu. Řešené příklady však využijí nejen studenti prvních ročníků matematických oborů vysokých škol, ale také studenti technických či dalších oborů, v rámci jejichž studia je toto téma zahrnuto.

V teoretické části byly nejprve pro uvedení do problematiky shrnuty poznatky z oblasti řešení jednorozměrných integrálů. Jednalo se jak o samotné řešení jednoduchých integrálů, tak i přehled základních integračních vzorců, které jsou dále v rámci zpracovávaného tématu použity.

Byla provedena motivace výpočtu dvojných integrálů, a to na příkladu úlohy o objemu. Definován byl dvojný integrál, byly popsány jeho základní vlastnosti a také pravidla výpočtu. Shrnuty byly také základní metody výpočtu dvojného integrálu, a to prostřednictvím přímého dosazení, metody per partes a substituční metody. Závěrem pak byly popsány možné fyzikální aplikace dvojného integrálu.

Praktická část svou strukturou kopírovala teoretickou část tak, aby čtenář jednoduše dohledal řešené příklady v praktické části, které odpovídají popisované problematice v části teoretické. Řešeny byly základní úlohy výpočtu dvojného integrálu na obdélníkové oblasti, na obecně zadané oblasti, provedena byla také ukázka výpočtu pomocí metody per partes, pomocí substituce a také pomocí transformace do polárních souřadnic jakožto speciální případ substituce.

Vybrané úlohy byly řešeny dvojím způsobem, tedy například přímým dosazením a substituční metodou. Toto řešení bylo záměrně zvoleno tak, aby bylo možné ukázat různé postupy a také aby bylo možnost poukázat na možné rozdíly ve výpočtu a jeho náročnosti.

Použité zdroje

BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza I*. Praha: SNTL, 1989.

BRABEC Jiří, František MARTAN a Zdeněk ROZENSKÝ. *Matematická analýza II*. Praha: SNTL, 1986.

DANĚČEK, Josef, Oldřich DLOUHÝ a Oto PŘIBYL. *Matematika II: studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-7204-453-2.

HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. Integrální počet funkcí více proměnných. 3. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2022. ISBN 978-80-01-06945-5.

JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II* . Praha: Academia, 1984.

KOLÁŘ, Petr. *Elektronická učebnice matematických metod fyziky.* [online]. nedatováno. [Cit. 2023-04-01]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/matematicke_metody/materialy/Ucebnice_2.pdf

MAŘÍK, Robert. *Dvojný integrál.* [online]. 2023. [Cit. 2023-04-11]. Dostupné z: https://user.mendelu.cz/marik/mtk/mat-slidy/dvojny_integral.pdf

REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988.

Tabulkové integrály. [online]. 2023. [Cit. 2023-04-11]. Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3db3a.htm

VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných.* Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012.