



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ZPRACOVÁNÍ DATA Z TEPLOTNÍCH MĚŘENÍ PRO ÚČELY INVERZNÍ ÚLOHY VEDENÍ TEPLA

PROCESSING OF TEMPERATURE DATA FOR INVERSE HEAT CONDUCTION TASKS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

RÓBERT BRACHNA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ LUKS, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Róbert Brachna**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Luks, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Zpracování data z teplotních měření pro účely inverzní úlohy vedení tepla

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Inverzní úloha vedení tepla, sloužící ke zjištění okrajových podmínek sprchového chlazení, může být silně nestabilní. Jedním z předpokladů stability úlohy jsou vstupní data z měření teplotním senzorem s minimálním množstvím šumu. Použitím různých metod filtrace signálu však můžeme z naměřených hodnot odstranit také složky, které jsou důležité pro finální analýzu zkoumaného děje. Proto je potřeba volit takové metody filtrace, které minimálně zkreslují rekonstruovanou okrajovou podmínku s ohledem na charakter úlohy.

Cíle bakalářské práce:

Student provede rešerši vhodných metod odstranění šumu z teplotních měření. Na vzorových datech provede jejich srovnání a vybere vhodné metody pro filtraci s ohledem na chyby použitých teplotních senzorů, měřicí elektroniky, charakteristiky měřeného děje a požadavků inverzní úlohy vedení tepla. Výstupem práce bude knihovna funkcí použitelná k hromadnému zpracování naměřených dat.

Seznam doporučené literatury:

JAN, Jiří. Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2002, 427 s. ISBN 80-214-1558-4.

PROAKIS, John G. a MANOLAKIS, Dimitris G. Digital signal processing. 4th ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2007, xix, 1084 s. : il. ISBN 0-13-187374-1.

DINIZ, Paulo Sergio Ramirez. Adaptive filtering: algorithms and practical implementation. 3rd ed. New York: Springer, 2008, xviii, 625 s. ISBN 978-0-387-31274-3.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá digitálnymi filtermi a odstraňovaním šumu z teplotných meraní. Základným aparátom k správne mu pochopeniu vlastností filtrov je diskretná Fourierova transformácia, ktorá je v práci objasnená na ilustračnom príklade. Ďalej sa práca venuje popisu lineárnych filtrov a návrhu základných typov vhodných k redukcii šumu. Analýzou dát z experimentu je navrhnutý adaptívny filter. Tento filter sa podrobí ďalšej analýze pomocou simulovaného procesu chladenia s umelým šumom a porovná sa s ostatnými konvenčnými filtermi. Jedným zrovnávacím kritériom je porovnanie tvaru krivky záznamu teploty so simulovanou. Druhým kritériom je rekonštruovaná okrajová podmienka, ktorá je výstupom inverznej úlohy vedenia tepla.

Summary

This bachelor's thesis deals with digital filters and noise removal from temperature measurements. The basic concept for the proper understanding of properties of filters is the discrete Fourier transform, which is illustrated on a given example. Next, the thesis considers linear filters and the design of basic types for noise reduction. An adaptive filter is designed by analyzing experimental data. This filter is subjected to further analysis using a simulated cooling process disrupted with artificially added noise and will be compared to other conventional filters. One criterion is to compare the curve of the filtered temperature to the simulated one. The second criterion is the reconstructed boundary condition, which is the output of the inverse heat conduction task.

Klíčové slová

digitálne filtre, lineárne filtre, Gaussovo jadro, Gaussovo okno, adaptívny filter, inverzná úloha vedenia tepla, teplotné meranie, odstraňovanie šumu

Keywords

digital filters, linear filters, Gaussian kernel, Gaussian window, adaptive filter, inverse heat conduction problem, temperature measurement, noise reduction

BRACHNA, Róbert. *Zpracování data z teplotních měření pro účely inverzní úlohy vedení tepla*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117207>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. 69 s. Vedoucí práce Ing. Tomáš Luks, Ph.D.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Zpracování data z teplotních měření pro účely inverzní úlohy vedení tepla* vypracoval samostatne pod vedením Ing. Tomáša Luksa, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname použitých zdrojov.

V Brne dňa

.....

Róbert Brachna

Podakovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať vedúcemu svojej bakalárskej práce Ing. Tomášovi Luksovi, Ph.D. za cenné rady pri vedení práce a poskytnuté dáta. Ďalej by som sa chcel poďakovať úzkemu okruhu spolužiakov za priateľskú atmosféru počas celého štúdia. Rovnako sa chcem poďakovať Prof. RNDr. Miloslavovi Druckmüllerovi, CsC. za konzultácie k matematickej časti tejto práce.

.....

Róbert Brachna

Obsah

Úvod	12
1 Matematický aparát	14
1.1 Komplexné čísla	14
1.2 Laplaceova transformácia	16
1.3 Z-transformácia	18
1.4 Fourierova transformácia	20
1.4.1 Spojitá Fourierova transformácia	20
1.4.2 Diskrétna Fourierova transformácia	20
1.4.3 Rýchla Fourierova transformácia	23
2 Reprezentácia signálu	24
2.1 Interpretácia Fourierovej transformácie	24
2.2 Diracov impulz	26
2.3 Základné dvojice Fourierovej transformácie	27
2.4 Vzorkovanie	28
3 Filtre	32
3.1 Lineárne filtre	32
3.2 Návrh základných filtrov	37
3.2.1 Frekvenčne priepustné filtre	37
3.2.2 Filter s Gaussovým jadrom	39
3.3 Implementácia filtrov	40
4 Využitie filtrov pre potreby inverznej úlohy vedenia tepla	42
4.1 Priama a inverzná úloha vedenia tepla	42
4.2 Návrh adaptívneho filtru	43
4.2.1 Teplotné meranie	43
4.2.2 Algoritmus adaptívnej filtrácie	44
4.2.2.1 Zrnutie navrhnutého algoritmu	49
4.2.3 Analýza výsledkov adaptívnej filtrácie na vzorových dátach	50
4.3 Porovnanie filtrov pomocou inverznej úlohy	52
4.3.1 Simulácia chladenia	52
4.3.2 Porovnanie vybraných filtrov	54
4.3.2.1 Porovnanie teplotných kriviek	54
4.3.2.2 Porovnanie výsledných okrajových podmienok	58
Záver	60
Zoznam použitých zdrojov	61
Zoznam obrázkov a tabuliek	63
Prílohy	65

Úvod

Mnohé deje, ktoré okolo nás prebiehajú sa dajú verne matematicky popísať parciálnymi diferenciálnymi rovnicami. Jednou takou je rovnica vedenia tepla. Aby sme boli schopní určiť riešenie tejto rovnice a následne tak popísať priebeh teploty, musíme doplniť informácie o stave objektu na začiatku pozorovania a stav určitých parametrov na povrchu telesa, ktoré označujeme ako okrajové podmienky. Nimi môže byť opäť teplota, tepelný tok alebo súčiniteľ prestupu tepla.

Konkrétnu aplikáciu nachádzame pri sprchovom chladení oceleovej dosky, pri ktorom musíme určiť okrajové podmienky, primárne súčiniteľ prestupu tepla. Jednou z možností je použiť inverznú úlohu vedenia tepla na známy vývoj teploty. Záznamy teplôt pod povrchom sú skreslené šumom, ktorý degraduje rekonštruovanú okrajovú podmienku získanú inverznou úlohou. Preto kladieme dôraz na „čistotu“ nameraných údajov, o čo sa snažíme filtráciou získaných dát. O tejto problematike pojednávame v tejto práci.

Teória filtrov, ktorá je značne rozsiahla, vyžaduje pevný matematický základ. V prvej kapitole uvádzame práve tieto oblasti. Od Laplaceovej a Z-transformácie prechádzame k Fourierovej transformácii, pomocou ktorej neskôr naznačujeme, ako filter pozmeňuje vstupný signál.

V druhej kapitole sa venujeme signálom vo všeobecnosti. Predovšetkým odvodíme známy vzorkovací teorém, ktorý demonštrujeme na konkrétnom príklade. Na tento teorém pri analýze signálov nesmieme zabudnúť.

V ďalšej kapitole sa v práci venujeme lineárnym digitálnym filtrom. Ukazujeme, čím sa dá jednoznačne popísať jeho výstup. Navrhujeme základné typy filtrov s dolnou prepustou, ktoré neskôr uplatňujeme pri odstraňovaní šumu. Takisto uvádzame, ako ich efektívne implementovať vo výpočtových softwaroch.

V záverečnej kapitole sa venujeme hlavnému problému. Na vzorových dátach získaných z experimentu vykonanom v Laboratórii prešupu tepla a proudění navrhujeme vlastný adaptívny filter, ktorý vyhovuje charakteru pozorovaného deja. Po jeho úspešnom návrhu a vyhodnotení na základe výsledného šumu (rozdielu filtrovanej teploty od zaznamenananej termočlánkom) ho testujeme spolu s ďalšími filtrami na simulovanom chladení. Výsledné teploty používame do inverznej úlohy a obdržané okrajové podmienky porovnáваме.

Základné pojmy zo štatistiky [2]

Jednorozmerným štatistickým súborom rozumieme množinu $\mathcal{X} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l\}$ obsahujúcu údaje (dáta), ktoré nesú kvantitatívnu informáciu. V tejto práci sa budú vzťahovať primárne k teplote a súčiniteľu prestupu tepla.

Pod pojmom *stredná hodnota* μ chápeme vážený priemer hodnôt štatistického súboru. Spočítame ju zo vzťahu

$$\mu = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \gamma_k.$$

Rozptylom štatistického súboru \mathcal{X} máme na mysli výraz

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l (\gamma_k - \mu)^2},$$

ktorý udáva mieru rozloženia hodnôt štatistického súboru \mathcal{X} okolo strednej hodnoty μ .

Označenia často používaných množín

SYMBOL	VÝZNAM
\mathbb{N}	množina prirodzených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálnych čísel
\mathbb{C}	množina komplexných čísel
$C(\mathbb{Z})$	množina (diskrétnych) funkcií definovaných na \mathbb{Z}
$C(\mathbb{R})$	množina funkcií definovaných na \mathbb{R}
$C(\mathbb{C})$	množina funkcií definovaných na \mathbb{C}

1 Matematický aparát

V tejto kapitole si uvedieme partie matematiky, ktoré sú potrebné k popisu a analýze lineárnych filtrov [4], [20], [22]. Nezaobídeme sa bez komplexných čísel, preto si ich na úvod riadne zadefinujeme [9]. S ich pomocou si priblížime Laplaceovu transformáciu (ďalej LT) [9], [10], ktorá je užitočným nástrojom v analýze spojitého systému. Pre diskkrétne systémy, ktorých špeciálnym prípadom je práve lineárny filter, zavedieme Z-transformáciu (ďalej ZT) [20]. Na záver sa budeme venovať tomu najdôležitejšiemu špeciálnemu prípadu týchto transformácií - spojitý a diskrétnej Fourierovej transformácii (ďalej FT). Neskôr budeme v práci hovoriť o tzv. frekvenčnej odozve filtru. Najdôležitejšie vety uvedieme aj s dôkazom. To, ako správne interpretovať FT, si vysvetlíme v ďalšej kapitole.

1.1 Komplexné čísla

Definícia 1.1. Komplexné čísla [9]

Množinu

$$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

nazveme množinou *komplexných čísel*. Symbol i označujeme ako *imaginárna jednotka*.

Poznámka. Pri úvahe o komplexných číslach ako o rozšírení reálnych imaginárnymi, môžeme komplexné číslo z zapísať

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z),$$

kde podľa predchádzajúcej definície

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

$\operatorname{Re}(z)$, resp. $\operatorname{Im}(z)$ nazývame reálna, resp. imaginárna časť čísla z .

Definícia 1.2. Algebraické operácie [9]

Pre $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ definujeme sčítanie

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

a násobenie

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Z nasledujúcej vety vyplýva, že \mathbb{C} splňuje axiómy komutatívneho telesa.

Veta 1.3. [9]

Pre ľubovoľné čísla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3), \\ 0 + z_1 &= z_1, \\ z_1 + (-z_1) &= 0, \\ z_1 + z_2 &= z_2 + z_1, \\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \\ 1 \cdot z_1 &= z_1, \\ z_1 \cdot z_1^{-1} &= 1, \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1,\end{aligned}$$

kde

$$-z = -x - i \cdot y \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

predstavuje inverzné číslo vzhľadom k sčítaniu a

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

predstavuje inverzné číslo k násobeniu.

Definícia 1.4. Komplexne združené číslo

Pre $z \in \mathbb{C}$ definujeme *komplexne združené číslo*

$$z^* = x - i \cdot y.$$

Veta 1.5.

Pre $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} (z_1^*)^* &= z_1, \\ (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^*, \\ (z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^*. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Naviac platí

$$(z_1^* = z_1) \Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Rovnako ako si môžeme predstaviť reálne čísla pomocou priamky, tak môžeme reprezentovať komplexné čísla v tzv. *Gaussovej rovine* (ďalej len rovina) s dvomi osami: reálnou a imaginárnou.

Definícia 1.6. Absolútna hodnota

Analogicky k reálnym číslam definujeme *absolútnu hodnotu* komplexného čísla ako vzdialenosť od počiatku roviny.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

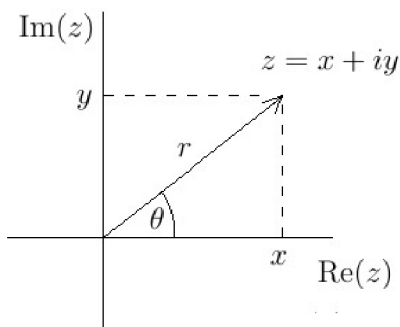
Hovoríme tiež o *amplitúde* alebo aj *magnitúde*.

Veta 1.7.

Pre $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z \cdot z^* = |z|^2.$$

Poznámka. Komplexné čísla môžeme ekvivalentne definovať pomocou amplitúdy a uhlu, ktorý zvierajú spojnica počiatku roviny a pozície čísla s kladnou časťou reálnej osi. Vychádzame z nasledujúceho obrázku.



Obr. 1.1: Polárna reprezentácia komplexného čísla.

Definícia 1.8. Polárny tvar

Komplexné číslo z môžeme vyjadriť v *polárnom* (tiež *kanonickom*) tvare

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)).$$

Poznámka. Máme dve ekvivalentné reprezentácie komplexného čísla. Medzi (x, y) a (r, θ) existujú na základe pravouhlého trojuholníka na Obr. 1.1 prevodné vzťahy

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\theta),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.2)$$

Vzhľadom k faktu, že obor hodnôt funkcie *arkustangens* je uzavrený interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, dodefinujeme druhý vzťah z (1.2), aby sme pokryli aj ľavú polrovinu.

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pre } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pre } x < 0 \end{cases}.$$

Pre potreby tejto práce zavedieme označenie s využitím vyššie dodefinovaného výrazu

$$\operatorname{Arg}(z) = \theta.$$

Poznamenajme ešte, že vďaka periodicite goniometrických funkcií *sínus* a *kosínus* môže θ nadobúdať akúkoľvek reálnu hodnotu.

Veta 1.9. [6]

Z analýzy Taylorových rád dostávame

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

V tejto práci budeme často pre skrátenie zápisu rovníc používať práve uvedený vzťah. Komplexné číslo z zapíšeme v tvare

$$z = r \cdot e^{i\theta}.$$

1.2 Laplaceova transformácia

Definícia 1.10. Laplaceova transformácia [9]

Pre funkciu $x(t) \in C(\mathbb{R})$ definujeme zobrazenie

$$\mathcal{L} : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{C})$$

výrazom

$$\mathcal{L}(x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (1.4)$$

kde $s \in \mathbb{C}$, ktoré nazývame *Laplaceova transformácia* funkcie $x(t)$. Skráteno značíme $\mathcal{L}(x)$.

Poznámka. Vyššie uvedenú definíciu nazývame tiež *bilaterálna* LT ako rozšírená verzia známejšej *unilaterálnej* LT

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Veta 1.11. [9]

Označme

$$P_h = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > h, h \in \mathbb{R}\}.$$

Špeciálne kladieme $P_{-\infty} = \mathbb{C}$ a $P_{\infty} = \emptyset$. Potom pre každú funkciu $x(t) \in C(\mathbb{R})$ existuje také $h \in \mathbb{R}$, že integrál (1.4) konverguje absolútne na množine P_h a nekonverguje absolútne v žiadnom bode množiny $\mathbb{C} \setminus P_h$.

Definícia 1.12. Obor konvergence Laplaceovej transformácie

Nech $x(t) \in C(\mathbb{R})$, potom množinu P_h z predchádzajúcej vety nazveme *obor konvergence* LT funkcie $x(t)$.

Poznámka. Ďalej uvažujeme iba také funkcie $x(t) \in C(\mathbb{R})$, ktorých obor konvergence je neprázdna množina.

Veta 1.13. [9]

Nech $x_1(t), x_2(t) \in C(\mathbb{R})$ také, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t) - x_2(t)| dt = 0.$$

Potom platí

$$\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x_2).$$

Veta 1.14. [9]

Pre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x(t), y(t) \in C(\mathbb{R})$ platí

$$\mathcal{L}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot \mathcal{L}(x) + \beta \cdot \mathcal{L}(y).$$

Hovoríme, že LT je lineárny operátor.

Definícia 1.15. Konvolúcia [10]

Konvolúciou dvoch funkcií $x(t), y(t) \in C(\mathbb{R})$ rozumieme zobrazenie

$$* : C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$$

definované predpisom

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau.$$

Veta 1.16. [10]

Pre $x(t), y(t) \in C(\mathbb{R})$ platí

$$\mathcal{L}(x * y) = \mathcal{L}(x) \cdot \mathcal{L}(y). \tag{1.5}$$

Hovoríme, že LT prevádza konvolúciu na algebraický súčin.

Dôkaz.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x * y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x * y)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)e^{-st} d\tau \right) dt.\end{aligned}$$

Zameníme poradie integrácie a vyjmeme $x(\tau)$ z vnútorného integrálu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau)e^{-st} dt \right) d\tau.$$

Pre vnútorný integrál zavedieme substitúciu $g = t - \tau$, z ktorej dostávame $t = g + \tau$ a $dt = dg$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(g)e^{-s(g+\tau)} dg \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(g)e^{-sg} dg \right) d\tau.$$

Využijeme definíciu Laplaceovej transformácie a dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \mathcal{L}(y)d\tau = \mathcal{L}(x) \cdot \mathcal{L}(y).$$

□

Definícia 1.17. Inverzná Laplaceova transformácia [9]

Pre funkciu $X(s) \in C(\mathbb{C})$ definujeme zobrazenie

$$\mathcal{L}^{-1} : C(\mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{R})$$

výrazom

$$\mathcal{L}^{-1}(X)(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\gamma - pi}^{\gamma + pi} X(s)e^{st} ds,$$

kde $\gamma = \text{Re}(s)$ také, že $s \in P_h$. Zobrazenie nazveme *inverzná Laplaceova transformácia* a skrátene označíme $\mathcal{L}^{-1}(X)$.

1.3 Z-transformácia

Definícia 1.18. Z-transformácia [4]

Pre diskretnú funkciu $x[n] \in C(\mathbb{Z})$ definujeme zobrazenie

$$\mathcal{Z} : C(\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{C})$$

výrazom

$$\mathcal{Z}(x)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \tag{1.6}$$

kde $z \in \mathbb{C}$. Skrátene označíme $\mathcal{Z}(x)$.

Poznámka. K úvahám o konvergencii (1.6) využijeme teóriu konvergence mocninových rád. Z definície nekonečnej rady rozpíšeme súčet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

a rozhodneme o konvergencii týchto čiastkových rád. Poznamenajme, že prvý člen môžeme nasledovne transformovať

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x[-n]z^n.$$

Veta 1.19. [20]

Nech $x[n] \in C(\mathbb{Z})$, ak existuje $z \in \mathbb{C}$ také, že (1.6) konverguje, potom existujú $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ také, že (1.6) konverguje len pre všetky body množiny

$$P_z = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}.$$

Definícia 1.20. Obor konvergence Z-transformácie

Nech $x[n] \in C(\mathbb{Z})$, potom množinu P_z z predchádzajúcej vety nazveme *obor konvergence* ZT funkcie $x[n]$.

Veta 1.21. [14]

Pre $x[n] \in C(\mathbb{Z})$ a $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\mathcal{Z}(x[n-k]) = z^{-k} \mathcal{Z}(x[n]). \quad (1.7)$$

Dôkaz.

$$\mathcal{Z}(x[n-k]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n}.$$

Zavedieme substitúciu $m = n - k$.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+k)} = z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-k} \mathcal{Z}(x[n]).$$

□

Definícia 1.22. Diskrétna konvolúcia [20]

Diskrétnou konvolúciou dvoch funkcií $x[n], y[n] \in C(\mathbb{Z})$ rozumieme zobrazenie

$$* : C(\mathbb{Z}) \times C(\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{Z})$$

definované predpisom

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k]. \quad (1.8)$$

Rovnako ako v prípade LT analogicky platia nasledujúce vety [20].

Veta 1.23.

Pre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x[n], y[n] \in C(\mathbb{Z})$ platí

$$\mathcal{Z}(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot \mathcal{Z}(x) + \beta \cdot \mathcal{Z}(y).$$

Veta 1.24.

Pre $x[n], y[n] \in C(\mathbb{Z})$ platí

$$\mathcal{Z}(x * y) = \mathcal{Z}(x) \cdot \mathcal{Z}(y).$$

Definícia 1.25. Inverzná Z-transformácia [14]

Pre funkciu $X(z) \in C(\mathbb{C})$ definujeme zobrazenie

$$\mathcal{Z}^{-1} : C(\mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{Z})$$

výrazom

$$\mathcal{Z}^{-1}(X)[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(z) z^{n-1} dz,$$

kde integračná cesta c musí ležať v obore konvergence $X(z)$. Zobrazenie nazývame *inverzná Z-transformácia* a skrátene značíme $\mathcal{Z}^{-1}(X)$.

1.4 Fourierova transformácia

1.4.1 Spojitá Fourierova transformácia

Aby sme sa dostali k rýdzo harmonickej analýze, stačí v definičnom vzťahu (1.4) položiť $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ a dostávame spojitý prípad FT

$$\mathcal{F}(x)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.9)$$

Podobne obdržíme aj inverznú spojitú FT

$$\mathcal{F}^{-1}(X)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.10)$$

1.4.2 Diskrétna Fourierova transformácia

Analogicky predchádzajúcej podkapitole v definícii 1.18 pokladáme $z = e^{i\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$, čím prechádzame k diskrétnej verzii FT (ďalej DFT)

$$\mathcal{F}(x)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega n}.$$

A rovnako k inverznej DFT

$$\mathcal{F}^{-1}(X)[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega.$$

Poznámka. Keďže FT je špeciálnym prípadom LT, respektíve ZT, platí pre ňu, že je lineárny operátor a konvolúciu transformuje na algebraický súčin. Navyiac [14]

$$\mathcal{F}(x \cdot y) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y). \quad (1.11)$$

Veta 1.26. [22]

Pre $x(t) \in C(\mathbb{R})$, resp. $x[n] \in C(\mathbb{Z})$ splňujúcu

$$x(t) = x^*(t), \text{ resp. } x[n] = x^*[n]$$

platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x)(\omega) &= \mathcal{F}^*(x)(-\omega), \\ \operatorname{Re}(\mathcal{F}(x)(\omega)) &= \operatorname{Re}(\mathcal{F}(x)(-\omega)), \\ \operatorname{Im}(\mathcal{F}(x)(\omega)) &= -\operatorname{Im}(\mathcal{F}(x)(-\omega)). \end{aligned}$$

Dôkaz. Dokážeme prvú vlastnosť pre spojité prípad (podobne by sa ukázal diskretný), zvyšné dve sú jej priamym dôsledkom. Využijeme vlastnosť komplexných čísel (1.1).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} ((x(t)e^{-i\omega t})^*)^* dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{i\omega t} dt \right)^* \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t} dt \right)^* = \mathcal{F}^*(x)(-\omega). \end{aligned}$$

□

Poznámka. Predchádzajúca veta nám vlastne hovorí, že FT funkcie nadobúdajúcej reálne hodnoty je párna v reálnej zložke a nepárna v imaginárnej. Všetky potrebné informácie nesú kladné hodnoty ω .

Poznámka. Fourierov obraz (alebo aj frekvenčné spektrum) $\mathcal{F}(x)(\omega)$ budeme často skrátene označovať $X(\omega)$.

V skutočnosti však pracujeme s dátami konečnej dĺžky, preto si uvedieme vzťahy pre praktický výpočet DFT. Predpokladajme, že sme zozbierali dáta z experimentu, ktorý sme uskutočnili v časovom intervale $\langle 0; t \rangle$. Údaje sme zozbierali s periódou T . Pri počte vzoriek N platí $t = (N - 1)T$. Dostávame postupnosť údajov

$$x[n] \equiv (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{N-1}),$$

kde x_n predstavuje údaj zaznamenaný v čase $t_n = nT$. Transformované dáta do frekvenčnej oblasti označíme

$$X[k] \equiv (X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_{N-1}).$$

Potom DFT a inverznú DFT vyjadríme v tvaroch

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad (1.12)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-nk}, \quad (1.13)$$

kde $W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ [14].

Veta 1.27.

Pre funkciu $x[n] \in C(\mathbb{Z})$ splňujúcu

$$x[n] = x^*[n]$$

a pre $k > 0$ platí

$$X[N - k] = X^*[k].$$

Dôkaz.

$$X[N - k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i(N-k)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i n} \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}}.$$

Využijeme (1.1) a fakt, že $e^{-2\pi i n} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(x[n] e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right)^* \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \right)^* = X^*[k].$$

□

Vo výpočtových softwaroch je DFT implementovaná nasledovne pomocou maticového násobenia.

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^{N-2} & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-2} & \dots & W_N^{(N-2)^2} & W_N^{(N-2)(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-2)} & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & \dots & W_N^{-(N-2)} & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-2)} & \dots & W_N^{-(N-2)^2} & W_N^{-(N-2)(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-2)} & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Algoritmus DFT vyžaduje $2N^2 - N$ operácií, ktorý je v praxi časovo veľmi náročný. V prípade, že dĺžka údajov je mocninou 2, teda $N = 2^q$ pre $q \in \mathbb{N}$, používa sa špeciálny algoritmus nazývaný rýchla Fourierova transformácia (ďalej FFT) [7]. Za každých okolností je možné doplniť dáta vhodným počtom núl. V nasledujúcej podkapitole si vysvetlíme jeho princíp.

1.4.3 Rýchla Fourierova transformácia

Pomocou rovnosti

$$W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}} = \left(e^{-\frac{2\pi i}{2N}}\right)^2 = W_{2N}^2$$

môžeme prepísať (1.12) na tvar

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_N^{k(2n)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_N^{k(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{kn}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pre $k = \frac{N}{2} + s$, $s = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ odvodíme

$$\begin{aligned} W_{N/2}^{N/2+s} &= e^{-\frac{2\pi i(N/2+s)}{N/2}} = e^{-2\pi i} \cdot e^{-\frac{2\pi is}{N/2}} = W_{N/2}^s, \\ W_N^{N/2+s} &= e^{-\frac{2\pi i(N/2+s)}{N}} = e^{-\pi i} \cdot e^{-\frac{2\pi is}{N}} = -W_N^s. \end{aligned}$$

Použitím týchto vzťahov rozdelíme (1.15) na dve nezávislé sumy

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{kn}, \\ X[N/2+k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{kn}, \end{aligned}$$

kde $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Označme maticu z (1.14) \mathbf{W}_N a príslušnú maticovú rovnicu $\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$. Pôvodnú úlohu sme rozdelili na nasledujúce podúlohy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{W}_{N/2} \mathbf{p}, & \mathbf{v} &= \mathbf{W}_{N/2} \mathbf{q}, \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} + \mathbf{d} \circ \mathbf{v} \\ \mathbf{u} - \mathbf{d} \circ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{p} = (x_0, x_2, \dots, x_{N-2})^T$, $\mathbf{q} = (x_1, x_3, \dots, x_{N-1})^T$, $\mathbf{d} = (W_N^0, W_N^1, \dots, W_N^{N/2-1})^T$, $\mathbf{d} \circ \mathbf{v} = (d_1 v_1, d_2 v_2, \dots, d_{N/2} v_{N/2})$. Takto upravený problém vyžaduje $N^2 + \frac{N}{2}$ operácií. Celkovo sme náročnosť znížili o $N^2 - \frac{3N}{2}$, čím sa výpočet pri veľkom počte údajov výrazne skrúti. Tento postup však môžeme aplikovať ďalej na \mathbf{u} a \mathbf{v} . Pokračujeme až dokým sa v poslednom kroku dostaneme k vektorom dĺžky 2. Každý krok pritom vyžaduje rádovo N operácií. Krokov je $q = \log_2 N$, teda celkovo FFT vyžaduje rádovo $N \log_2 N$ operácií. Rovnakým spôsobom sa dá upraviť algoritmus inverznej FFT.

2 Re prezentácia signálu

Mnohé javy môžeme považovať za spojite premenné v čase. Napríklad priebeh elektrického prúdu v elektrickom obvode alebo vývin teploty pri chladení materiálu. K ich popisu pristupujeme rovnako ako v matematickej analýze pri popise funkcií. Funkciu $x(t) \in C(\mathbb{R})$ budeme považovať za *analógový* signál závislý na spojite premennej veličine.

Vďaka jednoznačnosti priamej a inverznej LT vieme signál ekvivalentne reprezentovať funkciou $\mathcal{L}(x) \in C(\mathbb{C})$ [22]. Najväčší informačný prínos má práve jej špeciálna verzia, ktorou je FT. Máme teda dve rovnocenné vyjadrenia procesu, ktoré sú navzájom určené vzťahmi (1.9), (1.10). Hovoríme tiež o reprezentácii signálu v časovej a frekvenčnej oblasti.

Pri pozorovaní dejov však získavame informácie v konečnom časovom intervale. Namerané údaje obvykle potrebujeme analyzovať, prípadne použiť vo výpočtoch. K tomu používame počítačovú techniku, ktorá pracuje s konečnou pamäťou. Preto má v praxi význam uvažovať diskkrétne signály konečných rozmerov.

Poznámka. Vo zvyšku práce budeme uvažovať iba také signály, ktoré nadobúdajú reálnych hodnôt, teda

$$x(t) = x^*(t), \quad x[n] = x^*[n].$$

Tento fakt budeme zdôrazňovať značením

$$x(t) \in C^*(\mathbb{R}), \quad x[n] \in C^*(\mathbb{Z}).$$

2.1 Interpretácia Fourierovej transformácie

Bližšie si vysvetlíme, čo presne znamená transformovať signál z časovej do frekvenčnej oblasti a ako tento výsledok interpretovať. Predovšetkým sa zameriame na DFT (úvahy je možné rozšíriť aj pre spojitú FT) konečnej postupnosti reálnych údajov

$$x[n] \equiv (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{N-1}), \quad x_n \in \mathbb{R}.$$

Rovnako ako v podkapitole 1.4.2 predstavuje x_n údaj zaznamenaný v čase $t_n = nT$. Chceme vyjadriť $x[n]$ ako súčet diskkrétnej harmonických vln. Člen X_k postupnosti

$$X[k] \equiv (X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_{N-1}), \quad X_k \in \mathbb{C}$$

reprezentuje sínusovú vlnu s frekvenciou $f_k = \frac{k}{TN}$. Všeobecne komplexná hodnota X_k v sebe nesie informáciu o jej amplitúde a fáze (posunutí). Harmonickú vlnu vieme zapísať v tvare

$$A \sin(\omega t + \phi),$$

kde A , ω , ϕ sú postupne jej amplitúda, uhlová frekvencia a počiatočná fáza. X_k nám teda popisuje vlnu

$$A_k \sin(\omega_k t + \phi_k)$$

s uhlovou frekvenciou $\omega_k = \frac{2\pi k}{TN}$. Pre jej parametre platí

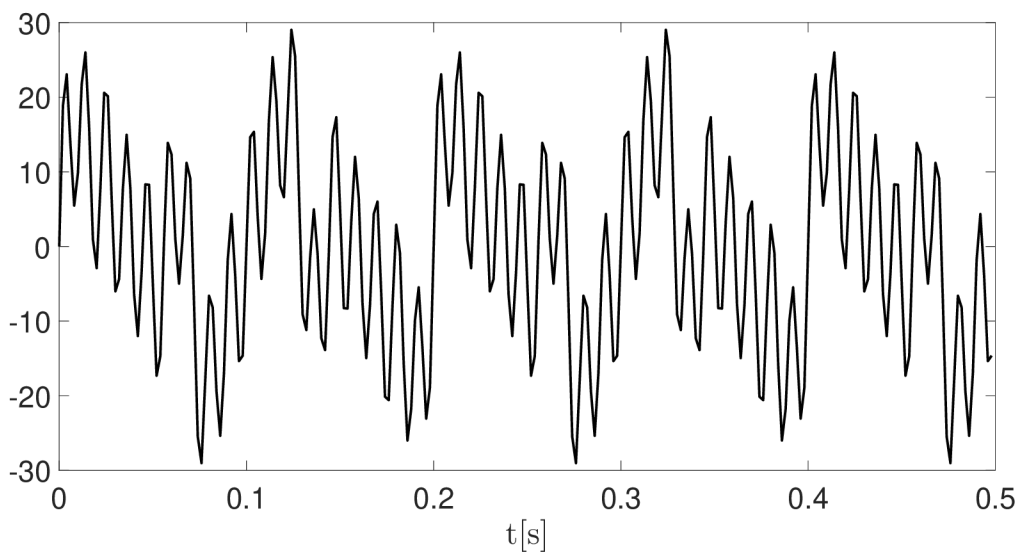
$$A_k = |X_k|, \quad \phi_k = \text{Arg}(X_k).$$

Vďaka (1.27) nesie všetky informácie prvých $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ prvkov postupnosti $X[k]$, kde $\lfloor a \rfloor$ predstavuje dolnú celú časť čísla a . Preto frekvenčné spektrum spravidla vykresľujeme len pre prvých $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ frekvencií.

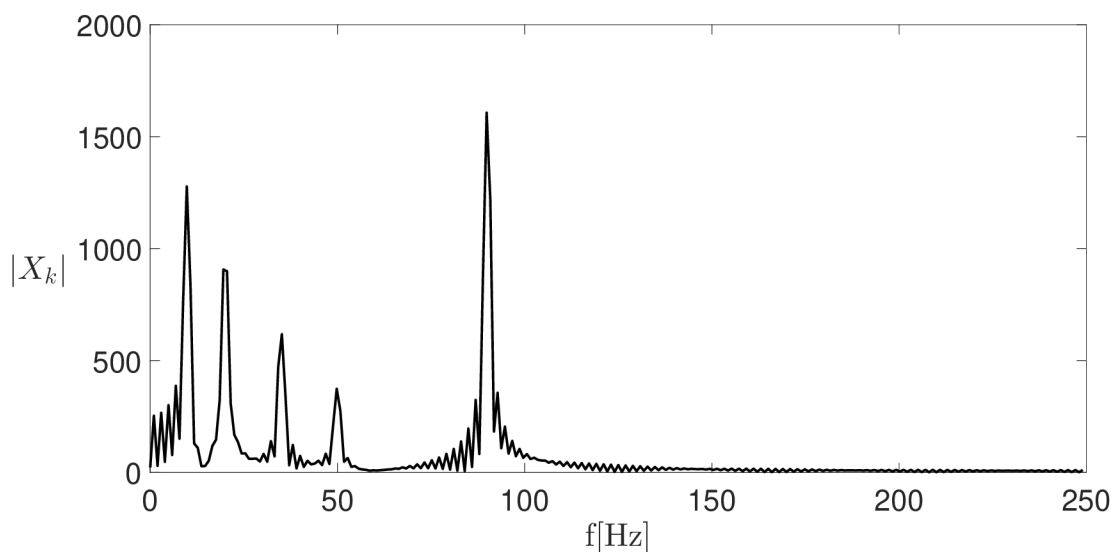
Príklad 2.1. Sledujme signál so vzorkovacou frekvenciou $f = 500\text{Hz}$ po dobu $\frac{1}{2}\text{s}$, ktorý je zložený z piatich sínusových vln

$$\begin{aligned} &10 \sin(2\pi \cdot 10t), \\ &8 \sin(2\pi \cdot 20t), \\ &5 \sin(2\pi \cdot 35t), \\ &3 \sin(2\pi \cdot 50t), \\ &13 \sin(2\pi \cdot 90t). \end{aligned}$$

Predpokladajme, že túto informáciu k dispozícii nemáme. Z Obr. 2.1 usúdime, že pozostáva z čiastkových signálov rôznych frekvencií, no bez ďalšej analýzy ich nedokážeme presnejšie určiť. Preto naň aplikujeme DFT a pozrieme sa na jeho frekvenčné spektrum.

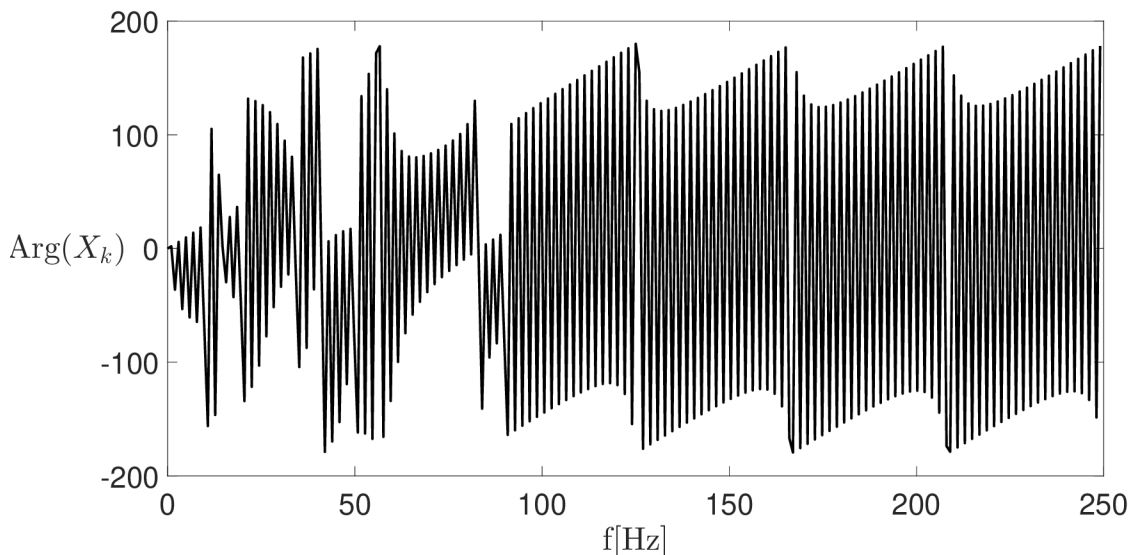


Obr. 2.1: Časová oblasť.



Obr. 2.2: Frekvenčné spektrum - magnitúda.

Zaujímajú nás hlavne magnitúdy jednotlivých frekvencií, pretože na ich základe dokážeme určiť, ktorá frekvencia je výrazne zastúpená v nami skúmanom signále. Na Obr. 2.2 vidíme päť výrazných vrcholov pri frekvenciách približne 10, 20, 35, 50 a 90Hz. Navyše si všimneme, že pomer ich amplitúd zhruba odpovedá tým zo zadania. V tomto príklade nie je pre náš cieľ fázové spektrum (Obr. 2.3) dôležité, no opäť badáme nepravidelnosti v okolí vyššie uvedených frekvencií.



Obr. 2.3: Frekvenčné spektrum - fáza.

2.2 Diracov impulz

Užitočným príkladom analógového signálu je nekonečný alebo tiež Diracov impulz [14], ktorý využijeme vo zvyšku kapitoly. Obsiahlejší popis a vlastnosti je možné nájsť v [16].

Definícia 2.2. Diracov impulz [14]

Funkciu $\delta(t) \in C^*(\mathbb{R})$ splňujúcu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \text{ pre } t \neq 0 \quad (2.1)$$

nazveme *Diracov impulz*.

Poznámka. Diracov impulz chápeme ako limitu postupnosti funkcií

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n & \text{pre } t \in \langle 0; \frac{1}{n} \rangle \\ 0 & \text{pre } t \notin \langle 0; \frac{1}{n} \rangle \end{cases}.$$

Preto môžeme písať $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$. Lahko sa presvedčíme, že pre každý prvok postupnosti platí prvá vlastnosť z (2.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = 1.$$

Taktiež je možné uvažovať Diracov impulz uskutočnený v čase $t = \tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1, \quad \delta(t - \tau) = 0 \text{ pre } t \neq \tau.$$

Veta 2.3. [16]

Pre spojité funkciu $x(t) \in C^*(\mathbb{R})$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \quad (2.2)$$

Diracov impulz je výnimočný svojím frekvenčným spektrom, ktoré je konštantné. Určíme ho všeobecne pre posunutý impulz pomocou vzťahu (1.9). Využijeme pritom vlastnosť (2.2).

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega\tau}.$$

Špeciálne pre $\tau = 0$ máme $\Delta(\omega) = 1$.

2.3 Základné dvojice Fourierovej transformácie

Uvedieme si FT základných typov signálu, ktoré budú užitočné v teórii vzorkovania a filtrácie.

Definícia 2.4. Obdĺžnikové okno

Funkciu $\text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) \in C^*(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ splňujúcu

$$\text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t \in \langle -\frac{t_0}{2}; \frac{t_0}{2} \rangle \\ 0 & \text{pre } t \notin \langle -\frac{t_0}{2}; \frac{t_0}{2} \rangle \end{cases}, \quad (2.3)$$

nazveme *obdĺžnikové okno*.

Poznámka. Pre zvyšok práce zavedieme skrátené označenie

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

O platnosti nasledujúcej tabuľky sa dá presvedčiť využitím (1.9) a (1.10).

$x(t)$	$X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right)$	$t_0 \text{sinc}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$
$\frac{\omega_0}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Tabuľka 2.1: Dvojice Fourierovej transformácie

Ukážeme si aspoň výpočet FT obdĺžnikového okna, ktorý vyžaduje pár trikov.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \left[-e^{-i\omega t}\right]_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} \\ &= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{i\omega\frac{t_0}{2}} - e^{-i\omega\frac{t_0}{2}}}{2i}\right) = \frac{t_0}{\omega} \frac{\sin\left(\omega\frac{t_0}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = t_0 \text{sinc}\left(\omega\frac{t_0}{2}\right).\end{aligned}$$

Využili sme faktu, že funkciu $\sin(t)$ môžeme zapísať v tvare

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

ktorého platnosť sa dá dokázať pomocou (1.3).

Poznámka. Z teórie Fourierových rád plynie, že každú periodickú funkciu $x(t) \in C^*(\mathbb{R})$ s periódou T môžeme vyjadriť v tvare nekonečnej rady [14]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

kde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Pre koeficienty c_k platí

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt. \quad (2.4)$$

Určíme FT periodickej funkcie, pričom využijeme linearitu FT a tabuľku 2.1.

$$\begin{aligned}X(\omega) = \mathcal{F}(x)(\omega) &= \mathcal{F}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}\right)(\omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}(e^{ik\omega_0 t})(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0),\end{aligned}$$

kde koeficienty c_k sú dané výrazom (2.4).

2.4 Vzorkovanie

Prechod od analógového signálu k diskretnému môžeme vnímať nasledovne. Dej spojte prebieha v čase a my zaznamenávame údaje v konkrétnych časových okamihoch posunutých o periódou T . Dospejeme tak k vyjadreniu diskretného signálu $x[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ pomocou analógového $x(t) \in C^*(\mathbb{R})$ vo forme

$$x[n] = x(nT). \quad (2.5)$$

V tejto podkapitole si odvodíme dôležitý poznatok z teórie vzorkovania a rekonštrukcie signálu [14].

Definícia 2.5. Vzorkovací signál [14]

Funkciu $v(t) \in C^*(\mathbb{R})$ splňujúcu

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad (2.6)$$

nazveme *vzorkovací signál* so *vzorkovacou periódou* T_s .

Určíme frekvenčné spektrum $V(\omega)$. Vďaka faktu, že $v(t)$ je periodická, môžeme písať

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_v t},$$

kde $\omega_v = \frac{2\pi}{T_s}$ je uhlová vzorkovacia frekvencia. Pomocou (2.4), kde za integračný interval zvolíme $\langle -\frac{T_s}{2}; \frac{T_s}{2} \rangle$ symetrický okolo počiatku, vypočítame koeficienty

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_s}.$$

Využitím (2.3) dostávame

$$V(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_v).$$

Definícia 2.6. Vzorkovaný signál [14]

Funkciu $x_v(t) \in C^*(\mathbb{R})$ vyjadriteľnú z $x(t) \in C^*(\mathbb{R})$ v tvare

$$x_v(t) = x(t)v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

nazveme *vzorkovaný signál*.

Poznámka. Na prvý pohľad sme jednoduchý problém získať diskkrétne hodnoty z analógového signálu matematicky vyjadrili pomerne komplikovane. Bez toho by sme sa však v teórii nemohli posunúť ďalej. Poznamenajme ešte, že aj keď (2.6) vyjadruje nekonečne veľké impulzy, vnímame ich ako vážené s váhou $x(nT_s)$, ktorá udáva hodnotu vzorku v diskrétnom časovom okamihu [14].

Spektrum vzorkovaného signálu vyjadríme pomocou pôvodného spektra. Využijeme pritom vlastnosť (1.11) a (2.2).

$$\begin{aligned} X_v(\omega) &= \mathcal{F}(x(t)v(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)V(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u) \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega_v) du \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u) \delta(u - k\omega_v) du = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_v). \end{aligned}$$

Dostali sme dôležitý výsledok, že spektrum vzorkovaného signálu je tvorené kópiami pôvodného spektra, ktorých stredy sú navzájom posunuté o uhlovú vzorkovaciu frekvenciu ω_v . Označme maximálnu frekvenciu pôvodného spektra ω_{max} , teda

$$X(\omega_{max}) \neq 0,$$

$$X(\omega) = 0 \quad \text{pre} \quad \omega \notin \langle -\omega_{max}; \omega_{max} \rangle.$$

Ak platí

$$\omega_{max} > \frac{\omega_v}{2},$$

potom sa jednotlivé kópie pôvodného spektra prekrývajú. Tento jav sa nazýva *aliasing*. Pokiaľ by sme v takom prípade chceli rekonštruovať pôvodný signál $x(t)$, nastalo by výrazné skreslenie informácií. Tieto výsledky zhrnieme do vety, ktorá sa často označuje ako Nyquistov–Shannonov vzorkovací teorém [14].

Veta 2.7.

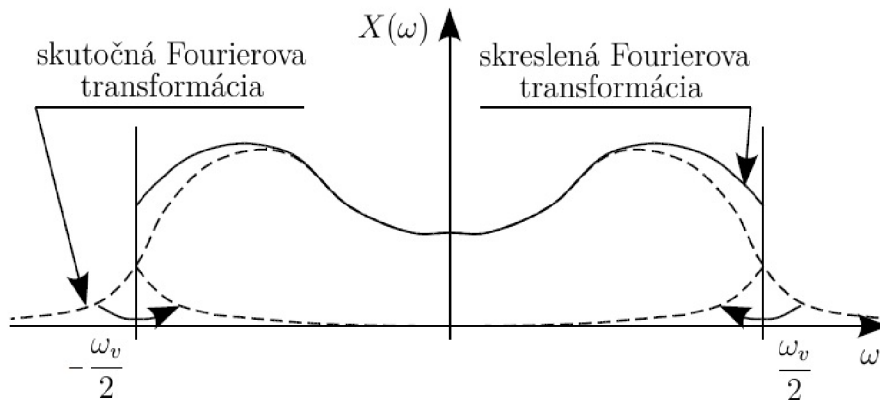
Funkcia $x(t) \in C^(\mathbb{R})$ je rekonštruovateľná bez straty informácie, pokiaľ pre uhlovú vzorkovaciu frekvenciu ω_v príslušného vzorkovacieho signálu $v(t)$ platí*

$$\omega_v > 2\omega_{max}, \tag{2.7}$$

kde ω_{max} splňuje

$$X(\omega_{max}) \neq 0,$$

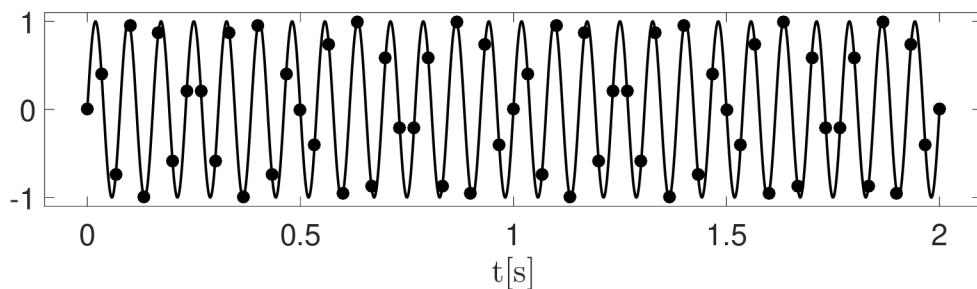
$$X(\omega) = 0 \quad \text{pre} \quad \omega \notin \langle -\omega_{max}; \omega_{max} \rangle.$$



Obr. 2.4: Skreslenie Fourierovej transformácie pri nedodržaní vzorkovacieho teorému [19].

Poznámka. V praxi je spravidla nutné splniť podmienku (2.7) s výraznou rezervou.

Zdôraznime, že úvahy uvedené v tejto podkapitole sa netýkajú priamo diskrétného signálu $x[n]$, ale kvázispojitého impulzného signálu $x_v(t)$. Oba však nesú rovnocenné informácie a sú vzájomne konvertovateľné pomocou (2.5). Preto vyžadujú rovnakú hustotu vzoriek [14]. Na nasledujúcom príklade si názorne ukážeme nedodržanie vzorkovacieho teorému.

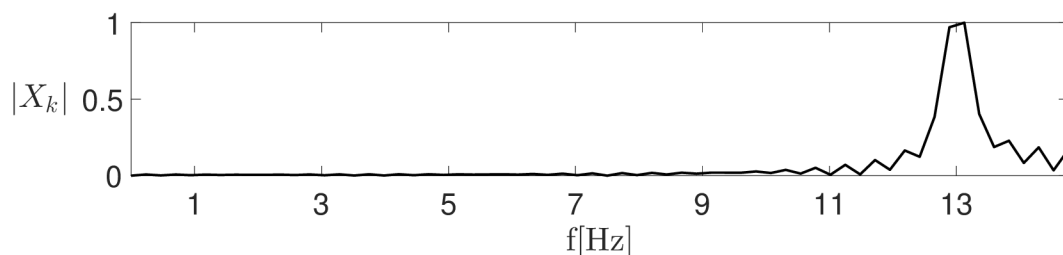


Obr. 2.5: Splnené kritérium - vzorkovanie.

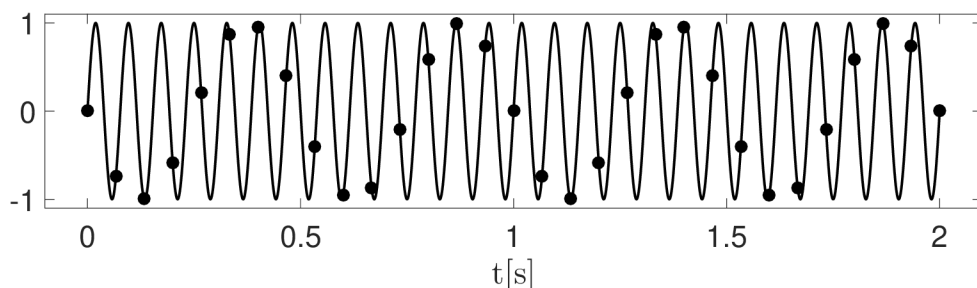
Príklad 2.8. Majme sínusový signál s frekvenciou 13Hz a bezrozmernou amplitúdou 1, ktorý sledujeme 2 sekundy. Použijme dve rôzne vzorkovacie frekvencie

$$f_1 = 30\text{Hz}, \quad f_2 = 15\text{Hz}.$$

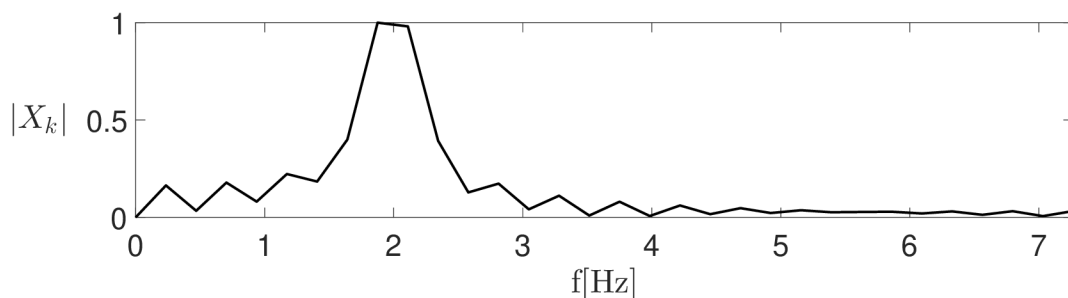
V prvom prípade je kritérium (2.7) splnené, v druhom nie je. Na oba vzorkované signály aplikujeme DFT pomocou (1.12). Všimneme si, že pri dodržaní kritéria sme schopní z frekvenčného spektra (Obr. 2.6) identifikovať, že sa jedná o harmonický signál s frekvenciou 13Hz. Avšak pri nedodržaní by sme z Obr. 2.8 chybné predpokladali frekvenciu 2Hz.



Obr. 2.6: Splnené kritérium - frekvenčné spektrum.



Obr. 2.7: Nesplnené kritérium - vzorkovanie.



Obr. 2.8: Nesplnené kritérium - frekvenčné spektrum.

3 Filtre

Podobne ako sme rozdelili signály na analógové a digitálne, delíme rovnako aj filtre. Pod pojmom filter si môžeme predstaviť aparát, ktorý na svojom vstupe vezme údaje a zmení ich na iné. Konkrétne nás bude zaujímať taká zmena, ktorá z údajov potlačí nami neželané zložky, šum. Pre potreby tejto práce sú dôležité práve diskkrétne (digitálne) filtre, o ktorých pojednáme v tejto kapitole.

Za šum považujeme nechcený signál, ktorý interferuje s nami analyzovaným signálom. Sám o sebe nesie informáciu o priebehu iného procesu. Typickým príkladom je okolitý zvuk pri zaznamenávaní reči, ktorý spadá do kategórie akustického šumu, alebo elektromagnetický šum, ktorý vytvárajú všetky elektrické zariadenia ako rádio či televízny vysielateľ. Veľkú skupinu procesov tvoria náhodné procesy, ktoré sa označujú ako farebný šum. Ten sa ďalej rozdeľuje na základe tvaru frekvenčného spektra [23]. Uvedieme si ten najznámejší - *biely*.

Biely šum je považovaný za náhodný proces, ktorého spektrum má rovnocenne zastúpené všetky frekvencie. V diskkrétnej verzii hovoríme o náhodnej premennej s nulovou strednou hodnotou a konečným rozptylom [23].

3.1 Lineárne filtre

Definícia 3.1. Jednotkový impulz [4]

Signál $\delta[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ splňujúci

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = 0 \\ 0 & \text{pre } n \neq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

nazveme *jednotkový impulz*.

Poznámka. S použitím práve uvedenej definície je možné ľahko overiť, že pre $x[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ platí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]. \quad (3.2)$$

Definícia 3.2. Systém

Objekt, ktorý transformuje $x[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ zo svojho vstupu na $y[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ na výstupe, nazveme *systém*. Budeme ho značiť \mathcal{S} , teda

$$\mathcal{S}(x[n]) = y[n].$$

Definícia 3.3. Impulzná odozva [4]

Signál $h[n] \in C^*(\mathbb{Z})$, pre ktorý platí

$$\mathcal{S}(\delta[n]) = h[n],$$

kde $\delta[n]$ je jednotkový impulz, nazveme *impulzná odozva* systému \mathcal{S} .

Definícia 3.4. Lineárny filter [4]

System \mathcal{S} , pre ktorý platí

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x_1[n], x_2[n] \in C^*(\mathbb{Z}) : \mathcal{S}(x_1[n]) = y_1[n], \mathcal{S}(x_2[n]) = y_2[n] :$$

$$\mathcal{S}(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n], \quad (3.3)$$

$$\mathcal{S}(x_1[n-k]) = y_1[n-k], \quad (3.4)$$

nazveme *lineárny filter*, ktorý označíme \mathcal{S}_F .

Veta 3.5. [4]

Nech \mathcal{S} je filter \mathcal{S}_F a $h[n]$ jeho impulzná odozva. Potom pre $x[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ platí

$$\mathcal{S}_F(x[n]) = x[n] * h[n]. \quad (3.5)$$

Dôkaz. Vyjdeme z definície impulznej odozvy a postupne využijeme (3.4) a (3.3).

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_F(\delta[n]) &= h[n], \\ \mathcal{S}_F(\delta[n-k]) &= h[n-k], \\ \mathcal{S}_F(x[k]\delta[n-k]) &= x[k]h[n-k], \\ \mathcal{S}_F\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \end{aligned}$$

Na ľavej strane využijeme vlastnosť (3.2) a na pravej si všimneme definíciu diskkrétnej konvolúcie. Preto dostávame

$$\mathcal{S}_F(x[n]) = x[n] * h[n].$$

□

Definícia 3.6. Kauzalita [4]

Filter \mathcal{S}_F , ktorého výstup $y[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ závisí iba na aktuálnych a predchádzajúcich hodnotách vstupu $x[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ a výstupu $y[n]$, nazveme *kauzálny*.

$$y[n] = f(x[n_1], y[n_2]), \quad n_1, n_2 \leq n.$$

Veta 3.7. [4]

Filter \mathcal{S}_F je kauzálny práve vtedy, keď pre jeho impulznú odozvu $h[n]$ platí

$$h[n] = 0 \text{ pre } n < 0.$$

Definícia 3.8. Stabilita [4]

Povieme, že filter \mathcal{S}_F je *stabilný*, keď pre každý obmedzený vstup $x[n] \in C^*(\mathbb{Z})$ dostaneme obmedzený výstup $y[n] \in C^*(\mathbb{Z})$.

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z} : |x[n]| < \alpha \rightarrow |y[n]| < \beta.$$

Veta 3.9. [4]

Filter \mathcal{S}_F je stabilný práve vtedy, keď pre jeho impulznú odozvu $h[n]$ platí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Definícia 3.10. Prenos [14]

Funkciu $H(z) \in C(\mathbb{C})$ definovanú predpisom

$$H(z) = \mathcal{Z}(h[n]),$$

kde $h[n]$ je impulzná odozva filtru \mathcal{S}_F , nazveme *prenos* filtru \mathcal{S}_F .

Definícia 3.11. Póly a nuly [14]

Body $p_j, m_k \in \mathbb{C}$, postupne splňujúce

$$\begin{aligned} H(p_j) &= \infty, \\ H(m_k) &= 0, \end{aligned}$$

nazveme postupne *póly* a *nuly* filtru \mathcal{S}_F .

Poznámka. Kauzálny filter \mathcal{S}_F možno popísať diferenčnou rovnicou [4]

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_P y[n-P] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_Q x[n-Q], \quad (3.6)$$

$$a_j, b_k \in \mathbb{R}, \quad P, Q \in \mathbb{N}.$$

Predpokladajme, že $\mathcal{Z}(x)$ a $\mathcal{Z}(y)$ existujú. Na obe strany rovnice (3.6) aplikujeme ZT s využitím (1.7)

$$Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}) = X(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}).$$

Potom s využitím vety o konvolúcii dostávame prenos filtru

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q})}{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P})}. \quad (3.7)$$

Čitateľa a menovateľa výrazu (3.7) môžeme rozložiť na súčin koreňových činiteľov, kde príslušné korene sú podľa definície 3.11 póly v menovateli a nuly v čitateli.

$$H(z) = K \cdot \frac{\prod_{k=1}^Q (1 - m_k z^{-1})}{\prod_{j=1}^P (1 - p_j z^{-1})},$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je násobná konštanta.

Definícia 3.12. FIR filter

Filter \mathcal{S}_F s impulznou odozvou $h[n]$ s konečne mnoho nenulovými hodnotami nazveme *FIR filter* (z anglického Finite Impulse Response).

Definícia 3.13. IIR filter

Filter \mathcal{S}_F s impulznou odozvou $h[n]$ s nekonečne mnoho nenulovými hodnotami nazveme *IIR filter* (z anglického Infinite Impulse Response).

Poznámka. Na prvý pohľad príde nezmyselné uvažovať IIR filter, pretože konvolúciu vstupného signálu s nekonečne dlhou impulznou odozvou nie je možné v softwaroch implementovať. Avšak pri popise tohto filtru príslušnou diferenčnou rovnicou nám stačí k určeniu výstupného signálu poznať iba koeficienty tejto rovnice a pomocou nich výstup určiť.

Veta 3.14. [14]

Kauzálny filter \mathcal{S}_F je stabilný práve vtedy, keď platí

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1,$$

kde $A(z)$ je menovateľ prenosu filtru \mathcal{S}_F .

Poznámka. Pri návrhu filtru sa automaticky požaduje jeho stabilita, preto budeme navrhovať kauzálne filtre, aby sme mohli využiť elegantné kritérium predchádzajúcej vety, ktorá nám hovorí, že póly stabilného filtru ležia vo vnútri jednotkovej kružnice.

Definícia 3.15. Frekvenčná odozva [14]

Funkciu $H(\omega) \in C(\mathbb{R})$ definovanú predpisom

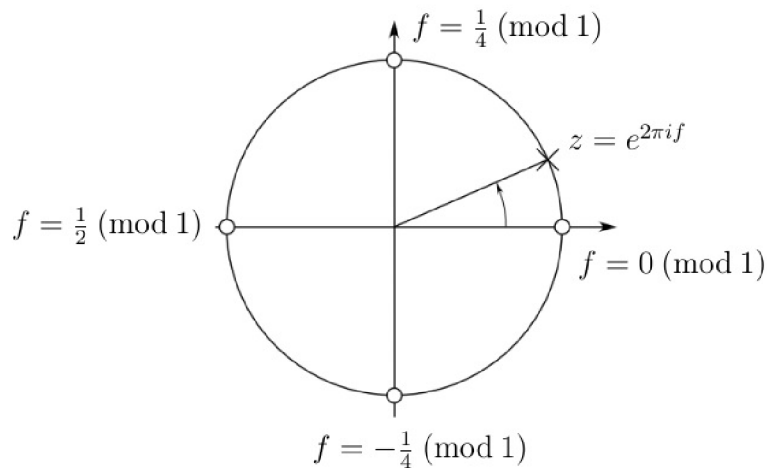
$$H(\omega) = \mathcal{F}(h[n]),$$

kde $h[n]$ je impulzná odozva filtru \mathcal{S}_F , nazveme *frekvenčná odozva* filtru \mathcal{S}_F .

Poznámka. Oveľa prirodzenejšie je hovoriť o frekvencii f než o uhlovej frekvencii ω . Preto pri popise filtrov prejde frekvenčná odozva formálne na vzťah

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-2\pi i f n}.$$

Poznámka. Spomeňme si, ako sme pri zavádzaní DFT položili v definícii ZT $z = e^{i\omega}$, respektíve $z = e^{2\pi i f}$ pri prechode k frekvencii. Z celej komplexnej z-roviny sme sa obmedzili iba na jednotkovú kružnicu.



Obr. 3.1: Jednotková kružnica [4].

Vďaka periodicite pohybu po kružnici nám stačí poznať hodnoty frekvenčnej odozvy pre

$$f \in \langle 0; 1 \rangle,$$

respektíve

$$f \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Hovoríme o normalizovanej frekvencii f vzhľadom k vzorkovacej f_s . K určeniu skutočnej frekvencie F stačí použiť jednoduchý vzťah

$$F = f \cdot f_s.$$

Frekvenčná odozva $H(f)$ je periodická s periódou $T = 1$. Preto pre inverznú DFT platí [4]

$$h[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f) e^{2\pi i f n} df. \quad (3.8)$$

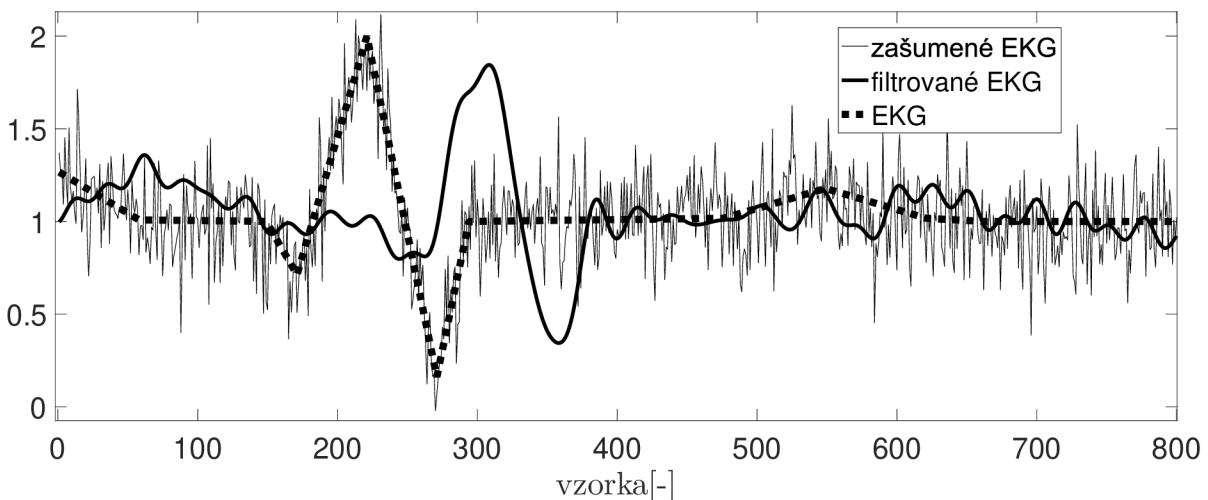
Poznámka. Frekvenčná odozva nadobúda všeobecne komplexné hodnoty, preto ju môžeme vyjadriť v tvare

$$H(f) = G(f) e^{i\Phi(f)},$$

kde $G(f) = |H(f)|$ je *amplitúdový prenos* filteru \mathcal{S}_F a $\Phi(f) = \text{Arg}(H(f))$ je *fázový prenos* filteru \mathcal{S}_F . Vďaka vete o konvolúcii môžeme napísať

$$Y(f) = H(f)X(f) = G(f) |X(f)| e^{i(\Phi(f) + \text{Arg}(X(f)))}.$$

Vidíme, že magnitúdy výstupného frekvenčného spektra dostaneme vynásobením magnitúd pôvodného spektra s amplitúdovým prenosom filteru. Teda amplitúdový prenos nám udáva, ako filter pozmení amplitúdy vstupných frekvencií. Navyše dochádza k fázovému posunu týchto frekvencií o $\Phi(f)$. Tento jav je nežiaduci, o čom sa presvedčíme z nasledujúceho obrázku, kde na vygenerovaný a následne zašumený EKG signál sme použili IIR filter.



Obr. 3.2: Vplyv fázového prenosu.

Aby sme sa tomuto posunu signálu vyhli, musíme použiť filter s nulovým fázovým prenosom. To nie je prakticky možné, preto pristupujeme k filtračnej metóde *forward-backward*. Na vstupný signál $x[n]$ aplikujeme filter, jeho výstup obrátíme, naň použijeme filter druhýkrát a výstup znova obrátíme. Tak dostaneme signál $y[n]$ s nulovým fázovým posunom. Tento proces môžeme matematicky zapísať. Najprv si postupne vyjadríme kroky tejto metódy

$$\begin{aligned}y_1[n] &= h[n] * x[n], \\y_2[n] &= y_1[-n], \\y_3[n] &= h[n] * y_2[n], \\y[n] &= y_3[-n].\end{aligned}$$

Teraz môžeme prehľadne vyjadriť výstupný signál

$$y[n] = h[-n] * y_2[-n] = h[-n] * y_1[n] = h[-n] * (h[n] * x[n]). \quad (3.9)$$

Určíme prenos filtru s obrátenou impulznou odozvou

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(h[-n])(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^m \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m](z^{-1})^{-m} = H(z^{-1}),\end{aligned}$$

kde sme zaviedli substitúciu $m = -n$. Vrátime sa k výsledku (3.9) a vyjadríme výslednú frekvenčnú odozvu tejto filtračnej metódy. S vetou o konvolúcii a komplexne združenej symetrii FT reálnej funkcie dostávame prenos metódy forward-backward

$$H_{FB}(f) = H(f)H(-f) = G(f)e^{i\Phi(f)}G(-f)e^{i\Phi(-f)} = G^2(f).$$

Skutočne, fázový prenos je nulový a navyiac sme zlepšili amplitúdový prenos.

3.2 Návrh základných filtrov

V tejto časti si uvedieme filtre, ktoré v práci využijeme. IIR filtre spomenieme iba okrajovo, pretože algoritmus na výpočet výstupu FIR filtru je omnoho rýchlejší. Práve rýchlosť tohto algoritmu, ktorý zmienime v závere kapitoly, oceníme pri adaptívnej filtrácii.

3.2.1 Frekvenčne priepustné filtre

Často je naším cieľom odstrániť zo signálu určité rozmedzie frekvencií, obzvlášť keď dopredu vieme, že nami pozorovaný jav z nich nepozostáva [4], [20].

Návrh FIR

Ukážeme si návrh FIR filtru s dolnou prepustou. Budeme opäť používať normalizovanú frekvenciu f vzhľadom k vzorkovacej f_s , pre ktorú môžeme bez ujmy na všeobecnosti položiť $f_s = 1$. Požadujeme, aby filter potlačil všetky frekvencie vyššie ako medzná frekvencia f_c , pre ktorú musí s využitím vzorkovacieho teorému platiť

$$f_c \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Ideálna frekvenčná odozva je potom s použitím zápisu (2.3) tvaru

$$H_L(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right). \quad (3.10)$$

Impulznú odozvu vyjadríme zo vzťahu (3.8) využitím Tabuľky 2.1

$$h_L[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_L(f) e^{2\pi i f n} df = 2f_c \cdot \text{sinc}(2\pi n f_c).$$

Po rozpísaní výrazu na pravej strane dostaneme finálny tvar

$$h_L[n] = \frac{\sin(2\pi n f_c)}{\pi n}.$$

Musíme si však dať pozor na hodnotu v $n = 0$, pre ktorú platí

$$h_L[0] = \lim_{n \rightarrow 0} (2f_c \cdot \text{sinc}(2\pi n f_c)) = 2f_c.$$

Aby sme mohli tento filter implementovať v softwaroch, vynásobíme práve nájdenú nekonečne dlhú impulznú odozvu funkciou

$$W_R[n] = \begin{cases} 1 & \text{pre } n \in \langle -N; N \rangle \\ 0 & \text{pre } n \notin \langle -N; N \rangle \end{cases}.$$

Dostávame prakticky použiteľnú odozvu $h'_L[n]$ s $2N + 1$ nenulovými prvkami. V ďalšom kroku filter normalizujeme tak, aby amplitúdová odozva spĺňala

$$G'_L(0) = 1,$$

pretože vynechaním zvyšných hodnôt sme sa od ideálnej odozvy (3.10) značne oddialili. K tomu si stačí pripomenúť DFT pre $f = 0$, kedy sa jedná o sumu všetkých prvkov postupnosti a jednoducho položiť

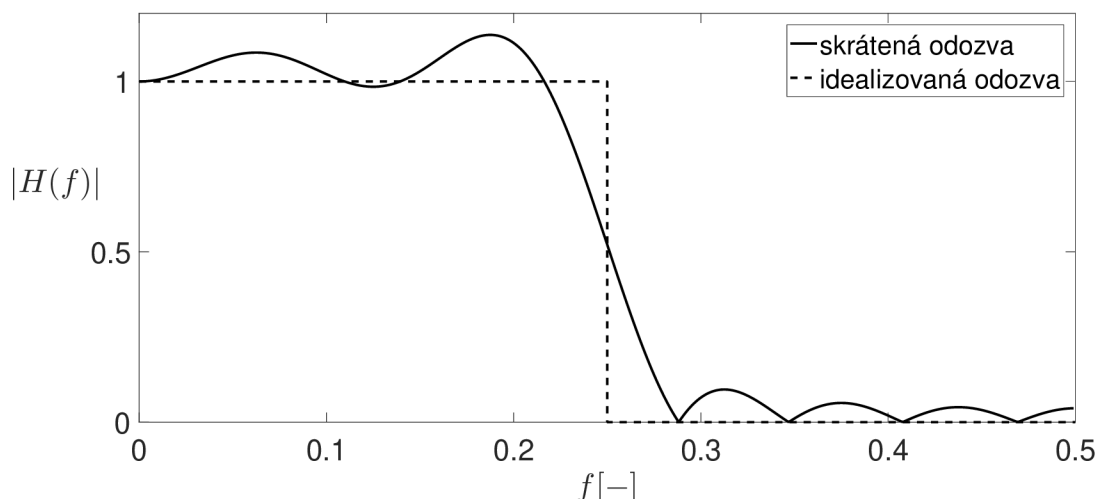
$$h_{NL}[n] = h'_L[n] \left(\sum_{n=-N}^N h'_L[n] \right)^{-1}.$$

Aby bol filter kauzálny, posunieme odozvu o N vzoriek do kladných hodnôt. To, ako veľmi sa týmto návrhom líšime od nášho cieľu, môžeme vidieť na Obr. 3.3.

Jednou z možností ako filter vylepšiť, je použiť veľké N alebo namiesto násobiacej funkcie $W_R[n]$ použiť iné, ktorých príklady je možné nájsť v [20].

Prirodzene môžeme naopak požadovať potlačenie frekvencií nižších ako medzná f_c . Toho docielime tzv. *spektrálnou inverziou* tak, že pre impulznú odozvu filteru s hornou prepustou položíme

$$h_H[n] = \delta[n] - h_L[n]. \quad (3.11)$$



Obr. 3.3: Amplitúdová odozva FIR filtru s dolnou prepustou ($N = 7$, $f_c = \frac{1}{4}$).

Pre frekvenčnú odozvu platí

$$\begin{aligned} H_H(f) &= \mathcal{F}(\delta[n] - h_L[n]) = \mathcal{F}(\delta[n]) - \mathcal{F}(h_L[n]) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-2\pi inf} - H_L(f) = 1 - H_L(f). \end{aligned}$$

Opäť je potrebné z $h_H[n]$ spraviť konečnú postupnosť, normalizovať ju a posunúť do kladných hodnôt.

Kombináciou spektrálnej inverzie a paralelného použitia dolnej a hornej prepusti je možné dosiahnuť filtrov s pásmovou prepustou [22].

Návrh IIR

Podstatou návrhu IIR filtru je získať koeficienty diferenčnej rovnice (3.6). Táto úloha je ekvivalentná so znalosťou pólov a núl. Pre frekvenčne priepustné filtre existujú rôzne kritéria a požiadavky na amplitúdovú odozvu, podľa ktorých sa navrhujú práve póly a nuly filtru. Details je možné nájsť v [17].

3.2.2 Filter s Gaussovým jadrom

Ďalšou z možností návrhu je návrh v časovej oblasti. Konkrétne navrhujeme impulznú odozvu tak, aby každá hodnota výstupného signálu bola váženým priemerom hodnôt zo vstupného signálu. V návaznosti na predchádzajúcu kapitolu budeme navrhovať kauzálny filter s impulznou odozvou dĺžky L . Teda požadujeme

$$\sum_{n=0}^{L-1} h[n] = 1. \quad (3.12)$$

Jednoduchým príkladom je tzv. *moving average* filter, ktorého impulzná odozva má tvar obdĺžniku a definuje sa

$$h_{MA}[n] = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{pre } 0 \leq n \leq L-1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Tento filter má vlastnosti filtru s dolnou prepustou [22]. Z neho môžeme vytvárať ďalšie stupne tak, že za novú impulznú odozvu vezmeme výraz $h_{MA}[n] * h_{MA}[n]$. Táto impulzná odozva má tvar trojuholníku a rýchlejší prechod z prepustených frekvencií k neprepusteným [22]. Ak budeme tento postup opakovať, budeme vytvárať filtre s lepšími vlastnosťami vo frekvenčnej oblasti. Tvar impulznej odozvy sa bude postupne blížiť ku Gaussovej funkcii [22]. Preto rovno navrhujeme filter s impulznou odozvou v tvare

$$h_G[n] = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-L}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} & \text{pre } 0 \leq n \leq 2L, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

kde σ je parameter - rozptyl, ktorý spolu s dĺžkou L volíme. Túto impulznú odozvu na záver normalizujeme pomocou vzťahu

$$h_{NG}[n] = h_G[n] \left(\sum_{n=-N}^N h_G[n] \right)^{-1},$$

aby sme splnili požiadavku (3.12).

3.3 Implementácia filtrov

FIR filter

V prvej časti kapitoly sme odvodili vzťah (3.5), ktorý hovorí, že k získaniu výstupu z filtru nám stačí poznať jeho impulznú odozvu, preto

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Problém je v tom, že zo vstupného signálu $x[n]$ dĺžky N a z impulznej odozvy $h[n]$ dĺžky L obdržíme konvolúciou signál $y[n]$ dĺžky $M = N + L - 1$. Navyše fázový prenos FIR filtru nie je obecné nulový. Pomôžeme si však tým, že pre symetrické impulzné odozvy okolo ľubovoľného bodu (práve také odozvy budeme používať) platí, že ich fázový prenos je lineárny [22]. K jeho vynulovaniu stačí za predpokladu párneho počtu prvkov impulznej odozvy posunúť výstup filtru o $\frac{L}{2}$ vzoriek doľava do záporných hodnôt n . V kombinácii s úlohou skrátiť výstup na požadovanú dĺžku dostaneme jednoduchý návod - vykonať konvolúciu a výstup skrátiť zľava a sprava o $\frac{L}{2}$ hodnôt. V prípade nepárnej dĺžky impulznej odozvy sa stačí rozhodnúť, či uberieme o jednu hodnotu viac vpravo alebo vľavo.

Čelíme však ešte jednému problému. Prvých a posledných $\frac{L}{2}$ prvkov nie je závislých na L prvkoch impulznej odozvy, v tom zmysle, že impulzná odozva je dedefinovaná v záporných n nulami. Tým sa od pôvodného signálu na okrajoch výrazne odchýlime. Tento fakt plynie z definičného vzťahu konvolúcie (1.8). Existuje však jednoduché riešenie. Vstupný signál na oboch koncoch ešte pred konvolúciou predĺžime o L prvkov za predpokladu $N > L$, v opačnom prípade o $N - 1$ prvkov. Toto predĺženie vykonáme buď symetricky, teda signál na oboch koncoch preklopíme, alebo antisymetricky. Pri antisymetrickom predĺžení navyše docielime toho, že výstupný signál sa bude v krajných bodoch zhodovať so vstupným signálom.

Algoritmus konvolúcie môžeme efektívne zrýchliť s využitím vety o konvolúcii. Musíme si však dať pozor na to, že pracujeme s dátami konečnej dĺžky. Keby sme zobrali

DFT vstupného signálu a impulznej odozvy, vynásobili ich a následne vykonali inverznú DFT, obdržali by sme tzv. cirkulárnu konvolúciu [20]. Tomu sa vyhneme tak, že budeme rešpektovať fakt, že konvolúcia nám vstupný signál predĺži. Preto ho aj my najprv spolu s impulznou odozvou rozšírime nulami na dĺžku M a až potom vykonáme postup popísaný vyššie. Pri použití algoritmu FFT výrazne znížime výpočtovú náročnosť.

IIR filter

Pri IIR filtri pristupujeme k diferenčnej rovnici (3.6), ktorú je nutné doplniť príslušnými počiatočnými podmienkami. Jednou z možností je položiť všetky neznáme hodnoty rovno nule, ale vtedy by sme museli znovu riešiť problém, že úvodné hodnoty výstupného signálu sa výrazne líšia od vstupného. Viac o probléme je možné nájsť v [12], [20].

Na záver poznamenajme, že IIR filter sa rozkladá na tzv. *biquady* alebo tiež sekcie, ktoré sa skladajú z maximálne dvoch núl a dvoch pólov, spravidla komplexne združených. Výstupný signál získame tak, že najprv použijeme prvú sekciu (filter), na jej výstup aplikujeme druhú sekciu a takto pokračujeme až do poslednej sekcie.

4 Využitie filtrov pre potreby inverznej úlohy vedenia tepla

4.1 Priama a inverzná úloha vedenia tepla

Problematika vedenia a prestupu tepla, ktorou sa v Laboratoři přestupu tepla a proudění zaoberajú, je popísaná všeobecne parciálnymi diferenciálnymi rovnicami [10], [13]. Pre vedenie tepla v homogénnom telese platí základná rovnica vedenia tepla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T_e}{\partial \tau} \quad (4.1)$$

pre teplotu $T_e(x, y, z, \tau)$ závislú na mieste v telese a čase τ , \dot{q} sú tepelné vnútorné zdroje a κ, ρ a c_p sú vlastnosti charakterizujúce daný materiál, ktoré sú všeobecne závislé na teplote. Aby boli tieto rovnice jednoznačne riešiteľné, je nutné doplniť okrajové a pri neustálenom deji počiatkové podmienky. Počiatkovými podmienkami udávame rozloženie teploty v celom telese na počiatku pozorovaného deja.

$$T_e(x, y, z, 0) = \tilde{T}_e(x, y, z).$$

Okrajovými podmienkami naopak popisujeme stav povrchu uvažovaného telesa v čase. Podmienka prvého druhu, tiež nazývaná *Dirichletova podmienka* reprezentuje situáciu, keď je na povrchu známa teplota.

$$T_e(x_s, y_s, z_s, \tau) = T_{es}(\tau).$$

Okrajová podmienka druhého druhu (*Neumannova podmienka*) odpovedá prípadu, keď poznáme hustotu tepelného toku na povrchu.

$$-\kappa \frac{\partial T_e(x, y, z, \tau)}{\partial \vec{n}} \Big|_{[x, y, z]=[x_s, y_s, z_s]} = \dot{q}_s(\tau).$$

Výrazom $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ rozumieme deriváciu v smere jednotkového vektoru normály plochy [10]. Okrajová podmienka tretieho druhu (*Newtonova podmienka*) vystihuje prítomnosť konvekčného chladenia alebo ohrievania na povrchu.

$$-\kappa \frac{\partial T_e(x, y, z, \tau)}{\partial \vec{n}} \Big|_{[x, y, z]=[x_s, y_s, z_s]} = HTC (T_{eo}(\tau) - T_{es}(\tau)),$$

kde $T_{eo}(\tau)$ je teplota okolitého média a HTC je súčiniteľ prestupu tepla (z anglického Heat Transfer Coefficient).

Priamou úlohou vedenia tepla rozumieme určiť vývoj teploty v telese pri známych materiálových vlastnostiach, počiatkových a okrajových podmienkach. V takom prípade sa jedná o numerické riešenie diferenciálnej rovnice (4.1) vhodnou numerickou metódou [18], [25]. Povrch však nie je vhodné miesto na umiestnenie termočlánku, pretože jeho vplyvom dochádza k deformácii teplotného poľa [19]. Preto ich umiestňujeme pod povrch materiálu [24].

Prípád, kedy chceme naopak určiť počiatkové a okrajové podmienky, prípadne materiálové vlastnosti, nazývame *inverzná úloha vedenia tepla*. Typickou aplikáciou je stanovenie okrajových podmienok zo známych materiálových vlastností, počiatkovej teploty a časového priebehu teploty v niekoľkých vnútorných bodoch telesa. Táto úloha je oveľa náročnejšia na riešenie než priama. Existuje mnoho metód riešenia, z ktorých mnohé sú navrhnuté pre špeciálne typy okrajových podmienok [11], [15]. Zmienime hlavne sekvenčnú metódu, ktorá postupne počíta hustoty tepelných tokov v čase τ_m [3]. Namerané teploty $T_{ej}^{*,m}$ sa porovnávajú s teplotami T_{el}^k získanými z priamej úlohy využívajúcej n_f dopredných časových krokov. Minimalizuje sa pritom výraz [19]

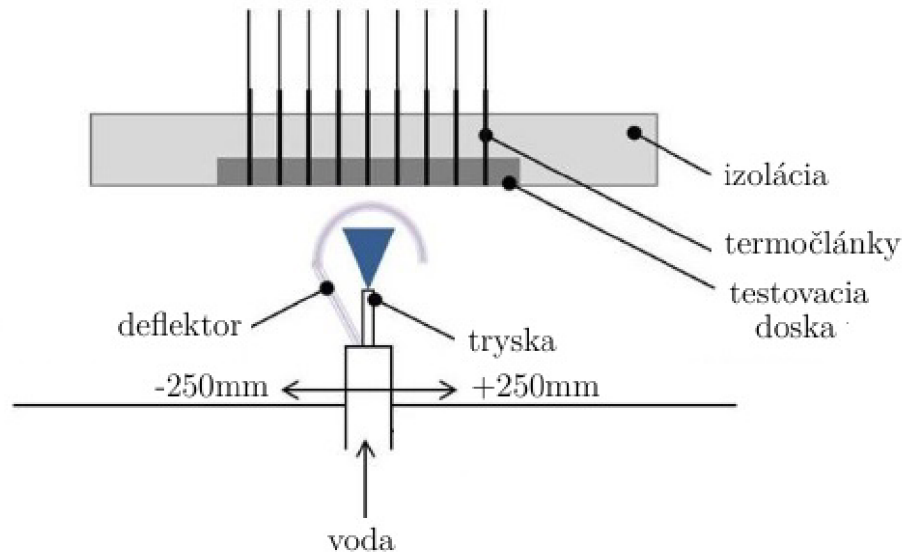
$$SSE = \sum_{k=m+1}^{m+n_f} \sum_{l \equiv j, j=1}^{n_T} \left(T_{ej}^{*,k} - T_{el}^k \right)^2 .$$

Inverzná úloha je navyše zle podmienená. To znamená, že jej riešenie je veľmi citlivé na zmeny vstupných hodnôt (teplôt) [8]. Preto má zmysel zaujímať sa o to, aby namerané teploty neobsahovali zložky šumu. Je však nutné dávať pozor na to, aby sme filtráciou týchto dát neodstránili okrem šumu aj podstatné informácie o priebehu chladenia. Tým by sme dostali výsledky, ktoré sa značne odlišujú od skutočných okrajových podmienok. Najvhodnejším prístupom k problému je navrhnúť adaptívny filter, ktorý odlišné oblasti zo záznamu teploty odfiltruje odlišným spôsobom.

4.2 Návrh adaptívneho filteru

4.2.1 Teplotné meranie

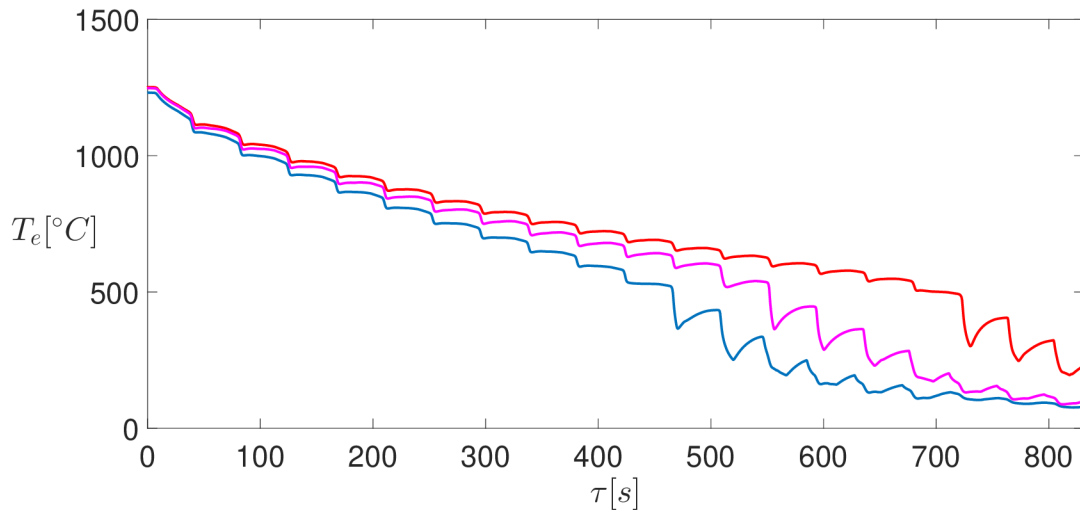
Jednou z oblastí, ktorej sa Laboratoř prestupu tepla a proudění venuje, je kontinuálne liatie, ktoré patrí k najefektívnejším metódam spracovania oceli, hliníku a iných kovov. Experimenty a inverzné výpočty slúžia k určeniu vplyvu parametrov sprchového chladenia



Obr. 4.1: Schéma experimentu [21].

na súčiniteľ prestupu tepla. Experimentálne zariadenie („stand“) je navrhnuté tak, aby simulovalo chladenie pri vysokých počiatočných teplotách. Hlavnou súčasťou zariadenia je oceľová testovacia doska, ktorá má pod povrchom zabudované termočlánky (Obr. 4.1).

Doska je pevne uchytená a pod ňou sa pohybuje vodná tryska, prípadne sada trysiek, ktoré sú zakryté deflektorom. Po nahriatí dosky na požadovanú počiatočnú teplotu sa deflektor otvára a tryska sa postupne posúva pod doskou a chladí jej povrch. Naspäť ide s uzavreným deflektorom. Tryska pod doskou prechádza tam a späť tak dlho, dokým sa doska neschladí pod požadovanú teplotu [21].



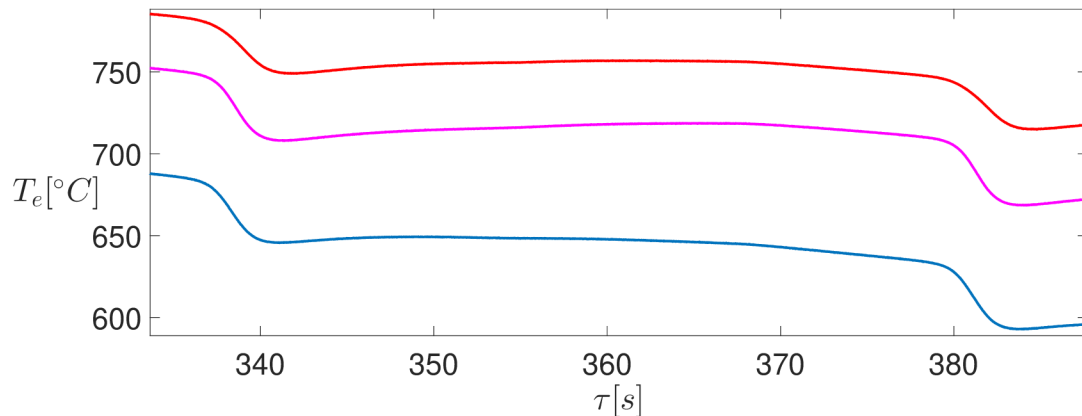
Obr. 4.2: Typický priebeh teplôt pre rôzne umiestnenie termočlánkov.

4.2.2 Algoritmus adaptívnej filtrácie

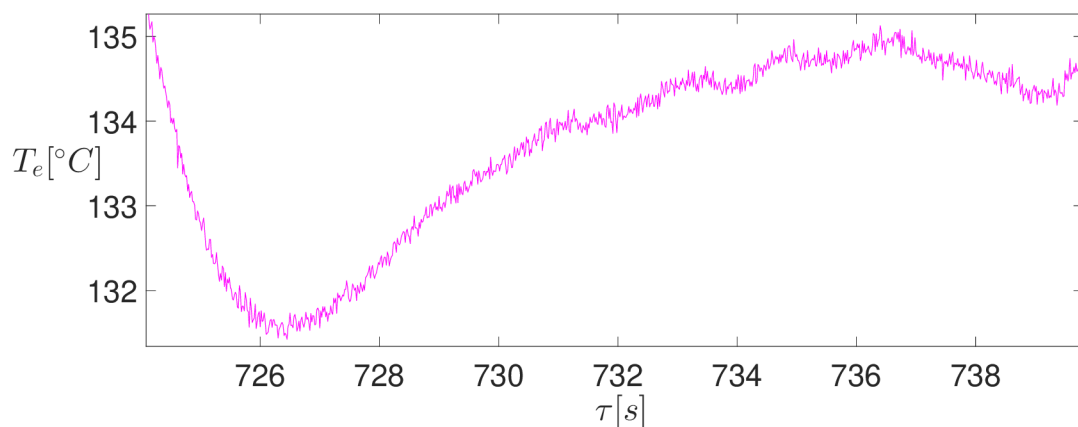
Na vzorových dátach z experimentu, počas ktorého sa teploty zaznamenávali sadou osemnástich termočlánkov vzorkovacou frekvenciou 60Hz navrhujeme a otestujeme adaptívny filter. V ďalšom texte pri popise algoritmu navrhovaného filteru častokrát použijeme pre mnohé hodnoty výrazy typu *veľký*, *malý*, *určitý*, *nejaký*. Jedná sa o naznačenie myšlienky, konkrétne hodnoty nastavujeme ako parametre funkcie. Pred samotným začiatkom však zanalyzujeme samotný záznam teploty.

Na Obr. 4.2 sú vybrané záznamy troch termočlánkov. Na prvý pohľad môžeme identifikovať dva režimy teplotných priebehov. Rozlišujeme oblasť prechodu trysky priamo pod miestom s termočlánkom, kedy nastáva najväčší pokles teploty a oblasť zatvoreného deflektoru, vtedy doska stabilizuje svoju teplotu. Oblasti stabilizácie sú nízkofrekvenčné v porovnaní s prudkým poklesom teploty. Pre ne je vhodné použiť filter s dolnou prepustou. Pri prudkej zmene teploty stačí voľiť dolnú prepust' s vyššou prechodovou frekvenciou, čo je vidieť v ľavej časti Obr. 4.4, kde šum je oproti zvyšnej časti oveľa menší. Cieľom je naučiť adaptívny filter rozpoznať tieto oblasti a použiť na ne filter s rozdielnou dolnou prepustou. Musíme sa však ešte rozhodnúť, aký typ filteru budeme uvažovať. Z tých, ktoré sme spomenuli v podkapitole 3.2, zvolíme Gaussovo jadro, pretože pri zviazaní rozptylu σ a dĺžky impulznej odozvy L stačí meniť iba jeden parameter. Budeme voľiť práve L a pre rozptyl položíme

$$\sigma = \frac{2L + 1}{6}.$$



Obr. 4.3: Detail medzi dvoma prechodmi trysky.



Obr. 4.4: Prítomnosť šumu.

Táto hodnota je určená empiricky podľa tvaru impulznej odozvy. Stanovíme si minimálnu a maximálnu šírku Gaussovho jadra G_{min} a G_{max} , medzi ktorými vyberieme ideálnu šírku pre danú oblasť. Za kritérium rozdeľovania oblastí zvolíme normalizovanú diferenciu $NDT_e[n]$, ktorú určíme vzťahom

$$NDT_e[n] = \frac{|DT_e[n]|}{\max_n \{|DT_e[n]|\}},$$

kde $DT_e[n]$ je dopredná diferencia teploty v zázname n daná výrazom

$$DT_e[n] = T_e[n + 1] - T_e[n].$$

Normalizovanú diferenciu očiachujeme tak, že zvolíme spodnú hranicu ε a krok ε_c z otvoreného intervalu $(0, 1)$. Vytvoríme množinu hodnôt

$$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l\} = \{0, \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon_c, \varepsilon + 2\varepsilon_c, \dots, 1\}.$$

Pomocou tejto množiny určíme množinu indexov $\mathcal{H}_n = \{n_0, n_1, \dots, n_m\}$, v ktorých prejdeme do nového intervalu normalizovanej diferencie. Vykonáme to nasledovne. Prepokladajme, že pre aktuálnu vzorku \tilde{n} platí

$$NDT_e[\tilde{n}] \in \mathcal{K} = \langle \xi_r, \xi_{r+1} \rangle, \quad r \in \{0, \dots, l - 1\}$$

Prehľadávame ďalšie vzorky a keď narazíme na \hat{n} takú, že

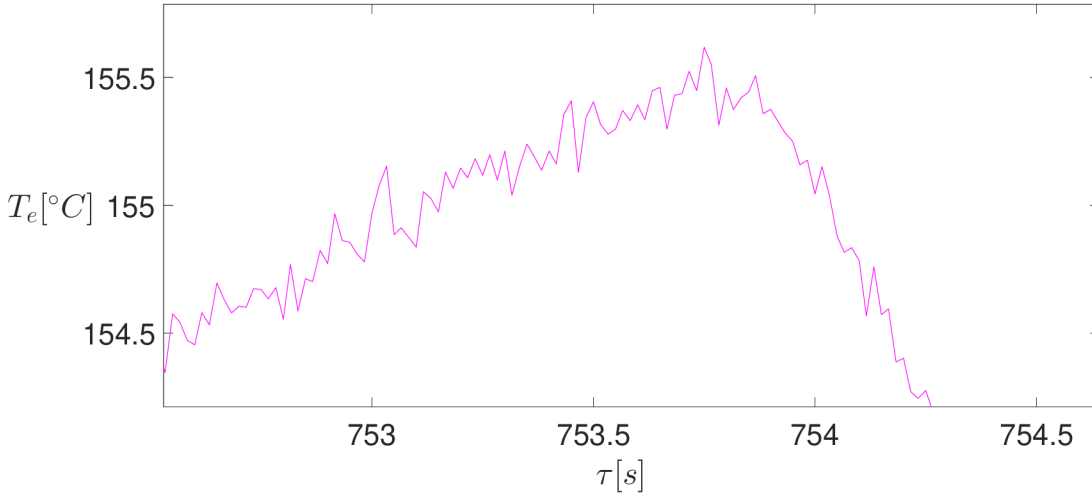
$$NDT_e[\hat{n}] \notin \langle \xi_r, \xi_{r+1} \rangle,$$

pridáme ju do množiny \mathcal{H}_n . Za nový kontrolný interval vezmeme

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \langle \xi_{r+1}, \xi_{r+2} \rangle & \text{ak } NDT_e[\hat{n}] > \xi_{r+1} \\ \langle \xi_{r-1}, \xi_r \rangle & \text{ak } NDT_e[\hat{n}] < \xi_r \end{cases}$$

a pokračujeme hľadaním indexu, v ktorom normalizovaná diferenciacia nepatrí do nového kontrolného intervalu. Medzi nájdené body pridáme ešte výrazné lokálne extrém, v ktorých je normalizovaná diferenciacia nižšia ako predom určená hodnota a v zvolenom okolí bodu prekročí priemerná normalizovaná diferenciacia hraničnú hodnotu. V týchto bodoch by sa teplota vplyvom použitia väčšieho Gaussovho okna vychýlila od skutočnej. Jedná sa hlavne o prípady podobné Obr. 4.5. Keďže tento spôsob hľadania bodov nám nezaručí, že nájdem presne tie najkritickejšie, pridáme k týmto bodom aj určitý počet ich blízkych susedov v určitej vzdialenosti. Množinu \mathcal{H}_n upravíme tak, aby platilo

$$\min_k \{n_k - n_{k-1} : n_k, n_{k-1} \in \mathcal{H}_n, k = 1, \dots, m\} > 2G_{min} + 1.$$



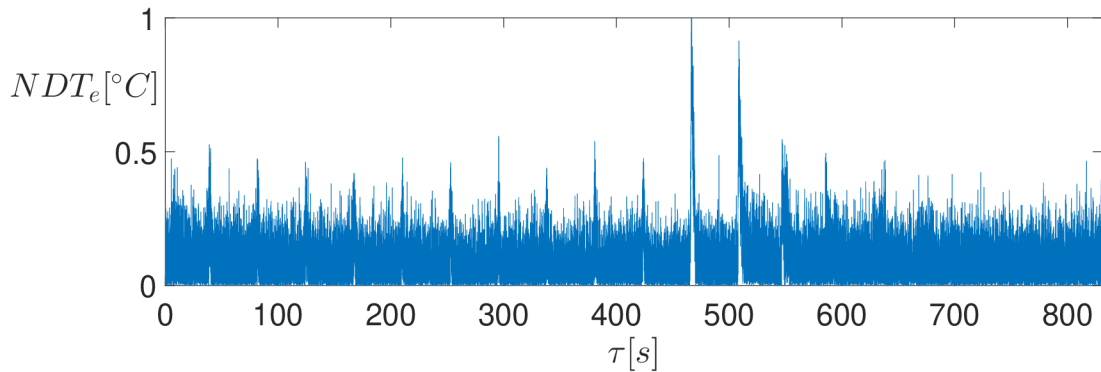
Obr. 4.5: Výrazný lokálny extrém.

Teraz stanovíme šírku Gaussovho okna \mathcal{G}_k pre jednotlivé oblasti určené indexmi z množiny \mathcal{H}_n doplnenej nulou a celkovým počtom vzoriek zo záznamu teploty. Určíme ju zo vzťahu

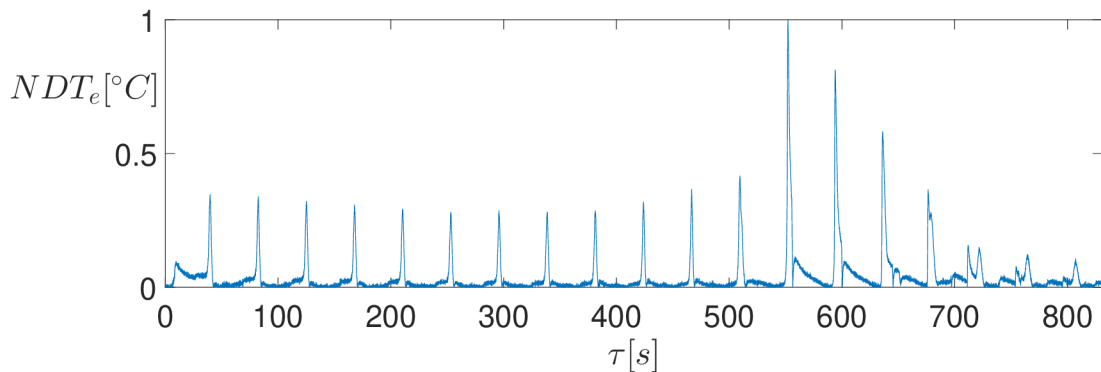
$$\mathcal{G}_k = G_{max} + (G_{min} - G_{max}) NDT_{ek} \quad k = 1, \dots, m + 2,$$

kde NDT_{ek} je priemerná hodnota normalizovanej diferencie v k -tej oblasti. Je zrejmé, že tam, kde je priemerná diferenciacia veľká, sa použije menšie Gaussove jadro. Naopak pri malých zmenách teploty sa použije väčšie.

Z uvedeného postupu je na prvý pohľad zrejmé, že jeho efektivita závisí na tom, ako sa diferencie zhodujú s tými skutočnými neznámymi. Na Obr. 4.6 vidíme, že vďaka výraznému šumu nie sme poriadne schopní rozlíšiť oblasti s vysokým teplotným gradientom.



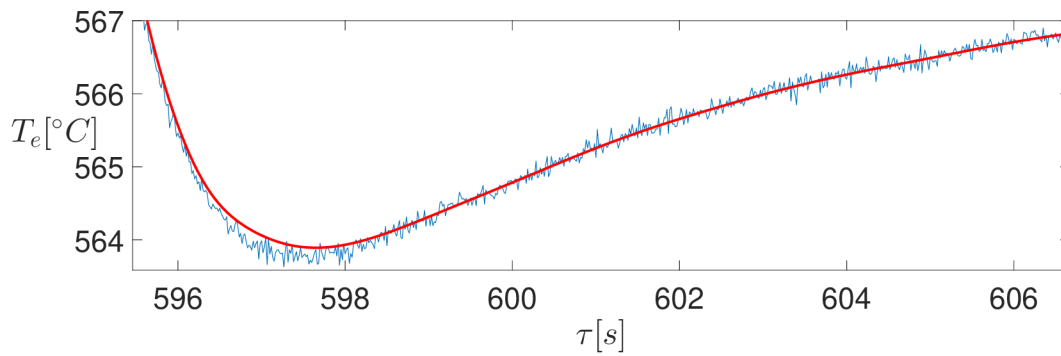
Obr. 4.6: Normalizovaná diferencia pôvodného záznamu teploty.



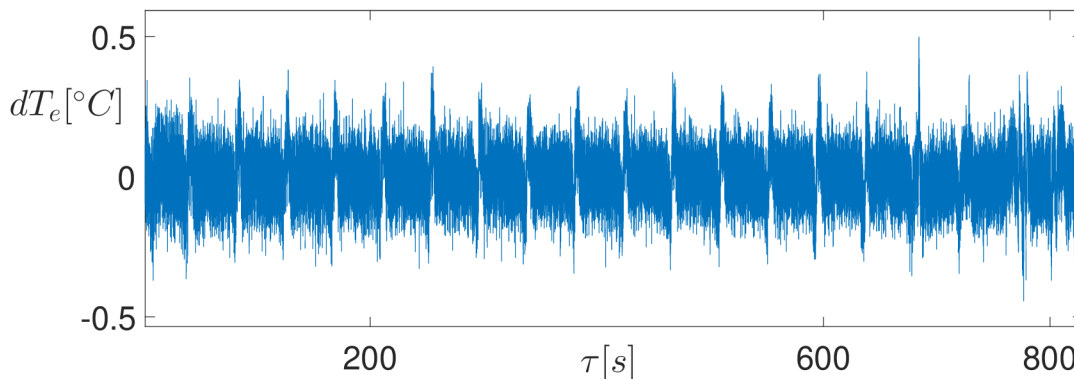
Obr. 4.7: Normalizovaná diferencia po filtrácii pôvodnej teploty malým Gaussovým oknom ($L = 10$).

Ponúka sa viacero možností ako tento problém obísť. Mohli by sme z pôvodných hodnôt zobrať napríklad iba každú dvadsiatu a z toho spraviť diferenciu. Aj keby sme si tým pomohli, nedosiahneme takej presnosti. Oveľa elegantnejším riešením je najprv použiť malé Gaussovo jadro, z toho spraviť diferencie (Obr. 4.7) a tie použiť ako odhad. Po aplikovaní algoritmu zostanú ostré prechody v bodoch \mathcal{H}_n , pretože sa tam stretávajú dve rôzne filtrácie. Ako možná náprava sa javí interpolácia v úzkom okolí týchto bodov napríklad Hermitovým interpolačným polynómom tretieho stupňa, čím by sme zaistili „spojitosť derivácie“. Tá však nie je zrovna najvhodnejšia. Nemáme zaručené, že v kritických miestach nedôjde k napojeniu častou kubickej paraboly s prítomným sedlovým bodom. Navyše pri výpočte koeficientov polynómu vznikajú zle podmienené matice. Z týchto dôvodov od tejto myšlienky opustíme a namiesto toho použijeme znova celý postup. Aplikujeme ho na teploty, ktoré sme dostali po prvom kroku filtrácie, pričom za normalizované diferencie použijeme odhad po filtrácii pôvodnej teploty Gaussovým oknom. Je málo pravdepodobné, že by sme v kludných oblastiach našli kritické body \mathcal{H}_n blízke tým z predchádzajúceho kroku. Preto dôjde k zahľadaniu týchto miest a odstráneniu skokového prechodu medzi filtráciami z prvého kroku. Týmto však naša cesta za perfektným adaptívnym filtrom nekončí. Musíme opraviť miesta, v ktorých sa výrazne odlišujeme od skutočnej teploty (Obr. 4.8).

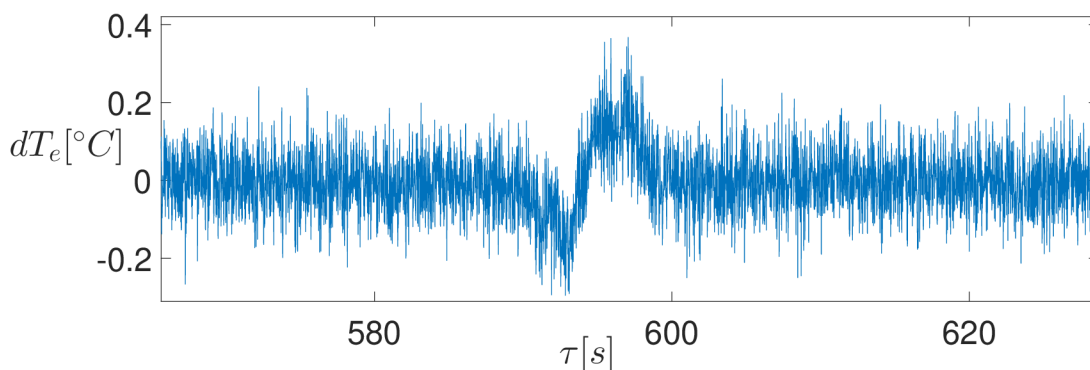
Opravu vykonáme v niekoľkých krokoch. Vyjdeme z myšlienky priblíženia sa k nameraným teplotám. Aktuálne hodnoty odčítame od pôvodných, tým dostaneme údaje $dT_e[n]$. Po dokonalej filtrácii by sme na Obr. 4.9 videli čistý šum rovnomerne rozdelený okolo nulovej hodnoty. Myšlienka spočíva v tom, že od aktuálneho signálu späť odčítame nami



Obr. 4.8: Odchýlenie od pôvodnej teploty.

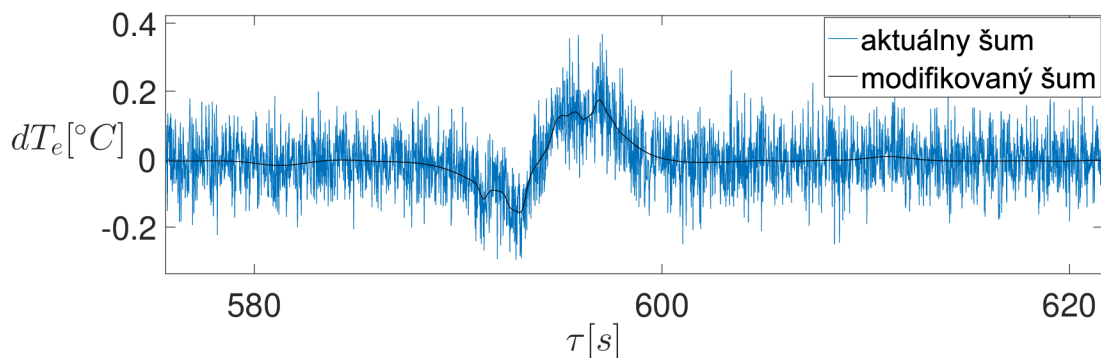


Obr. 4.9: Rozdiel aktuálnych teplôt od pôvodných.

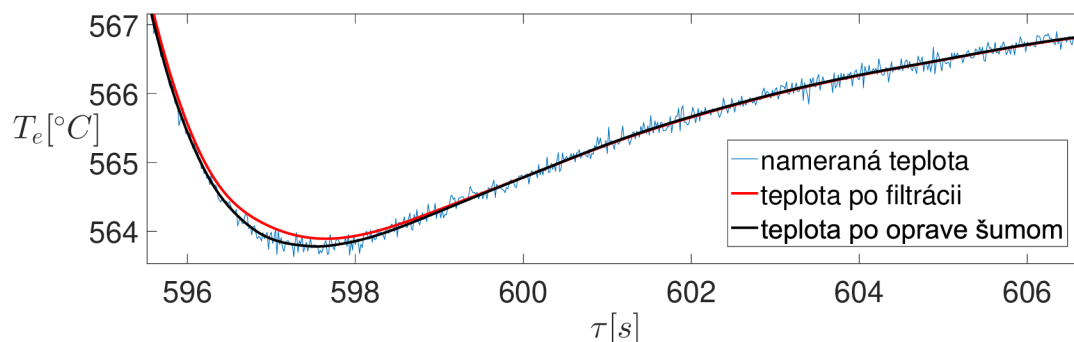


Obr. 4.10: Rozdiel aktuálnych teplôt od pôvodných - detail.

modifikovaný šum $d\tilde{T}_e[n]$. Aktuálny šum $dT_e[n]$ najprv vyfiltrujeme malým Gaussovým jadrom a dostaneme prvú modifikáciu $d\tilde{T}_e^1[n]$. Zistíme indexy, v ktorých je hodnota väčšia než rozptyl a tie uchováme. Tieto indexy zachytávajú práve tie oblasti, kde musíme vykonať veľkú opravu. Ďalej veľkým Gaussovým oknom upravíme $dT_e[n]$ a hodnoty v indexoch nájdených z prvého modifikovaného šumu nahradíme hodnotami $d\tilde{T}_e^1[n]$. Dostávame tak druhý modifikovaný šum $d\tilde{T}_e^2[n]$, na ktorý použijeme opäť malé Gaussovo jadro, aby sme rozdelené oblasti medzi sebou plynule naviazali. Tým obdržíme finálny modifikovaný šum $d\tilde{T}_e[n]$ (Obr. 4.11). Na Obr. 4.12 je vidno, čoho sme dosiahli. V miestach, kde sme sa výrazne líšili od skutočnosti, nastalo veľké zlepšenie. Naopak oblasti, kde by oprava bola zbytočná, ostali takmer rovnaké. Tento postup je vhodné, ba priam žiadané, aplikovať



Obr. 4.11: Úprava aktuálneho šumu.



Obr. 4.12: Teplota po odčítaní upraveného šumu $d\tilde{T}_e[n]$.

niekoľkokrát, pretože na rozličných miestach je veľkosť chyby rozdielna a nie je možné opraviť všetky miesta naraz v jednom modifikačnom kroku.

4.2.2.1 Zhrnutie navrhnutého algoritmu

Algoritmus používa dva hlavné kroky.

- Na základe normalizovanej diferencie určiť *oblasti* s rozdielnym gradientom teploty. Pre každú z *nich* spočítať šírku Gaussovho okna a vykonať filtráciu.
- Odčítať *nový* signál od pôvodného a vyhladiť ho malým Gaussovým jadrom. Zaznamenať body, ktoré sú výrazne vzdialené od strednej hodnoty a použiť veľké okno. Zachytené body vložiť naspäť do vyhladeného signálu, zahladiť skokové zmeny a odčítať od *nového* signálu.

Kroky sú závislé na vstupných parametroch:

- minimálna a maximálna šírka Gaussovho okna,
- odhad diferencie,
- číselné kritéria na posúdenie výrazných lokálnych extrémov,
- veľkosti okien použitých pri úprave šumu,
- parameter na posúdenie veľkých odchýliek šumu.

Kroky sa viackrát opakujú s rôznymi parametrami, pretože iba jednou úpravou sa všetky kritické miesta neopravia.

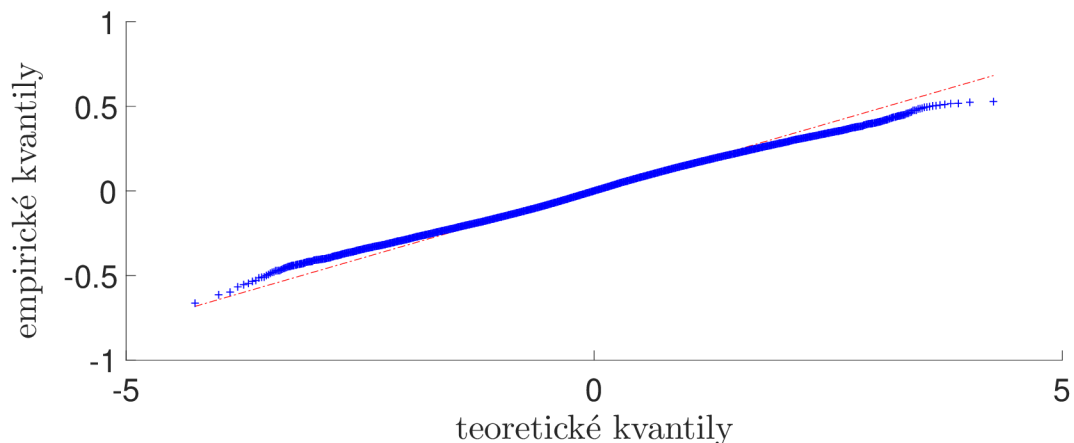
4.2.3 Analýza výsledkov adaptívnej filtrácie na vzorových dátach

Navrhnutý adaptívny filter otestujeme na experimentálnych dátach pozostávajúcich z osemnástich záznamov teplôt. K posúdeniu kvality využijeme toho, že po ideálnej filtrácii by sme mali obdržať dokonalý šum. Teda náhodnú premennú, ktorá má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou. Na overenie nám poslúžia štatistické testy. Najprv graficky overíme, či sa jedná o normálne rozdelenie tzv. *Q-Q grafom*, ktorý porovnáva kvantily teoretického normálneho rozdelenia s kvantilmi skúmaného súboru [2]. Pokiaľ naše dáta odpovedajú normálnemu rozdeleniu, potom ležia body v Q-Q grafe na ose prvého kvadrantu. Ak tomuto naše dáta vyhovujú, môžeme vykonať *t-test*, ktorý testuje hypotézu, že súbor má nulovú strednú hodnotu [1]. Predpokladá, že dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia, preto sa musíme najprv pozrieť na Q-Q graf. Výstupom t-testu je tzv. *p-hodnota*, ktorá udáva pravdepodobnosť, že zamietneme platnú hypotézu. Pokiaľ neprekročí tzv. *hladinu významnosti* (rádovo v desatinách), hypotézu zamietneme.

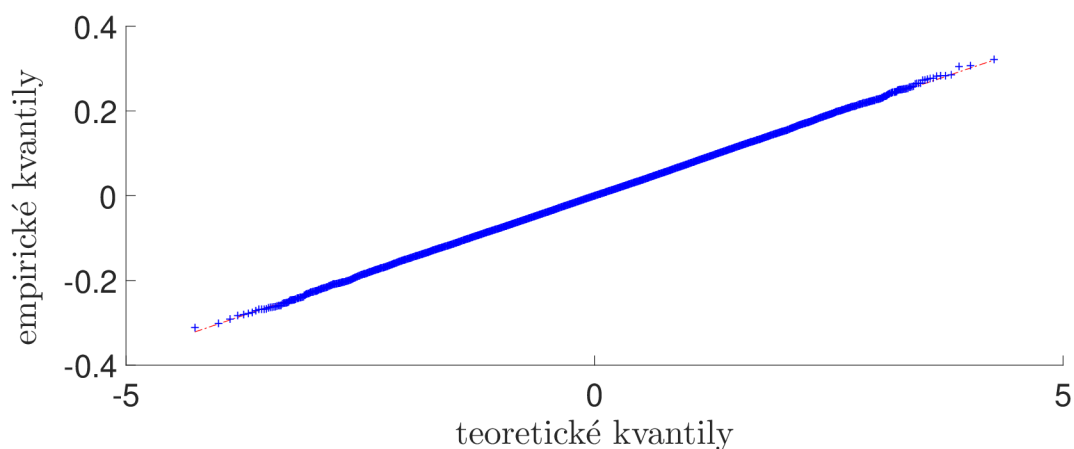
Druhou alternatívou je *chí-kvadrát test dobrej zhody* [5], ktorým otestujeme, či má daný súbor normálne rozdelenie so zadanými parametrami. Tými je v našom prípade nulová stredná hodnota a rozptyl, ktorý určíme z nášho súboru. Výsledky oboch hypotéz sú uvedené v Tabuľke 4.1. Vidíme, že sedemnásty termočlánok neprešiel chí-kvadrát testom, preto si ho bližšie zanalyzujeme. Najprv sa pozrieme na Q-Q graf jeho šumu (Obr. 4.13). Je očividné, že nesplňuje predpoklady normality vďaka značnej odchýlke od osi kvadrantu v krajných oblastiach. Preto nemôžeme predpokladať normalitu a výsledok t-testu nesmieme použiť. U ostatných termočlánkov chí-kvadrát test nezamietol hypotézu o ideálnom šume (p-hodnoty nie sú rádovo menšie ako desatina). Príklad „úspešného“ Q-Q grafu vidíme na Obr. 4.14. K zisteniu príčiny zamietnutia sedemnásteho termočlánku sa pozrieme na jeho šum (Obr. 4.15). Badáme výrazné nepravidelnosti, ktoré sú spôsobené prítomnosťou rušivého signálu z elektrickej siete. O tomto fakte svedčí jeho DFT (Obr. 4.16, zvislá osa je v decibelových súradniciach), kde vidíme veľké amplitúdy pri frekvencii 10Hz. Hodnota odpovedá skutočným 50Hz (vzorkovací teorém 2.7 nie je

termočlánok	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p-hodnota chí-kvadrát	0,358	0,931	0,506	0,037	0,171	0,0916	0,044	0,049	0,227
p-hodnota t-test	0,972	0,937	0,758	0,588	0,612	0,784	0,719	0,862	0,691
termočlánok	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p-hodnota chí-kvadrát	0,026	0,102	0,372	0,087	0,150	0,228	0,583	$4 \cdot 10^{-51}$	0,175
p-hodnota t-test	0,792	0,255	0,358	0,884	0,756	0,611	0,595	0,751	0,525

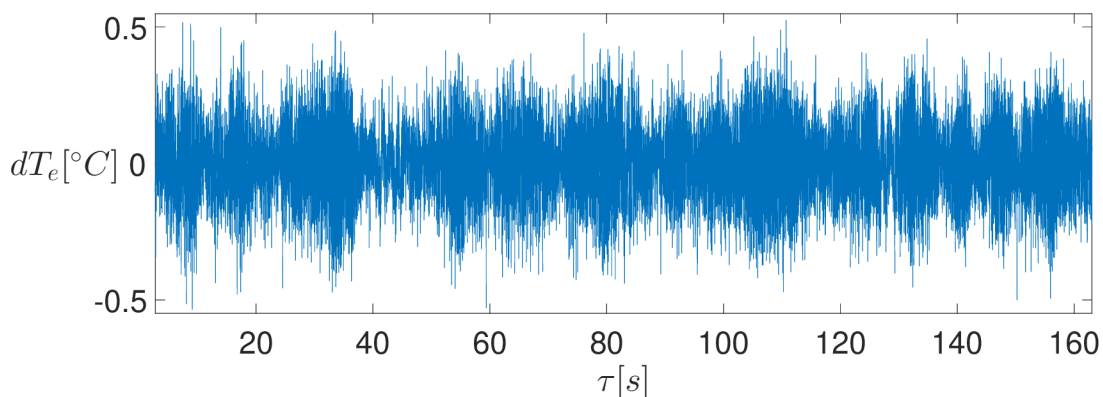
Tabuľka 4.1: P-hodnoty pre dve rôzne štatistické hypotézy.



Obr. 4.13: Q-Q graf výsledného šumu 17. termočlánku.



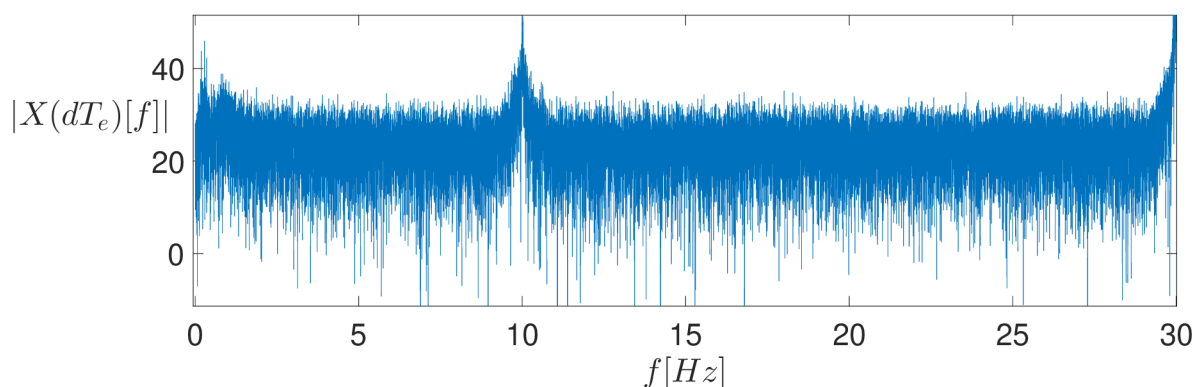
Obr. 4.14: Q-Q graf výsledného šumu 3. termočlánku.



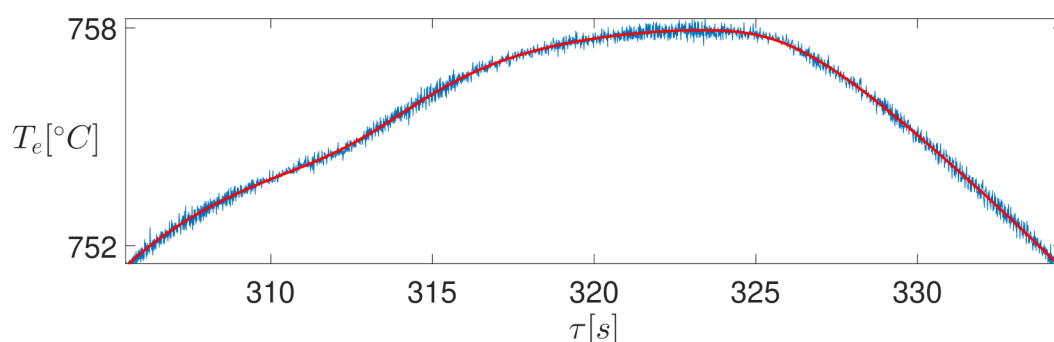
Obr. 4.15: Výsledný šum 17. termočlánku - detail.

splnený). Vďaka prítomnosti tohto ruchu neprešla štatistická hypotéza, no nič nám to nepovie o kvalite filtrácie, ktorá je uspokojivá (Obr. 4.17).

Nemáme teda žiadne jednoznačné kritérium, ktoré by nám napríklad pomocou nejakého čísla rozhodlo o kvalite adaptívneho filtru. Vidíme, že akákoľvek prítomnosť ďalšieho rušivého signálu spôsobí, že zamietneme štatistické hypotézy ohľadom dokonalosti výsledného šumu.



Obr. 4.16: Diskrétna Fourierova transformácia výsledného šumu 17. termočlánku.



Obr. 4.17: Filtrácia teploty 17. termočlánku - detail.

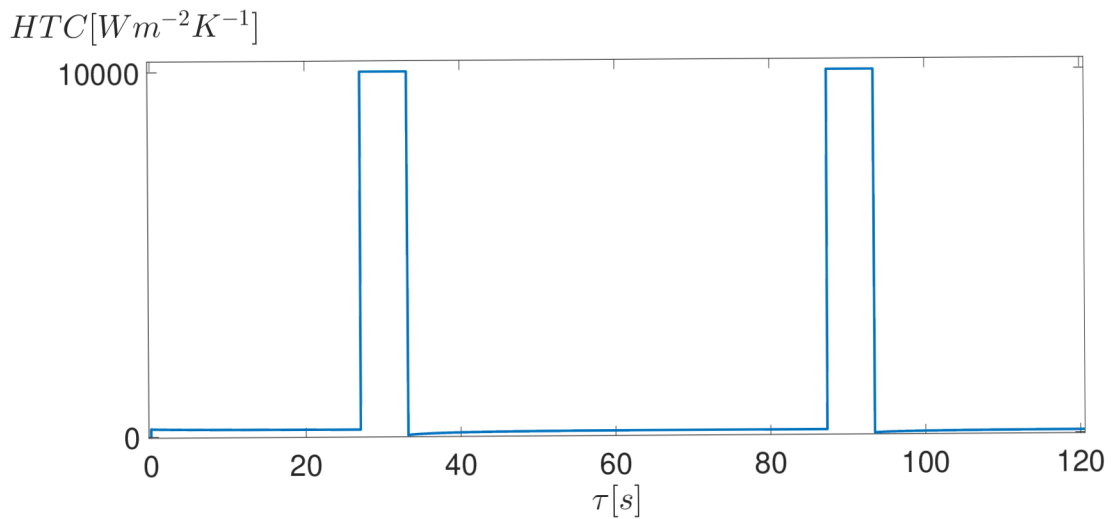
4.3 Porovnanie filtrov pomocou inverznej úlohy

V predchádzajúcej kapitole sme navrhli adaptívny filter, ktorý dokázal z experimentálnych dát oddeliť šum od teploty. Tieto dáta môžu byť použité do inverznej úlohy na určenie okrajových podmienok v priebehu experimentu. Problém je však v tom, že ich nemáme s čím porovnať, pretože tie skutočné podmienky nepoznáme. Pomôžeme si však softwarom ANSYS, v ktorom nasimulujeme chladenie s nami zadanými okrajovými podmienkami. Priebeh chladenia následne zašumíme a naň aplikujeme náš adaptívny filter. Výsledok použijeme do inverznej úlohy a jej výstup porovnáme so zadanými okrajovými podmienkami.

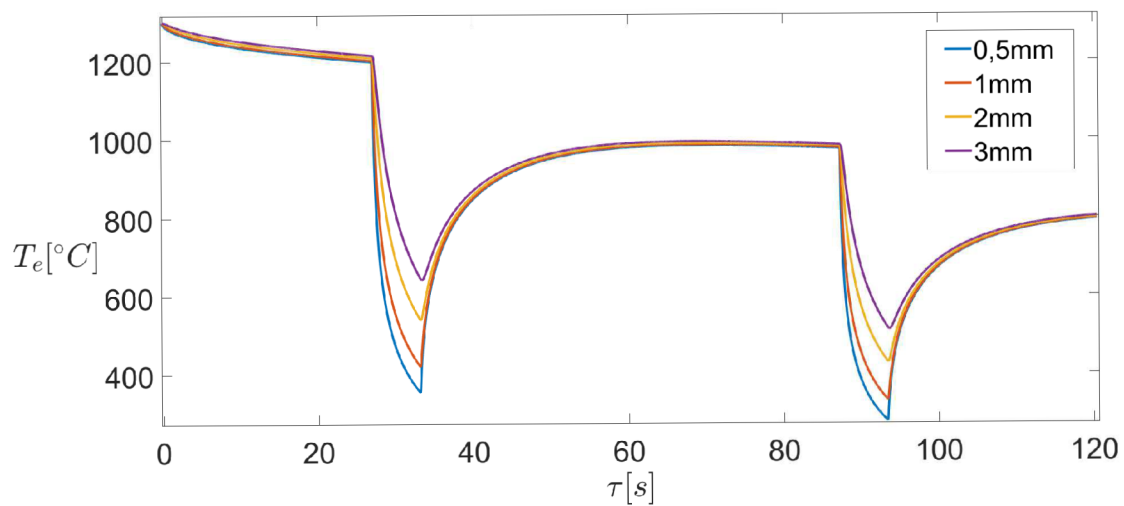
4.3.1 Simulácia chladenia

Zo zadaných okrajových a počiatočných podmienok, vlastností a geometrie chladeného materiálu program spočíta priebeh teploty v celom telese. Súčiniteľ prestupu tepla HTC je zadaný v tvare dvoch obdĺžnikových pulzov (Obr. 4.18).

Vyberieme štyri body pod povrchom a to konkrétne vo vzdialenosti 0,5, 1, 2 a 3 milimetre. Údaje o týchto teplotách (Obr. 4.19) zašumíme tak, že v každom bode pripočítame náhodne vygenerované číslo z intervalu $\langle -0,5; 0,5 \rangle$. Tento šum je dvakrát silnejší než ten, ktorý sme analyzovali v podkapitole 4.2.3. Náhodné čísla generujeme vstavanou matlabskou funkciou *rand*, ktoré však nepochádzajú z normálneho rozdelenia. Volíme ich tak zámerne preto, aby jedinou možnosťou na analýzu výsledku bola práve zhoda, prípadne nezahoda so skutočnými okrajovými podmienkami. Okrajová podmienka je zadaná tak,

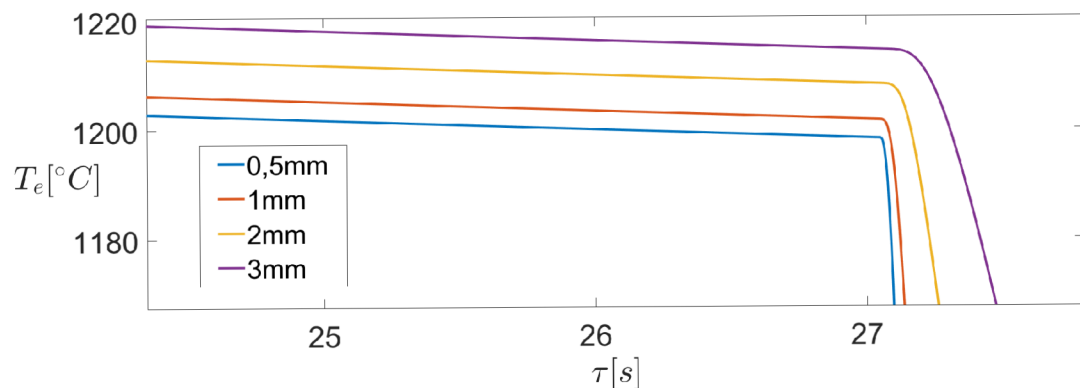


Obr. 4.18: Simulácia - súčiniteľ prestupu tepla.

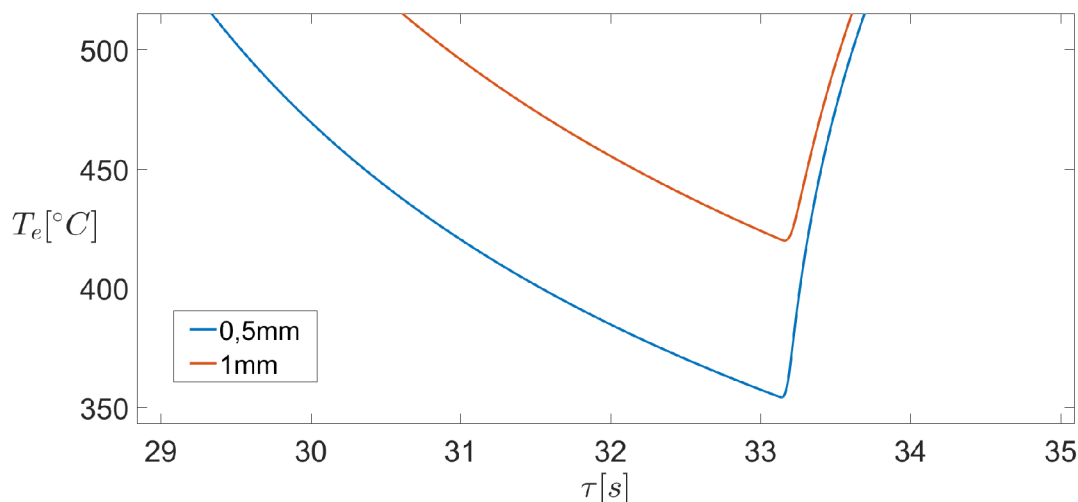


Obr. 4.19: Simulácia - záznamy teplôt.

aby pri každom prechode nastala extrémne prudká zmena teploty (Obr. 4.20) a tak isto prudký nárast po odľahčení (Obr. 4.21). Toho docielime práve obdĺžnikovými pulzmi. Medzi nimi je teplotne závislá radiácia do okolia.



Obr. 4.20: Simulácia - prudká zmena teploty.



Obr. 4.21: Simulácia - začiatok stabilizácie teploty.

4.3.2 Porovnanie vybraných filtrov

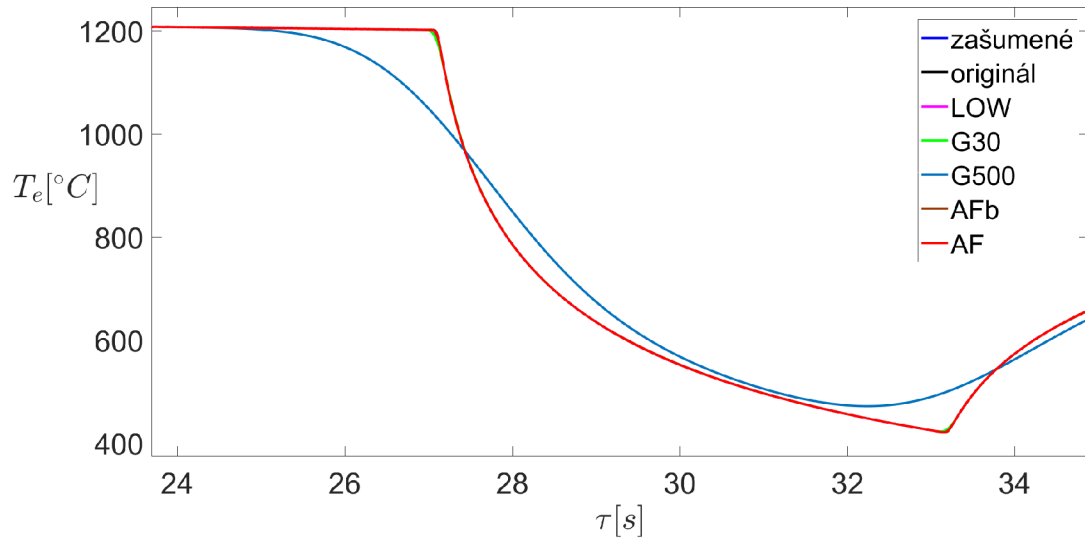
V tejto časti na zašumenú simuláciu aplikujeme nami navrhnutý adaptívny filter. K nemu pridáme aj dva filtre s rôzne veľkými Gaussovými jadrami, jeden s dolnou prepustou navrhnutý podľa kapitoly 3.2.1 a adaptívny filter, ktorý nepoužíva opravu modifikáciou šumu. Rozlíšime ich značením podľa Tabuľky 4.2.

značenie	filter	parametre
G30	Gaussovo jadro (malé)	$L = 30$
G500	Gaussovo jadro (veľké)	$L = 500$
LOW	dolná prepust'	$N = 40, F_c = 1\text{Hz}$
AF	adaptívny filter	
AFb	adaptívny filter bez opravy šumom	

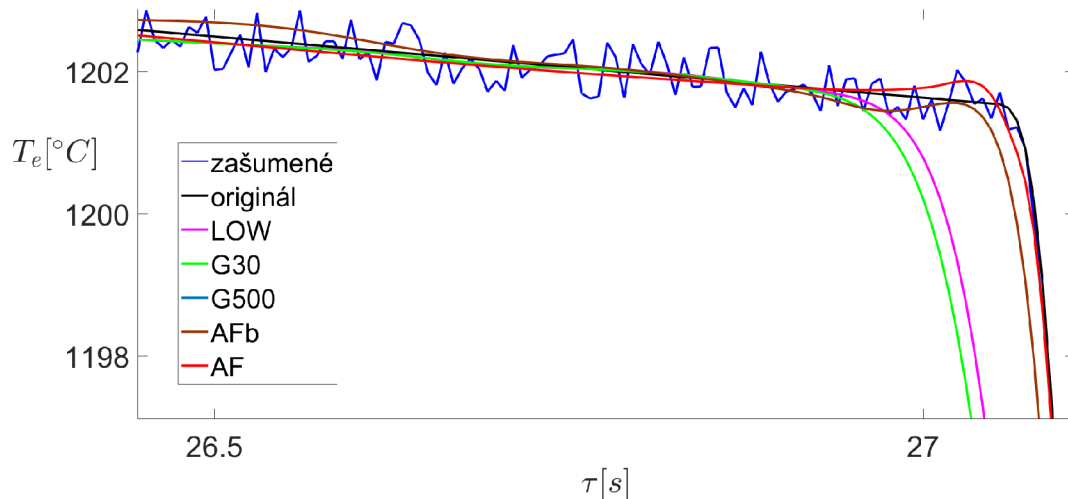
Tabuľka 4.2: Zoznam vybraných filtrov.

4.3.2.1 Porovnanie teplotných kriviek

Než sa pustíme do porovnávania získaných okrajových podmienok, pozrieme sa na to, ako si jednotlivé filtre poradili s ostrými zmenami teplôt. Práve v týchto miestach chceme, aby sme čo najvernejšie kopírovali pôvodnú teplotu. Akékoľvek vychýlenie vyhodnotí inverzná úloha ako začiatok pulzu. Zámerne sme zvolili veľké jadro pre G500, aby sme ukázali, ako odstráni podstatné informácie o deji (Obr. 4.22). Tými sú práve nástup a koniec pôsobenia obdĺžnikového chladiaceho pulzu. Zmeny teploty sú na začiatku pôsobenia natoľko prudké, že ani LOW, či G30 ich nedokáže verne kopírovať (Obr. 4.23, Obr. 4.24). Rovnakú situáciu badáme na koncoch pôsobenia pulzu (Obr. 4.25, 4.26). Zároveň vidíme, ako sa AF zhoduje s originálnym záznamom teploty. Výraznejšie odchýlky môžeme vidieť tesne



Obr. 4.22: Pôsobenie obdĺžnikového pulzu - 1mm pod povrchom.

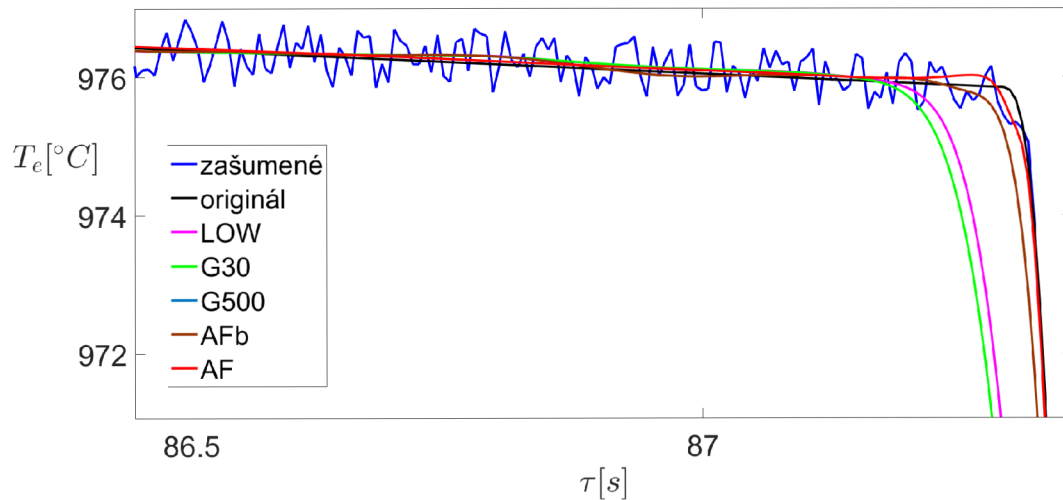


Obr. 4.23: Začiatok ľavého pulzu 1mm pod povrchom - detail.

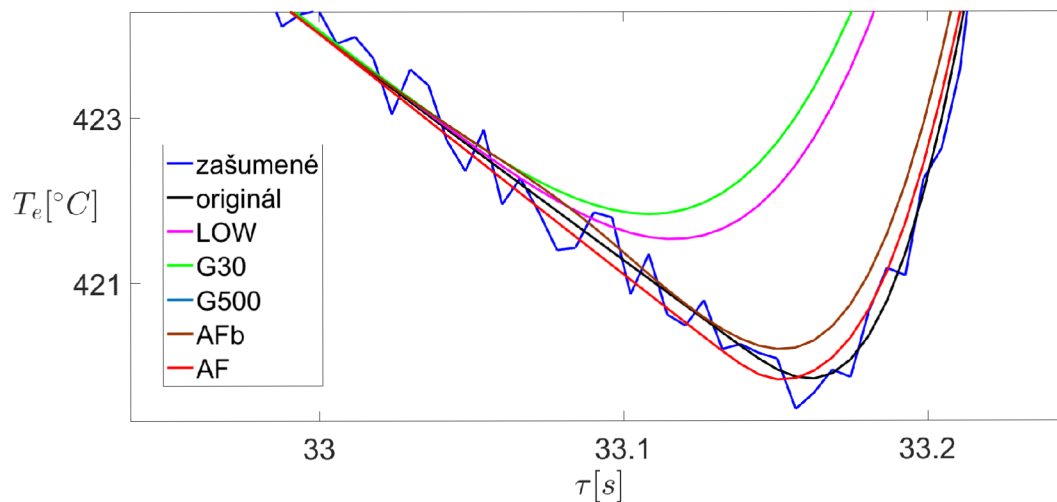
pred nástupom pulzu. Je to spôsobené tým, že algoritmus hľadania veľkých zmien normalizovanej diferencie nezachytí tento prudký skok úplne presne. Vznikne tam zlom, ktorý sa následnou šumovou modifikáciou postupne potlačí nahor. Vo výsledku tak dostaneme mierny nárast teploty pred jej prudkým poklesom.

V prípade AFb pozorujeme v miestach poklesu väčšiu chybu než u AF. Zároveň dochádza aj k odkloneniu teploty od jej lokálnej strednej hodnoty pred nástupom pulzu (ľava časť Obr. 4.23). Tomu sa pri AF vyhneme práve vďaka tomu, že poznáme rozdiel od zašumenej teploty a dokážeme sa k nej priblížiť. Rovnaká situácia u AFb nastáva aj na konci pôsobenia pulzu.

Nedostatok AF pozorujeme na zvlnení teplotnej krivky (Obr. 4.27 - úsek nad teplotou 66,5 °C). Je spôsobený charakterom generovaného šumu, ktorý nepochádza z normálneho rozdelenia. Skupina údajov je združená nad lokálnou strednou hodnotou pôvodnej teploty a AF pri úprave modifikáciou šumu nesprávne predpokladá, že týmto smerom má posunúť teplotu nahor.

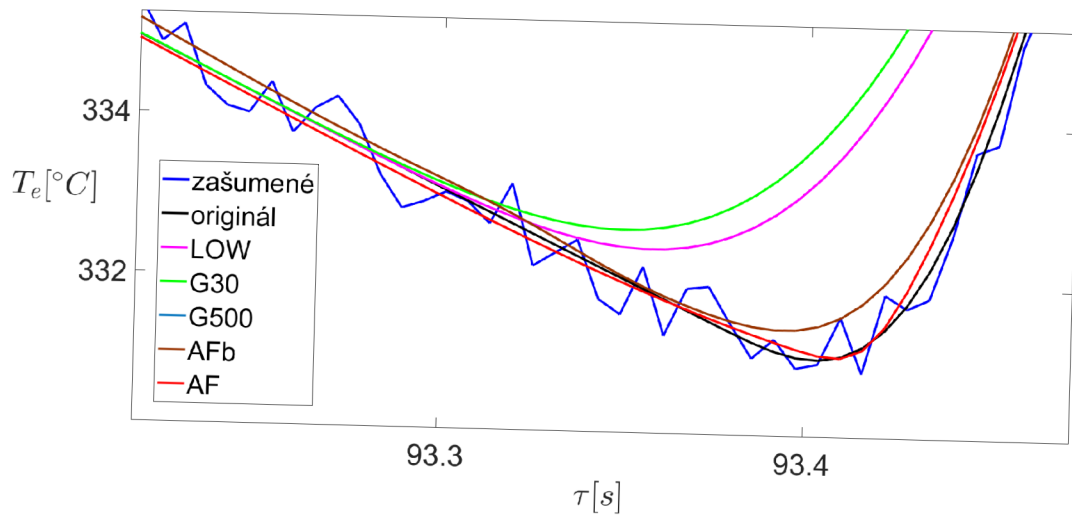


Obr. 4.24: Začiatok pravého pulzu 1mm pod povrchom - detail.

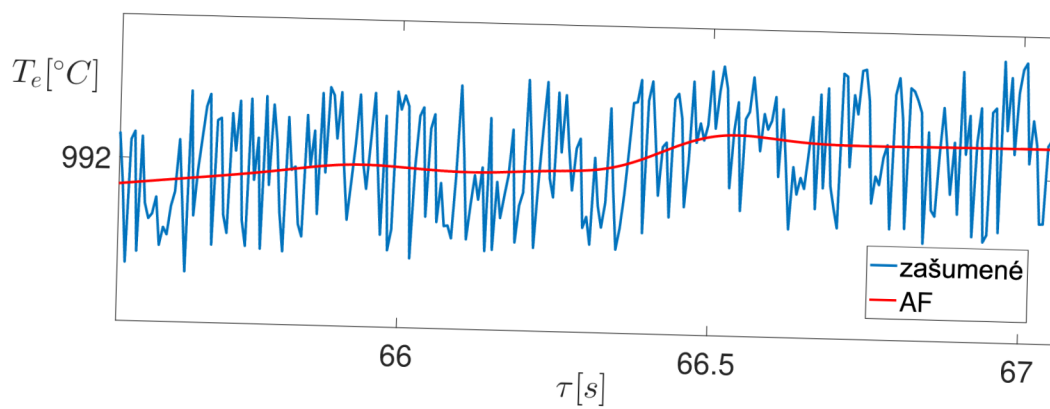


Obr. 4.25: Koniec ľavého pulzu 1mm pod povrchom - detail.

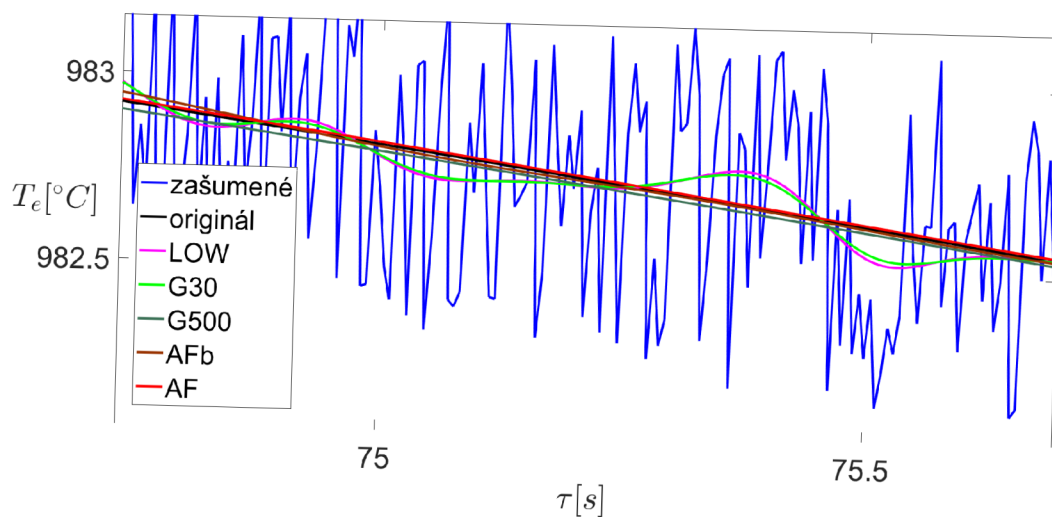
Hoci sa nám môže zdať, že LOW a G30 neodviedli až tak zlú prácu, ich nedostatky pozorujeme v oblastiach, kde dochádza iba k radiácii do okolia (Obr. 4.28). Z hľadiska frekvencie je šum v tejto oblasti mnohokrát výraznejší než samotný priebeh chladenia (simulovaná teplota), preto ho LOW a G30 neodstránia. Prejavuje sa to oscilovaním teplôt v tejto oblasti.



Obr. 4.26: Koniec pravého pulzu 1mm pod povrchom - detail.



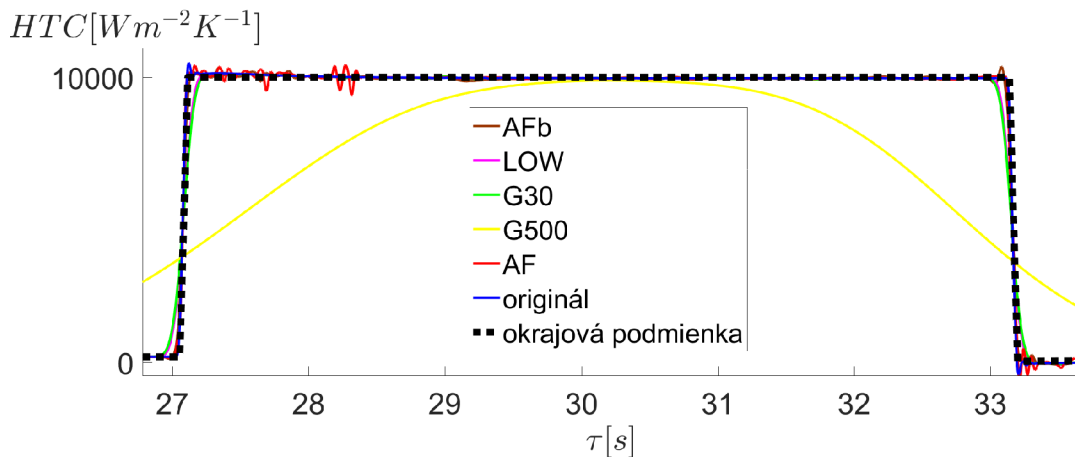
Obr. 4.27: Chyba AF spôsobená charakterom generovaného šumu.



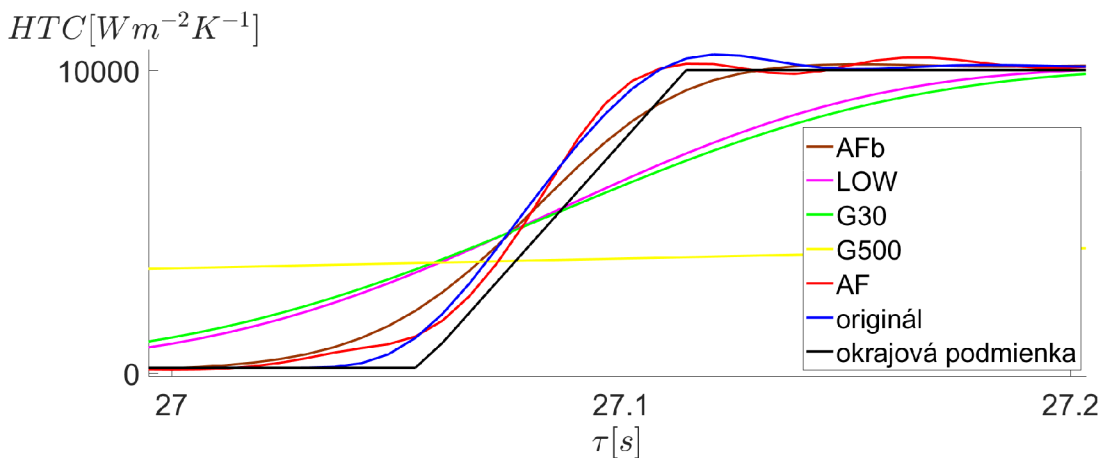
Obr. 4.28: Oblať bez pôsobenia obdĺžnikového pulzu.

4.3.2.2 Porovnanie výsledných okrajových podmienok

Výstupy z nami zvolených filtrov vložíme do inverznej úlohy na výpočet okrajových podmienok. Bližšie sa pozrieme na záznamy 1mm pod povrchom, ktoré sme vizuálne analyzovali v minulej podkapitole. Ostatné hĺbky uvedieme v prílohe A. Z výstupov inverznej úlohy vyberieme HTC , ktoré porovnáme s hodnotami získanými z pôvodnej nezašumenej teploty (v obrázkoch značíme *originál*). Vidíme, že aj keď vezmeme simulované dáta, obdržíme iba približnú rekonštrukciu okrajovej podmienky (Obr. 4.29, Obr. 4.30). Rozoberieme náš adaptívny filter. K nástupu pulzu dochádza skôr, než tomu je v skutočnosti. Spôsobil to fakt, že teplota začala klesať o zlomok sekundy skôr (Obr. 4.23).



Obr. 4.29: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 1mm pod povrchom.



Obr. 4.30: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 1mm pod povrchom - detail.

Solídne výsledky máme aj z AFb, naproti tomu LOW, či G30 zlyhávajú vďaka tomu, že nekopírujú prudký pokles teploty. G500 nadmerne odstránil informáciu o nástupe pulzu, je nevhodné používať ho na veľké teplotné gradienty.

Pri AF nás môžu zarážať jemné lokálne oscilácie v priebehu pôsobenia pulzu. Za následok to má napojenie dvoch filtrovaných oblastí v zmysle algoritmu popísaného v kapitole 4.2.2. Aj keď sa pri modifikácii šumom tieto oblasti vyhladzovali, pri tak vysokom teplotnom gradiente sa prejaví aj malá nedokonalosť. Rozdiely od „skutočnej“ podmienky kvantifikujeme. Spočítame strednú hodnotu a rozptyl rozdielu HTC jednotlivých filtrov od HTC originálu. Výpočet vykonáme globálne pre celú simuláciu a aj lokálne

počas nástupu pulzu. Z Tabuľky 4.3 vidíme presne to, čo sme posudzovali vizuálne. Najlepšie výsledky dávajú oba adaptívne filtre. Skutočne, AF má priemernú odchýlku počas nástupu pulzu rádovo v jednotkách. Navyše, čo je podstatné, má odchýlka v tejto oblasti výrazne menší rozptyl. To je pre nás výborný výsledok, pretože sme dokázali verne zrekonštruovať prudkú zmenu okrajovej podmienky.

filter	AF	AFb	G500	G30	LOW
celková stredná hodnota	-0,46	-1,48	-122	-2,74	-2,36
celkový rozptyl	61,61	52,57	967	156,67	142,17
stredná hodnota - nástup ľavého pulzu	8,61	-39,2	-2397	-284	-224
rozptyl - nástup ľavého pulzu	249	499	4264	1713	1560

Tabuľka 4.3: Číselná analýza výsledkov - 1mm pod povrchom.

Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo porovnanie základných filtračných metód na odstraňovanie šumu z teplotných meraní a vytvorenie vlastnej knižnice funkcií na spracovanie nameraných dát. Za týmto účelom sme vytvorili adaptívny filter, ktorý spája výhody týchto metód.

V úvodnej kapitole sme zosumarizovali matematickú teóriu potrebnú k popisu vlastností filtrov. Predovšetkým Fourierovu transformáciu, jej diskretnú verziu a vetu o konvolúcii, ktorá tento popis zjednodušila.

Praktický význam diskretnéj Fourierovej transformácie sme vysvetlili na začiatku druhej kapitoly, ktorú sme venovali reprezentácii a vzorkovaniu signálu. Podrobne sme uviedli odvodenie Nyquistov–Shannonovho vzorkovacieho teorému, ktorého nesplnenie sme ilustrovali.

Náplňou tretej kapitoly bol popis lineárneho digitálneho filtru. Ten sme dôkladne definovali a dokázali, že je jednoznačne popísaný hodnotami impulznej odozvy. Využili sme diskretnú Fourierovu transformáciu k pochopeniu spôsobu, akým spracováva vstupný signál. V náväznosti na hlavné ciele práce sme uviedli postup návrhu filtrov, ktoré boli v práci využité. Vysvetlili sme princíp ich implementácie do softwaru. Pre filtre, ktorých impulzná odozva pozostáva z konečne mnoho hodnôt, sme s využitím vety o konvolúcii urýchlili výpočtový algoritmus.

Štvrtú kapitolu sme začali krátkym prehľadom priamej a inverznej úlohy vedenia tepla. Pokračovali sme schémou experimentu, ktorého výstupné dáta sme použili pri návrhu vlastného adaptívneho filtru. Navrhli sme ho na základe Gaussovho filtru. Dáta sme analyzovali a filter naučili rozpoznávať rozdielne oblasti, ktoré sme rozdelili v kritických bodoch podľa hodnôt normalizovanej diferencie teplotného záznamu. Pomocou týchto hodnôt sme pre rozdelené úseky počítali rozdielny parameter Gaussovho filtru. Odčítaním výsledných teplôt od pôvodných sme dostali aktuálny šum. Vykonali sme jeho modifikáciu, ktorú sme od nových teplôt odčítali. Týmto sme sa priblížili k skutočnej krivke teploty. Štatistickým testom výsledného šumu sme posúdili kvalitu filtrácie. Iba v jednom prípade sme zamietli hypotézu, že šum nepochádza z normálneho rozdelenia s nulovou strednou hodnotou. Bolo to spôsobené nadmernou prítomnosťou ruchu z elektrickej siete. V ďalšej časti kapitoly sme porovnali päť rôznych filtrov na simulovanom chladení. Výstup simulácie sme zašumili a ten sme filtermi odstraňovali. Výsledky boli použité do inverznej úlohy vedenia tepla, ktorá rekonštruovala okrajovú podmienku simulácie. Porovnaním súčiniteľu prestupu tepla s okrajovou podmienkou získanou zo simulovanej teploty sme posúdili účinnosť filtrov. Najlepšie výsledky dosiahol nami navrhnutý adaptívny filter.

Prácu a myšlienkový postup návrhu filtru sme doplnili ilustračnými obrázkami vytvorenými v MATLABE. Rovnako sme v ňom naprogramovali všetky funkcie potrebné k spracovaniu a filtrácii dát. Tie sú súčasťou priloženého CD.

Zoznam použitých zdrojov

- [1] ANDĚL, Jiří. *Statistické metody*. 4., upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 8073780038.
- [2] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 3., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-8-7378-001-2.
- [3] BECK, J. V., BLACKWELL, B., CHARLES, R. C., *Inverse heat conduction : ill-posed problems*. New York: Wiley, 1985.
- [4] BLANCHET, Gerard a Maurice CHARBIT. *Digital signal and image processing using Matlab*. Newport Beach, CA: ISTE, c2006. ISBN 1-905209-13-4.
- [5] COCHRAN, William G. The Chi-square test of goodness of fit. *The annals of mathematical statistics*. 1952, roč. 23, č. 3, s. 315-345. DOI:10.1214/aoms/1177729380
- [6] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [7] ČERMÁK, Libor. *Vybrané statě z numerických metod*. [online]. 2019 [cit. 2019-02-17]. Dostupné z: <http://math.fme.vutbr.cz/Home/cermak1/soubory-ke-stazeni>
- [8] ČERMÁK, L a R. HLAVIČKA. *Numerické metody*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.
- [9] DRUCKMÜLLER, Miloslav. *Analýza v komplexním oboru*. Brno: VUT, 1986
- [10] FRANČŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. Páté opravené vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2017. ISBN 978-80-214-5577-1.
- [11] HŘIBOVÁ, V. *Vývoj inverzní sub-doménové metody pro výpočet okrajových podmínek vedení tepla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 75s. Vedoucí Ing. Michal Pohanka, Ph.D.
- [12] HSU, Hwei P. *Signals and systems*. 2nd ed. McGraw-Hill Education, 2010. ISBN 978-0-07-163473-1.
- [13] INCROPERA, Frank P. a Frank P. INCROPERA. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 6th ed. Hoboken, NJ: John Wiley, c2007. ISBN 978-0471457282.
- [14] JAN, Jiří. *Číslíková filtrace, analýza a restaurace signálů*. 2. upr. a rozš. vyd. Brno: VUTIUM, 2002. ISBN 80-214-2911-9.
- [15] KOMÍNEK, Jan. *Pokročilé metody pro inverzní úlohy vedení tepla: dizertační práce*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Laboratoř přenosu tepla a proudění, 2018. 80 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.
- [16] KOMRSKA, Jiří. *The Dirac distribution*. [online]. [cit. 2019-02-02]. Dostupné z: <http://physics.fme.vutbr.cz/~komrska/Eng/DodFA.pdf>

- [17] PARKS, T. W. a C. S. BURRUS. *Digital filter design*. New York: Wiley, c1987. ISBN 9780471828969.
- [18] PATANKAR, Suhas V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Great Britain: Taylor, 1980, 197 s.
- [19] POHANKA, Michal. *Technical experiment based inverse tasks in mechanics: Ph.D. thesis*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Laboratoř přenosu tepla a proudění, 2006. 202s. Vedoucí práce byl Doc. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.
- [20] PROAKIS, J. G. a MANOLAKIS D. *Digital signal processing: principles, algorithms and applications*. 3rd ed. Prentice-Hall, Inc. 1996. ISBN 0-13-394338-9.
- [21] Research. *Heat Transfer and Fluid Flow Laboratory*. [online]. [cit. 2019-05-18]. Dostupné z: <http://www.heatlab.cz/research/continuous-casting>.
- [22] SMITH, Steven W. *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. 2nd ed. California Technical Publishing, 1999. ISBN 0-9660176-6-8.
- [23] VASEGHI, Saeed V. *Advanced digital signal processing and noise reduction*. 2nd ed. New York: John Wiley, c2000. ISBN 0-471-62692-9.
- [24] WOOLLEY, J. W. *Accounting for transient temperature measurement error with a high fidelity thermocouple model and application to metal/mold interfacial heat flux estimation*. Tuscaloosa, Alabama: The University of Alabama, 2008. 182 s.
- [25] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method*. Volume 1. 4 ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000, 689 s.

Zoznam obrázkov

Obr. 1.1: Polárna reprezentácia komplexného čísla	15
Obr. 2.1: Časová oblasť (Príklad 2.1.)	25
Obr. 2.2: Frekvenčné spektrum - magnitúda (Príklad 2.1.)	25
Obr. 2.3: Frekvenčné spektrum - fáza (Príklad 2.1.)	26
Obr. 2.4: Skreslenie Fourierovej transformácie pri nedodržaní vzorkovacieho teorému .	30
Obr. 2.5: Splnené kritérium - vzorkovanie (Príklad 2.2.)	31
Obr. 2.6: Splnené kritérium - frekvenčné spektrum (Príklad 2.2.)	31
Obr. 2.7: Nesplnené kritérium - vzorkovanie (Príklad 2.2.)	31
Obr. 2.8: Nesplnené kritérium - frekvenčné spektrum (Príklad 2.2.)	31
Obr. 3.1: Jednotková kružnica	35
Obr. 3.2: Vplyv fázového prenosu	36
Obr. 3.3: Amplitúdová odozva FIR filtru s dolnou prepustou	39
Obr. 4.1: Schéma experimentu	43
Obr. 4.2: Typický priebeh teplôt pre rôzne umiestnenie termočlánkov	44
Obr. 4.3: Detail medzi dvoma prechodmi trysky	45
Obr. 4.4: Prítomnosť šumu	45
Obr. 4.5: Výrazný lokálny extrém	46
Obr. 4.6: Normalizovaná diferenciacia pôvodného záznamu teploty	47
Obr. 4.7: Normalizovaná diferenciacia po slabej filtrácii pôvodnej teploty	47
Obr. 4.8: Odchýlenie od pôvodnej teploty	48
Obr. 4.9: Rozdiel aktuálnych teplôt od pôvodných	48
Obr. 4.10: Rozdiel aktuálnych teplôt od pôvodných - detail	48
Obr. 4.11: Úprava aktuálneho šumu	49
Obr. 4.12: Teplota po odčítaní upraveného šumu	49
Obr. 4.13: Q-Q graf výsledného šumu 17. termočlánku	51
Obr. 4.14: Q-Q graf výsledného šumu 3. termočlánku	51
Obr. 4.15: Výsledný šum 17. termočlánku - detail	51
Obr. 4.16: Diskrétna Fourierova transformácia výsledného šumu 17. termočlánku	52
Obr. 4.17: Filtrácia teploty 17. termočlánku - detail	52
Obr. 4.18: Simulácia - súčiniteľ prestupu tepla	53

Obr. 4.19: Simulácia - záznamy teplôt	53
Obr. 4.20: Simulácia - prudká zmena teploty	53
Obr. 4.21: Simulácia - začiatok stabilizácie teploty	54
Obr. 4.22: Pôsobenie obdĺžnikového pulzu - 1mm pod povrchom	55
Obr. 4.23: Začiatok ľavého pulzu 1mm pod povrchom - detail	55
Obr. 4.24: Začiatok pravého pulzu 1mm pod povrchom - detail	56
Obr. 4.25: Koniec ľavého pulzu 1mm pod povrchom - detail	56
Obr. 4.26: Koniec pravého pulzu 1mm pod povrchom - detail	57
Obr. 4.27: Chyba AF spôsobená charakterom generovaného šumu	57
Obr. 4.28: Oblasť bez pôsobenia obdĺžnikového pulzu	57
Obr. 4.29: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 1mm pod povrchom	58
Obr. 4.30: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 1mm pod povrchom - detail	58
Obr. A.1: Koniec ľavého pulzu 0,5mm pod povrchom - detail	66
Obr. A.2: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 0,5mm pod povrchom - detail	66
Obr. A.3: Nástup pravého pulzu 2mm pod povrchom - detail	67
Obr. A.4: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 2mm pod povrchom - detail	67
Obr. A.5: Nástup pravého pulzu 3mm pod povrchom - detail	68
Obr. A.6: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 3mm pod povrchom - detail	68

Zoznam tabuliek

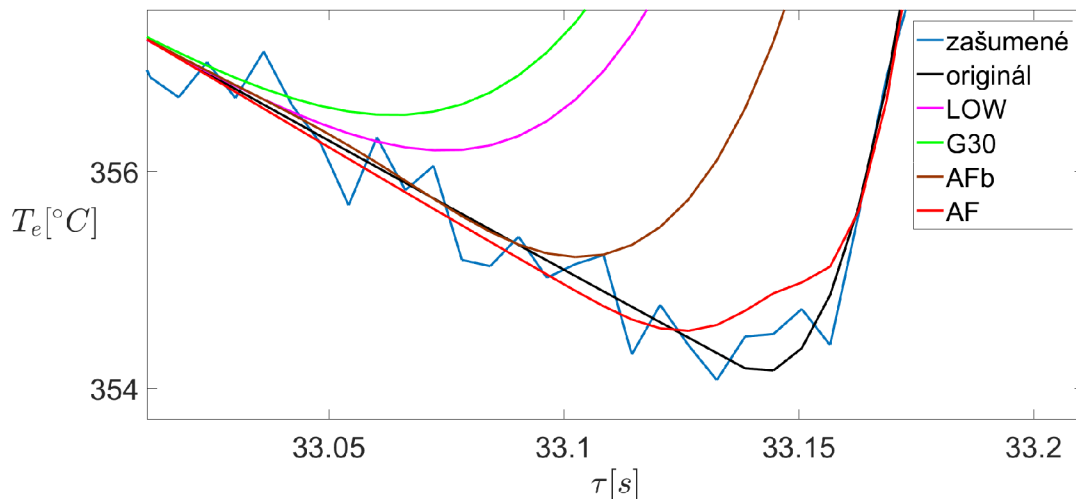
Tabuľka 2.1: Dvojice Fourierovej transformácie	27
Tabuľka 4.1: P-hodnoty pre dve rôzne štatistické hypotézy	50
Tabuľka 4.2: Zoznam vybraných filtrov	54
Tabuľka 4.3: Číselná analýza výsledkov - 1mm pod povrchom	59
Tabuľka A.1: Číselná analýza výsledkov - 0,5mm pod povrchom	66
Tabuľka A.2: Číselná analýza výsledkov - 2mm pod povrchom	67
Tabuľka A.3: Číselná analýza výsledkov - 3mm pod povrchom	68

Zoznam príloh

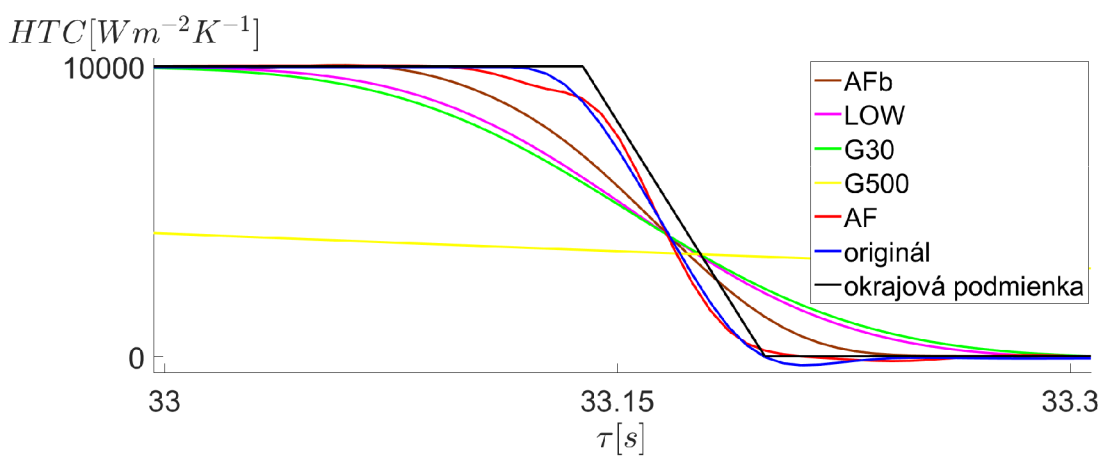
A	Vyhodnotenie filtrov na základe zhody okrajovej podmienky	66
A.1	Dáta z bodu 0,5mm pod povrchom	66
A.2	Dáta z bodu 2mm pod povrchom	67
A.3	Dáta z bodu 3mm pod povrchom	68
B	Súbory na CD	69

A Vyhodnotenie filtrov na základe zhody okrajovej podmienky

A.1 Dáta z bodu 0,5mm pod povrchom



Obr. A.1: Koniec ľavého pulzu 0,5mm pod povrchom - detail.

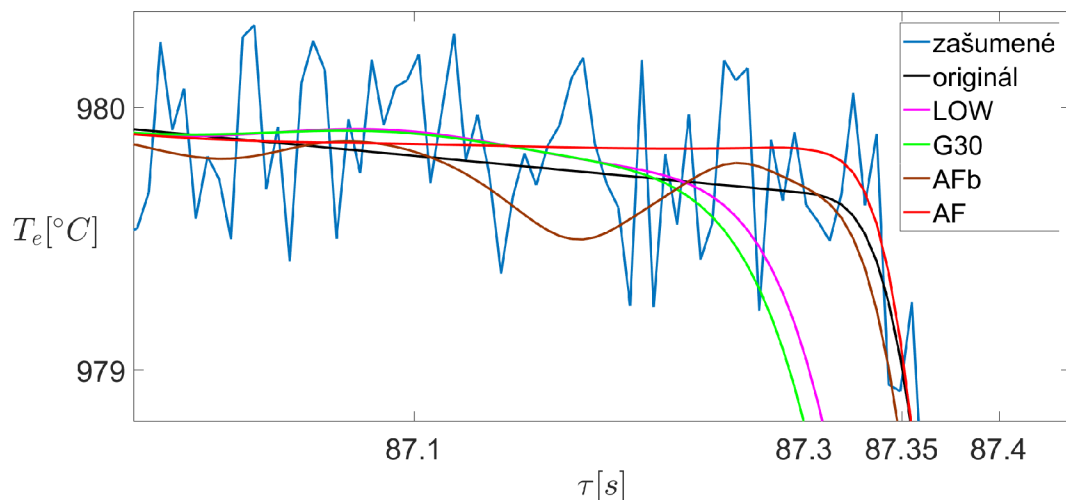


Obr. A.2: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 0,5mm pod povrchom - detail.

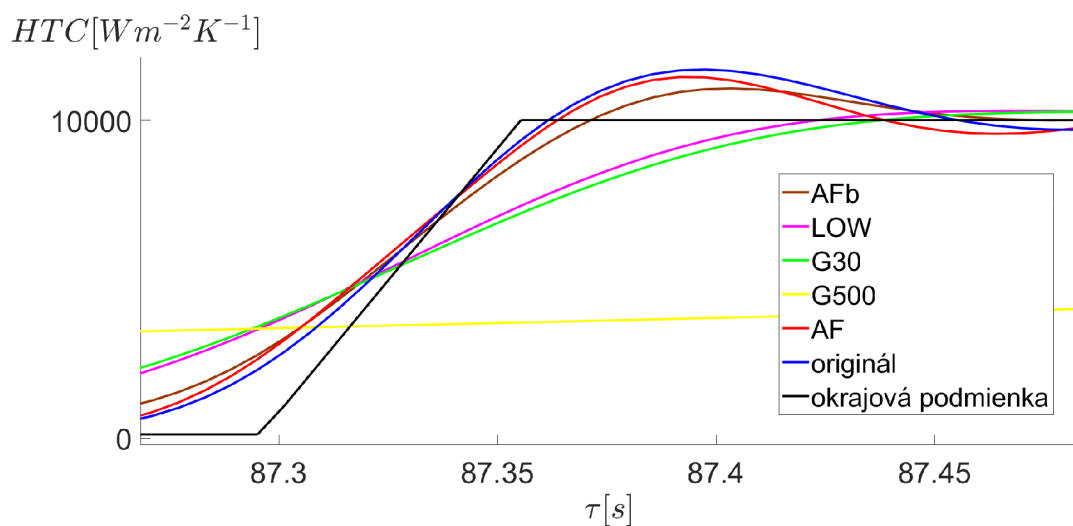
filter	AF	AFb	G500	G30	LOW
celková stredná hodnota	-0,47	-2,42	-121	-2,70	-2,32
celkový rozptyl	21,47	94,67	961	149,6	134,9
stredná hodnota - koniec ľavého pulzu	-13,36	-184	-1630	-359	-305
rozptyl - koniec ľavého pulzu	246	1005	4224	1815	1645

Tabuľka A.1: Číselná analýza výsledkov - 0,5mm pod povrchom.

A.2 Dáta z bodu 2mm pod povrchom



Obr. A.3: Nástup pravého pulzu 2mm pod povrchom - detail.

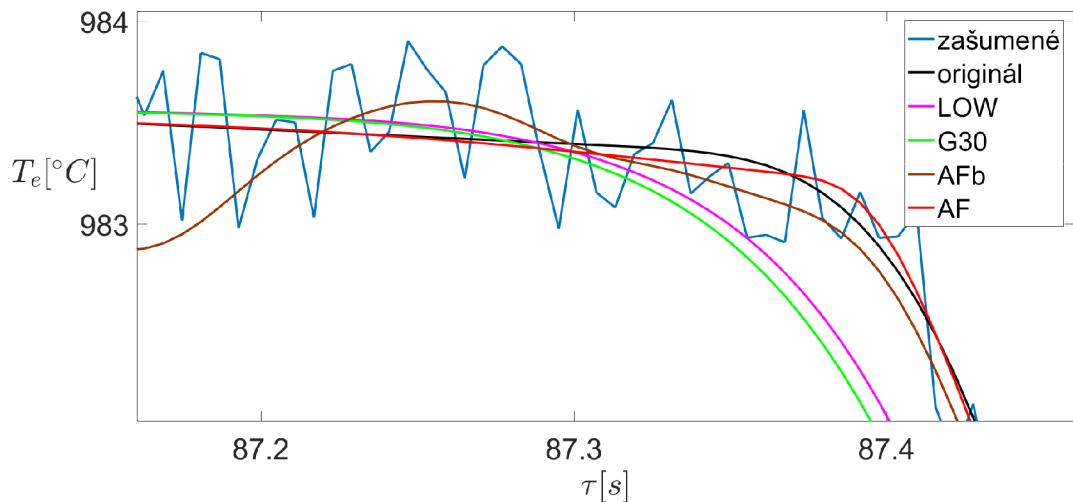


Obr. A.4: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 2mm pod povrchom - detail.

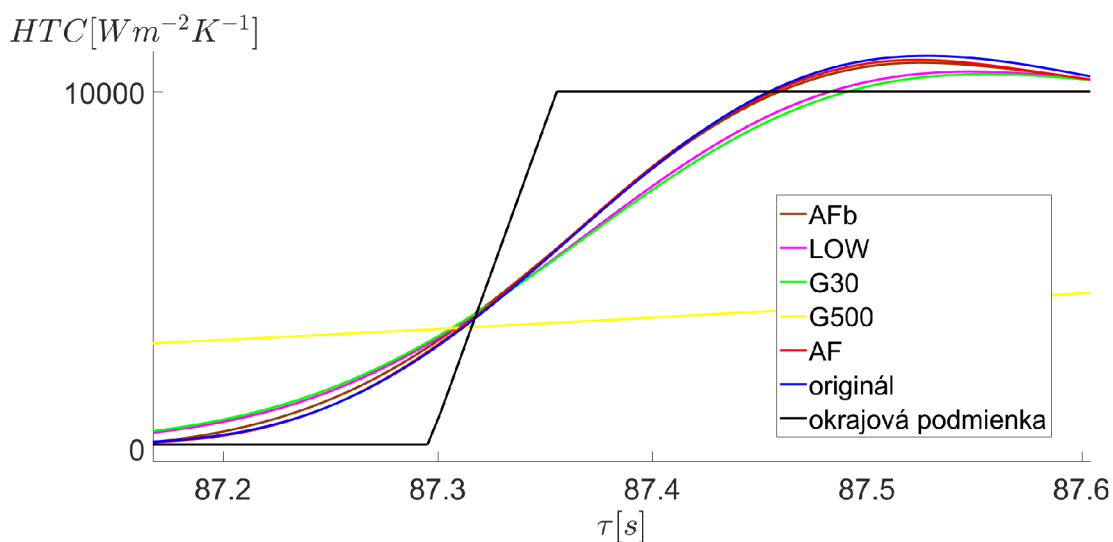
filter	AF	AFb	G500	G30	LOW
celková stredná hodnota	0,44	-0,99	-122	-2,10	-1,70
celkový rozptyl	225	142	968	150	140
stredná hodnota - nástup pravého pulzu	-77,0	-50,9	-2819	-408	-337
rozptyl - nástup pravého pulzu	265	439	4314	1573	1402

Tabuľka A.2: Číselná analýza výsledkov - 2mm pod povrchom.

A.3 Dáta z bodu 3mm pod povrchom



Obr. A.5: Nástup pravého pulzu 3mm pod povrchom - detail.



Obr. A.6: Súčiniteľ prestupu tepla určený z teplôt 3mm pod povrchom - detail.

filter	AF	AFb	G500	G30	LOW
celková stredná hodnota	-0,32	-1,09	-121	-1,87	-1,55
celkový rozptyl	80,6	95,4	928	83,2	80,1
stredná hodnota - nástup pravého pulzu	16,2	57,7	-1663	-132	-109
rozptyl - nástup pravého pulzu	31,6	105,3	2914	493	408

Tabuľka A.3: Číselná analýza výsledkov - 3mm pod povrchom.

B Súbory na CD

Na priloženom CD sú uložené nasledujúce typy súborov.

- Textový súbor *AAinfo.txt* s dôležitými poznámkami.
- Dáta z experimentu *A1A.txt*, *A1B.txt* a dáta z inverznej úlohy s predponou *SIM3_.txt* pre teplotu 1mm pod povrchom.
- Skripty s predponou *AOBR_.m* obsahujú zdrojové kódy k obrázkom uvedených v práci.
- Funkcie s predponou *FIR_.m* zahrňujú návrh frekvenčne priepustných filtrov s konečnou impulznou odozvou.
- Funkcie s predponou *IIR_.m* implementujú filtre s nekonečnou impulznou odozvou. Špeciálne *IIRsketch.m* umožňuje užívateľovi navrhnuť vlastný filter umiestňovaním pólov a núl do komplexnej roviny.
- Funkcie s predponou *gauss_.m* využívajú Gaussov filter.
- Funkcie s predponou *CONTI_.m* obsahujú adaptívnu filtráciu. Špeciálne *CONTIadapt_.m* je adaptívny filter ako hlavný výstup práce.
- Funkcie na načítanie a zápis dát obsahujúce kľúčové slovo *Data*.
- Pomocné funkcie a funkcie slúžiace k vizualizácii vlastností filtrov.
- Súbor *Avzor.m* so vzorovými volaniami vybraných funkcií.