Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení a/nebo více řešení

Bakalářská práce

Vypracovala: Petra Bézová

Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení a/nebo více řešení jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

Petra Bézová

Anotace

Tato bakalářská práce se zabývá slovními úlohami na druhém stupni základních škol, pro které existuje více postupů řešení nebo více řešení (výsledků). Hlavním cílem práce je sestavení sbírky úloh, která by mohla sloužit žákům 2. stupně základních škol jako učební pomůcka při přípravě na hodiny matematiky. Práce je rozdělena na dvě části, teoretickou a praktickou část. První část se věnuje rešerším na témata „otevřený přístup k matematice" a „pojem slovní úloha". Závěrem teoretické části je rešerše učebních pomůcek. Praktická část je pojata jako sbírka slovních úloh, pro které existuje více postupů řešení a nebo více řešení (výsledků). Ve sbírce jsou zahrnuty typické a zajímavé úlohy vyskytující se na základních školách již od 6. ročníku.

Klíčová slova: slovní úlohy, řešení slovních úloh, více výsledků

Abstract

This bachelor's theses focuses on math word problems for 6th to 9th grade classes, which have a number of strategies used in solving or which have a number of solutions (results). The aim of this work is to create a collection of tasks, which could be a pupils' learning tool focussed on preparing for math lessons. This bachelor's theses is devided into two parts, the theoretical and the practical one. The first part deals with researching of topics „open-approach method in mathematics" and „math word problem". The practical part comprises a collection of tasks with a number of strategies used in solving and/or which have more solutions. In this collection of tasks, there are interesting word problems which are commonly appearing in the 6th grades of Czech primary school.

Keywords: math word problems, solving math word problems, more results

Poděkování

Ráda bych věnovala poděkování mé vedoucí bakalářské práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D., za odborné vedení mé práce, cenné rady, připomínky a věnovaný čas.

Obsah

Úvod **7**

1 Teoretická část **9**

1.1 Otevřený přístup k matematice 9

1.2 Pojem slovní úloha 10

1.3 Rešerše učebních pomůcek 11

1.3.1 Rešerše učebnic Odvárko, Kadleček 12

1.3.2 Rešerše sbírky M4 13

1.3.3 Rešerše Matematické olympiády 14

1.3.4 Rešerše didaktických testů 15

2 Praktická část - Úlohy s jedním výsledkem **17**

2.1 Slovní úlohy týkající se každodenních praktických domácích záležitostí 17

2.1.1 Úloha 17

2.1.2 Úloha 18

2.1.3 Úloha 20

2.1.4 Úloha 23

2.1.5 Úloha 24

2.1.6 Úloha 26

2.1.7 Úloha 28

2.2 Slovní úlohy týkající se každodenních praktických školních záležitostí 29

2.2.1 Úloha 29

2.2.2 Úloha 31

2.2.3 Úloha 34

2.2.4 Úloha 35

2.3 Slovní úlohy propojené s financemi 36

2.3.1 Úloha 36

2.3.2 Úloha 37
2.3.3 Úloha 39
2.3.4 Úloha 40
2.3.5 Úloha 42
2.4 Slovní úlohy propojené s fyzikou 43
2.4.1 Úloha 43
2.4.2 Úloha 45
2.4.3 Úloha 47

3 Praktická část - Úlohy s více výsledky 49
3.1 Úloha 49
3.2 Úloha 50
3.3 Úloha 52
3.4 Úloha 55

4 Praktická část - Souhrnný přehled 57

Závěr 59

Seznam použité literatury a zdrojů 61

Seznam obrázků 65

Seznam tabulek 66

Úvod

Mým osobním cílem v mé vysněné budoucí profesi učitelky je umět žáky motivovat a zvyšovat jejich zájem o matematiku. Z tohoto důvodu jsem si pro svou bakalářskou práci zvolila téma „Matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení a/nebo více řešení“.

Se slovními úlohami se setká každý jedinec. Probírány jsou již na 1. stupni základních škol a patří mezi nepostradatelnou součást výuky matematiky. Ovšem je nutné zmínit, že mezi žáky nejsou příliš oblíbené a najde se veliké množství žáků, kteří je považují za složité. Jedna z možností, jak zvýšit zájem o slovní úlohy, je, že žákům představíme více způsobů, jak slovní úlohu vyřešit, nebo zmíníme, že některé úlohy nemají pouze jeden správný výsledek. Každý jednotlivec by měl mít možnost zvolit si postup, který odpovídá jeho znalostem, který je pro něho přirozený nebo který ho baví. Pokud jde o úlohy s více než jedním řešením (výsledkem), je vyšší pravděpodobnost, že jedinec zvládne nalézt alespoň jedno správné řešení. I to může být pro žáka motivací snažit se danou úlohu vyřešit; zároveň lze rozvinout ve třídě diskuzi o možných správných výsledcích.

Nejen pro žáky jsou tyto úlohy efektivní. Pro vyučujícího je přínosné, pokud zjistí, jak žáci ve třídě uvažují a jaké jsou jejich prvotní nápady. Na základě použitého řešení či dosaženého množství správných výsledků, může k žákům přihlížet jako k jednotlivým individuím.

V teoretické části se snažím objasnit pojem otevřená, polyvalentní a slovní úloha. Dále zjišťuji, v jakém rozsahu jsou slovní úlohy, které lze řešit více postupy řešení nebo mají více výsledků, obsaženy v učebnicích matematiky pro 2. stupeň základní školy od autorů Odvárko a Kadleček, ve sbírce úloh M4, v Matematické olympiádě a v didaktických testech tvořených Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání.

Cílem praktické části je vytvoření sbírky úloh na téma matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení nebo více řešení (výsledků), která by mohla sloužit žákům 2. stupně základních škol jako učební pomůcka při přípravě na hodiny matematiky. Pokusím se vytvořit rozmanité a různě náročné postupy řešení.

1 Teoretická část

1.1 Otevřený přístup k matematice

V matematice i přírodních vědách se celý svět v současné době velmi přiklání k badatelsky orientovanému vzdělávání. Projevuje se to tak, že žáci mají možnost používat obdobné postupy či metody práce jako odborní pracovníci či vědci ve svých pracích. Studenti tak mohou nejen uskutečňovat sběr informací a pozorovat. Mohou si například klást otázky, navrhovat způsoby řešení, formulovat odpovědi, vysvětlení či předpovědi, rozvinout se svými vrstevníky diskusi na dané téma a následně vyvodit závěry. Metody jsou samozřejmě vždy přizpůsobeny věku žáků. V tomto typu vzdělávání se očekává zvýšený zájem žáků o výuku, zvýšení intenzity při domácí přípravě a zlepšení školních výsledků. V matematice se do badatelsky orientovaného vzdělání zařazuje otevřený přístup k matematice (Samková 2018).

Otevřený přístup k matematice se zabývá výukou matematiky, přesněji otevřených úloh. Otevřené úlohy jsou úlohy, splňující minimálně jednu z níže uvedených vlastností:

– mají otevřenou vstupní situaci, neboli existuje více způsobů, jak úlohu uchopit;

– mají otevřený postup řešení, neboli existuje více způsobů, jak úlohu řešit;

– mají otevřenou výslednou situaci, neboli existuje více výsledků úlohy;

– mají další cestu otevřenou, neboli existuje více způsobů, jak úlohu rozvinout v úlohu novou (Samková 2018).

U úloh, které mají otevřenou vstupní situaci, se objevuje nejednoznačnost zadání či nepřesná důležitost dílčích součástí vstupní situace. V tomto typu úloh se může stát, že řešitel pochopí úlohu jiným způsobem, než měl autor na mysli. Úlohy s otevřenou výslednou situací může zapříčinit již zmíněná otevřená vstupní situace, ale i jasně zadaná a jasně chápaná úloha může mít více řešení ve smyslu více výsledků. Řešitel se tak dopracuje k více než jednomu možnému výsledku (Samková 2018).

Vzácné jsou úlohy, které mají otevřený postup řešení. Znamená to, že daná úloha lze řešit více postupy. Do tohoto typu úloh řadíme úlohy polyvalentní. Polyvalentní úloha je taková úloha, která lze řešit různě náročnými postupy. Každý žák má možnost osvojit si různě obtížný postup pro řešení odpovídající jeho znalostem (Samková 2018).

Typy úloh, které jsem vypsala, se mohou samozřejmě navzájem prolínat. Já se v mé bakalářské práci soustředím na úlohy, pro které existuje více způsobů řešení, a na úlohy, pro které existuje více řešení z hlediska výsledků. I přesto, že se zaměřuji pouze na tyto úlohy, vyskytují se v mé práci i takové úlohy, ve kterých se objevuje více vlastností otevřených úloh. Zmíním například úlohu 2.5.2. Tato úloha má dvě řešení ve smyslu dva možné výsledky, ale také má dvě řešení ve smyslu dva různé postupy řešení.

1.2 Pojem slovní úloha

Než pokročím dál, ráda bych čtenáři velice stručně přiblížila pojem slovní úloha. Chtěla bych vyzdvihnout, že slovní úloha se tvoří ze základů reálného života, ač si to možná někteří ani neuvědomují, a lidé se s ní setkávají již od raného dětství.

Ve výuce matematiky se žáci setkávají se slovními úlohami již od 1. třídy. Při vyučování se naléhá na logické osvojení učiva, které se využívá při řešení událostí v reálném životě. A právě pomocí modelování slovních úloh se již mladí jedinci setkávají se situacemi z reálného života (Blažková, Matoušková, Vaňurová 2002).

Definic pro pojem slovní úloha je mnoho, nejvíce se mi však zamlouvají následující:

„Slovními úlohami rozumíme takové úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací. Pomocí vhodných úvah

zjišťujeme, jaké početní operace je třeba provést se zadanými údaji, abychom mohli odpovědět na otázku slovní úlohy. Principem řešení těchto úloh je vytvoření matematického modelu konkrétní situace vyjádřené textem úlohy. Přechod od reálné situace k příslušnému matematickému modelu se nazývá matematizace reálné situace. Tím rozumíme vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem v matematickém jazyce. Vyřešením získané matematické úlohy získáme výsledek, který musíme konfrontovat se zadáním slovní úlohy" (Blažková, Matoušková, Vaňurová 2002).

„*Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možno řešit buď v realitě, nebo matematicky. Cílem učiva o slovních úlohách je naučit žáky řešit tyto úlohy matematicky. To ovšem předpokládá nejprve daný reálný problém umět formulovat jako aritmetickou nebo algebraickou úlohu a tu pak matematicky řešit*" (Divíšek, 1989).

Každá slovní úloha nám slouží k zodpovězení otázky, která je součástí zadání. Pokud dokážeme zodpovědět tuto otázku, vyřešili jsme chtěnou slovní úlohu.

1.3 Rešerše učebních pomůcek

Ráda bych poznamenala skutečnost, že jsem se v celé své práci věnovala početním úlohám, tudíž jsem vynechala obor geometrie. Dle mého názoru jsou pro žáky náročnější právě početní úlohy, a tak bych v mé praktické části chtěla ukázat jejich způsoby řešení. Jeden z důvodů pro mé rozhodnutí o vynechání učiva geometrie na 2. stupni ZŠ je také ten, že po prostudování literatury neboli učebnic či sbírek určených pro 2. stupeň ZŠ, se úlohy s více postupy řešení, ve smyslu výsledků, neobjevují takřka vůbec. Úlohy s více postupy řešení se v učebnicích sice v malém množství vyskytují, ale jsou obdobného typu. Domnívám se, že početní úlohy, kterým se věnuji v této práci, jsou zajímavější a pro žáky přínosnější.

1.3.1 Rešerše učebnic Odvárko, Kadleček

V této části rešerše se věnuji učebnicím matematiky 2. stupně základní školy od autorů Odvárko, Kadleček, které byly vydány nakladatelstvím Prometheus. Celá sada učebnic se skládá z 12 knih, pro jednotlivé ročníky jsou vždy 3 díly. Třetí díly učebnic jsou vždy věnovány tématu geometrie, proto se těmto dílům nebudu věnovat.

Učebnice pro 6. ročník ZŠ

První díl je věnován opakování z aritmetiky a geometrie. Vyskytují se zde ve velké části cvičení se zadáním typu: sečti, vypočítej zpaměti, zkontroluj součty a chyby oprav, porovnej atd., což nevyhovuje mému tématu.

Jako vhodné usuzuji slovní úlohy založené na převod jednotek. Například úloha: *„Maminčin krejčovský metr má délku jeden a půl metru. Kolik je to centimetrů“* (Odvárko, Kadleček 1998, s.29)? V tomto typu úlohy existují minimálně dva způsoby řešení. Jedno řešení spočívá v tom, že se převede 1,5 m rovnou na 150 cm. V druhém případě řešení se využívají decimetry. Tedy, 1,5 m se převede na 15 dm a to se převede na 150 cm.

Další vhodné úlohy v tomto dílu jsou na téma zlomky a desetinná čísla. Tento typ úlohy ukazuji ve sbírce pod úlohou 2.4.1.

Ve druhém dílu pro 6. ročník ZŠ se autoři věnují desetinným číslům a dělitelnosti. Desetinná čísla či jednotky délky a hmotnosti se vyskytovaly už v 1. díle. Slovní úlohy, přesněji způsoby řešení slovních úloh, mi připadají obdobné těm, které jsem užila v již zmíněných úlohách mé sbírky.

Učebnice pro 7. ročník ZŠ

Vhodnými shledávám oba dva díly. První díl je věnován tématu zlomky, celá čísla a racionální čísla. Jak jsem již zmínila, toto téma je velmi vyhovující pro úlohy s více postupy řešení. Z mé sbírky náleží k tomuto tématu například úloha 2.1.3.

Druhý díl se zabývá poměrem, přímou a nepřímou úměrností a procentům. Postupy se mohou prolínat v těchto tématech. Například v mé sbírce úloha 2.3.2. je zaměřena na procenta; pro jeden z postupů lze použít trojčlenku s přímou úměrou, ve druhém způsobu lze řešit úlohu pomocí jednoho procenta. Tento díl je velmi výstižný pro téma úlohy s více postupy řešení.

Další úlohou vybranou z tohoto dílu je například úloha 2.2.4 či úloha 2.3.3.

Učebnice pro 8. ročník ZŠ

První díl je věnován mocninám, odmocninám, Pythagorově větě a výrazům. Tento díl shledávám nevhodným pro mé téma. Početní slovní úlohy se zde celkově vyskytují v menším množství. Převažují zde zadání typu: vypočítej, zapiš, seřaď, vypočítej zpaměti atd.

Ovšem druhý díl je velmi trefný. Zaměřen je na lineární rovnice a základy statistiky. Vyskytují se zde úlohy o pohybu, o společné práci, úlohy o jedné neznámé. Celkově tento typ úloh je velmi vhodný.

Z učebnic pro 8. ročník mám ukázány způsoby řešení například na úlohách 2.2.2, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.5.

Učebnice pro 9. ročník ZŠ

Výstižný je 1. díl učebnice ze sady 3 dílů od autorů Odvárko a Kadleček. Nalezneme zde například úlohy o roztocích, o jedné či o dvou neznámých. Z této učebnice je vybrána například úloha 2.3.4. Pokud by u této úlohy nebyl zadán počet zájemců, tato úloha by mohla být zařazena do sekce slovní úlohy s více řešení, ve smyslu více výsledků.

1.3.2 Rešerše sbírky M4

Sbírka úloh M4 je kniha, která byla učebnicí pro experimentální školy. Pokud by čtenáře toto téma zajímalo, podrobnější informace nalezne v článku o modernizaci výuky (Tichá, 2013). Autorkou tohoto článku a též sbírky úloh M4 je právě Marie Tichá.

Přibližně jedna třetina sbírky je zaměřena na početní úlohy a zbytek je zaměřen na téma geometrie. I přesto, že jsem podrobně prostudovala pouze menší část této sbírky, úlohy na mé téma se vyskytují v poměrně velkém množství. Z tohoto důvodu jsem je zařadila do praktické části - do řešené sbírky úloh. Jsou to úlohy 2.3.1 a 3.2.

1.3.3 Rešerše Matematické olympiády

Matematická olympiáda je soutěž pro žáky základních a středních škol, kterou vyhlašuje Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky. Ve školním roce 2019/2020 se konal již 69. ročník. Během jednoho školního roku se na základních školách konají tři kola. První kolo je domácí, druhé kolo okresní a třetí kolo je krajské. Krajské kolo je určeno pouze 9. třídám.

K této rešerši jsem prostudovala zadání prvních kol matematické olympiády konaných v ročnících:
65. ročník 2015/2016;
66. ročník 2016/2017;
67. ročník 2017/2018;
68. ročník 2018/2019;
69. ročník 2019/2020.
V každém uvedeném ročníku jsem se zabývala zadáním pro celý druhý stupeň základní školy, tzn. zadáním pro 6., 7., 8. i 9. třídu.

Úlohy s více postupy řešení

Úlohy, které se dají řešit více postupy, se objevují ve větším množství. Až na pár výjimek se v každém výše uvedeném ročníku pro každou jednotlivou třídu objevuje minimálně jedna úloha, která lze řešit více různými postupy. Ve své sbírce uvádím například úlohu 2.1.6, která je převzata z 68. ročníku konané soutěže.

Velmi často se objevuje v zadáních pro všechny třídy jeden typ úlohy. Já jsem tento typ zařadila do sbírky pod úlohou 2.1.7.

Úlohy s více výsledky

Úlohy s více výsledky zadané v matematické olympiádě v již zmíněných ročnících se nacházejí v menším množství než úlohy, pro které existuje více postupů řešení. Nezaznamenala jsem, že by se objevilo více takových úloh v jednom zadání (pro jednotlivé třídy), čímž chci říci, že v jednotlivých zadáních se vyskytuje maximálně jedna úloha s více možnými výsledky. Pro třídy jsou tyto úlohy zastoupeny rovnoměrně. Žádná třída se nevychyluje v množství zastoupených úloh s více výsledky.

Téměř vždy, když úloha může mít více výsledků, je tato informace zahrnuta v zadání úlohy. To znamená, že na konci zadání úlohy je údaj typu: urči všechny možnosti, nalezni alespoň 3 různá řešení atd.

V prostudovaných didaktických testech jsem našla pouze jednu výjimku. Zadání úlohy obsahovalo informaci: určete všechny možnosti, ovšem tato úloha má správné řešení pouze jedno. Pro zajímavost vkládám i zadání této úlohy: *„Čtyři rodiny byly na společném výletě. V první rodině byli tři sourozenci, a to Alice, Bětka a Cyril. V druhé rodině byli čtyři sourozenci, a to David, Erika, Filip a Gábina. V třetí rodině byli dva sourozenci, a to Hugo a Iveta. Ve čtvrté rodině byli tři sourozenci, a to Jan, Karel a Libor. Cestou se děti rozdělily do skupin tak, že v každé skupině byly všechny děti se stejným počtem bratrů a nikdo jiný. Jak se mohly děti rozdělit? Určete všechny možnosti“* (MO 2016/2017, s.3).

1.3.4 Rešerše didaktických testů

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (dále jen CZVV) vytváří jednotné přijímací zkoušky. Na svých webových stránkách zveřejňuje testová zadání k procvičování českého jazyka a matematiky.

V rešerši se budu zabývat matematickým testovým zadáním k procvičování pro čtyřleté obory a nástavbová studia z roků 2020, 2019, 2018 a 2017.

Ke každému roku, kromě roku 2020, jsou dostupné 2 didaktické testy z řádných termínů a jeden ilustrační test.

Řádný termín v roce 2020 se ještě nekonal, a tak je k dispozici pouze test ilustrační. Z tohoto testu uvádím ve své sbírce úlohu 2.2.1.

Úlohy s více výsledky

V žádném zmíněném ilustračním ani didaktickém testu jsem nezaznamenala úlohu, která by měla více řešení (výsledků). Jediná možnost, jak v těchto testech narazit na více řešení, je pouze tehdy, když žáci mají vypočítat předepsanou rovnici a výsledkem je nekonečně mnoho řešení. Ovšem to nejsou úlohy, které hledám.

Úlohy s více postupy řešení

Úlohy, které lze řešit více postupy řešení, se v didaktických i ilustračních testech vyskytují ve větší míře. Pokud bych měla porovnat množství úloh s více postupy v těchto testech a v zadání matematické olympiády, shledávám toto množství jako identické. V didaktických testech je sice obsaženo větší množství různých úloh, a tak bych očekávala více takových úloh, které lze řešit různými způsoby. Ovšem také je zde velké množství zadání typu: vypočti, najdi řešení rovnice, přiřaď řešení a úlohy na téma geometrie.

Jako příklad uvádím ve sbírce úlohu 2.3.5 z ilustračního testu 2019. U této úlohy lze najít dvě řešení, a to velmi odlišná svou náročností.

2 Praktická část - Úlohy s jedním výsledkem

V praktické části jsem se věnovala tvorbě sbírky úloh. Tuto část mám rozdělenou na: Úlohy s jedním výsledkem, Úlohy s více výsledky a Souhrnný přehled. První část neboli Úlohy s jedním výsledkem mám dále rozdělenou do čtyř podkapitol - Slovní úlohy týkající se každodenních praktických domácích záležitostí, Slovní úlohy týkající se každodenních praktických školních záležitostí, Slovní úlohy propojené s financemi, Slovní úlohy propojené s fyzikou. V jednotlivých podkapitolách lze najít přibližně 4 řešené úlohy. Výjimkou je podkapitola s názvem Slovní úlohy týkající se každodenních praktických domácích záležitostí, zde jsem zařadila úloh více. Ve druhé části mám řešeny 4 úlohy s více výsledky. Praktickou část uzavírá kapitola s názvem Souhrnný přehled, která slouží k lepší orientaci ve sbírce.

Řešená sbírka úloh je můj hlavní cíl bakalářské práce. Dle mého názoru učitelé svým žákům více způsobů řešení některých úloh neukazují, a to je velká chyba. Doufám, že díky mé sbírce se někteří učitelé odhodlají ukazovat žákům více řešení úloh, žáci se inspirují a jejich zájem o výuku se zvýší.

2.1 Slovní úlohy týkající se každodenních praktických domácích záležitostí

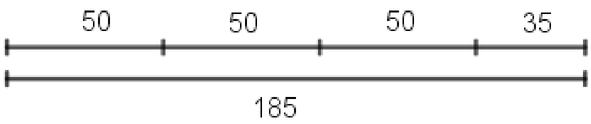
2.1.1 Úloha

„Pavel roste jako z vody. „Už měřím jen o pět decimetrů méně než táta. A ten měří 185 centimetrů.“ Kolik měří Pavel“ (Odvárko, Kadleček 1998a, s.49)?

1. Způsob řešení - výpočet v centimetrech
   táta měří ... 185 cm
   Pavel měří ... o 5 dm méně, než jeho otec
   <u>kolik měří Pavel ... x cm</u>
   5 dm = 50 cm

185 - 50 = 135 cm

Tento výpočet doplním pro jasnost obrázkem č.1.



Obrázek 1: Výška Pavla

2. Způsob řešení - výpočet v decimetrech

   táta měří ... 185 cm

   Pavel měří ... o 5 dm méně, než jeho otec

   <u>kolik měří Pavel ... x dm</u>

   185 cm = 18,5 dm

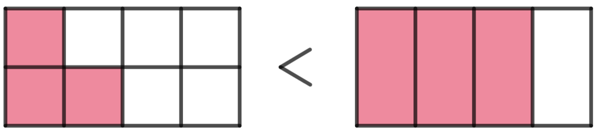
   18,5 - 5 = 13,5 dm

Odpověď pro všechny způsoby řešení je stejná.
Pavel měří 135 centimetrů. V druhém způsobu řešení mám sice uvedenou výšku v decimetrech, ale konečný výsledek můžeme převést na 135 centimetrů.

2.1.2 Úloha

Pepíček dnes slaví své 6. narozeniny. K této příležitosti mu maminka upekla jeho nejoblíbenější jahodový dort s čokoládovou polevou. Maminka při gratulování zmínila, že $\frac{3}{4}$ dortu může sníst sám. Pepíček se ale rozhodl, že chce $\frac{3}{8}$ dortu. Bude mít Pepíček více či méně dortu, než mu původně řekla maminka?

1. Způsob řešení - pomocí obrázku č.2

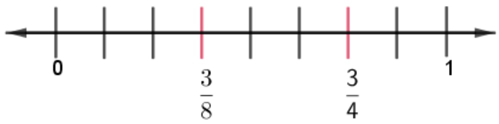


Obrázek 2: Porovnání zlomků

Vytvoříme si obrázek, kde levá strana obrázku odpovídá zlomku $\frac{3}{8}$. Pravá strana naopak odpovídá zlomku $\frac{3}{4}$. Zabarvená část na pravé straně odpovídá dvojnásobku zabarvené části na levé straně. Tudíž $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$.

2. Způsob řešení - pomocí číselné osy

   Na číselné ose na obrázku č.3 si znázorníme oba zlomky. Zlomek $\frac{3}{4}$ je více vpravo, než zlomek $\frac{3}{8}$. Z toho plyne, že $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$.



Obrázek 3: Číselná osa

3. Způsob řešení - křížové pravidlo

Obrázek 4: Křížové pravidlo

   Podle obrázku č.4 spolu vynásobíme příslušné jmenovatele s čitateli.

   To znamená:

$$4 \cdot 3 = 12 < 3 \cdot 8 = 24$$

4. Způsob řešení - zkušeností

   Mám zlomky $\frac{3}{8}$ a $\frac{3}{4}$. Vidím, že oba zlomky mají stejné čitatele. A vím, že pokud zlomky mají stejné čitatele, bude větší ten zlomek, který má menšího jmenovatele.

   To znamená :

$$4 < 8 \Leftrightarrow \frac{3}{4} > \frac{3}{8}$$

5. Způsob řešení - počítáním

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$
$$\frac{3}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}$$

V tomto způsobu řešení jsem od sebe odečetla postupně jednotlivé zlomky. Vidím, že když odčítáme $\frac{3}{4}$ od $\frac{3}{8}$, dostanu se do záporných hodnot. To znamená, že číslo $\frac{3}{4}$ musí být větší.

Tuto úlohu jsem nepřebrala z žádné učebnice, poněvadž se mi nepodařilo najít vhodné zadání. Ovšem myslím si, že je pro žáky vhodná. A tak uvádím vlastní zadání.

2.1.3 Úloha

„Paní Mráčková bude kupovat novou konvici na čaj. Rozhoduje se mezi dvěma konvicemi: první má objem jeden a půl litru, druhá je dvoulitrová. Hezčí je menší.
a) Paní Mráčková i pan Mráček jsou zvyklí na hrnky o objemu $\frac{3}{8}$ litru, jejich dvě děti používají hrnky čtvrtlitrové. Bude jim na společnou snídani stačit menší konvice?
b) Když přijde na návštěvu babička, má také svůj hrnek o objemu $\frac{3}{8}$ litru. Bude jim i potom stačit některá z konvic? Která"(Odvárko, Kadleček 1998b, s.25)?
a) Zápis bude pro všechny způsoby řešení stejný:
menší konvice ... 1,5l
větší konvice ... 2l
hrnky rodičů ... $2 \cdot \frac{3}{8}$l
hrnky dcer ... $2 \cdot \frac{1}{4}$l

1. Způsob řešení

   $$1,5 - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 3 - 3 - 2 - 2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

   Pokud naplníme celou malou konvici vodou a uvaříme čaj pro celou čtyřčlennou rodinu, zůstane v konvici navíc čtvrt litru.

2. Způsob řešení

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+3+2+2}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$
$$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$$

Vypočítala jsem si, že pro uvaření čaje pro celou rodinu potřebují konvici o objemu minimálně $\frac{5}{4}$, což je menší obsah než 1,5 litru.

3. Způsob řešení

$$\frac{3}{8}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$$
$$\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{6-5}{4}=\frac{1}{4}$$

V první části výpočtu jsem si vypočítala součet objemů hrnků, které musíme naplnit z menší konvice. Ve druhé části jsem tedy vypočítala, že nám zůstane v konvici ještě čtvrt litru navíc.

4. Způsob řešení

$$1,5-\frac{5}{4}=1,5-1,25=0,25$$

V tomto případě řešení jsem vycházela z poznatku, že součet objemů hrnků rodiny je $\frac{5}{4}$ litru. Použila jsem řešení, kde jsem si tuto hodnotu převedla na desetinná čísla a s nimiž jsem počítala. Opět nám vychází výsledek, že pokud si rodina koupí menší konvici, budou moct ještě někomu dát čaj v hrnku o objemu čtvrt litru.

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.

Rodině Mráčků bude stačit konvice na čaj o objemu jeden a půl litru.

b) Zápis bude opět pro všechny způsoby řešení stejný:

menší konvice ... 1,5l

větší konvice ... 2l

hrnek babičky ...$\frac{3}{8}$l

hrnky rodičů ... $2 \cdot \frac{3}{8}$l

hrnky dcer ... $2 \cdot \frac{1}{4}$l

1. Způsob řešení

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{4} = \frac{10+3}{8} = \frac{13}{8}$$
$$1,5 < \frac{13}{8} > 2$$

V tomto způsobu jsem využila výpočtu z první části úlohy, a to, že součet objemu hrnků pro čtyřčlennou rodinu je $\frac{5}{4}$ litru. K této hodnotě jsem připočetla objem babiččina hrnku a dále jsem porovnala výslednou hodnotu s konvicemi o objemu 1,5 litru a 2 litry.

2. Způsob řešení

V druhém způsobu řešení si nejdříve vypočítáme součet všech potřebných objemů hrnků.

$$\frac{3}{8} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9+4}{8} = \frac{13}{8}$$

V dalším kroku odečteme vypočítanou hodnotu od objemu menší konvice, což činí 1,5 litru.

$$1,5 - \frac{13}{8} = \frac{3}{2} - \frac{13}{8} = \frac{12-13}{8} = -\frac{1}{8}$$

Získali jsme zápornou hodnotu, což znamená, že menší konvice na čaj pro rodinu i s babičkou stačit nebude, proto tento výpočet zopakujeme i pro větší konvici. Od objemu větší konvice neboli od 2 litrů odečteme vypočítanou hodnotu objemů všech hrnků.

$$2 - \frac{13}{8} = \frac{16-13}{8} = \frac{3}{8}$$

Výsledek jsme dostali kladný, což znamená, že větší konvice stačí pro celou čtyřčlennou rodinu i s babičkou.

Ukázala jsem dle mého názoru dva základní způsoby řešení. Pokud bychom usilovali ještě o další, mohli bychom vytvořit ještě minimálně 2 způsoby obdobného řešení jako v první části úlohy. Jeden z nich by byl založený na sčítání zlomků všech objemů neboli $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ a výsledek bychom následně porovnali, či odečetli od objemů konvic. V druhém řešení bychom převedli zlomky na desetinná čísla a opět následně porovnali či odečetli s již zmiňovanými hodnotami.
Nepovažuji za důležité tyto dva způsoby řešení více rozepisovat, poněvadž by se shodovaly s řešeními z první části.

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.
Pokud babička přijde na návštěvu, menší konvice o objemu 1,5 litru by rodině Mráčkových nestačila, ovšem konvice o objemu 2 litry by již byla vhodná.

2.1.4 Úloha

„Pan a paní Caldovi oznamují oslavu svých stodevatenáctin - tolik let je jim letos dohromady. Kolik let je panu Caldovi a kolik paní Caldové? Víme, že pan Calda je o 9 let starší než paní Caldová“ (Odvárko, Kadleček 1999, s.25).

1. Způsob řešení
   paní Caldová ...x let
   pan Calda ... x+9 let
   dohromady ... 119 let

$$x + x + 9 = 119 \qquad x + 9 = 55 + 9$$
$$2x = 110 \qquad 55 + 9 = 64$$
$$x = 55$$

2. Způsob řešení - pomocí obrázku č.5

Obrázek 5: Znázornění

Pomocí uvedeného obrázku vidíme další řešení:

$$119 - 9 = 110 \qquad\qquad 55 + 9 = 64$$

$$110 : 2 = 55$$

3. Způsob řešení

$$119 + 9 = 128 \qquad\qquad 64 - 9 = 55$$

$$128 : 2 = 64$$

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.

Paní Caldová letos slaví své 55. narozeniny a pan Calda 64. narozeniny.

2.1.5 Úloha

„Aniččině tetě je 35 let, Aničce je 14 let. Za kolik let bude tetě dvakrát tolik let než Aničce“ (Odvárko, Kadleček 1999, s.26)?

1. Způsob řešení

   Anička ... nyní 14 let

   Aniččině tetě ... nyní 35 let

   za kolik let bude tetě 2x tolik, co Aničce... x let

$$2 \cdot (14 + x) = 35 + x$$

$$28 + 2x = 35 + x$$

$$x = 7$$

Aniččině tetě bude za 7 let dvakrát více než Aničce.

2. Způsob řešení

   V tomto řešení použijeme tabulku č.1.

	Věk											
Anička	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Teta	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Násobek 2	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne

Tabulka 1: Výpočet věku

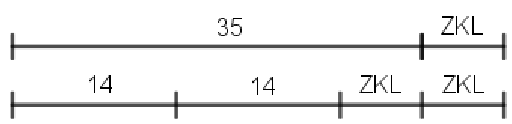
   Dle tabulky je zřejmé, že až tetě bude 42 let a Aničce 21 let, bude tetě dvakrát tolik co Aničce. Nyní je tetě 35 let, do dvojnásobného věku Aničky si bude muset ještě počkat 7 let. Více řešení neexistuje. V tabulce si všimneme, že po Aniččiny 21. narozeniny se nenajde shoda, aby tetě bylo dvakrát tolik co Aničce.

3. Způsob řešení - graficky

   U tohoto způsobu řešení ukazuji řešení na grafu v obrázku č.6.

   V grafu užívám jednu zkratku, a to:

   ZKL = Za kolik let bude tetě dvakrát tolik co Aničce.



Obrázek 6: Grafické řešení

$$35 - 2 \cdot 14 = 7$$

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.

Za 7 let bude tetě dvakrát tolik co Aničce.

2.1.6 Úloha

„Pan Ticháček měl na zahradě tři sádrové trpaslíky: největšímu říkal Mašík, prostřednímu Jířa a nejmenšímu Fanýnek. Protože si s nimi rád hrával, časem zjistil, že když postaví Fanýnka na Jířu, jsou stejně vysocí jako Mašík. Když naopak postaví Fanýnka na Mašíka, měří dohromady o 34 cm víc než Jířa. A když postaví na Mašíka Jířu, jsou o 72 cm vyšší než Fanýnek. Jak vysocí jsou trpaslíci pana Ticháčka“? (MO 2018/2019a , s.3)?

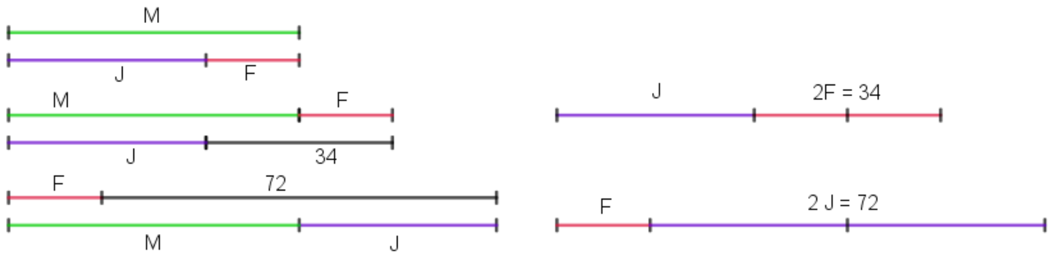
Zápis bude pro všechna řešení stejný:
velikost trpaslíků ... Mašík (= M) > Jířa (= J) > Fanýnek (= F)
postavení Fanýnka na Jířu ... vysocí jako Mašík
postavení Fanýnka na Mašíka ... vyšší o 34 cm než Jířa
postavení Jíři na Mašíka ... vyšší o 72 cm než Fanýnek
velikost jednotlivých trpaslíků ... ?

1. Způsob řešení

   Řešení pomocí tří rovnic o třech neznámých.

$$M + J = F + 72$$
$$J + F = M$$
$$\underline{M + F = J + 34}$$
$$J + F + J = F + 72$$
$$\underline{J + F + F = J + 34}$$
$$2J = 72$$
$$\underline{2F = 34}$$
$$J = 36 \qquad M = F + J$$
$$F = 17 \qquad M = 53$$

2. Způsob řešení - grafické řešení pomocí obrázku č. 7



Obrázek 7: Trpaslíci

Na levé straně obrázku č.7 jsem si nakreslila zadané hodnoty. V první části na pravé straně obrázku si doplňuji již známé hodnoty. Za hodnotu M si doplním hodnoty J a F, tak, jak vím z vrchní části obrázku na levé straně. Tím zjistím, že 2F = 34, což znamená, že F = 17.
V další části na pravé straně postupuji stejným způsobem. Za M si doplním hodnoty J a F. Tímto zjistím hodnotu J. 2J = 72, což znamená J = 36.
Když nyní vím hodnotu F = 17 a J = 36, mohu si vypočítat M. Ze zadání vím, že

$$M = F + J,$$

tedy:

$$M = 17 + 36$$

$$M = 53.$$

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.
Trpaslíci pana Ticháčka měří následovně. Mašík měří 53 cm, Jířa měří 36 cm a nejnižší Fanýnek měří 17 cm.

2.1.7 Úloha

„Ivan a Mirka se dělili o hrušky na míse. Ivan si vždy bere dvě hrušky a Mirka polovinu toho, co na míse zbývá. Takto postupně odebírali Ivan, Mirka, Ivan, Mirka a nakonec Ivan, který vzal poslední dvě hrušky. Určete, kdo měl nakonec víc hrušek a o kolik“(MO 2018/2019a, s.3).

Nejdříve zde uvedu řešení, které zveřejnila na svých webových stránkách Matematická olympiáda. V druhém způsobu řešení ukážu postup, který napadl mne.

1. Způsob řešení

   „Ivan si bral třikrát po dvou hruškách, nakonec tak měl 6 hrušek. Abychom určili, kolik nakonec měla Mirka, postupně odzadu zjistíme, jak se počty hrušek vyvíjely. K tomu si stačí uvědomit, že před každým Ivanovým odebíráním bylo na míse o dvě hrušky víc a před každým Mirčiným odebíráním byl na míse dvojnásobný počet hrušek. Ivan si při svém třetím odebírání vzal poslední 2 hrušky. Mirka si při svém druhém odebírání vzala 2 hrušky, před tím na míse byly 4 hrušky. Ivan si při svém druhém odebírání vzal 2 hrušky, před tím na míse bylo 6 hrušek. Mirka si při svém prvním odebírání vzala 6 hrušek, před tím na míse bylo 12 hrušek. Ivan si při svém prvním odebírání vzal 2 hrušky, původně na míse bylo 14 hrušek. Mirka si celkem vzala 8 hrušek, nakonec tedy měla o dvě hrušky víc než Ivan“ (MO 2018/2019b, s.6).

2. Způsob řešení

   Můj způsob řešení je sestavení rovnice o jedné neznámé.

$$
\begin{aligned}
6+\frac{x-2}{2}+\frac{\frac{x-2}{2}-2}{2}&=x\\
12+x-2+\frac{x-2}{2}-2&=2x\\
-x+\frac{x-2}{2}&=-8\\
-2x+x-2&=-16\\
-x&=-14\\
x&=14
\end{aligned}
$$

Ivan si odebral 3x po dvou hruškách, tudíž si jich vzal 6. Mirka si jich vzala 14 - 6 = 8.

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.
Mirka měla 8 hrušek a Ivan pouze 6 hrušek. To znamená, že Mirka měla o 2 hrušky více.

2.2 Slovní úlohy týkající se každodenních praktických školních záležitostí

2.2.1 Úloha

„Školu navštěvuje 400 žáků. Každý žák školy se učí anglicky nebo německy, někteří studují dokonce oba jazyky. Anglicky se učí 72% žáků školy. Třetina žáků, kteří se učí anglicky, se učí také německy. Kolik žáků se učí německy“ (CZVV 2020, s.11)?

Zápis bude pro obě řešení stejný:
ve škole je ... 400 žáků
anglicky se učí ... 72% žáků školy
oba jazyky se učí ... $\frac{1}{3}$ žáků, kteří se učí anglicky
žáci, kteří se učí německy ... x

1. Způsob řešení

72% z $400 = 288$

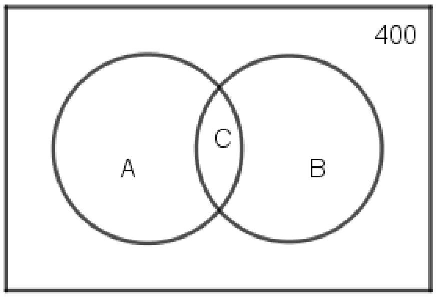
28% z $400 = 112$

288 žáků se učí anglicky, 112 žáků se učí německy. Mezi nimi ovšem máme započítané i ty žáky, kteří se učí oba jazyky. Nyní si tedy vypočteme počet těchto žáků.

$$288 \cdot \frac{1}{3} = 96$$
$$112 + 96 = 208$$

2. Způsob řešení

Pomocí obrázku č.8 ukážu situaci lépe



Obrázek 8: Diagram

A = ti, co se učí pouze anglický jazyk

B = ti, co se učí pouze německý jazyk

C = žáci, co se učí oba jazyky

Z obrázku č.8 vidíme, že potřebujeme zjistit hodnotu B+C.

Nejdříve si vypočítáme 72% z $400 = 288$. S touto hodnotou budeme pracovat a procenta již nebudeme potřebovat.

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= 400 \\
A + C &= 288 & A &= 288 - C \\
\underline{C = \frac{1}{3} \cdot (A + C)} & & A &= 288 - 96 \\
C &= \frac{1}{3} \cdot 288 & A &= 192 \\
C &= 96
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 400 - A - C \\
B &= 400 - 192 - 96 \\
B &= 112
\end{aligned}
$$

Nyní máme vypočítané hodnoty pro A, B i C. Pro vypočtení výsledku potřebujeme hodnotu B+C.

$$B + C = 112 + 96 = 208$$

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.
Německý jazyk se na škole z 400 žáků učí 208 studentů.

2.2.2 Úloha

„Test z matematiky obsahuje 20 úloh. Za každou správně vyřešenou úlohu dostane řešitel 3 body, za každou neprávně vyřešenou nebo neřešenou úlohu se strhávají 2 body. Ondra získal 20 bodů. Kolik úloh vyřešil správně“ (Odvárko, Kadleček 1999, s.26)?

1. Způsob řešení - rovnice o jedné neznámé
   správně řešené úlohy ... +3 body
   špatně řešené a neřešené úlohy ... -2 body
   Ondra celkem získal ... 25 bodů

v testu ... 20 úloh

kolik Ondra vyřešil správně ... x úloh

$$\begin{aligned} 3x - 2(20 - x) &= 25 \\ 3x - 40 + 2x &= 25 \\ 5x &= 65 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

2. Způsob řešení - rovnice o dvou neznámých

   správně řešené úlohy ... +3 body

   špatně řešené a neřešené úlohy ... -2 body

   Ondra celkem získal ... 25 bodů

   v testu ... 20 úloh

   počet Ondrových špatných či neřešených úloh ... y úloh

   kolik Ondra vyřešil správně ... x úloh

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 25 \\ \underline{x + y} &\underline{= 20} \\ 3x - 2y &= 25 \\ \underline{2x + 2y} &\underline{= 40} \\ 5x &= 65 \\ x &= 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 20 \\ 13 + y &= 20 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

3. Způsob řešení - graficky

   Zápis u tohoto způsobu řešení by byl stejný jako u předchozího neboli druhého způsobu řešení. Proto si jej dovolím vynechat a přeskočím rovnou na soustavu rovnic o dvou neznámých.

   V této soustavě si nejprve potřebujeme vyjádřit y, to znamená, že převedeme rovnice na tvar lineární funkce.

$$3x - 2y = 25 \qquad\qquad x + y = 20$$
$$-2y = 25 - 3x \qquad\qquad y = 20 - x$$
$$y = -\frac{25}{2} + \frac{3}{2}x$$

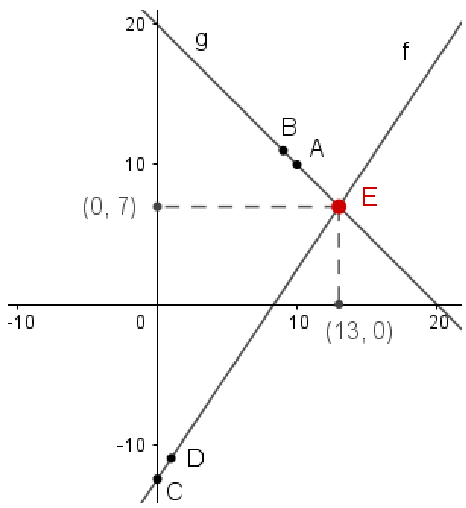
Pro výpočet souřadnic lineárních funkcí použijeme tabulky č.2 a č.3.

x	0	1
y	$-\frac{25}{2}$	-11

Tabulka 2: Výpočet funkce

x	10	9
y	10	11

Tabulka 3: Výpočet druhé funkce



Obrázek 9: Graf lineárních funkcí

Na obrázku č.9 jsou v grafu vidět body A, B, C, D se souřadnicemi z předchozích tabulek č.2 a č.3.

Z bodů A a B máme vytvořenou přímku g a z bodů C a D přímku f. To jsou dvě lineární funkce s průsečíkem E=[13,7]. Tím jsme zjistili výsledek.

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.
Ondra měl v testu z matematiky správně 13 úloh a 7 úloh, které špatně vypočítal nebo je vůbec neřešil.

2.2.3 Úloha

„Délka toku Labe je 1 122 km. Délka toku Labe na území naší republiky je 396 km. Kolik procent z celkové délky toku Labe je na našem území republiky“ (Běloun 2002, s.26)?

1. Způsob řešení - pomocí trojčlenky
   celková délka ... 1 122 km ... 100%
   <u>na území ČR ... 396 km ... x%</u>

   Počítám přímou úměrou.

$$1122km...100\%$$

$$\downarrow \underline{x\%...396km} \downarrow$$

$$1122x = 39600$$
$$x = 35,3\%$$

2. Způsob řešení - pomocí procentové části
   100% ... 1 122 km
   1% ... 11,22 km
   <u>p% ... ?</u>

$$11,22p = 396$$
$$p = 35,3\%$$

Odpověď je pro oba postupy řešení stejná.
Z celkové délky řeky Labe, která je dlouhá 1 122 km, je na našem území 396 km, což činí 35,3% její délky.

2.2.4 Úloha

„Zvětšíme-li číslo x o 20%, dostaneme 360. Kolik je x“ (Odvárko, Kadleček 1998c, s.59)?

1. Způsob řešení - trojčlenkou

   Počítám přímou úměrou.

$$x \ldots 100\%$$

$$\downarrow \underline{120\% \ldots 360} \downarrow$$

$$120x = 36000$$

$$x = 300$$

2. Způsob řešení - přes procentovou část

   120% … 360

   1% … 3

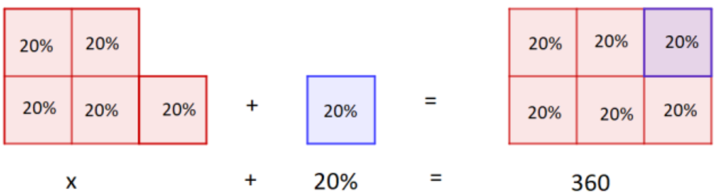
   <u>100% … ?</u>

$$100 \cdot 3 = 300$$

$$x = 300$$

3. Způsob řešení - graficky

   V první části obrázku č.10 jsme si vytvořila část odpovídající 100%. K této části přičtu 20% a získám číslo 360, které znám ze zadání slovní úlohy.



Obrázek 10: Zvětšení čísla x

Začneme pravou stranou rovnice v obrázku č.10. Číslo 360 nám dává obdélník, který je rozdělen dle levé části rovnice. Můžeme jej rozložit na 6 dílků. Tím vytvoříme 360:6=60.
Číslo 60 nám tedy tvoří jeden dílek, který máme označený jako 20%. Od 360 odečteme tedy 20%, což je 60. 360-60=300.
A přicházíme tedy na x=300.

4. Způsob řešení - graficky
K tomuto řešení opět využiji obrázek č.10, který jsem použila již v předchozím řešení, neboť začátek tohoto řešení je obdobný.
Číslo 360 jsem si rozdělila na 6 dílků. Vzniklo mi tedy 360:6=60. Toto číslo tvoří jeden dílek a mám jej označený jako 20%.
Nyní ovšem nevyužijeme operaci odčítání, ale násobení. Potřebujeme zjistit pět dílků.

$$x = 60 \cdot 5$$
$$x = 300$$

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.
Číslo, které jsme zvětšili o 20% a z něhož jsme dostali číslo 360, je číslo 300.

2.3 Slovní úlohy propojené s financemi

2.3.1 Úloha

„Petr šetří na kolo, které je za 960 Kčs. Jestliže své dosavadní úspory ztrojnásobí, bude mu chybět ještě 30 Kčs. Kolik Kčs již Petr našetřil “ (Tichá 1984, s.9)?

Zápis bude pro všechny způsoby řešení stejný
kolo stojí ... 960 Kčs
trojnásobek svých úspor ... chybí mu 30 Kčs do 960 Kčs
Petr má našetřeno ... ?

1. Způsob řešení

$$960 - 30 = 930$$
$$930 : 3 = 310$$

2. Způsob řešení

   Předchozí způsob řešení se může použít také obdobně s neznámou x. Vypadal by takto:

$$3x + 30 = 960$$
$$3x = 930$$
$$x = 310$$

3. Způsob řešení

$$960 : 3 = 320$$
$$30 : 3 = 10$$
$$320 - 10 = 310$$

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.
Na kolo si Petr zatím našetřil 310 Kčs.

2.3.2 Úloha

„Jeden kilogram vážených pomerančů stojí 21 korun; 1,38 kg stejných pomerančů v balíčku je za 31,50 Kč. Které pomeranče jsou dražší - vážené, či balíčkované“ (Odvárko, Kadleček 1998c, s.32)?

1. Způsob řešení

   Pomocí přímé úměry vypočítáme, kolik by stálo 1,38kg volně vážených pomerančů.

$$1 \ldots 21$$

$$\uparrow \underline{1,38 \ldots x} \uparrow$$

$$\frac{1,38}{1} = \frac{x}{21}$$

$$x = 28,98$$

Pokud bychom si nabrali volně prodejných vážených pomerančů přesně 1,38 kg, zaplatili bychom za ně 28,98 korun. Tato cena je nižší než cena za 1,38 kg pomerančů v balíčku.

2. Způsob řešení

   Pomocí přímé úměry vypočítáme, kolik by stál 1kg balíčkovaných pomerančů.

$$1,38 \ldots 31,50$$

$$\uparrow \underline{1 \ldots x} \uparrow$$

$$\frac{1}{1,38} = \frac{x}{31,50}$$

$$31,50 = 1,38x$$

$$x = 22,83$$

   Pokud by obchod nabízel stejných pomerančů v balíčků nejen 1,38 kg, ale i kilogramový balíček, stál by 22,83 korun. To je více, než cena za kilogram volně vážených pomerančů.

3. Způsob řešení

   V tomto způsobu řešení vypočítáme, kolik stojí 1 kg od obou variant pomerančů, a tyto hodnoty potom porovnáváme.

$$21 : 1 = 21$$

$$31,50 : 1,38 = 22,82$$

$$21 < 22,82$$

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.

Vážené pomeranče nabízené v obchodě jsou levnější než balíčkované.

2.3.3 Úloha

„Vedoucí turistického oddílu vyúčtovává poslední akci: „Všechno je zaplaceno a ještě něco zbylo. Je vás v oddílu 26, tak každý dostane zpátky 38,50 Kč.“
„Ale Pavel, Romana a Mirka byli nemocní, neplatili zálohu ani s námi nebyli.“
„Zapomněl jsem, že vás bylo tentokrát jen 23. Tak to musím všechno přepočítat.“
Vypočítej, kolik korun dostane zpět každý z účastníků akce “ (Odvárko, Kadleček 1998c, s.36).

1. Způsob řešení

$$x = 26 \cdot 38,50$$
$$y = \frac{x}{23}$$
$$\frac{1001}{23} = 43,52$$

2. Způsob řešení

$$(26 \cdot 38,50) : 23 = 43,52$$

3. Způsob řešení - trojčlenkou pomocí nepřímé úměry

$$26 \ldots 38,50$$
$$\downarrow \underline{23 \ldots x} \uparrow$$
$$\frac{26}{23} = \frac{x}{38,50}$$
$$26 \cdot 38,50 = 23x$$
$$x = 43,52$$

Odpověď je pro všechny způsoby řešení stejná.

Každý účastník, který se zúčastnil akce, dostane zpátky 43,52 korun.

2.3.4 Úloha

„Třídní pokladník Jarda bude objednávat vstupenky na divadelní představení Jehla v kupce sena. Cena dražších vstupenek je 110 Kč, levnější stojí 90 Kč. Jarda vybral celkem 2620 Kč od 26 zájemců. Nezapsal si ale, kolik z nich si předplatilo dražší vstupenky a kolik vstupenky lacinější. Dokážeš to vypočítat“ (Odvárko, Kadleček 2000, s.69)?

1. Způsob řešení - rovnice o jedné neznámé

   vybraných peněz ... 2620 Kč

   zájemců o divadelní představení ... 26 lidí

   cena dražších vstupenek ... 110 Kč

   cena levnějších vstupenek ... 90 Kč

   počet dražších vstupenek ... x kusů

   počet levnějších vstupenek ... 26-x

$$\begin{aligned} 110x + (26 - x)90 &= 2620 \\ 110x + 2340 - 90x &= 2620 \\ 20x &= 280 \\ x &= 14 \end{aligned} \qquad 26 - x = 26 - 14 = 12$$

2. Způsob řešení - rovnice o dvou neznámých

   vybraných peněz ... 2620 Kč

   zájemců o divadelní představení ... 26 lidí

   cena dražších vstupenek ... 110 Kč

   cena levnějších vstupenek ... 90 Kč

   počet dražších vstupenek ... x kusů

počet levnějších vstupenek ... y kusů

$$x + y = 26 \qquad\qquad x + y = 26$$

$$\underline{110x + 90y = 2620} \qquad\qquad 14 + y = 26$$

$$-90x - 90y = -90 \cdot 26 \qquad\qquad y = 12$$

$$\underline{110x + 90y = 2620}$$

$$20x = 280$$

$$x = 14$$

3. Způsob řešení - pomocí tabulky č.4

PLV	CLV	ZPDV	PDV	VD
0	0	2 620	nD	X
1	90	2 530	23	24
2	180	2 440	nD	X
3	270	2 350	nD	X
4	360	2 260	nD	X
5	450	2 170	nD	X
6	540	2 080	nD	X
7	630	1 990	nD	X
8	720	1 900	nD	X
9	810	1 810	nD	X
10	900	1 720	nD	X
11	990	1 630	nD	X
12	1 080	1 540	14	26
13	1 170	1 450	nD	X
14	1 260	1 360	nD	X

Tabulka 4: Výpočet vstupenek

V tabulce č.4 užívám tyto zkratky:

PLV = Počet levnějších vstupenek,

CLV = Cena za levnější vstupenky,

ZPDV = Zůstatek peněz na dražší vstupenky,

PDV = Počet dražších vstupenek,

VD = Vstupenek dohromady,

nD = Není dělitelné.

V tabulce č.4 je velmi pěkně vidět, že výsledek může být pouze jeden, neboť pouze u dvou případů jsme mohli dopočítat celkový počet vstupenek. Ze zadání víme, že zájemců je 26. Řádek tabulky, kde vyšel součet vstupenek 24, tedy neodpovídá zadání.

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.
12 zájemců si předplatilo levnější vstupenky a 14 zájemců ty dražší.

2.3.5 Úloha

„Cukrárna se měla vybavit 4 stejnými stolky a 20 stejnými židlemi celkem za 9 200 Kč. Nakonec se koupily stolky a židle jen za 7 800 Kč, neboť 1 stolek a 2 židle již nebyly na skladě. Vypočítejte, kolik Kč stojí 1 židle a 1 stolek " (CZVV 2019, s.4).

1. Způsob řešení - sestavení dvou rovnic o dvou neznámých

$$4x + 20y = 9200$$
$$3x + 18y = 7800$$

V této chvíli první rovnici vydělíme 4 a druhou rovnici vydělíme -3. Následně rovnice sečteme.

$$\begin{aligned} x + 5y &= 2300 & & \\ \underline{-x - 6y} &\underline{= -2600} & -x - 6 \cdot 300 &= -2600 \\ -y &= -300 & -x &= -800 \\ y &= 300 & x &= 800 \end{aligned}$$

Postupnými úpravami jsme se dostali k řešení, že jedna židle stojí 300 Kč a jeden stůl stojí 800 Kč.

2. Způsob řešení

   Uvědomíme si, že 4 stolky a 20 židlí stojí 9 200. Celé to vydělíme 4 a zjistíme, že 1 stolek a 5 židlí stojí 2300.

   Nyní si spočítáme, kolik by stál 1 stůl a 2 židle, které nebyly na skladě 9 200 - 7 800 = 1 400.

   V tomto kroku si zjistíme, kolik stojí jedna židle. Víme částku za 1 stůl a 5 židlí a částku za 1 stůl a 2 židle. Pokud tyto částky od sebe odečteme, dostaneme částku tří židlí. 2 300 - 1 400 = 900. 900 korun stojí 3 židle, jedna židle tedy stojí 900 : 3 = 300.

   Cenu stolu si dopočítáme díky tomu, že víme, kolik stojí jedna židle. 1 stůl a 2 židle, které nebyly na skladě, by stály 1 400. Z částky 1 400 odečteme částku dvou židlí a zjistíme cenu stolu.

   1 400 - 300 - 300 = 800.

Odpověď je pro oba postupy řešení stejná.
Jedna židle tedy stojí 300 Kč a jeden stůl stojí 800 Kč.

2.4 Slovní úlohy propojené s fyzikou

V této podkapitole očekávám od řešitelů, že mají znalosti o převodu jednotek hmotnosti, času a též znalost vzorce pro výpočet dráhy a následné odvození vzorce pro rychlost a čas.

2.4.1 Úloha

„Pepa nese maminčiny tašky s nákupem. Je v nich půlka dvoukilogramového chleba, tři čtvrtě kilogramu pomerančů, dvě másla po 0,25 kg, 2 kg hrubé mouky a 1 kg hladké mouky. „Ten nákup má aspoň deset kilo,“ vzdychá Pepa. Má pravdu? Nejprve odhadni, pak počítej“ (Odvárko, Kadleček 1998a, s.35).
Já vynechám krok odhadování výsledku a budu rovnou počítat.

Zápis pro tuto úlohu bude pro všechna řešení stejný.

chleba ... $\frac{1}{2}$ z 2 kg

pomerančů ... $\frac{3}{4}$ kg

máslo ... 2 kusy po 0,25 kg

hrubá mouka ... 2 kg

hladká mouka ... 1 kg

<u>má nákup 10 kg ... ?</u>

1. Způsob řešení - odečtení veškerého nákupu od 10 kg

   $10 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - 2 \cdot 0,25 - 2 - 1 = 10 - 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 3 =$

   $= 6 - 3_{\overline{4}} - \frac{1}{2} = \frac{24-3-2}{4} = \frac{19}{4}$

   Aby nákup vážil 10 kg, chybí Pepovi ještě $\frac{19}{4}$ kilo.

2. Způsob řešení - sečtení všech potravin v tašce

   $1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = 4 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{16+3+2}{4} = \frac{21}{4}$

   Pepa nese nákup o hmotnosti $\frac{21}{4}$ kilo, což znamená, že 10 kilo nenese.

3. Způsob řešení - převedení kil na desetinná čísla

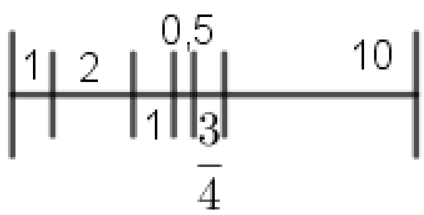
   $\frac{3}{4} = 0,75$

   $\frac{1}{2} = 0,5$

   $1 + 0,75 + 0,5 + 2 + 1 = 5,25$

   Pepa nese nákup o hmotnosti 5,25 kg. Z toho vyplývá, že 10 kilo nenese.

4. Způsob řešení - graficky



Obrázek 11: Nákup

Řešení ukazuji na obrázku č.11. Celá osa značí 10 kg. Na ose je nejdříve oddělený chleba 1kg, dále následuje hrubá mouka 2kg, hladká mouka 1kg, másla 0,5kg a naposledy pomeranče $\frac{3}{4}$kg. Celý nákup tedy váží méně než 10 kg.

2.4.2 Úloha

„Čenda a Pepa se dnes zúčastní srazu Mladých cyklistů. Pepa se stále není schopen vypravit, proto Čenda vyjel napřed sám. Pepa za ním vyrazil za 20 minut. Za jak dlouho Čendu dostihne? Dodáváme, že Čenda jede průměrnou rychlostí 15 km/h, Pepova rychlost jízdy je 25 km/h " (Odvárko, Kadleček 1999, s.29).

Nejdříve si převedeme všechny údaje na stejné jednotky: 20 min = $\frac{1}{3}h$.

1. Způsob řešení - výpočet na základě užití vzorce
   doba jízdy Čendy ... t_1 = x+ $\frac{1}{3}$ h
   doba jízdy Pepy ... t_2 = x h
   průměrná rychlost Čendy ... v_1 = 15 km/h
   průměrná rychlost Pepy ... v_2 = 25 km/h
   Nyní použijeme vzorec $s = v \cdot t$, kde s = dráha, v = rychlost, t = čas.
   dráha, kterou ujel Čenda ... $s_1 = v_1 \cdot t_1$
   dráha, kterou ujel Pepa ... $s_2 = v_2 \cdot t_2$
   Ve chvíli, kdy Pepa dojede Čendu se dráhy rovnají, může se tedy sestavit rovnice: $s_1 = s_2$

$$\begin{aligned}
25x &= 15 \cdot (x + \frac{1}{3}) \\
25x &= 15x + \frac{15}{3} \\
75x &= 45x + 15 \\
30x &= 15 \\
x &= 0,5h \\
0,5h &= 30min
\end{aligned}$$

2. Způsob řešení - úvahou

   náskok Čendy ... 20 min ... $\frac{1}{3}$ h

   průměrná rychlost Čendy ... v_1 = 15 km/h

   průměrná rychlost Pepy ... v_2 = 25 km/h

   Čenda jede průměrnou rychlostí 15 km/h a náskok má 20 minut neboli $\frac{1}{3}$ h. To znamená, že za tuto dobu Čenda ujede:

   $\frac{1}{3} \cdot 15 = \frac{15}{3} = 5$ ... 5 km.

   V době, kdy Pepa vyráží, má Čenda ujeto 5 km. Rozdíl rychlosti chlapců je v: v = v_2 - v_1 = 25 - 15 = 10 ... 10 km/h.

   Z těchto vypočítaných hodnot vyjádříme již jen časovou hodnotu:

   $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} =$ 0,5 ... 0,5 h.

3. Způsob řešení - neznámá je číselná hodnota vzdálenosti

   ujetá dráha Pepy... s_1 = x km

   ujetá dráha Čendy ... s_2 = x km

   doba jízdy Pepy ... t_1

   doba jízdy Čendy ... t_2

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} \qquad t_2 = \frac{s_2}{v_2}$$

$$t_1 = \frac{xkm}{25\frac{km}{h}} \qquad t_2 = \frac{xkm}{15\frac{km}{h}}$$

$$t_1 = \frac{x}{25}h \qquad t_2 = \frac{x}{15}h$$

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{1}{3} \\ \frac{x}{15} - \frac{x}{25} &= \frac{1}{3} \\ 5x - 3x &= 25 \\ 2x &= 25 \\ x &= 12,5 \end{aligned}$$

Pepa dojede Čendu 12,5 km od startu.

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1}$$
$$t_1 = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{25}$$
$$t_1 = \frac{1}{2}$$
$$t_1 = 0,5h$$

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.

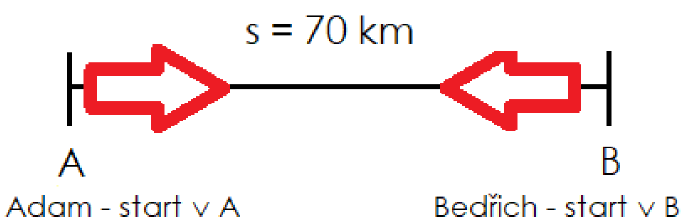
Pepovi se podařilo Čendu dojet přesně za 30 minut od svého startu.

2.4.3 Úloha

„Z místa A vyjel cyklista Adam průměrnou rychlostí 12 km/h. V témž okamžiku vyrazil z místa B, které je od A vzdáleno 70 km, cyklista Bedřich průměrnou rychlostí 16 km/h. Současně vyletěla z řídítek Bedřichova kola moucha a pohybuje se rychlostí 20 km/h směrem k Adamovi. Na řídítkách Adamova kola se odráží a letí zpět k Bedřichovi, pak znovu k Adamovi … a létá tak dlouho, dokud se Adam s Bedřichem nesetkají. Kolik kilometrů moucha nalétá “ (Odvárko, Kadleček 1999, s.39)?

1. Způsob řešení - soustava tří rovnic

   K zápisu této úlohy užívám následující obrázek č.12.



Obrázek 12: Setkání cyklistů

$$v_1 = 12km/h \qquad v_2 = 16km/h$$
$$s_1 = v_1 \cdot t \qquad s_2 = v_2 \cdot t$$

$$
\begin{aligned}
s_1 + s_2 &= 70\\
12t + 16t &= 70\\
28t &= 70\\
t &= 2,5
\end{aligned}
$$

Nyní jsem si vypočítala, že moucha létá dvě a půl hodiny. Ze zadání víme, že létá rychlostí 20 km/h. To dosadíme do vzorečku:

$$
\begin{aligned}
s_3 &= v \cdot t\\
s_3 &= 20 \cdot 2,5\\
s_3 &= 50
\end{aligned}
$$

2. Způsob řešení - počítání z hlavy

   Ze zadání víme, jakou rychlostí oba cyklisti jedou. Víme, že jedou proti sobě, což znamená, že se k sobě přibližují součtem svých rychlostí.

   12 km/h + 16 km/h = 28 km/h

   Dále víme, že dohromady musí ujet dráhu rovnu 70 km, z čehož dostáváme vztah $\frac{70}{28}$ = 2,5.

   To znamená, že 2,5 hodiny je čas, kdy se střetne Adam s Bedřichem a tudíž i čas, kdy moucha přestane létat.

   Dráha se již dopočítá ze vzorce, který je již použit v řešení číslo 1.

$$
\begin{aligned}
s &= v \cdot t\\
s &= 20 \cdot 2,5\\
s &= 50
\end{aligned}
$$

Odpověď je pro oba postupy řešení stejná.

Než se chlapci střetnou, moucha nalétá 50 km.

3 Praktická část - Úlohy s více výsledky

3.1 Úloha

„Jak rozdělíme 44 dětí beze zbytku do tříčlenných a pětičlenných družstev, pokud chceme, aby tříčlenných družstev bylo méně než 10“ (Samková 2018, s. 66)?

1. Způsob řešení

   dětí ... 44

   tříčlenná družstva ... x družstev; x<10

   pětičlenná družstva ... y družstev

$$3x + 5y = 44$$

$$3x = 44 - 5y$$

$$x = \frac{44 - 5y}{3}$$

   V následné tabulce č.5 si postupně volím y a dopočítám x dle zmíněné rovnice.

	Výpočty								
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	13	$\frac{34}{3}$	13	8	$\frac{19}{3}$	$\frac{14}{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$
Splnění podmínek	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne

Tabulka 5: Výpočet družstev

   Dle tabulky je zřejmé, že tato úloha má 2 různá řešení. Pro y > 9 nemá smysl v tabulce uvádět, neboť se dostáváme do záporných hodnot.

2. Způsob řešení

   V tomto způsobu řešení použiji tabulku č.6, ve které užívám tyto zkratky:

   PTD = Počet tříčlenných družstev,

   PDTD = Počet dětí v tříčlenných družstev,

   ZDPD = Zůstatek dětí na pětičlenná družstva,

PPD = Počet pětičlenných družstev,

nD = Není dělitelné.

PLV	CLV	ZPDV	PDV
0	0	44	nD
1	3	41	nD
2	6	38	nD
3	9	35	7
4	12	32	nD
5	15	29	nD
6	18	26	nD
7	21	23	nD
8	24	20	4
9	27	17	nD

Tabulka 6: Výpočet družstev 2. řešení

V tabulce lze vidět, že máme dvě řešení (výsledky).

Odpověď je pro oba postupy řešení stejná.
44 dětí rozdělíme dvěma způsoby do tříčlenných a pětičlenných družstev.
První možnost je, že vytvoří tři tříčlenná družstva a sedm pětičlenných družstev. Druhá možnost řešení je, že vytvoří osm tříčlenných družstev a čtyři pětičlenná družstva.

3.2 Úloha

„Mirka měla 40 Kčs. Šla si koupit knihu za 25 Kčs. Cestou koupila několik tabulek čokolády po 6 Kčs. Když zaplatila, zjistila, že jí na knihu nezbylo. Kolik tabulek čokolády koupila? Kolik je různých možností“ (Tichá 1984, s. 11)?
Zadání bude pro obě řešení stejné:

Mirka měla ... 40 Kčs

kniha stojí ... 25 Kčs

čokoláda stojí ... 6 Kčs

koupila si ... x ks čokolád, víme, že jí nezbylo 25 Kčs na knihu

1. Způsob řešení

   V tomto způsobu řešení si nejprve spočítáme, kolik čokolád si mohla Mirka koupit a kolik za ně utratila.

1 čokoláda = 6 Kčs	5 čokolád = 30 Kčs
2 čokolády = 12 Kčs	6 čokolád = 36 Kčs
3 čokolády = 18 Kčs	7 čokolád = 42 Kčs
4 čokolády = 24 Kčs	

   Vidíme, že 7 a více čokolád už si Mirka rozhodně koupit nemohla, neboť měla pouze 40 Kčs. Tudíž tuto možnost vylučuji.
   Dále si vypočítáme, kolik by Mirka mohla utratit za čokolády, aby jí zbylo 25 Kčs na knihu.

   $$40 - 25 = 15$$

   Ovšem ze zadání víme, že jí na knihu nezbylo, takže Mirka musela utratit více jak 15 Kčs. Z tohoto důvodu musíme vyloučit i možnosti, že by si Mirka koupila 1 nebo 2 čokolády.

   Úloha má 4 možná řešení. Mirka si mohla koupit 3, 4, 5 nebo 6 kusů čokolády.

2. Způsob řešení - nerovnicí

V tomto způsobu řešení použiji nerovnice.

$$
\begin{aligned}
40 - 6x &< 25 \\
-6x &< 25 - 40 \\
-6x &< -15 \\
6x &> 15 \\
x &> \frac{15}{6} \\
x &> \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Pokud by někomu nevyhovovaly zlomky, můžeme použít převod zlomků na desetinná čísla $\frac{5}{2} = 2{,}5$. Tedy x $>$ 2,5.

Mirka si tedy koupila více jak 2,5 čokolády. Z toho plyne, že si koupila minimálně 3 čokolády, nejvýše však 6 čokolád. Na to, aby si koupila 7 čokolád, jí 2 Kčs chyběly.

Odpověď je pro oba postupy řešení stejná.

Tato úloha má 4 různá řešení, a to:

Mirka si koupila 3 čokolády za 18 Kčs.

Mirka si koupila 4 čokolády za 24 Kčs.

Mirka si koupila 5 čokolád za 30 Kčs.

Mirka si koupila 6 čokolád za 36 Kčs.

3.3 Úloha

„Z 25 dětí ve třídě umí 18 lyžovat a 13 bruslit. Kolik dětí ovládá oba sporty“ (Samková 2018, s.66)?

1. Způsob řešení

   ve třídě ... 25 dětí

   počet dětí, které umí lyžovat ... 18 dětí

   počet dětí, které umí bruslit ... 13 dětí

   počet dětí, které umí oba sporty ... x dětí

oba sporty	zbytek lyžařů	zbytek bruslařů	zbytek, co nebruslí ani nelyžuje
13	5	0	7
12	6	1	6
11	7	2	5
10	8	3	4
9	9	4	3
8	10	5	2
7	11	6	1
6	12	7	0
5	13	8	-1
4	14	9	-2

Tabulka 7: Výpočet sportů

Dle tabulky č.7 je zřejmé, že dětí, které umí lyžovat a zároveň bruslit, musí být více nebo rovno počtu šest. Pro hodnotu menší než šest se ve výpočtech dostáváme do záporných hodnot.

Tato úloha má 8 různých řešení.

2. Způsob řešení

   ve třídě ... 25 dětí

   počet dětí, které umí lyžovat ... 18 dětí

   počet dětí, které umí bruslit ... 13 dětí

   počet dětí, které umí oba sporty ... ?

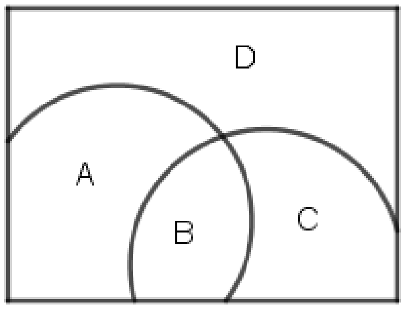
   Pro tento typ řešení použiji obrázek č.13.

   pouze lyžuje ... A

   pouze bruslí ... C

   umí lyžovat i bruslit ... B

   žádný sport ... D



Obrázek 13: Vennův diagram

$$A + B + C + D = 25$$
$$A + B = 18 \qquad A = 18 - B$$
$$B + C = 13 \qquad C = 13 - B$$

Nyní máme vytvořené rovnice, do nichž si budeme volit $D \geqslant 0$ a dopočítávat hodnoty pro A, B a C.
Výpočet uvedu pouze pro první možnou hodnotu D = 0.

$$D = 0$$

$$A + B + C = 25$$
$$A = 18 - B \qquad A = 12$$
$$\underline{C = 13 - B} \qquad C = 7$$
$$(18 - B) + B + (13 - B) = 25$$
$$\underline{-2B + B = 25}$$
$$B = 6$$

V dalších případech (D = 1, D = 2, ...) vkládám pouze tabulku č.8
s dopočítanými hodnotami A, B a C. Výpočet rovnic by byl vždy obdobný jako pro D = 0.

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	12	11	10	9	8	7	6	5	4
C	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

Tabulka 8: Výpočet lyžařů a bruslařů

V tabulce č.8 vidíme, že poslední řešení, které je v tabulce uvedené, není správné, neboť se dostáváme do záporných hodnot. Tudíž správné tvrzení je: $0 \leqslant D \leqslant 8$.

Odpověď je pro všechny postupy řešení stejná.
Tato úloha má 8 různých řešení, a to:
13 dětí dělá oba sporty, 5 dětí umí pouze lyžovat, 7 dětí žádný sport;
12 dětí dělá oba sporty, 6 umí pouze lyžovat, 1 umí pouze bruslit, 6 dětí neumí ani lyžovat ani bruslit;
11 dětí dělá oba sporty, 7 umí pouze lyžovat, 2 umí pouze bruslit, 5 dětí neumí ani lyžovat ani bruslit;
10 dětí dělá oba sporty, 8 umí pouze lyžovat, 3 umí pouze bruslit, 4 děti neumí ani lyžovat ani bruslit;
9 dětí dělá oba sporty, 9 umí pouze lyžovat, 4 umí pouze bruslit, 3 děti neumí ani lyžovat ani bruslit;
8 dětí dělá oba sporty, 10 umí pouze lyžovat, 5 umí pouze bruslit, 2 děti neumí ani lyžovat ani bruslit;
7 dětí dělá oba sporty, 11 umí pouze lyžovat, 6 umí pouze bruslit, 1 dítě neumí ani lyžovat ani bruslit;
6 dětí dělá oba sporty, 12 umí pouze lyžovat, 7 umí pouze bruslit.

3.4 Úloha

„Standa, Pepa a Karel mají průměrně 15 kuliček. Kolik kuliček má Standa a kolik Pepa, jestliže Karel má 25 kuliček“ (Samková 2019, s. 231)?

Standa ... x kuliček

Pepa ... y kuliček

Karel ... 25 kuliček

průměrný počet kuliček chlapců ... 15 kuliček

$$\frac{x+y+25}{3} = 15$$
$$x+y+25 = 45$$
$$x+y = 20$$
$$x = 20 - y$$

V následující tabulce č.9 si volím hodnotu y a dopočítám x dle zmíněné rovnice.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

Tabulka 9: Výpočet kuliček

Počet řešení (výsledků) je 21.
Jednotlivě Standa a Pepa mohou mít minimálně 0 kuliček a maximálně 20 kuliček. Pokud by jeden z nich měl například 21 kuliček, dle tabulky je zřejmé, že druhý hoch by měl -1 kuličku, což je nereálná situace.
Všechny výsledky jsou zřejmé dle tabulky č.8.
Já zde uvedu odpověď, která mi připadá nejspravedlivější. Oba chlapci mají stejný počet kuliček, to znamená 10 kuliček. Avšak jak jsem zmínila výše, je možných dalších 20 řešení.

4 Praktická část - Souhrnný přehled

Na následující stranu přikládám tabulku č.10, která slouží k přehledu řešených úloh. V této tabulce lze najít základní charakteristiku jednotlivých úloh - počet čísel v zadání dané úlohy, počet uvedených postupů řešení, počet řešení (výsledků) a zdroj (odkud je úloha převzata).

V této tabulce používám následující zkratky:
PČVZ = Počet čísel v zadání,
PUPŘ = Počet uvedených postupů řešení,
PŘ(V) = Počet řešení (výsledků).

U zdrojů používám následující zkratky:
U = Učebnice,
SÚ = Sbírka úloh,
MO = Matematická olympiáda,
CZVV = Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání.

Čísla ve zdrojích odpovídají ročníkům. Např.:
U6 = Učebnice pro 6. ročník,
PB = Úloha, jejíž autorkou jsem já, Petra Bézová,
MO6 = Matematická olympiáda pro 6. ročník,
CZVV9 = Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání pro 9. ročník,
ČLS = Článek, jehož autorkou je Libuše Samková.

Úloha	PČVZ	PUPŘ	PŘ(V)	Zdroj
2.1.1	2	2	1	U6
2.1.2	3	5	1	PB
2.1.3	7	4	1	U7
2.1.4	2	3	1	U9
2.1.5	3	3	1	U9
2.1.6	3	2	1	MO6
2.1.7	3	2	1	MO6
2.2.1	3	2	1	CZVV9
2.2.2	4	3	1	U8
2.2.3	2	2	1	SÚ
2.2.4	2	4	1	U7
2.3.1	3	3	1	SÚ
2.3.2	4	3	1	U7
2.3.3	3	3	1	U7
2.3.4	4	3	1	U9
2.3.5	8	2	1	CZVV9
2.4.1	7	4	1	U6
2.4.2	3	3	1	U8
2.4.3	4	2	1	U8
3.1	4	2	2	ČLS
3.2	3	2	4	SÚ
3.3	3	2	8	ČLS
3.4	2	1	21	ČLS

Tabulka 10: Přehled úloh

Závěr

Ve své bakalářské práci Matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení a/nebo více řešení, jsem chtěla upozornit na výhody a přínos těchto úloh ve výuce matematiky. Mně osobně se polyvalentní úlohy velice zamlouvají, neboť ve většině tříd se najde žák, kterého matematika nebaví, nezajímá nebo mu prostě nejde. Každý jsme jiný, a tak je pochopitelné, že někdo má talent například na jazyky a někdo jiný na matematiku. Líbí se mi myšlenka, že žák, který se opravdu snaží, ale není na matematiku nejchytřejší, nalezne jednodušší řešení i přesto, že někteří žáci dokážou nalézt řešení náročnější. Pro vyučujícího je tato situace poněkud složitější, poněvadž není snadné vytvořit spravedlivé hodnocení. Myslím, že pokud vyučující zařadí tento typ úloh do hodin a předvede více způsobů, jak danou úlohu řešit, či jak dojít k více správným výsledkům, mohl by se mezi žáky zvýšit počet správných řešitelů.

K teoretické části jsem prostudovala literaturu na téma „otevřený přístup k matematice“, kde jsem zjistila, jaké vlastnosti může mít otevřená úloha. Stručně jsem přiblížila pojem „slovní úloha“ a její vztah s reálnými situacemi. Na závěr teoretické části jsem vytvořila rešerši učebních pomůcek, přesněji učebnic matematiky pro 2. stupeň základních škol od autorů Odvárko, Kadleček, dále Matematické olympiády a didaktických testů, které jsou tvořeny Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání.

Praktická část obsahuje řešenou sbírku úloh, pro které existuje více postupů nebo více řešení (výsledků). Převahu mají úlohy, pro které existuje více postupů řešení, nad úlohami s více než jedním výsledkem. Důvodem je, že úlohy s více než jedním výsledkem jsou velmi podobné a obdobný je i jejich postup řešení. Mezi úlohy s více postupy řešení jsem se snažila zařadit různorodé typy úloh, abych mohla ukázat co nejvíce možných způsobů řešení různých obtížností. Závěr praktické části tvoří kapitola „Souhrnný přehled“, která slouží k lepší orientaci ve sbírce.

Psaní celé bakalářské práce pro mne bylo velmi přínosné. Mým cílem bylo předložit obvyklé typy úloh, se kterými se žáci běžně setkávají. Je pravděpodobné, že úlohy, které předkládám, mohou mít i jiné postupy řešení, než ty, které uvádím. Vždy záleží na konkrétním řešiteli, jak si s danou úlohou poradí.

Seznam použité literatury a zdrojů

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* dot.8.upr.vyd.. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-104-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2002. 84 s. ISBN 80-210-3022-4.

DIVÍŠEK, J.: *Didaktika matematiky pro učitelství 1.stupně ZŠ.* Praha:SPN,1989. ISBN 80-04-20433-3.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika (1) pro 6. ročník základní školy.*dot.1.vyd. Praha:Prometheus,1998a. ISBN 80-7196-066-7.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika (1) pro 7. ročník základní školy.* Praha:Prometheus,1998b. ISBN 80-7196-111-6.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika (2) pro 7. ročník základní školy.* Praha:Prometheus,1998c. ISBN 80-7196-126-4.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika (2) pro 8. ročník základní školy.* Praha:Prometheus,1999. ISBN 80-7196-167-1.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika (1) pro 9. ročník základní školy.* Praha:Prometheus,2000. ISBN 80-7196-194-9.

SAMKOVÁ, Libuše (2019) *Polyvalentní úlohy v matematice.* Učitel matematiky, 27(4), s. 244-251.

SAMKOVÁ, Libuše (2018) *Uplatnění otevřeného přístupu k matematice v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ* – empirická studie v kontextu badatelsky orientovaného kurzu. Studia Paedagogica, 23(3), s. 49-60.

Tichá, Marie (2013). Modernizace vyučování matematice v letech 1965 - 1985. Orbis scholae, 7(1), s. 119-130.

TICHÁ, Marie (1984). *M4 - Sbírka úloh.* Praha: Jednota čs. matematiků a fyziků.

Seznam použitých internetových zdrojů dostupných online

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. 2019. *Ilustrační test 2019.* Dostupné z:
`https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/JPZ2019_IT_MA_4lete_test_M9PID19C0T01.pdf`
Staženo dne 20.4.2020.

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. 2020. *Ilustrační test 2020.* Dostupné z:
`https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/IT_2020/M9PID20C0T01_ilustracni_test_2020_9_testovy_sesit.pdf`
Staženo dne 6.4.2020.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA. 2016/2017. *Zadání, 66. ročník.* Dostupné z:
`http://www.matematickaolympiada.cz/media/3184763/z66.pdf`
Staženo dne 6.3.2020.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA. 2017/2018. *Zadání, 67. ročník.* Dostupné z:
`http:http://www.matematickaolympiada.cz/media/3528323/z67.pdf`
Staženo dne 6.3.2020.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA. 2018/2019a. *Zadání, 68. ročník.* Dostupné z:
`http://www.matematickaolympiada.cz/media/4989179/z68.pdf`
Staženo dne 6.3.2020.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA. 2018/2019b. *Z6, 68. ročník.*

Dostupné z:

`http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433860/z68i-6.pdf`

Staženo dne 20.4.2020.

Seznam obrázků

1 Výška Pavla 18
2 Porovnání zlomků 18
3 Číselná osa 19
4 Křížové pravidlo 19
5 Znázornění 24
6 Grafické řešení 25
7 Trpaslíci 27
8 Diagram 30
9 Graf lineárních funkcí 33
10 Zvětšení čísla x 35
11 Nákup 44
12 Setkání cyklistů 47
13 Vennův diagram 54

Seznam tabulek

1 Výpočet věku 25
2 Výpočet funkce 33
3 Výpočet druhé funkce 33
4 Výpočet vstupenek 41
5 Výpočet družstev 49
6 Výpočet družstev 2. řešení 50
7 Výpočet sportů 53
8 Výpočet lyžařů a bruslařů 55
9 Výpočet kuliček 56
10 Přehled úloh 58