Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra informatiky a matematiky

Teorie grafů: motivační úlohy

Bakalářská práce

Autor:	Jaroslav Šír
Studijní program:	Informatika se zaměřením na vzdělávání Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Eva Milková, Ph.D.

Hradec Králové říjen 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, z kterých jsem vycházel.

....
Jaroslav Šír

V Hradci Králové dne 20. 3. 2015

Poděkování

Děkuji vedoucí mé bakalářské práce prof. RNDr. Evě Milkové, Ph.D. za ochotu, pomoc a cenné rady při zpracování bakalářské práce. Díky jejím zkušenostem a důslednému přístupu se tato práce velmi zlepšila a mnohé jsem se tím naučil.

Anotace

ŠÍR, J. *Teorie grafů: motivační úlohy.* Hradec Králové, 2014.
Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové.
Vedoucí bakalářské práce Eva Milková. 58 s.

Cílem této bakalářské práce je ukázat vazbu mezi teorií grafů a praxí. Jak lze teorii probíranou ve škole použít či aplikovat při řešení reálných situací a problémů. Důraz je také kladen na jistou formu motivace ke studiu tohoto oboru, vytvoření kladného vztahu k probírané látce. Bakalářská práce je zaměřena na eulerovské a rovinné grafy, barevnost a hamiltonovské grafy. V tomto pořadí jsou také vytvořeny hlavní kapitoly této práce.

Annotation

ŠÍR, J. *Graph Theory: motivational tasks.* Hradec Králové, 2014.
Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové.
Thesis Supervisor Eva Milková. 58 p.

The main aim of this bachelor thesis is to demonstrate the connection between the theory of graphs and practice. It shows how the theory, which is taught at schools, can be applied in the real situations and for solving the real problems. It places emphasis on a certain form of motivation for studying this subject and on creation of a positive attitude of student towards this topic. The bachelor thesis is focused on the Eulerian and planar graphs, colourness and Hamiltonian graphs. In this order each of these topics creates a separate chapter.

Obsah

Úvod

Teorie grafů je matematická disciplína. Jako počátek teorie grafů se uvádí rok 1736, za který se zasloužil jeden z nejvýznamnějších matematiků vůbec, Leonhard Paul Euler [17].

Často se v různých situacích v matematice, informatice, ale mnohdy i ve zcela odlišných oborech a úlohách setkáváme s tím, že lze celý problém vystihnout pomocí grafu. Grafem myslíme jisté schéma, sestávající především z konečné množiny bodů a spojnic mezi některými dvojicemi bodů. Například body mohou představovat pozvané hosty na večírek a spojnice ty dvojice hostů, kteří se již navzájem znají. Dalším příkladem může být silniční síť, kde body představují křižovatky a uvedené spojnice vyznačují silniční propojení. Také elektrotechnická schémata a zapojení mívají obdobný charakter. Body pak označujeme jako vrcholy grafu a spojnice jako jeho hrany. Matematickou abstrakcí podobných i výše uvedených schémat je pojem graf [5].

Mně osobně teorie grafů natolik zaujala, že jsem se rozhodl o ní napsat bakalářskou práci. Práce je rozdělena do čtyř hlavních kapitol (viz následující část), každá z nich obsahuje nejprve uvedení do problematiky a motivaci. Pak následuje souhrn potřebné teorie a typové úlohy na procvičení. Úlohy jsou koncipovány tak, aby souvisely s praxí, což podporuje rozvoj asociací běžných situací s teorií grafů.

Tato práce nemá za cíl učit teorii grafů. Jejím hlavním přínosem má být ukázat souvislosti reálných problémů v praxi a využití teorie grafů k jejich řešení. V práci již nejsou vysvětlovány úplné základy teorie grafů, protože předpokládám, že čtenář má již nějaké základní vědomosti v této matematické disciplíně.

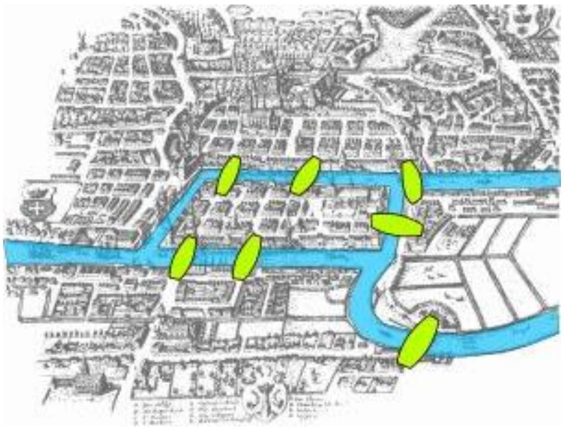
Teoretická část

V bakalářské práci se zaměřujeme na eulerovské a rovinné grafy, barvení grafů a hamiltonovské grafy. Jak je již uvedeno v úvodu, každému tématu odpovídá jedna kapitola. Ta nejprve obsahuje motivační část, neboli seznámení s problematikou a krátké připomenutí historie. Dále stručné vysvětlení teorie potřebné k pochopení a řešení úloh, která je převzata z publikace Teorie grafů a grafové algoritmy [6]. Pak následuje demonstrace teorie na vzorových úlohách. Úlohy jsou často inspirovány nebo poupraveny z různých zdrojů. Snažil jsem se prohledat velké množství knih, internetových stránek, časopisů, ale také jsem vymýšlel své pokud možno originální znění, abych pouze neopakoval již známé příklady. V celém textu pracujeme s obyčejným konečným grafem (prostý, neorientovaný graf bez smyček).

1 Eulerovské grafy

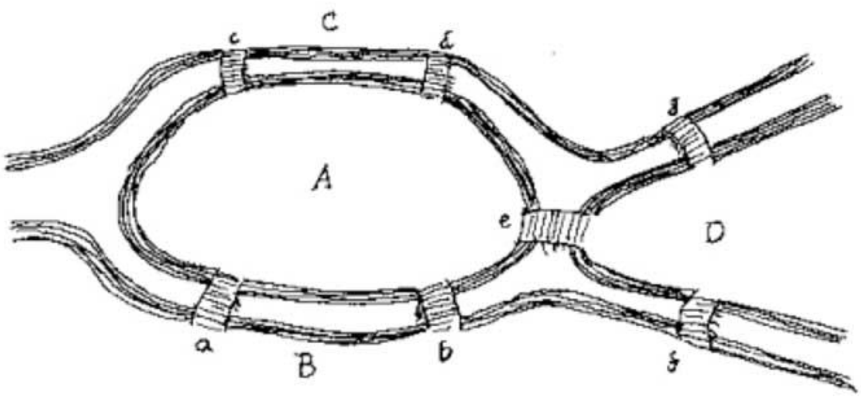
1.1 Motivace

Vznik této teorie se váže k roku 1736, kdy se švýcarský matematik Leonhard Euler snažil vyřešit na první pohled jednoduchou úlohu. V tehdejším městě Královec (dnes Kaliningrad) teče řeka Pregola a na ní je několik ostrovů, které jsou spojeny mosty se zbytkem města (*Obrázek 1*).



Obrázek 1: Sedm mostů města Královce

Euler měl za úkol vymyslet, zda je možné vyjít z nějakého břehu nebo ostrova a udělat si procházku skrze město tak, aby se přes každý most prošlo právě jednou.
Euler zjistil a dokázal, že takovou procházku není možné uskutečnit. Jeho pojetí a vyřešení problému zahrnovalo dva hlavní kroky. Euler si nejprve nahradil mapu města jednoduchým digramem, viz (*Obrázek 2*), který vystihoval to podstatné [1].



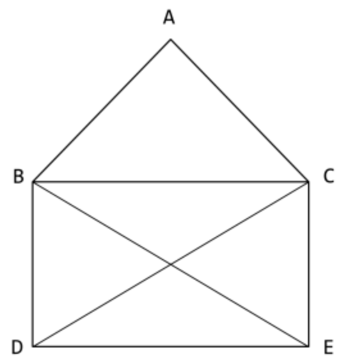
Obrázek 2: Eulerovo schéma města

Dále formuloval celý problém, už bez potřeby diagramu, tak že, si označil čtyři území písmeny *A, B, C, D* a sedm mostů spojujících je pomocí malých písmen *a, b, c, d, e, f, g*, kde most *a* spojuje ostrov *A* s břehem *B*, most *e* spojuje ostrov *A* s břehem *D*, a tak dále.

Tento přístup je příkladem toho, co dnes označujeme jako graf a eulerův problém nalezení sekvence osmi písmen (vrcholů grafu) s určitou vlastností, souvisí s existencí speciálního typu tahu v grafu. Nazýváme ho eulerovský tah [1].

Pro jednoduchou představu - graf obsahující eulerovský tah, čili eulerovský graf, lze nakreslit jedním tahem, aniž bychom zvedli tužku z papíru. V případě sudého stupně všech vrcholů můžeme začít kreslit z libovolného vrcholu a v tom samém opět skončíme. V případě dvou vrcholů lichého stupně musíme v jednom z nich začít a vždy v tom druhém skončíme [17].

Viz populární úloha kreslení domečku jedním tahem - je to eulerovský graf, protože obsahuje otevřený eulerovský tah. Kreslení musíme začít buď v prvním, nebo v druhém lichém vrcholu (*Obrázek 3*).



Obrázek 3: Úloha kreslení domečku jedním tahem

Eulerovské grafy mají široké využití v praxi. Mnoho reálných problémů se dá na ně převést a díky tomu najít jejich řešení.

1.2 Teorie

Pro správné pochopení dále uvedeného textu si nejprve definujeme potřebné základní pojmy, přičemž předpokládáme, že čtenář zná elementární pojmy z teorie grafů.

Definice 1.1

Sled je libovolná posloupnost hran a vrcholů, které na sebe navazují.

Tah je sled určité délky s navzájem různými hranami.

Pomocí těchto pojmů již můžeme definovat eulerovský graf.

Definice 1.2

Eulerovský tah v grafu G je uzavřený nebo otevřený tah, který obsahuje všechny hrany grafu G.

Eulerovský graf je souvislý graf G, ve kterém existuje **eulerovský tah**.

Důležitou větou, která podává obecnou charakteristiku eulerovských grafů, je následující věta 1.1.

Věta 1.1

Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:

Graf G je eulerovský právě tehdy, když graf G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně, nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Při hledání eulerovských tahů můžeme využít následujícího algoritmu, který je uveden v práci [6].

Algoritmus 1.1 (nalezení eulerovského tahu)

Nechť je dán eulerovský graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a m hranami. Nechť vrchol v je vrchol množiny V, přičemž jsou-li všechny vrcholy grafu G sudého stupně, pak v je libovolný vrchol, má-li graf G právě dva vrcholy stupně lichého, je v jeden z nich. Úkolem je nalézt eulerovský tah grafu G.

začátek

na počátku nechť je každá hrana grafu G neobarvená. Nechť zásobník Z a zásobník ET je prázdný. Vlož vrchol v do zásobníku Z;

dokud *je zásobník Z neprázdný* **opakuj**

začátek

x := vrchol ležící na posledním místě v zásobníku Z;

jestliže *x je koncový vrchol neobarvené hrany {x, y}* **pak**

začátek

zpracuj hranu {x, y} a obarvi ji zeleně;

vlož vrchol y do zásobníku Z;

konec

jinak *(tj. v případě, že x není koncovým vrcholem žádné neobarvené hrany)*

začátek

odeber vrchol x ze zásobníku Z;

vlož vrchol x do zásobníku ET;

konec;

konec;

konec.

Zásobník ET obsahuje nalezený eulerovský tah.

V případě, že daný graf nemusí být eulerovský, může nás zajímat nalezení *minimálního počtu tahů obsahujících všechny hrany daného grafu*, tzv. minimální pokrytí hran grafu tahy. Tento problém řešíme jednoduše pomocí modifikovaného algoritmu na hledání eulerovského tahu, převzatý z práce [6].

Algoritmus 1.2 (nalezení minimálního pokrytí všech hran grafu tahy)

1. V daném grafu G zjistíme počet vrcholů lichého stupně. V případě 0 nebo 2 vrcholů lichého stupně je tato úloha přímo úlohou vyhledání eulerovského tahu.
2. V případě p vrcholů lichého stupně, $p \geq 4$, provedeme doplnění grafu G na graf G' tak, aby graf G' byl eulerovský, tj. do grafu G doplníme $p/2$ nových vrcholů w_1, w_2, …, $w_{p/2}$ a každý vrchol w_i, $i = 1, …, p/2$, spojíme s právě dvěma vrcholy grafu G, které mají lichý stupeň (tím se z nich stanou vrcholy stupně sudého).
3. V grafu G' vyhledáme uzavřený eulerovský tah.

4. Z nalezeného eulerovského tahu odebereme vrcholy w_1, w_2, …, $w_{p/2}$, čímž získáme $p/2$ tahů, což je minimální možný počet tahů obsahujících všechny hrany daného grafu.

Dodejme jak je uvedeno v [6], že výsledný tvar jednotlivých tahů záleží na tom, jakým způsobem byly nové vrcholy w_1, w_2, …, $w_{p/2}$, a hrany do grafu přidány. Počet získaných tahů pokrývajících původní daný graf (všechny jeho hrany) je však samozřejmě vždy roven $p/2$.

Následující algoritmus, je komplikovanější. Využívá opět algoritmu na hledání eulerovského tahu, ale navíc i znalosti z oblasti párování. Problematika párování zde není vysvětlena, protože je to již nad rámec této práce. Celý algoritmus je převzat z knihy Jiřího Demela [2], kde je možno se také dozvědět více o zmiňovaném párování.

Algoritmus 1.3 (nalezení minimálního sledu obsahujícího všechny hrany)

1. Pro každou dvojici vrcholů lichého stupně x, y vypočteme délku nejkratší (neorientované) cesty z vrcholu x do vrcholu y. Označme tuto délku $u(x, y)$.
2. Na množině L vrcholů lichého stupně definujeme úplný graf $\boldsymbol{K}$, jehož hrany jsou ohodnoceny délkami $u(x, y)$ pro $x, y \in L$. V tomto grafu nalezneme nejlevnější perfektní párování P.
3. Pro každou dvojici vrcholů x, y, která je spojena hranou z párování P, přidáme ke grafu $\boldsymbol{G}$ kopie hran, které tvoří nejkratší cestu mezi vrcholy x, y. V grafu $\boldsymbol{G}'$, který získáme přidáním všech těchto hran, budou mít všechny vrcholy sudý stupeň.
4. V získaném grafu $\boldsymbol{G}'$ nalezneme eulerovský tah. Tento tah samozřejmě prochází všemi přidanými hranami, což odpovídá opakovaným průchodům některými hranami původního grafu $\boldsymbol{G}$. Nahradíme-li tedy v eulerovském tahu všechny přidané hrany původními (o stejné délce), získáme hledaný nejkratší sled, který pokrývá všechny hrany grafu $\boldsymbol{G}$.

1.3 Úlohy

Obecné typy úloh:

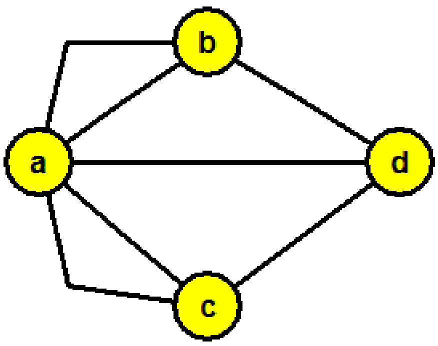
1. Rozhodněte, zda v daném grafu existuje eulerovský tah. **Úloha 1**
2. V daném grafu sestrojte eulerovský tah. **Úloha 2**

Navazující typy úloh:

3. V daném grafu určete nejmenší počet tahů (nikoli eulerovských), které pokrývají všechny hrany grafu a tahy vypište. **Úloha 3**
4. V daném souvislém grafu, jehož hrany jsou ohodnoceny kladnými čísly, najděte nejkratší uzavřený sled, který obsahuje (alespoň jednou) každou hranu grafu. **Úloha 4**

1.3.1 Úloha 1

Zadání:
Rozeberme si předchozí úlohu se sedmi mosty z části motivace. Mosty budou reprezentovat hrany grafu a jednotlivá území budou reprezentovat vrcholy grafu. Celý plánek města si můžeme pro názornost vyjádřit pomocí grafu. Existuje v daném grafu (*Obrázek 4*) eulerovský tah?



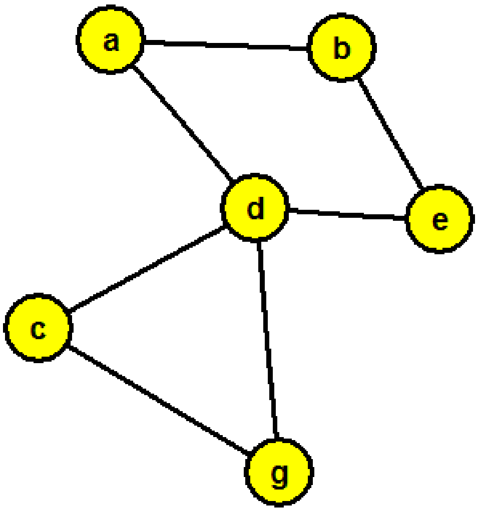
Obrázek 4: Interpretace pomocí grafu

Řešení:
Všimněme si ohodnocení jednotlivých vrcholů. Všechny vrcholy jsou lichého stupně (3, 3, 3, 5), proto dle věty 1.1 není možné aby v zadaném grafu existoval eulerovský tah, a to ani uzavřený, ani otevřený.

1.3.2 Úloha 2

Zadání:

Studenti při hodině matematiky dostali úlohu nakreslit jedním tahem daný útvar (*Obrázek 5*). Pokud je to možné, zapište pomocí posloupnosti vrcholů postup řešení.

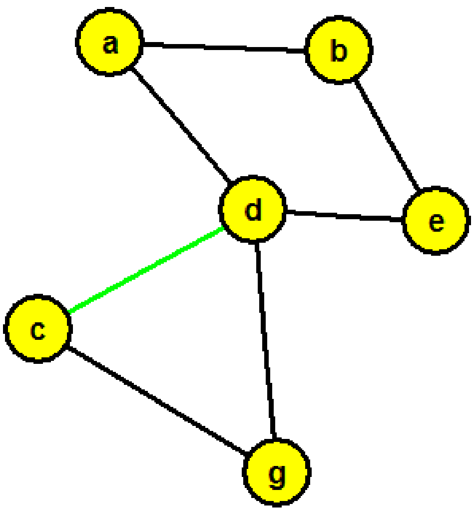


Obrázek 5: Zadání úlohy

Řešení:

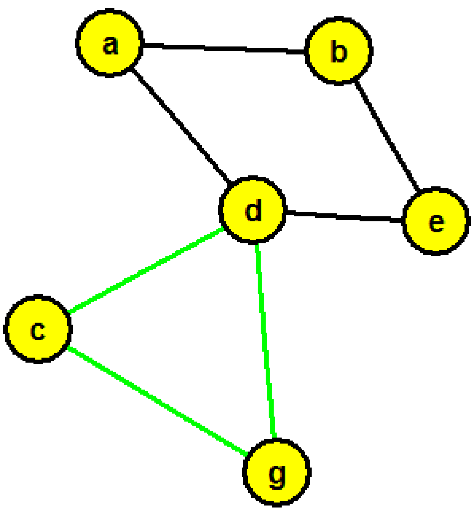
Uvědomíme si, že zadaný graf má všechny vrcholy sudého stupně, tudíž v něm podle věty 1.1 existuje uzavřený eulerovský tah. Pro řešení použijeme algoritmus 1.1 na hledání uzavřeného eulerovského tahu.

Můžeme začít v libovolném vrcholu, například tedy ve vrcholu *c*. Podle uvedeného algoritmu vrchol *c* vložíme do zásobníku *Z*. Jelikož zásobník *Z* již není prázdný, vybereme z něho poslední vrchol (námi vložený vrchol *c*). Zpracujeme libovolnou hranu, která má jako jeden koncový vrchol právě náš vrchol *c*. V grafu (*Obrázek 5*) vidíme, že máme dvě možnosti jak pokračovat. Vybereme například hranu $\{c, d\}$, podle algoritmu hranu zpracujeme tak, že ji obarvíme a druhý koncový vrchol *d* vložíme do zásobníku Z. Zobrazeno na grafu níže (*Obrázek 6*, značeno zeleně).



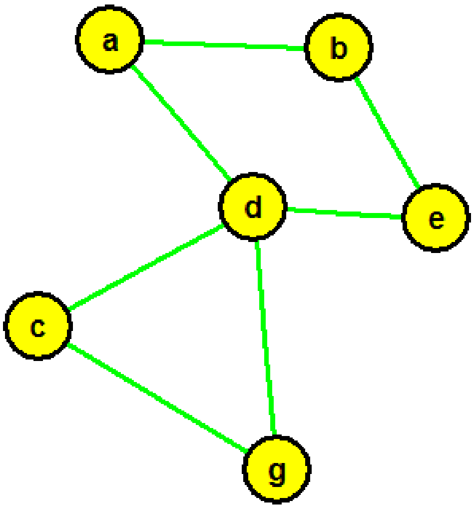
Obrázek 6: Zpracování hrany {*c*, *d*}

Celý proces opakujeme z vrcholu *d* s například hranou {*d*, *g*}. Z vrcholu *g* nám nezbývá jiná možnost, než dle algoritmu zpracovat hranu {*g*, *c*}. Každou zpracovanou hranu průběžně obarvujeme. Současný stav zásobníku je *Z* (*c*, *d*, *g*, *c*). Jsme tedy opět ve vrcholu *c*, ale jak vidíme na grafu (*Obrázek 7*), vrchol *c* již není koncovým vrcholem neobarvené hrany.



Obrázek 7: Zpracování hran {*c*, *d*}, {*d*, *g*}, {g, c}

Dle algoritmu musíme vrchol *c* odebrat z konce zásobníku a vložit ho do zásobníku *ET*. To si můžeme také představit tak, že když se vracíme zpět z nějakého vrcholu, tak ho vždy odebereme ze zásobníku *Z* a přidáme do zásobníku *ET*, neboli do výsledného eulerovského tahu. Tímto způsobem pokračujeme dokud zásobník *Z* není prázdný. Kontrolou by nám také mělo být, že jsme zpracovali všechny hrany, čili je označili zeleně, viz graf (*Obrázek 8*). Výsledný eulerovský tah je pak uveden v zásobníku *ET*, vyjádřený posloupností vrcholů (*c*, *g*, *d*, *e*, *b*, *a*, *d*, *c*).

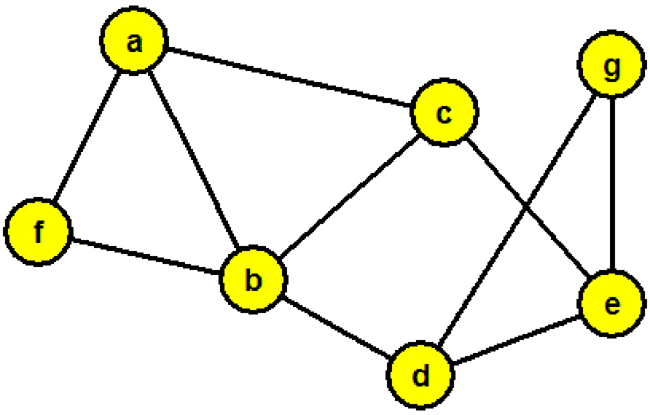


Obrázek 8: výsledný eulerovský tah

1.3.3 Úloha 3

Zadání:

Určete minimální počet tahů, které pokryjí všechny hrany grafu (*Obrázek 9*). Jednotlivé tahy zapište pomocí vrcholů.

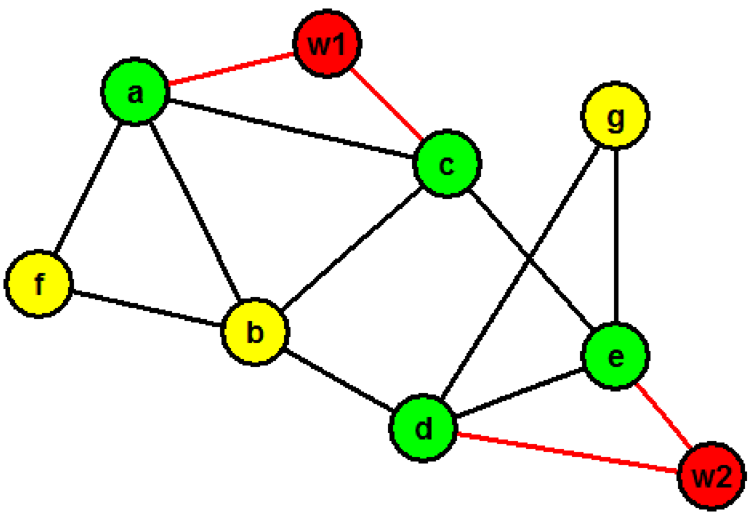


Obrázek 9: Zadaný útvar

Řešení:

Je to obdobný případ jako úloha 2, ale zadaný graf již není eulerovský (nesplňuje větu 1.1). Proto v něm neexistuje eulerovský tah, neboli jeden tah který by pokryl všechny hrany grafu.

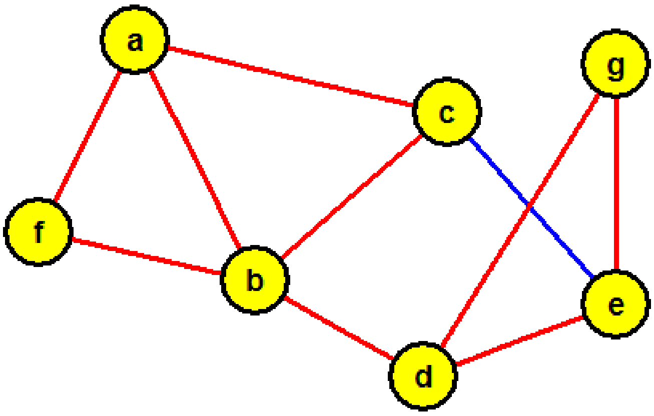
Graf (*Obrázek 10*, značeno zeleně) obsahuje čtyři vrcholy lichého stupně ($p = 4$), proto budeme potřebovat dva tahy. Podle algoritmu 1.2 provedeme doplnění grafu o dva ($p/2$) nové vrcholy, označíme je w_1, w_2 (*Obrázek 10*, značeno červeně). Každý z obou přidaných vrcholů spojíme s právě dvěma vrcholy grafu, které mají lichý stupeň. Vzniklý graf obsahuje vrcholy již pouze sudého stupně, proto v něm můžeme vyhledat uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 10: Doplnění grafu o nové vrcholy w_1, w_2

Postupujeme jako v předchozí úloze, aplikací algoritmu 1.1. Nalezený uzavřený eulerovský tah vypíšeme pomocí posloupnosti vrcholů (*a*, w_1, *c*, *e*, w_2, *d*, *g*, *e*, *d*, *b*, *f*, *a*, *c*, *b*, *a*).

Podle posledního kroku algoritmu odebereme přidané vrcholy w_1, w_2 a tím získáme dva (*p/2*) výsledné otevřené tahy (nikoli eulerovské), které pokrývají všechny hrany grafu.



Obrázek 11: Výsledné pokrytí grafu dvěma tahy

První tah (*Obrázek 11*, značeno červeně).

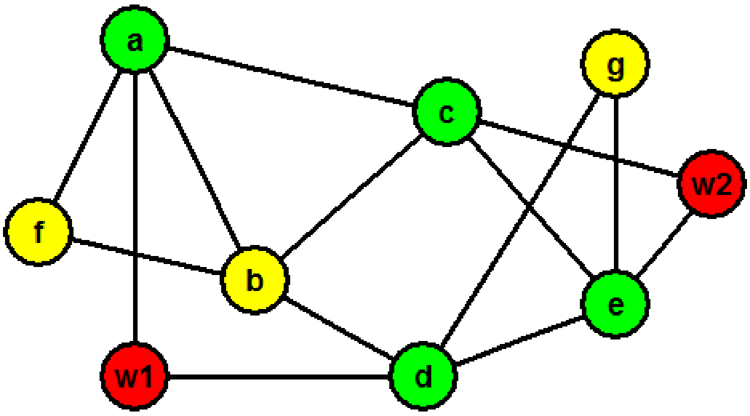
(*d*, *g*, *e*, *d*, *b*, *f*, *a*, *c*, *b*, *a*)

Druhý tah (*Obrázek 11*, značeno modře).

(*c*, *e*)

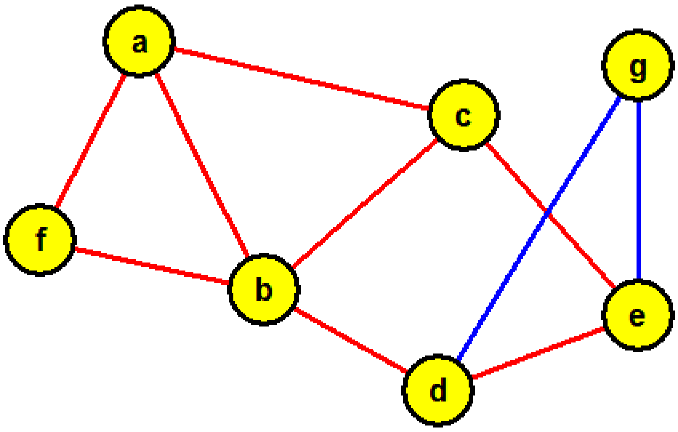
Jak již bylo zmíněno v teorii, výsledné tahy se budou lišit podle toho, jakým způsobem byly nové vrcholy w_1, w_2 a hrany do grafu přidány. Ukážeme si, že tomu tak opravdu je a nalezneme jiné správné řešení. Vyjdeme znovu ze zadání úlohy (*Obrázek 7*).

Provedeme doplnění grafu o dva nové vrcholy w_1, w_2. Opět je spojíme s právě dvěma vrcholy grafu, které mají lichý stupeň, avšak tentokrát jiným způsobem (*Obrázek 12*, značeno červeně).



Obrázek 12: Jiné doplnění grafu o nové vrcholy w_1, w_2

Postup řešení již nebudeme rozebírat. Znovu aplikujeme algoritmus 1.2, na nalezení minimálního pokrytí všech hran grafu tahy. Zajímají nás především výsledné tahy, ukažme si je na grafu níže.



Obrázek 13: Jiné výsledné pokrytí grafu dvěma tahy

První tah (*Obrázek 13*, značeno červeně).

(*c*, *e*, *d*, *b*, *f*, *a*, *c*, *b*, *a*)

Druhý tah (*Obrázek 13*, značeno modře).

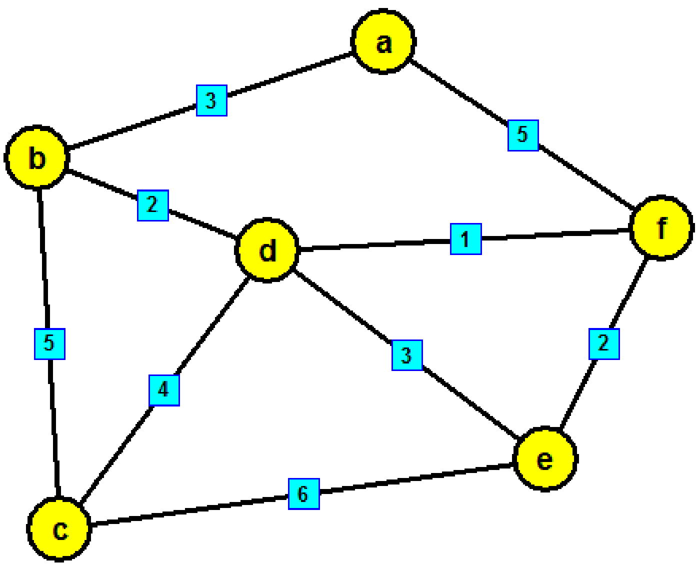
(*d*, *g*, *e*)

1.3.4 Úloha 4

Zadání:

Město plánuje opravu silnic v dané městské části. Po zimě jsou silnice popraskané a z důvodu velkého provozu i značně rozbité. Město plánuje celou oblast uzavřít a naráz celé silnice upravit, s požadavkem na co nejmenší náklady. Provoz silniční techniky je však nákladný. Pro úsporu finančních prostředků města je ideální silniční práce naplánovat tak, aby se srkze každou silnici projelo pouze jednou. Pokud to možné není, je třeba vymyslet takovou alternativu, aby při opakovaném projetí některými ulicemi byla celková trasa co nejkratší.

Plánek dané části města je zadán schématickou mapou *(Obrázek 14)*, s vyznačenými křižovatkami a ulicemi, které je spojují, včetně délky každé ulice. Výslednou trasu vypište.



Obrázek 14: Schématická mapa

Řešení:

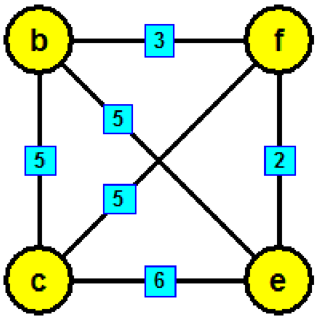
V zadání se jedná o úlohu nalézt v souvislém grafu (*Obrázek 14*) nejkratší uzavřený sled, který obsahuje každou hranu grafu. Ohodnocené hrany grafu reprezentují silnice, včetně délky, a vrcholy znázorňují křižovatky.

Zadaný graf obsahuje vrcholy lichého stupně, proto v něm neexistuje uzavřený eulerovský tah. To znamená, že námi hledaný uzavřený sled, který pokrývá všechny hrany, musí nutně některými hranami procházet vícekrát. Abychom našli nejkratší uzavřený sled, musíme pospojovat vrcholy lichého stupně co nejkratší soustavou cest [2].

Pro následující postup aplikujeme algoritmus 1.3.

Podle prvního kroku vypočteme délku nejkratší cesty z jednoho vrcholu do druhého, pro každou dvojici vrcholů lichého stupně. V této úloze máme vrcholy lichého stupně čtyři.

Dále sestavíme úplný graf (*Obrázek 15*) z vrcholů lichého stupně, jehož hrany jsou ohodnoceny nejkratšími vzdálenostmi mezi vrcholy lichého stupně. V tomto grafu nalezneme nejlevnější perfektní párování.

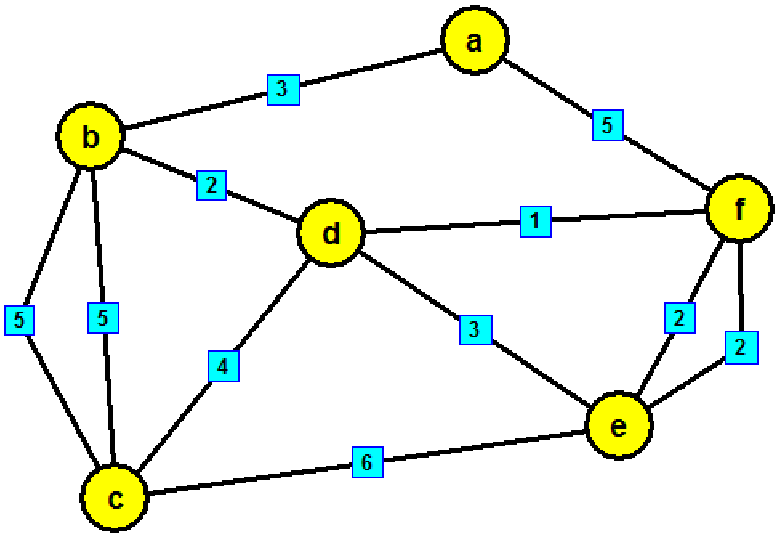


Obrázek 15: Pomocný graf

Znamená to, že vrcholy lichého stupně musíme spárovat do dvojic s celkovým nejmenším ohodnocením tak, aby jednotlivé páry byly navzájem disjunktní (neměly společnou hranu).

Jak je uvedeno na grafu (*Obrázek 15*), je zřejmé, že v našem případě je optimálním řešením spojení vrcholů *e*, *f* a k nim zbývá *b*, *c*. Hodnota perfektního párování s nejmenším ohodnocením je v tomto případě sedm.

Z toho plyne, že hrany $\{b, c\}$, $\{e, f\}$ bude v původním grafu potřeba projet dvakrát. Dle algoritmu tyto hrany rozšíříme na multihrany, viz *(Obrázek 16)*.



Obrázek 16: Graf rozšířený o multihrany

Graf rozšířený o multihrany bude mít již všechny vrcholy sudého stupně, a proto v něm bude existovat uzavřený eulerovský tah. Pro nalezení eulerovského tahu, použijeme opět algoritmus 1.1. Výsledek vypíšeme jako posloupnost vrcholů (*a*, *f*, *e*, *f*, *d*, *e*, *c*, *b*, *d*, *c*, *b*, *a*).

Všechny přidané hrany v eulerovském tahu nahradíme původními (o stejné délce) a tím získáme hledaný nejkratší sled, který pokrývá všechny hrany zadaného grafu.

2 Rovinné grafy

2.1 Motivace

Někdy se rovinné grafy označují také jako planární. Určení, zda je nějaký graf rovinný, si můžeme představit jako tzv. „rozpletení“ grafu. Žádné dvě hrany (spoje mezi vrcholy) se nekříží, respektive hrany se mohou protínat pouze ve vrcholech. Pokud to je možné, viz definice uvedené níže, pak graf je rovinný.

Citujme [16]: „V teorii grafů se studují nakreslení grafů na různých plochách (například na sféře, na anuloidu apod.). Přes důležitost těchto nakreslení se v dalším budeme zabývat pouze nakreslením grafů v rovině.“ Přesněji řečeno, uvažujeme pojem rovinný graf.

Pro lepší představu si uveďme jednu populární úlohu z rekreační matematiky, jak je uvedeno v knize [3]. Známý problém pojednává o třech domech a třech studnách. V daleké zemi stály tři pěkné domy a tři blízké studny jim dávaly čistou vodu. Všichni žili spokojeně, až do toho dne, kdy se tam nastěhovali lidé, kteří se navzájem neměli rádi. Vypukly neshody a nikdo je nedokázal vyřešit. Každý chtěl mít svou vlastní cestu ke každé studni a zároveň si nepřál, aby se křížila s jinou cestou. Je možno najít takové cesty?

Zkuste si danou situaci představit, nejlépe i nakreslit a vyzkoušejte různé možnosti. Tato úloha nemá řešení. Otázkou zůstává, za jakých podmínek by řešení existovalo, nebo vůbec na základě čeho můžeme s jistotou určit řešitelnost nějaké podobné úlohy.

2.2 Teorie

Nejprve definujme, co je rovinný graf.

Definice 2.1

Rovinný graf je graf, ke kterému existuje tzv. rovinná reprezentace (rovinné nakreslení), tj. můžeme jej nakreslit do roviny tak, aby se žádné dvě hrany nekřížily (neprotínaly ve vnitřním bodě, hrany se mohou protínat jen ve vrcholech).

Věta 2.1

Pro každý graf $G = (V, E)$ s alespoň třemi vrcholy platí:

Jestliže G je rovinný graf, pak $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$.

Věta 2.2

Pro každý graf $G = (V, E)$, který má alespoň tři vrcholy, a který neobsahuje K_3 jako podgraf, platí:

Jestliže G je rovinný graf, pak $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$.

Pro následující důležitou větu 2.3 musíme definovat pojem dělení grafu. Definice je převzata z [5].

Definice 2.2

Nechť $G = (V, E)$ je graf.

$G\%e = (V \cup \{z\}, (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\})$, je dělení hrany $\{x, y\} \in E$ grafu G, a $z \notin V$ je nový vrchol grafu.

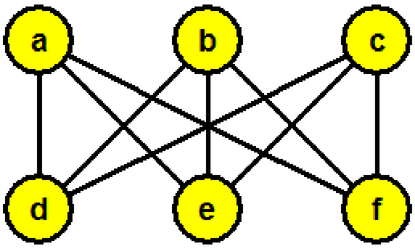
Pak řekneme, že graf G' je **dělení grafu** G, pokud G' je isomorfní grafu vytvořenému z grafu G postupným opakováním operace dělení hrany.

Věta 2.3 (Kuratowského věta)

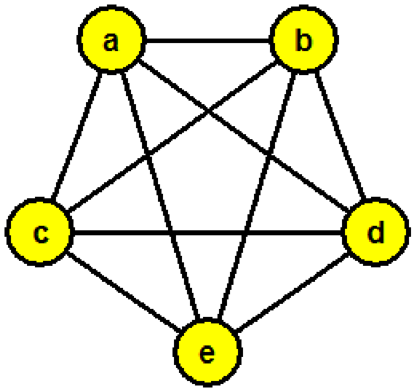
Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:

Graf G je rovinný právě tehdy, když žádný podgraf grafu G není ani graf $K_{3,3}$, ani graf K_5, ani libovolné dělení těchto grafů.

Pro úplnost připomeňme co jsou grafy $K_{3,3}$ a K_5.



Obrázek 17: Graf $K_{3,3}$



Obrázek 18: Graf K_5

2.3 *Úlohy*

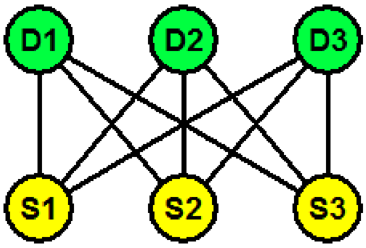
Obecné typy úloh:

1. Zjistěte, zda je daný graf rovinný. **Úloha 5**
2. Je-li graf rovinný, najděte jeho rovinné nakreslení. **Úloha 6**

2.3.1 Úloha 5

Zadání:

Vraťme se k problému z části motivace o třech domech a třech studnách. Situaci si vyjádříme pomocí grafu, viz (*Obrázek 19*).



Obrázek 19: Úloha reprezentovaná grafem

Řešení:

Zelené vrcholy znázorňují domy a žluté vrcholy studny. Úloha je velmi snadno řešitelná, protože dle věty 2.3 je hned zřejmé, že graf nemůže být rovinný.

K našemu řešení této úlohy můžeme také dojít podle věty 2.2. Zadaný graf má šest vrcholů a neobsahuje kružnici délky tři (nejkratší, v grafu obsažená kružnice, je délky čtyři), proto splňuje počáteční podmínky věty. Dále použijeme obměnu věty 2.2.

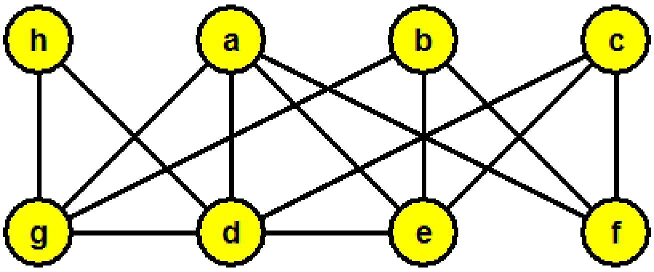
Jestliže $|E| > 2 \cdot |V| - 4$, pak G není rovinný graf.

Obě řešení jašně ukazují, že populární úloha o třech domech a třech studnách má jednoznačné řešení, a to, že nemůžeme nikdy najít takové cesty, které by splňovaly zadání.

2.3.2 Úloha 6

Zadání:

Pracovník jedné elektrotechnické firmy řeší návrhy a následnou výrobu integrovaných tištěných spojů. Dostane vymyšlený elektrický obvod a jeho zapojení (*Obrázek 20*). Jeho úkolem je vyřešit, zda je možné rozložení součástek a jejich vodivých spojů bez narušení funkčnosti zapojení, neboli bez křížení vodičů a jejich následného zkratu.



Obrázek 20: Zapojení součástek

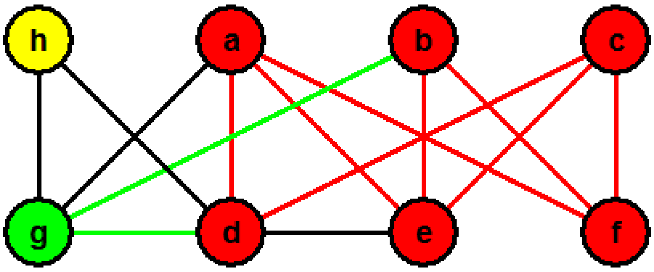
Řešení:

Nejprve ověříme, zda zadaný graf může být vůbec rovinný. Použijeme obměnu věty 2.1.

Jestliže $|E| > 3 \cdot |V| - 6$, pak G není rovinný graf.

Zadaný graf nesplňuje tuto nerovnici ($14 \ngtr 18$), čili může být rovinný. Zdůrazněme, že z obměněné věty 2.1 víme pouze, že graf může být rovinný, ale také nemusí. Pro dořešení této úlohy, buď nalezneme rovinné nakreslení grafu a tím dokážeme jeho rovinnost a nebo ukážeme, že graf obsahuje jako svůj podgraf, grafy K_5 nebo $K_{3,3}$ a nebo libovolné dělení těchto grafů a z toho pak dle věty 2.3 plyne, že graf není rovinný.

Na grafu níže (*Obrázek 21*, značeno červeně) vidíme nalezení dělení podgrafu $K_{3,3}$ (přes vrchol *g*, značeno zeleně), čili graf není rovinný. Neexistuje rovinné nakreslení grafu.



Obrázek 21: Nalezení dělení podgrafu $K_{3,3}$

3 Barevnost

3.1 Motivace

Tato část textu se zabývá v praxi často vyskytující se úlohou, kterou je obarvení grafu. Bezesporu nejznámější úlohou z této kapitoly grafových algoritmů je problém čtyř barev. Otázka zněla, zda-li je možné každou mapu obarvit pomocí čtyř barev tak, aby sousední státy měly vždy každý jinou barvu? První zmínky o tomto problému byly již v roce 1840. Po mnoha pokusech o důkaz se však více jak století nepovedlo problém zcela dokázat. Důkaz hypotézy čtyř barev nakonec zveřejnili v roce 1976 Kenneth Appel a Wolfgang Haken z univerzity v Illinois, řešení bylo za pomoci počítače. Jen pro zajímavost, výpočty si vyžádaly 1200 hodin strojového času a plný důkaz má 56 stran textu a 114 stran obrázků, více se můžeme dočíst v [13].

V řeči grafových algoritmů se celá problematika interpretuje jako úloha, kde máme obarvit vrcholy grafu tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Snažíme se nalézt minimální počet barev ke splnění tohoto úkolu. Barvení grafu minimálním počtem barev patří do tzv. NP - úplných úloh. Není znám jiný postup řešení, než postupně procházet jednotlivé možnosti, informace jsou inspirovány [15].

V praxi si můžeme představit například tvorbu univerzitního rozvrhu, kde se škola snaží sestavit takový rozvrh, aby mohly probíhat všechny potřebné vyučovací hodiny a byly pro ně také volné vyhovující učebny. Dalším příkladem může být plánování programu bruslení zimního stadionu tak, aby bylo sportoviště za nákladného provozu co nejvíce využíváno, a tím dosahovalo co největších zisků [6].

Citujme webovou stránku [14]: „Podobný problém (na složitější úrovni) se řeší v mobilních sítích. Oblast je rozdělena na mnoho malých buněk, ve kterých telefony komunikují se základnovými stanicemi na určité frekvenci. Snahou operátorů je využít co nejmenší počet frekvencí (odpovídající co nejmenšímu počtu barev) a přitom respektovat nutnou podmínku, že sousední buňky nemohou být nastaveny na stejnou frekvenci (což by odpovídalo obarvení sousedních států stejnou barvou).“

3.2 Teorie

I v této kapitole si nejprve definujeme potřebnou teorii pro následující řešení úloh na obarvení grafů.

Definice 3.1

Obarvení grafu (obarvení *vrcholů* grafu) je ohodnocení vrcholů grafu hodnotami z množiny B (takzvanými barvami), a to takové, že žádné dva sousední vrcholy nejsou ohodnoceny (obarveny) stejnou barvou.

Graf nazýváme *r* – barevným, jestliže existuje jeho obarvení r barvami.

Častou úlohou v této oblasti grafových algoritmů je nalezení nejmenšího počtu barev, potřebných k obarvení celého grafu.

Definice 3.2

Barevnost grafu (neboli *vrcholová barevnost*, též *chromatické číslo*) je nejmenší počet barev, který je potřebný k obarvení grafu.

Barevnost grafu G značíme $\chi(G)$.

Problém barvení map lze převést na barevnost rovinných grafů a platí nasledující věta. Připomeňmě si, že graf je rovinný, když splňuje definici 2.3.

Věta 3.1 (problém čtyř barev)

Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:

Jestliže graf G je rovinný, pak barevnost grafu G je menší nebo rovna 4.

Následující Algorimus je převzat z bakalářské práce Filipa Poppera [9].

Algoritmus 3.1 (sekvenční barvení grafu)

Proměnná $\boldsymbol{B}$, označuje číslo nejvýše použité barvy a současně i počet použitých barev. Na začátku algoritmu nastavíme $\boldsymbol{B} = 0$.

Průběžný krok:

1. V grafu vyhledáme dosud neobarvený vrchol, je-li dohledatelných vrcholů více, pokračujeme následujícím krokem *2*.

2. Mezi neobarvenými vrcholy vyhledáme vrchol, jehož obarvení sousedé jsou obarveni největším počtem různých barev (nikoliv vrchol s nejvyšším stupněm). Zřejmě na obarvení takového vrcholu zůstává nejmenší počet barev. Je-li takových vrcholů více, pokračujeme následujícím krokem *3*.
3. Mezi vybranými vrcholy v předchozím kroku *2* najdeme vrchol, který má nejvíce neobarvených sousedů. Je-li i zde více vrcholů, pak obarvíme libovolný z nich.
4. Vrchol, který byl vybrán k obarvení dle předchozího postupu, označme v_0. Nyní vyhledáme nejnižší barvu $\boldsymbol{C}$ takovou, že jí není obarven žádný z již obarvených sousedů vrcholu v_0. Vrchol v_0 touto barvou obarvíme. Je-li $\boldsymbol{C} > \boldsymbol{B}$ tj. $\boldsymbol{C}$ je nová, nepoužitá barva, nastavíme proměnnou $\boldsymbol{B}$ na číslo této barvy $\boldsymbol{C}$.

Předchozí *průběžný krok* opakujeme tak dlouho, dokud nejsou obarveny všechny vrcholy grafu. Po obarvení grafu je v proměnné $\boldsymbol{B}$ počet barev, kterými je graf obarven.

3.3 Úlohy

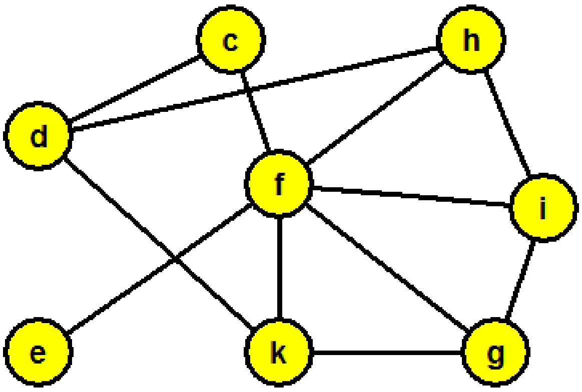
Obecné typy úloh:

1. Lze daný graf obarvit *K* barvami? **Úloha 7**
2. Určete barevnost daného grafu, neboli chromatické číslo. **Úloha 8**

3.3.1 Úloha 7

Zadání:

Uvažujme komunikační síť o *N* vysílacích/přijímacích stanicích zadanou grafem (*Obrázek 22*). Pokud je mezi stanicemi možná komunikace, jsou spolu propojeny komunikačním kanálem. V celé síti existují různé druhy kódování informací pro bezpečný přenos skrze komunikační kanály. Komunikační síť používá celkem čtyři druhy kódování. Pro správnou funkčnost a obtížné narušení systému nesmějí mít dvě propojené (sousední) stanice stejné kódování. Bude dostupný počet kódování dostačující? Pokud ano, nalezněte řešení. Jednotlivým stanicím přidělte konkrétní typy kódování pro správný chod celé sítě.



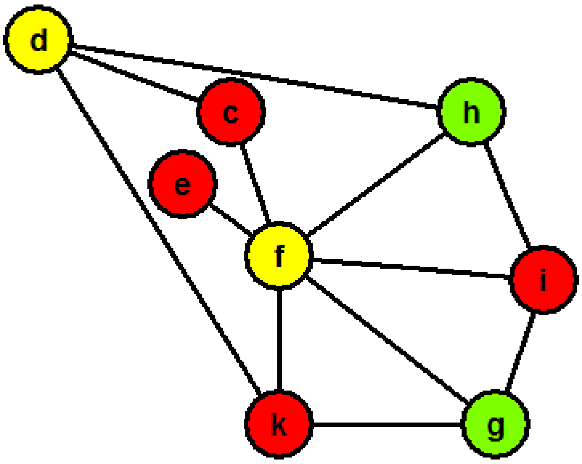
Obrázek 22: Komunikační síť

Řešení:

Máme dostupné čtyři druhy kódování, což odpovídá čtyřem barvám k obarvení vrcholů grafu a máme určit, zda to je dostačující k obarvení celého grafu. Pro řešení bychom mohli použít algoritmus 3.1 sekvenčního barvení grafu viz teorie a pokud by jeho řešení bylo menší jak čtyři, měli bychom výsledek. Avšak při menších velikostech[1] grafu je někdy rychlejší postupovat logicky. Při posunutí vrcholů *d, e* je hned patrné, že graf je rovinný, čili z věty 3.1 plyne, že pro obarvení grafu čtyři barvy postačí. Zbývá nalézt konkrétní obravení, což v tomto případě nebude až tak těžké. Dokonce po chvilce přemýšlení zjistíme, že nám postačí pouze tři barvy k obarvení celého grafu, jak je vidět

[1] V odborné literatuře často označováno jako instance grafu.

na grafu níže (*Obrázek 23*). Tedy pro bezpečný chod celé komunikační sítě vystačí tři typy kódování.

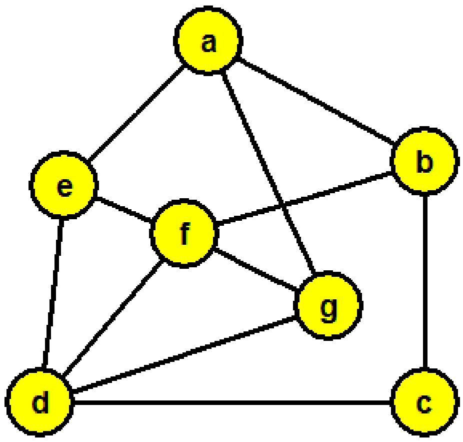


Obrázek 23: Výsledné obarvení grafu třemi barvami

3.3.2 Úloha 8

Zadání:

Paní učitelka na základní škole vyučuje děti výtvarnou výchovu. Děti mají po skupinkách pracovat na společné výtvarné práci. Avšak jak už to s dětmi bývá, některé za přítomnosti jiných rády zlobí. Vztahy jsou vyznačeny na obrázku (*Obrázek 24*), vrcholy představují žáky a spojnice mezi nimi to, že nemohou být ve stejné skupině. Paní učitelka má nelehký úkol, rozdělit děti do skupin tak, aby zůstaly co největší skupinky dětí. Zároveň aby ty děti, co spolu nemohou být, byly v jiných skupinách. Kolik takových skupin postačí?



Obrázek 24: Nepřípustné vztahy mezi žáky

Řešení:

Naším úkolem je zjistit nejmenší počet barev k obarvení grafu, neboli jeho chromatické číslo. Jak již bylo uvedeno v motivaci, barvení grafu patří mezi tzv. NP – úplné problémy, neexistuje žádný postup, který by vedl ke zcela přesnému řešení. Přesto pro barvení grafu existují různé heuristické[2] postupy.

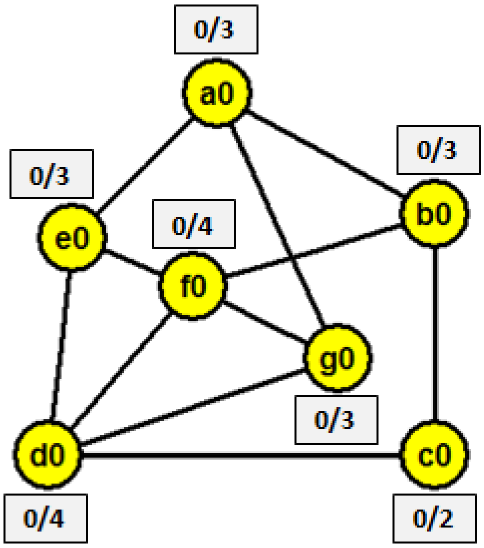
[2] Jak uvádí [18], pojem heuristický algoritmus se obvykle používá pro algoritmy, které neposkytují (matematické) záruky kvality řešení, případně kdy nevíme, zda heuristika uspěje. Řešení není přesné a nemusí být nalezeno v krátkém čase.

Pro následující řešení použijeme algoritmus 3.1, tzv. sekvenční barvení grafu.

U každého vrcholu zaznamenáváme:

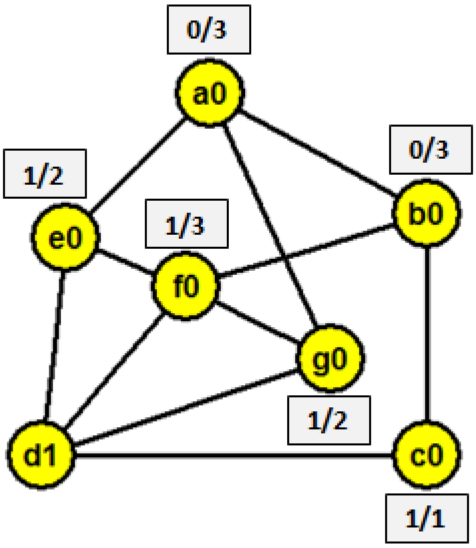
- Počet různobarevných sousedů (první číslo u vrcholu)
- Počet neobarvených sousedů (druhé číslo u vrcholu)
- Barvu (číslo uprostřed vrcholu)
- ***B*** = 0

Na grafu (*Obrázek 25*) je znázorněna výchozí situace pro algoritmus 3.1.



Obrázek 25: Výchozí situace

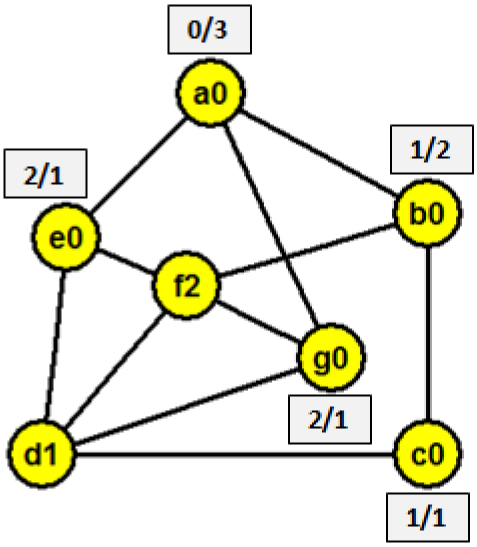
Obarvení prvního vrcholu rozepíšeme přesně dle algoritmu. V grafu je více neobarvených vrcholů, proto dle kroku *1* pokračujeme následujícím krokem *2*. Sousední vrcholy všech vrcholů nejsou obarveny, proto musíme pokračovat ke kroku *3*. V tomto kroku máme na výběr mezi dvěma vrcholy *d* nebo *f*, které mají čtyři neobarvené sousední vrcholy (značeno *0/4*), vybereme libovolný z nich, například vrchol *d*. Vybraný vrchol *d* (dle algoritmu značen jako v_0) obarvíme nejnižší barvou ***C***, kterou není obarven žádný ze sousedních vrcholů, což je ***C*** = 1. Jelikož ***B*** = 0, tak ***C*** je nová nepoužitá barva, proto nastavíme ***B*** na hodnotu ***C***.



Obrázek 26: Obarvení prvního vrcholu *d*

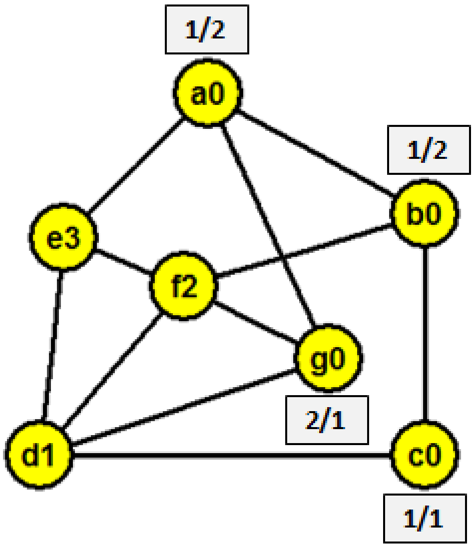
Následně celý algoritmus budeme opakovat, dokud neobarvíme všechny vrcholu grafu.

Při opakovaném použití algoritmu musíme vybrat vrchol *f*. Jeho sousední vrchol *d* je již obarven barvou ***C*** = 1, proto vybraný vrchol *f* musíme obarvit novou barvou ***C*** = 2. Jelikož ***C*** > ***B***, tak nastavíme ***B*** = 2. Zobrazeno na grafu (*Obrázek 27*).



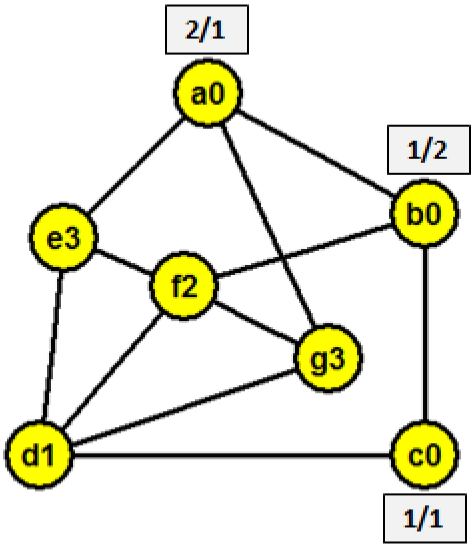
Obrázek 27: Obarvení druhého vrcholu *f*

Při dalším použítí postupu můžeme vybrat vrchol *e*, nebo vrchol *g*, zvolíme například vrchol *e*. Nejnižší barva kterou nemá žádný sousední vrchol je ***C*** = 3, proto vybraný vrchol *e* musíme obarvit novou barvou ***C*** = 3. Opět platí, že ***C*** > ***B***, takže nastavíme ***B*** = 3. Znázorněno na grafu (*Obrázek 28*).



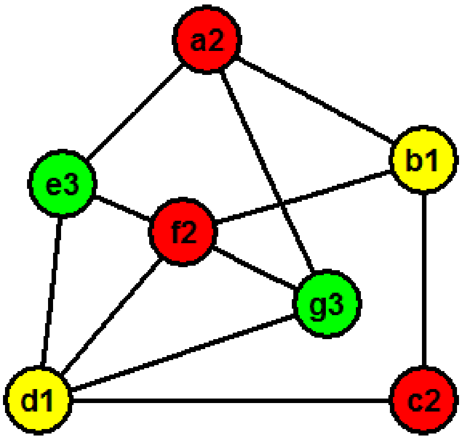
Obrázek 28: Obarvení třetího vrcholu *e*

Jako čtvrtý vybereme vrchol *g*. Nejnižší barva kterou nemá žádný sousední vrchol je ***C*** = 3, proto vybraný vrchol *g* touto barvou obarvíme. ***C*** = 3 je již použitá barva a proto se ***B*** = 3 nemění. Znázorněno na grafu (*Obrázek 29*).



Obrázek 29: Obarvení čtvrtého vrcholu *g*

Tímto způsobem budeme postupovat až do konce, do obarvení všech vrcholů. Pro urychlení postupu si ukážeme výsledné obarvení dle algoritmu. Pro celý graf budou dostačující tři barvy, jako je uvedeno na grafu (*Obrázek 30*). Odpověď na úlohu tedy bude, že paní učitelka může děti rozdělit do tří skupin tak, aby nedocházelo k žádným konfliktům.



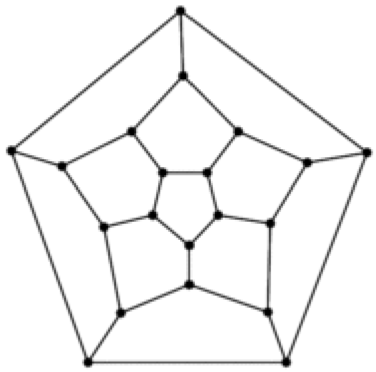
Obrázek 30: Výsledné obarvení grafu

4 Hamiltonovské grafy

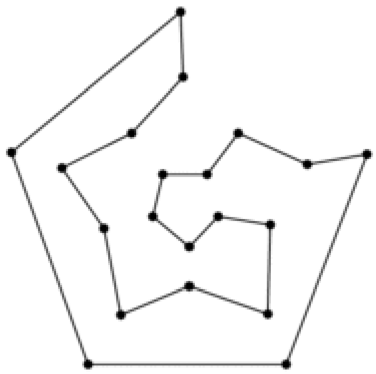
4.1 Motivace

Pojem byl pojmenován podle irského matematika W. R. Hamiltona. Citujme Jiřího Demela [3] „ ... v polovině 19. století zveřejnil v zeměpisném časopise hádanku, v níž šlo o nalezení uzavřené trasy vedoucí přes dvacet měst, která byla rozmístěna ve vrcholech pravidelného dvanáctistěnu, přičemž se přes žádné město nesmělo cestovat dvakrát.“

Ukažme si graf použitý v Hamiltonově hádance (*Obrázek 31*). Pro představu uveďme také jedno z možných řešení hádanky, nalezení kružnice vedoucí skrze všechna města (Obrázek 32).



Obrázek 31: Hamiltonova hádanka



Obrázek 32: Řešení Hamiltonovy hádanky

Podle Jiřího Demela [3] úlohy spojené s problematikou hamiltonovských grafů dělíme především dle toho, zda se jedná o existenční a nebo o optimalizační. V případě existenčních úloh jde o zjištění existence nebo o nalezení konkrétní hamiltonovské cesty nebo kružnice (viz teorie 4.2). V optimalizačních úlohách je situace jiná. Hrany grafu jsou ohodnoceny délkami a požaduje se nalezení hamiltonovské cesty, či kružnice o určité délce nepřevyšující hodnotu K, pro kterou platí, že $K > 0$, $K \in N$. Je zajímavé si uvědomit, že kdybychom místo sledu, který obsahuje každý vrchol daného grafu právě jednou, chtěli sled, který by obsahoval každou hranu daného grafu právě jednou tj. eulerovský tah, dostali bychom mnohem snadněji řešitelné úlohy, kterými jsme se zabývali v kapitole 1.

Podobně jako v kapitole 3, hledání hamiltonovské kružnice nebo cesty patří do tzv. NP - úplných úloh. Pro řešení opět používáme heuristické algoritmy.

„Hamiltonovskou cestu či kružnici, ... o požadované délce můžeme objevit náhodně nebo po dlouhé námaze. V obou případech lze snadno dokázat, že jsme skutečně našli požadované řešení. Jestliže však řešení s požadovanými vlastnostmi neexistuje, pak to lze (v obecném případě) dokázat jen velmi obtížně.“ jak uvádí ve své knize Jiří Demel [2].

4.2 Teorie

Definujme nejprve základní pojmy, potřebné pro níže uvedenou definici hamiltonovského grafu.

Definice 4.1

Kružnice v grafu *G* je posloupnost (střídavě) vrcholů a hran, které na sebe navazují, začínající a končící stejným vrcholem. Žádný vrchol (kromě počátečního) se nesmí opakovat.

Cesta je sled určité délky s navzájem různými vrcholy.

Hlavní definice této kapitoly.

Definice 4.2

Hamiltonovská kružnice v grafu *G*, je kružnice obsahující všechny vrcholy grafu *G*.

Hamiltonovský graf je graf, ve kterém existuje hamiltonovská kružnice.

Definice hamiltonovské cesty není příliš častou, přesto při řešení úloh se s tímto pojmem můžeme setkat, tak ji pro srozumitelnost definujme.

Definice 4.3

Hamiltonovská cesta v grafu *G* je cesta, která obsahuje všechny vrcholy grafu *G*.

Cesty a kružnice můžeme chápat nejen jako posloupnosti, ale též jako grafy.

4.3 Úlohy

Existenční typy úloh:

1. Rozhodněte, zda v daném grafu existuje hamiltonovská kružnice, v kladném případě ji zapište pomocí vrcholů. **Úloha 9**
2. Rozhodněte, zda v daném grafu existuje hamiltonovská cesta, v kladném případě ji zapište pomocí vrcholů. **Úloha 10**

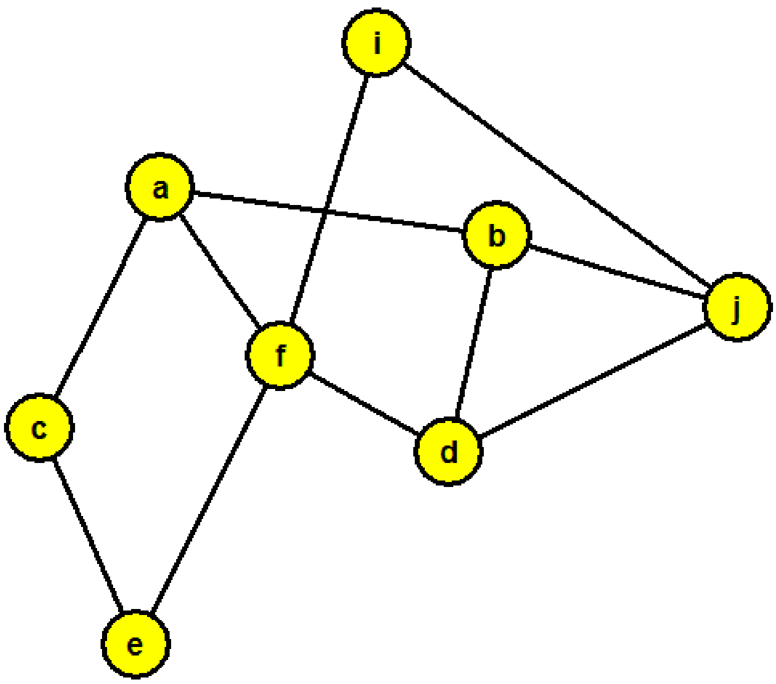
Optimalizační typy úloh:

3. V zadaném ohodnoceném hamiltonovském grafu nalezněte co nejkratší hamiltonovskou kružnici. **Úloha 11**
4. V zadaném ohodnoceném hamiltonovském grafu nalezněte co nejkratší hamiltonovskou cestu. **Úloha 12**

4.3.1 Úloha 9

Zadání:

Turistická skupina plánuje výlet z horského střediska po okolních vrcholcích Vysokých Tater. Rádi by prošli po všech na mapě vyznačených (*Obrázek 33*) zajímavých místech. Je možné výpravu naplánovat tak, aby účastníci výletu nemuseli chodit přes nějaké místo dvakrát a na konci cesty se vrátili zpět do horského střediska? Horské středisko je v bodě *e*.

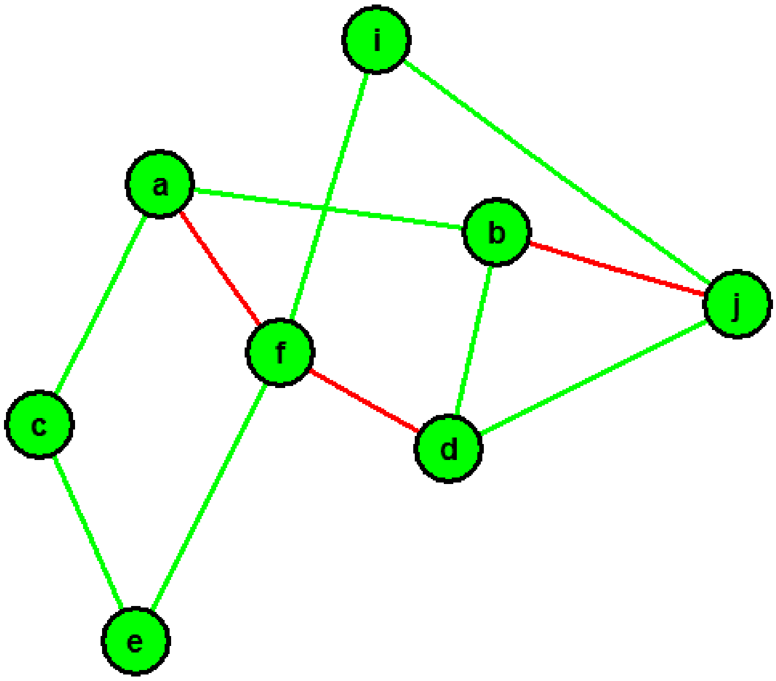


Obrázek 33: Schématická mapa

Řešení:

Nejprve si ujasněme o jaký typ úlohy se jedná. V zadaném grafu (*Obrázek 33*) rozhodněte, zda existuje hamiltonovská kružnice. Pokud ano, výslednou kružnici zapište jako posloupnost vrcholů. Jelikož řešením má být kružnice procházející všemi body zadaného grafu, tak není rozhodující počáteční vrchol (v zadání zmíněné „horské středisko“).

Postupujme a uvažujme tak, že abychom prošli libovolným vrcholem, vždy musíme po jedné hraně incidentní s vrcholem přijít a po jiné hraně odejít. Je zřejmé, že tedy každý vrchol ve výsledné kružnici, spolu s použítými hranami, musí být stupně dva. Vyhýbáme se vytvoření kružnice, která by neobsahovala všechny vrcholy daného grafu. Respektujeme pravidlo že, ostatní incidentní hrany s vrcholem (ty nepoužité), kterým jsme právě prošli, už nesmíme použít. Aplikujme tuto zásadu viz řešení (*Obrázek 34*, značeno zeleně). Našli jsme tedy hamiltonovskou kružnici, z toho plyne dle definice 4.2, že daný graf je hamiltonovský.



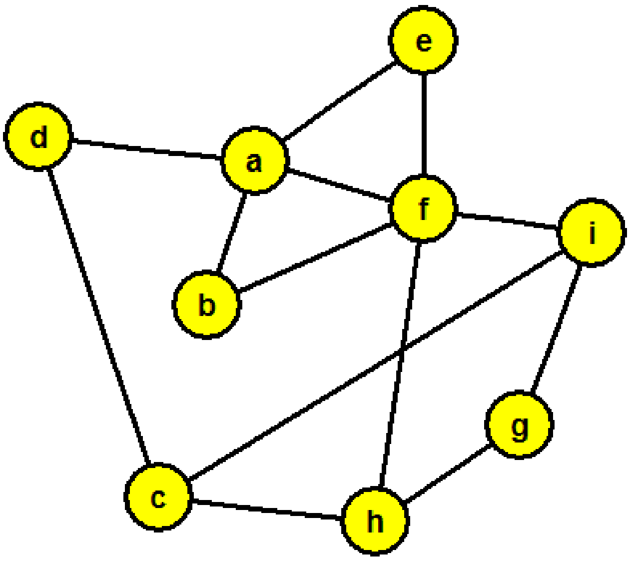
Obrázek 34: Hamiltonovská kružnice

Možné řešení: (*e*, *f*, *i*, *j*, *d*, *b*, *a*, *c*, *e*)

4.3.2 Úloha 10

Zadání:

Na radnici města plánují nový prohlídkový okruh po místních památkách. K dispozici je plánek města s vyznačenými objekty a cestami, které je spojují (*Obrazek 35*). Hlavním požadavkem na prohlídkový okruh je, aby turisté navštívili každou památku právě jednou, neboli nešli přes nějakou památku vícekrát. Začátek a konec prohlídky je libovolný, ale nesmí být na stejném místě. Rozhodněte, zda je taková prohlídka možná, pokud ano, uveďte příklad.

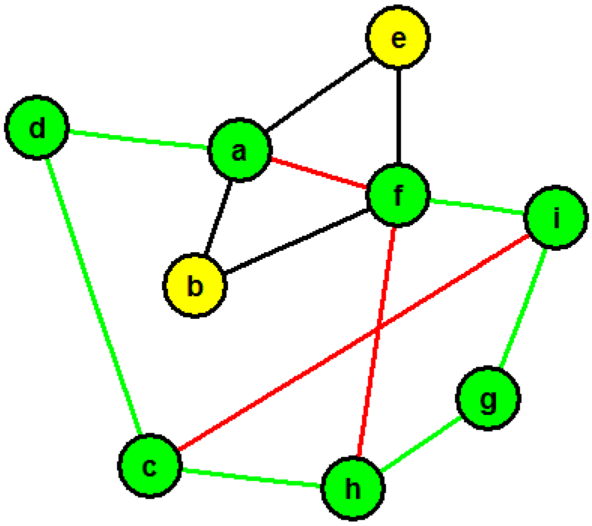


Obrázek 35: Plánek památek ve městě

Řešení:

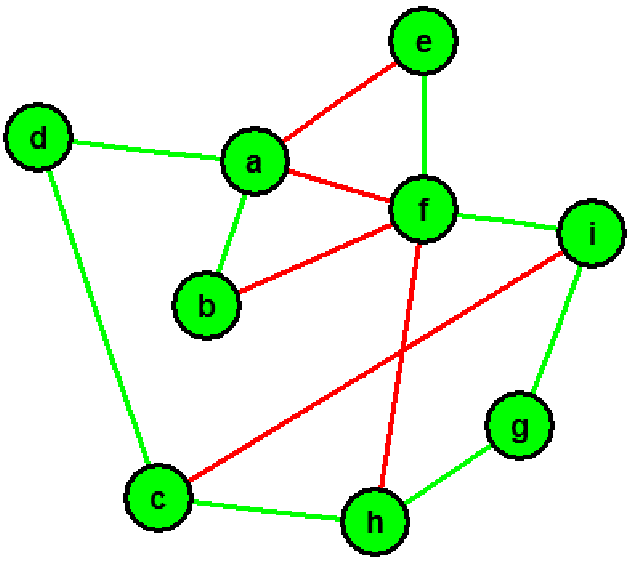
Úlohu přeformulujme do toerie grafů. V zadaném grafu (*Obrázek 35*) rozhodněte, zda existuje hamiltonovská cesta. Počáteční a koncový vrchol je libovolný. V kladném případě výslednou posloupnost zapište pomocí vrcholů.

Při řešení je rozhodující, ve kterém vrcholu začneme. Z některých vrcholů není možné najít hamiltonovskou cestu, přesto si ukažme, jak by situace dopadla, kdybychom začali tvořit cestu v jednom z nich, například ve vrcholu *a*. Dostali bychom se do situace uvedené na grafu níže (*Obrázek 36*), kdy musíme vybrat jeden z vrcholů *b*, *e* a tím si vždy znemožníme přístup k tomu druhému.



Obrázek 36: Neřešitelná situace s počátečním vrcholem *a*

Pro vyřešení úlohy, neboli určení existence hamiltonovské cesty, musíme v grafu alespoň jednu cestu najít. Uveďme si jedno z možných řešení, ke kterému se dá zkoušením lehce dojít. Na grafu (*Obrázek 37*) je znázorněno správné řešení úlohy, s počátečním vrcholem *b*, čili v zadaném grafu existuje hamiltonovská cesta. Po vyzkoušení všech vrcholů dojdeme k závěru, že pro nalezení hamiltonovské cesty musíme začít v jednom z vrcholů: *b*, *d*, *e*, *i*.



Obrázek 37: Řešení s počátečním vrcholem *b*

Možné řešení: (*b*, *a*, *d*, *c*, *h*, *g*, *i*, *f*, *e*)

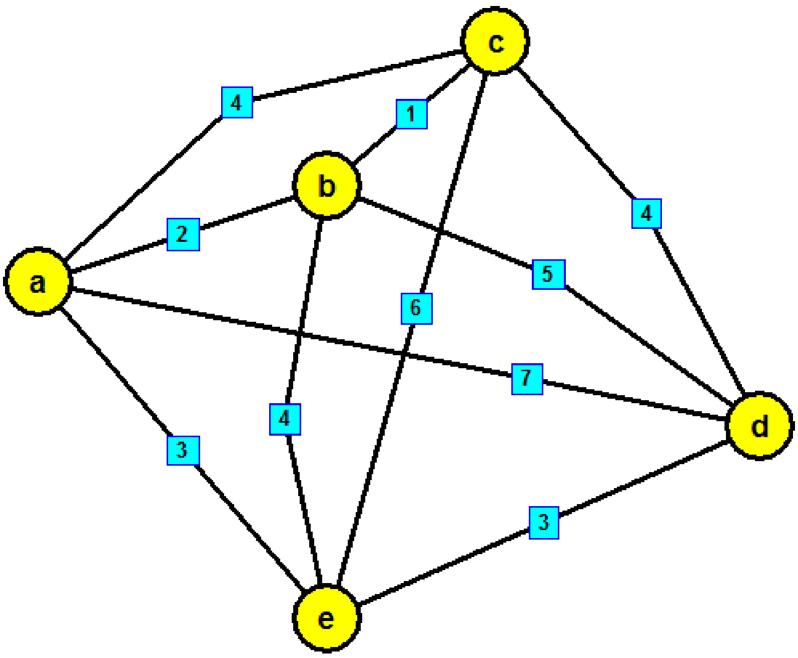
4.3.3 Úloha 11

Zadání:

Velmi často uváděná úloha tohoto typu je tzv. Problém obchodního cestujícího. Obchodní cestující má na služební cestě navštívit předem daná města, každé právě jednou, například aby se zúčastnil prezentace nového firemního výrobku - viz mapka (*Obrázek 38*).

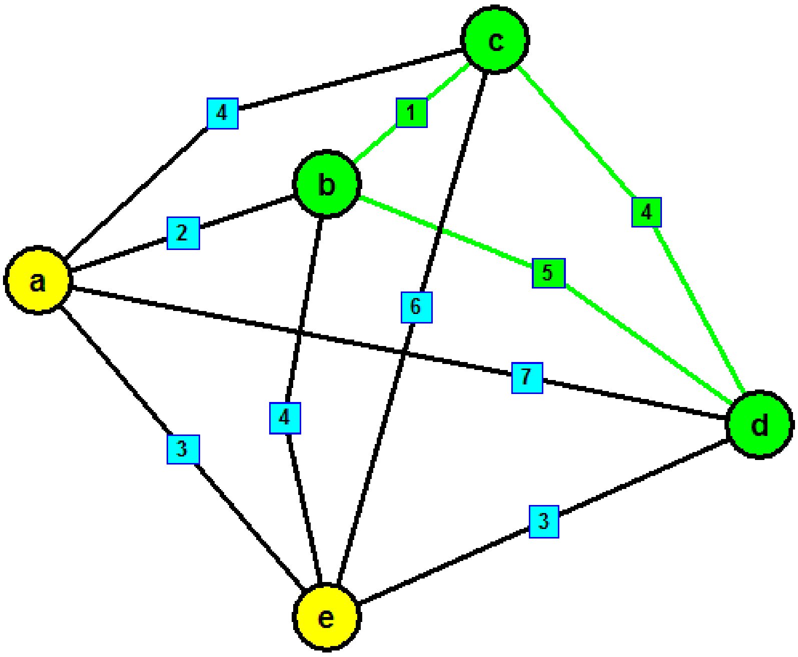
Obrázek 38: Plán služební cesty

V jakém pořadí a kam pojede, není rozhodující. Pro každou dvojici měst je známa vzdálenost, tyto informace jsou udány grafem (*Obrázek 39*). Cílem je, aby obchodní cestující splnil úkol a zároveň to stihl co nejrychleji, respektive ujel co nejmenší možnou vzdálenost mezi navštívenými městy [2].



Obrázek 39: Grafické znázornění úlohy

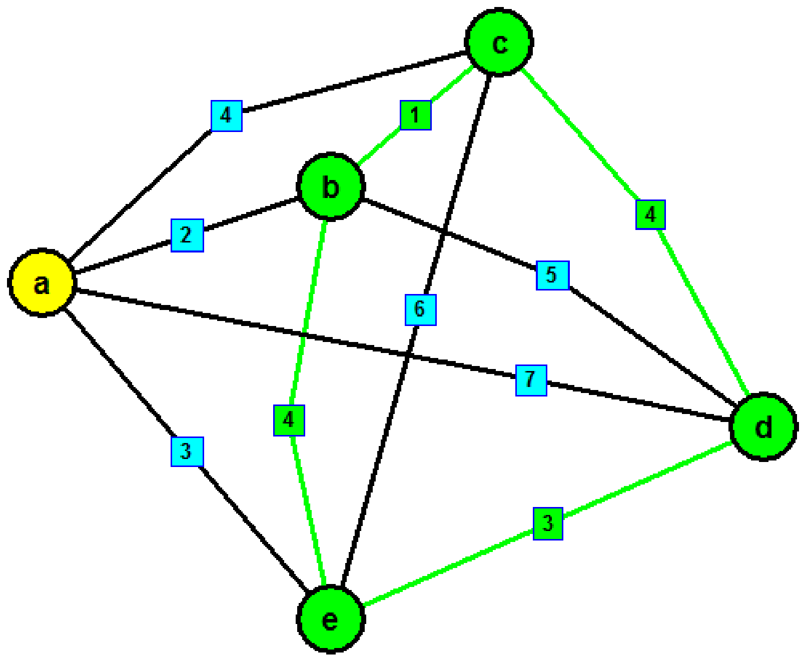
Řešení:
Je zřejmé, že zadaný úplný graf je hamiltonovský, čili v něm existuje hamiltonovská kružnice. Úkolem je ale nalézt tu nejkratší kružnici. Postup převzat z [3], začněme s nějakou triviální kružnicí[3], například kružnice *b*, *c*, *d* s ohodnocením hran 10 (*Obrázek 40*).



Obrázek 40: Triviální kružnice

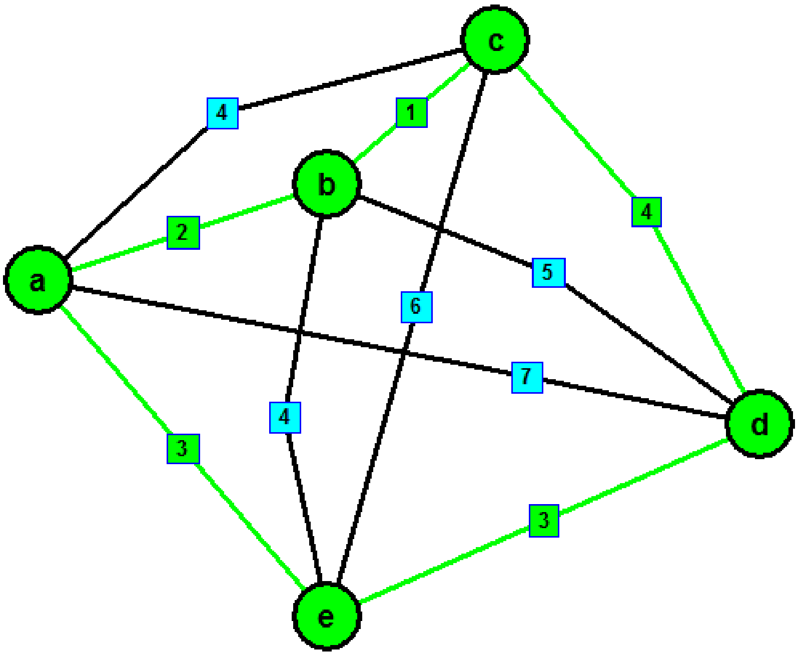
Následně pokračujeme rozšířením kružnice o další vrchol. Vybereme ten vrchol, jehož nejmenší vzdálenost od vrcholů kružnice je nejvetší. Vybereme tedy vrchol *e* a ke kružnici *b*, *c*, *d* ho připojíme. Pouze tři hrany jsou incidentní jak s kružnicí *b*, *c*, *d*, tak s vrcholem *e*. Vrchol *e* musíme ke kružnici připojit pomocí dvou z nich, to nám nabízí tři různě ohodnocené dvojice hran, $\{\{b, e\}, \{d, e\}\}$, $\{\{b, e\}, \{c, e\}\}$, $\{\{c, e\}, \{d, e\}\}$. Vyberemu tu dvojici hran, která má nejmenší celkové ohodnocení hran, čili dvojici $\{\{b, e\}, \{d, e\}\}$, s celkovým ohodnocením hran 7. Nezapomeneme odebrat hranu $\{b, d\}$, viz rozšíření kružnice s ohodnocením hran 12 (*Obrázek 41*). Pro lepší pochopení, citujme Jiřího Demela [3]: *„Vrchol ... pak zařadíme do kružnice mezi takové dva sousední vrcholy, aby se tím kružnice prodloužila co nejméně“.*

[3] Kružnice délky tři, neboli nejkratší možná kružnice.



Obrázek 41: Rozšíření kružnice

Jako poslední nám zbývá vrchol *a*. Postupujeme analogicky, vrchol *a* opět připojíme mezi nějaké dva vrcholy grafu, možností máme tedy šest. Avšak musíme si uvědomit, že vrchol *a* můžeme připojit pouze mezi takové dva vrcholy, kde je hrana mezi nimi již součástí kružnice *b*, *c*, *d*, *e*, čili vybíráme pouze ze čtyř dvojic hran, $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{a, e\}\}$, $\{\{a, c\}, \{a, d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{a, e\}\}$. Vyberemu tu dvojici hran, která má nejmenší celkové ohodnocení hran, čili dvojici $\{\{a, b\}, \{a, e\}\}$, s celkovým ohodnocením hran 5 a kružnici rozšíříme. Nezapomeneme odebrat hranu $\{b, e\}$, a tím jsme dostali konečné řešení úlohy (*Obrázek 42*). Nalezená co nejkratší hamiltonovská kružnice má součet ohodnocení všech svých hran 13.

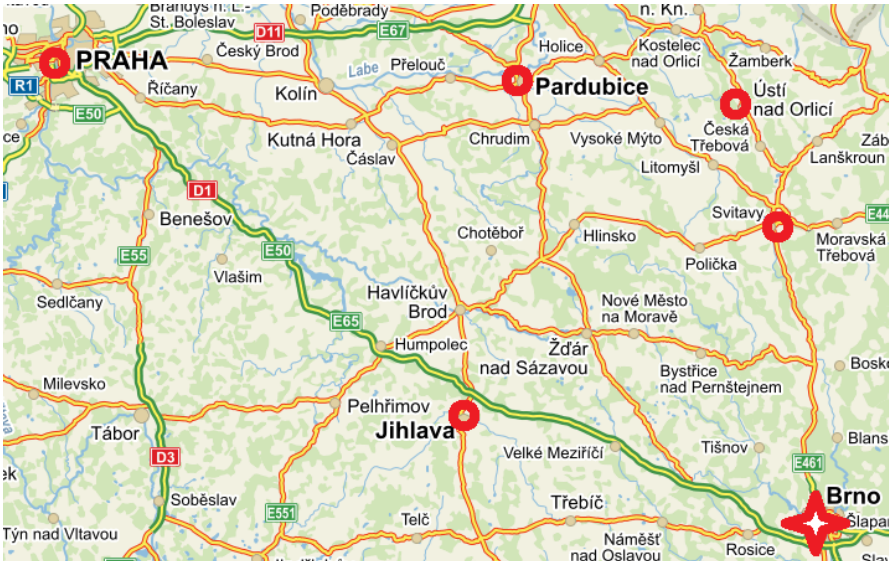


Obrázek 42: Výsledné řešení

4.3.4 Úloha 12

Zadání:

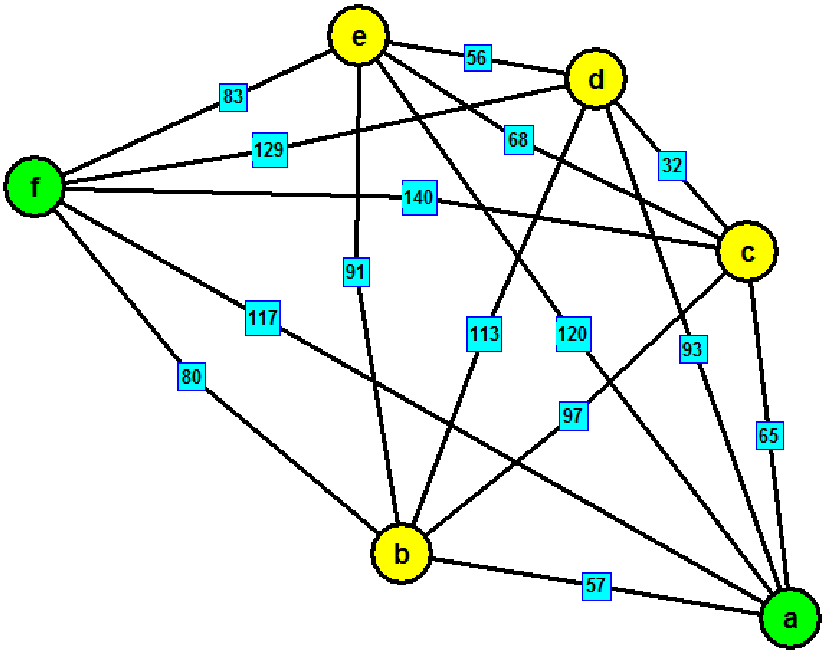
Brněnská cestovní kancelář při nabídce nových letních zájedů do zahraničí, vypsala možná nástupní místa k odjezdu. Cílem řidiče zájezdového autobusu je projet všemi nástupními místy a nabrat cestující. Zároveň cestovní kancelář chce naplánovat celou trasu tak, aby byla co nejrychlejší a přes žádné město se nejelo vícekrát. Na mapce (*Obrázek 43*) jsou vyznačena (červenými kolečky) nástupní místa, která je nutno projet. Mezi každými dvěma městy je znám průměrný čas, potřebný k dojetí z jednoho města do druhého. Pro lepší srozumitelnost úlohy dodejme, že čas je uveden místo vzdálenosti, protože někdy trasa vede po dálnici, v jiném případě pouze po obyčejné silniční komunikaci, takže rychlost jízdy není konstantní. Cestovní kancelář má sídlo přímo v Brně, proto je třeba zde cestu začít. Trasa musí končit v Praze, odkud bude zájezdový autobus pokračovat po dálnici dále za hranice. Naplánujme požadovanou trasu a vypišme, v jakém pořadí je ideální projet nástupní místa.



Obrázek 43: Mapa nástupních míst

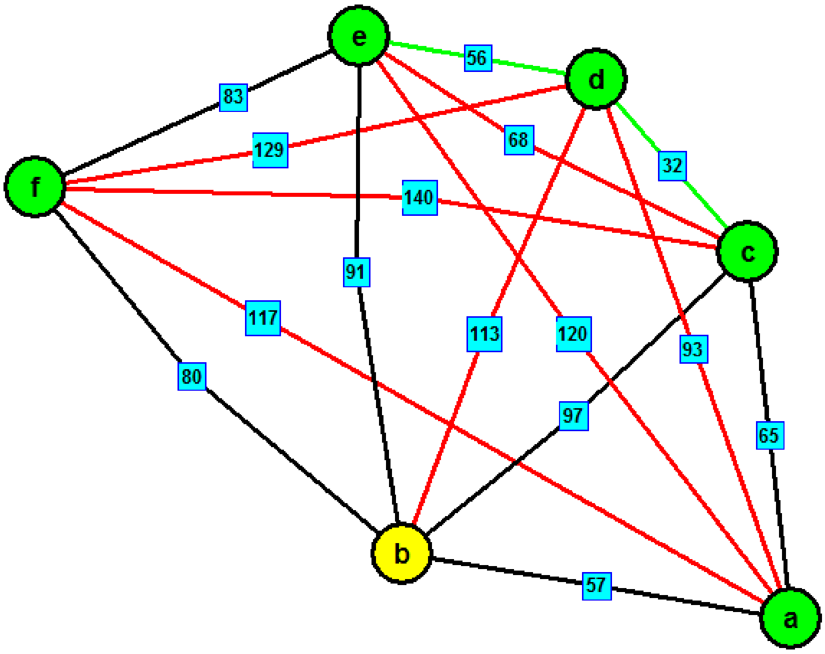
Řešení:

Situaci si znázorníme grafem (*Obrázek 44*), vrcholy budou reprezentovat města a ohodnocené hrany grafu možné cesty mezi nimi, s průměrným časem v minutách, potřebných k cestě z jednoho města do druhého. Zeleně je označen bod počáteční *a* a bod koncový *f*.



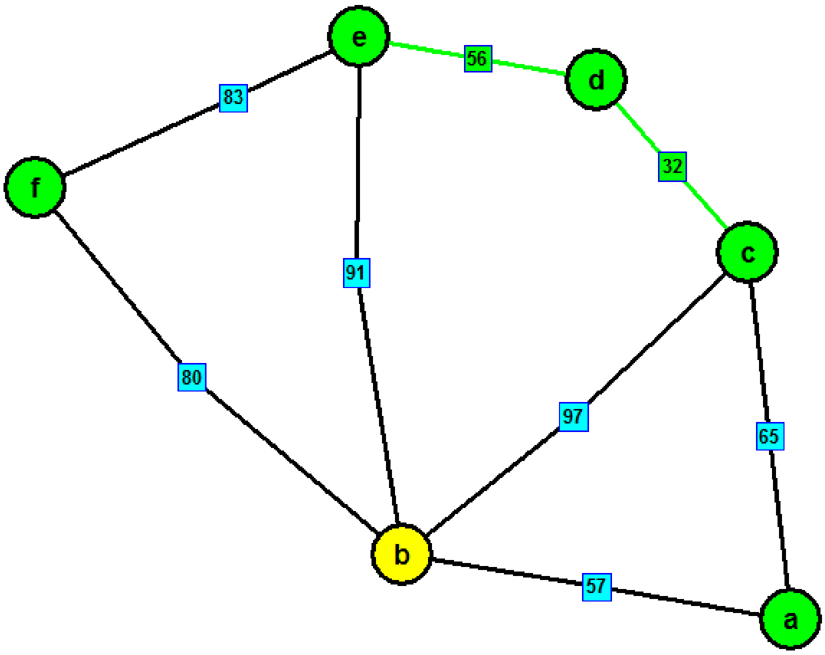
Obrázek 44: Znázornění úlohy grafem

Jak již bylo řečeno na začátku této kapitoly, neexistuje spolehlivý algoritmus, který by vedl k optimálnímu řešení, proto budeme postupovat odhadováním a zkoušením různých možností. Po chvilce zamyšlení nad grafem dojdeme k závěru, že některé dlouhé hrany zcela jistě nepoužijeme a naopak některé velmi krátké hrany budou obsaženy v námi hledaném optimálním řešení. Spojení vrcholů *c*, *d*, *e* se zdá ideální za použití hran $\{c, d\}$, $\{d, e\}$ s ohodnocením *32* a *56*. Vyznačme si tyto úvahy v zadaném grafu (*Obrázek 45*), přičemž červeně označíme ty hrany, které nepoužijeme, protože se nezdají být optimální.



Obrázek 45: Počáteční úvaha

Červeně označené hrany budeme již ignorovat a zeleně označené hrany vždy použijeme. Zbývá tedy určit zbylou část trasy, neboli dokončení celé cesty dle zadání. Pro lepší přehlednost si zjednodušme předchozí graf vymazáním všech červeně označených hran (*Obrázek 46*).

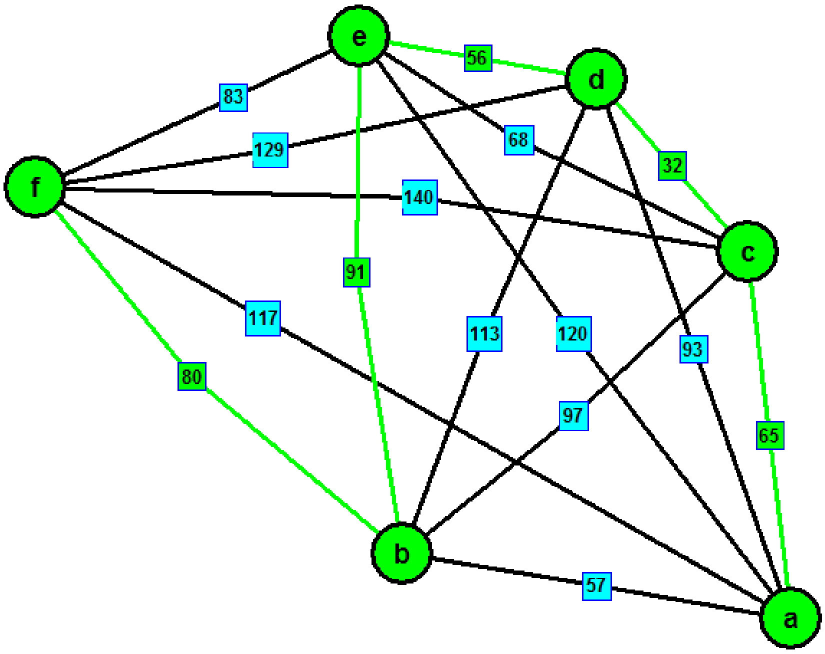


Obrázek 46: Zjednodušení úlohy

V takto zredukovaném grafu se nabízejí již pouze dvě možnosti řešení, první cesta – (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*) s celkovou délkou hran 325 a druhá cesta – (*a*, *c*, *d*, *e*, *b*, *f*) s celkovou délkou hran 324, která vychází jako konečné řešení.

Při obdobném postupu, který je založen na úvahách a odhadech, je zapotřebí dát velký pozor, abychom „nevyřadili“ hranu, která je součástí správného řešení. V případě větších instancí grafu by pouhý odhad nemusel být již dostačující. V takových případech nám nezbývá nic jiného, než danou problematiku studovat hlouběji a aplikovat některý z heuristických algoritmů, či převést úlohu na jiný, lépe řešitelný problém, avšak to je již nad rámec této práce. Podrobnější používané postupy uvádí ve své knize Jiří Demel [3].

Pro úplnost vyznačme nalezenou nejkratší cestu v grafu s počátečním vrcholem *a* a koncovým vrcholem *f* (*Obrázek 47*).



Obrázek 47: Výsledné řešení

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit obecný souhrn, který má pomoci čtenáři se zájmem o grafové algoritmy uvědomit si praktické využití této teorie. Byl bych rád, aby si čtenář po prostudování této práce vytvořil lepší vztah k teorii grafů a uměl si představit možné využití a aplikování látky na řešení situací v „běžném“ životě.

Zaměřil jsem se na problematiku spadající pod několik oblastí v teorii grafů, a to konkrétně: eulerovské, rovinné a hamiltonovské grafy a dále také barevnost.

V každé kapitole se zpočátku snažím čtenáře nějak zaujmout, stručně seznámit s historií a motivovat k dalšímu poznávání. Následuje stručný výpis teorie, nezbytný pro řešení úloh. Je nutno dodat, že v této práci se nezaměřuji jen na výklad teorie. Dle mého názoru definic, různých vět a jejich důkazů je již v mnoha publikacích, na internetu a v ostatních zdrojích dostatek. Hlavním přínosem této práce má být především – naučit se rozpoznat možné použití teorie grafů a správně ji aplikovat. Každá teorie by měla být podložena praxí, v tomto případě řešením úloh, na kterých si čtenář může rozšířit a především upěvnit své vědomosti.

Závěrem bych rád doplnil další možné užitečné použité zdroje grafových algoritmů. Z nich jsem se jen něco naučil, nebo mě inspirovaly k určitým myšlenkám, proto jejich odkazy neuvádím průběžně v textu, ale sourhně až na konci. Je to také vhodné pro čtenáře, který se chce dozvědět více a rozvíjet své vědomosti v grafových algoritmech [4], [7], [8], [10], [11], [12].

Seznam použitých zdrojů

Knihy

[1] BIGGS, Norman, E LLOYD a Robin J WILSON. *Graph theory, 1736-1936*. New York: Clarendon Press, 1986, x, 239 p. ISBN 01-985-3916-9.

[2] DEMEL, Jiří. *Grafy*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988, 180 s. Matematika pro vysoké školy technické. ISBN neuvedeno.

[3] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2002, 257 s. ISBN 80-200-0990-6.

[4] KUČERA, Luděk. *Kombinatorické algoritmy*. Praha: SNTL, 1989.

[5] MATOUŠEK, Jiří a Jaroslav NEŠETŘIL. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 2. upr. vyd. Praha: Karolinum, 2000, 377 s. ISBN 80-246-0084-6.

[6] MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy*. Vyd. 1. Hradec Králové: Gaudeamus, 2013, 123 s. ISBN 978-80-7435-267-6.

[7] NEČAS, Jiří. *Grafy a jejich použití*. Praha: SNTL, 1978.

[8] NEŠETŘIL, Jaroslav. *Teorie grafů*. Praha: SNTL, 1979.

[9] POPPER, Filip. *Teorie a aplikace barvení grafů*. Hradec Králové, 2009. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové.

[10] SEDLÁČEK, Jiří. *Úvod do teorie grafů*. Praha: ACADEMIA, 1981.

[11] STRACHOTA, Pavel. *Základy teorie grafů*. FJFI, ČVUT, 2006. Dostupné z: http://linux.fjfi.cvut.cz/~ampy/files/vyuka/ztg.pdf

[12] ŠEDA, Miloš. *Teorie grafů*. Fakulta strojního inženýrství. Brno, 2003. Dostupné z: http://www.uai.fme.vutbr.cz/~mseda/TG03_MS.pdf

Internetové zdroje

[13] In Memoriam: Kenneth Appel. *University of Illinois: Department of Mathematics* [online]. 2014 [cit. 2014-09-20]. Dostupné z: http://www.math.illinois.edu/People/memoriam_appel.html

[14] JIROVSKÝ, Lukáš. Barvení mapy. *Teorie-grafu* [online]. 2008-2010 [cit. 2014-09-11]. Dostupné z: http://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/barveni-mapy.php

[15] PARDALOS, P, Dingzhu DU a Ronald L GRAHAM. *Handbook of combinatorial optimization* [online]. Second edition /. 2013, 5 volumes (xxi, 3409 pages) [cit. 2014-09-20]. ISBN 978-1-4419-7997-1. Dostupné z: http://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-1-4419-7997-1_59

[16] Rovinné grafy: Výklad. *MuDisMat* [online]. 2007 [cit. 2014-09-20]. Dostupné z: http://xzagorov.webzdarma.cz/MuDisMat3/index.php?CisKap=7&Kniha=2&CisZal

[17] SCHLEICHER, Dierk a Malte LACKMANN. *An invitation to mathematics: from competitions to research* [online]. New York: Springer, c2011, xiv, 220 p. [cit. 2014-09-20]. ISBN 36-421-9532-6. Dostupné z: http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-19533-4_7

[18] What is the Difference between a Heuristic and an Algorithm?. In: *Stackoverflow* [online]. 2010 [cit. 2014-09-11]. Dostupné z: http://stackoverflow.com/questions/2334225/what-is-the-difference-between-a-heuristic-and-an-algorithm

Seznam obrazových příloh