VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

PŘÍKLADY ŘEŠENÍ NOSNÍKŮ STATICKY NEURČITÝCH

EXAMPLES OF HYPERSTATIC BEAM SOLUTIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE LUKÁŠ LINHART
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. JIŘÍ MALÁŠEK, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automobilního a dopravního inženýrství
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Lukáš Linhart

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Stavba strojů a zařízení (2302R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Příklady řešení nosníků staticky neurčitých

v anglickém jazyce:

Examples of hyperstatic beam solutions

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vypracování celkového přehledu řešení typických nosníků staticky určitých a staticky neurčitých. Uvést a vysvětlit na příkladech způsoby výpočtů staticky neurčitých nosníků.

Cíle bakalářské práce:

Vypracovat reprezentivní přehled nákresů a výpočtů v oblasti nosníků staticky určitých i staticky neurčitých.

Seznam odborné literatury:

1. Janíček P., Ondráček E., Vrbka J.: Pružnost a pevnost, VUT Brno, 1992.
2. Gere J.M. and Timoshenko: Mechanics of materials. Chapman and Hall. Third SI Edition, 1989, ISBN 55-503-79.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Jiří Malášek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 21.11.2011

L.S.

prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c. Děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá řešením deformace a výsledných vnitřních účinků u přímých nosníků, které jsou uloženy staticky určitě i neurčitě. Cílem bakalářské práce je vypracování reprezentativního souhrnu výpočtů a nákresů vybraných, typicky uložených a zatížených nosníků, řešitelných v rámci lineární pružnosti prutů. V další části jsou popsány metody řešení staticky neurčitých nosníku. Castiglianova věta, rovnice ohybové čáry, metoda třímomentových rovnic. Ukázka řešení těmito metodami byla provedena na ilustračním příkladě.

KLÍČOVÁ SLOVA

Staticky určitě uložený nosník, staticky neurčitě uložený nosník, Castiglianova věta, rovnice ohybové čáry, průhyb, natočení, třímomentová rovnice

ABSTRACT

This work will discuss the internal deformation and resulting effects in straight beams, which are stored statically certainly indefinitely. The aim of the thesis is to develop a representative summary of selected calculations and drawings, typically stored and loaded beams, solvable in linear elasticity rods. The next section describes the methods to solve statically indeterminate beam, Castiglian´s theorem, the equation of bending lines, the method of Clapeyron´s equations. Sample solution of these methods was performed on the illustrative example.

KEYWORDS

Statically determinate beam deposited, store statically indeterminate beam, Castiglian´s theorem, the equation of bending lines, deflection, rotation, Clapeyron´s equation

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

LINHART, L. *Příklady řešení staticky neurčitých nosníků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 45s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jiří Malášek, PhD

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením doc. Ing. Jiřího Maláška, PhD a s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 24. května 2012 ……..…….

Lukáš Linhart

PODĚKOVÁNÍ

Poděkování směřuji ke své rodině, fakultě strojního inženýrství a vedoucímu práce doc. Ing. Jiřímu Maláškovi,PhD

OBSAH

Úvod ... 9
1 Předpoklady řešení ... 10
1.1 Předpoklad lineární pružnosti prutů: ... 10
1.1.1 Prutové předpoklady ... 10
1.1.2 Materiálové charakteristiky ... 11
1.1.3 Podmínky statické rovnováhy ... 11
2 přehled uložení nosníků ... 15
2.1 Příklady staticky určitého uložení ... 15
2.2 Příklady staticky neurčitého uložení ... 17
3 Vyšetření častých uložení a namáhání nosníků ... 18
4 Metody řešení statické neurčitosti ... 28
4.1 Castiglianova věta ... 28
4.1.1 energie napjatosti ... 29
4.2 Diferenciální rovnice ohybové čary ... 30
4.2.1 Odvození diferenciální rovnice ohybové čáry ... 30
4.2.2 Znaménková konvence ... 31
4.3 Metoda třímomentových rovnic ... 32
4.3.1 odvození třímomentové rovnice ... 32
4.3.2 Spojitý nosník s převislým koncem ... 34
5 Řešení zvoleného přikladu ... 35
5.1 Zadání ... 35
Závěr ... 42
Seznam použitých zkratek a symbolů ... 44

ÚVOD

Problém staticky neurčitých nosníků je doménou hlavně statiky stavebních konstrukcí. Se spoustou strojních součástí, která jsou staticky neurčitě uložena, se však můžeme setkat i ve strojírenství. Mezi nimi nacházíme i ty, které je možno definovat jako přímé, prizmatické nosníky. Cílem této práce bylo vypracovat reprezentativní souhrnu výpočtů a nákresů vybraných, typicky uložených a zatížených nosníků, řešitelných v rámci lineární pružnosti prutů. V dalším kroku jsou popsány tři přístupy řešení staticky neurčitých úloh. K řešení výpočtu zvoleného nosníku bylo využito integrálního řešení, kde byla užita Castiglianova věta, diferenciálního řešení za použití rovnice ohybové čáry a metody třímomentových rovnic.

1 PŘEDPOKLADY ŘEŠENÍ

V lineární pružnosti prutů se zabýváme analýzou vlivu zatížení tělesa na jeho deformaci a napjatost s ohledem na možné riziko vzniku mezních stavů. Deformace a napjatost jsou lineárními veličinami. K řešení je nezbytné vymezení charakteristik a předpokladů, v rámci kterých lze uvažovat úlohu za lineárně pružnou [5].

1.1 PŘEDPOKLAD LINEÁRNÍ PRUŽNOSTI PRUTŮ:

[5], [1]

- Splnění prutových předpokladů
- Malé deformace nosníků
- Prky uvolněny v nedeformovaném stavu
- Využito Saint-Venantova principu
- Chovaní okrajových podmínek je lineární
- Materiál je lineární

1.1.1 PRUTOVÉ PŘEDPOKLADY

a) Geometrické předpoklady

Prut je určen střednicí a v každém bodě střednice příčným průřezem. Střednice je spojitá a hladká křivka konečné délky. Příčný průřez je souvislá oblast, ohraničena obrysovou křivkou a popsaná charakteristikami příčného průřezu [5], [1].

b) Vazbové a zatěžovací předpoklady

Vazby mohou omezovat jen posuvy a úhly natočení střednice. Silové působení je ve smyslu statické ekvivalence soustředěno na střednici. Jsou to osamělé a liniové síly a silové dvojice [1].

c) Deformační předpoklady

V průběhu deformace zůstává střednice hladkou a spojitou křivkou. Průřezy zůstávají k deformované střednici rovinné a kolmé[5], [1].

d) Předpoklady o napjatosti

V příčném průřezu je napjatost prutu určena normálovým a smykovým napětím. Tato napjatost se nazývá prutová napjatost [5], [1].

1.1.2 MATERIÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY

Materiál je homogenní, jeho vlastnosti jsou popsány elastickými konstantami, modulem pružnosti v tahu E a Poissonovou konstantou μ [5], [1].

1.1.3 PODMÍNKY STATICKÉ ROVNOVÁHY

VÁZANÉ TĚLESO

Těleso je ve statické rovnováze tehdy, je-li v mechanickém klidu, který je z hlediska silového působení popsán vztahy: $\sum Fi = 0$ a $\sum Mi = 0$. To znamená, že součet všech sil působící na těleso a součet všech momentů k libovolnému bodu, ale ke vždy stejnému bodu, je roven nule[3].

Algebraicky je statická podmínka k počátku souřadného systému vyjádřena šesti podmínkami, třemi podmínkami silovými a třemi momentovými [3] .

Počet nezávislých statických podmínek označujeme $\nu = \nu_F + \nu_M$ (2)

Počet statických podmínek silových ν_F

Počet statických podmínek momentových ν_M

Neznámé nezávislé parametry řešíme pomocí podmínek statické rovnováhy. Mezi počtem použitelných podmínek statické rovnováhy ν a počtem neznámých nezávislých parametrů μ může nastat [3]:

1) $\mu > \nu$… uložení je staticky neurčité,
počet neznámých je větší než počet použitelných rovnic,
matematicky nemá úloha jednoznačné řešení [3]

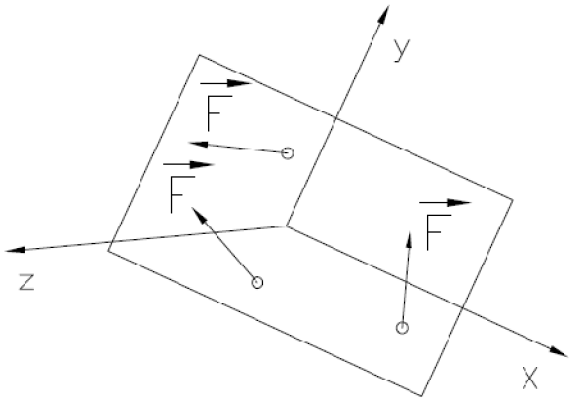
2) $\mu < \nu$… uložení je staticky přeurčené,
počet neznámých je menší než počet použitelných rovnic,
těleso, které je pohyblivě uloženo, není ve statické rovnováze,
nutnost sestavení pohybových rovnic – dynamická úloha [3]

3) $\mu = \nu$... uložení je staticky určité,
počet neznámých je roven počtu použitelných rovnic,
= nutná podmínka statické určitosti,
z matematického hlediska doplněna podmínkou: $\mu_R + \mu_M \leq \nu_M$ (3)

Počet použitelných rovnic záleží také na charakteristice soustavy silových prvků. V obecné silové soustavě sil platí [3]:

$$\nu_{\mathbf{F}} = 2 \text{ a } \nu_{\mathbf{M}} = 1$$

Obecná rovinná soustava sil:



Obr.1 Obecní rovinná soustava sil

PRUTOVÉ SOUSTAVY

Nosná konstrukce může být tvořena prutovou soustavou. Každý prut je s ostatními spojen klouby, kterými se nepřenáší ohybové ani kroutící momenty. Takové konstrukce využívají maximálně každý z prutů, jelikož jsou pruty namáhány pouze na tlak (tah). Při tomto typu namáhání probíhá napětí po celém průřezu prutu, na rozdíl od napětí v ohybu a krutu, kdy jsou obě napětí na střednici nulová .
Prvky prutového tělesa se vůči sobě nepohybují, prutová soustava tvoří nepohyblivé prutové těleso.
U prutových soustav rozlišujeme vnější, vnitřní a celkovou statickou určitost:

Vnější statická určitost se vztahuje k určení vnějších neznámých stykových sil z použitelných podmínek statické rovnováhy.

Vnitřní statická určitost se vztahuje k určení sil v prutech. Použitelné statické podmínky určujeme z charakteru soustav sil působících na styčníky.
Pro rovinou prutovou soustavu platí vztah [3]:

$$2 \cdot k - 3 = p \tag{4}$$

kde k – je počet styčníků

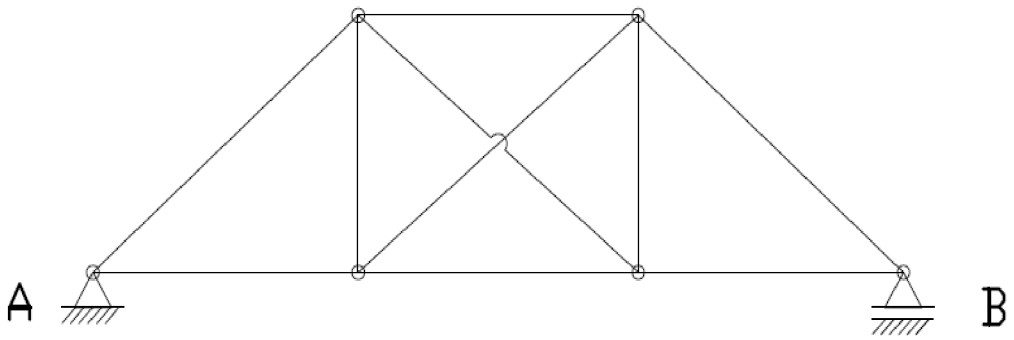
p – je počet prutů

Celková statická určitost se vztahuje k určení všech neznámých nezávislých parametrů prutové soustavy z použitelných podmínek statické rovnováhy.
Celkovou podmínku lze vyjádřit ve tvaru [3]:

$$2 \cdot k = p + \mu \tag{5}$$

kde μ- je počet neznámých parametrů vnějších sil

Příklad:



Obr.2 Prutová soustava

Vnější statická určitost:

Počet složek mechanického pohybu odebraných vazbami: $\xi_A = 2$

$\xi_B = 1$

$\mu = 3$

$\nu = 3$

=> staticky určité

Vnitřní statická určitost:

$$2 \cdot k - 3 = p$$
$$2 \cdot 6 - 3 = 8 \qquad (4)$$

$9 \neq 8$ => 1x staticky neurčité

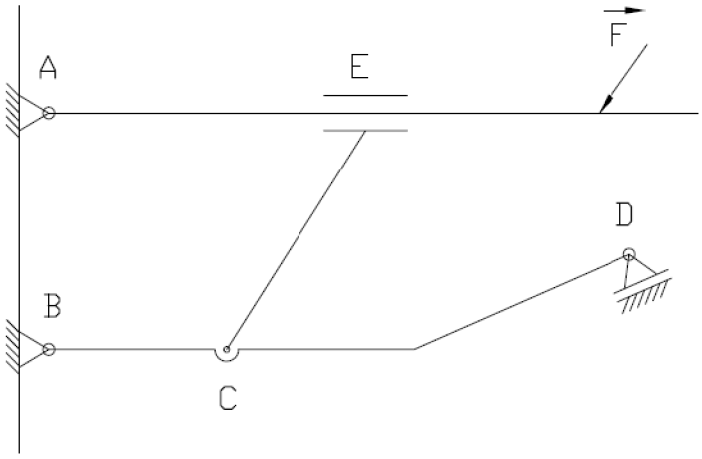
=> Celková statická určitost: 1x staticky neurčité

SOUSTAVY TĚLES

Při řešení soustavy těles se můžeme setkat s několika možnými uloženími.

Uložení :	pohyblivé	nepohyblivé
	omezující deformaci	neomezující deformaci
	zajišťující statickou rovnováhu	nezajišťující statickou rovnováhu
	staticky určité	staticky neurčité

Příklad:



Obr.3 Mechanismus

Nejdříve určíme pohyblivost celé soustavy provedením kinematického rozboru. Pohybujeme-li se v rovině vycházíme ze vztahu :

$$i = (n-1)\cdot i_v - \sum(\xi_i - \eta) \qquad (6)$$

kde
- i - počet stupňů volnosti vázaného tělesa
- i_v - počet stupňů volnosti volného tělesa v rovině
- n - počet těles včetně tělesa základního
- η - počet deformačních parametrů odebíraných vazbami
- $\sum\xi_i$-počet stupňů volnosti odebíraných vazbami [3]

$$i = (4-1)\cdot 3 - \sum(9-0)$$

uloženo nepohyblivě

$$i = 0$$

Určení statické určitosti

Po uvolnění všech těles získáme:
Počet neznámých parametrů NP = { F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Ey}, M_{Bz},F_D }
μ = 9

V obecné rovinné soustavě máme k dispozici tři rovnice a má-li soustava těles tři tělesa, získáváme 3 x 3, tedy 9 použitelných rovnic. Platí tedy, že $\nu = 9$

Podmínka statické určitosti $\mu = \nu$ je splněna, těleso je staticky určitě uloženo

Současně musí být splněna i podmínka $\mu_R + \mu_M \leq \nu_M$

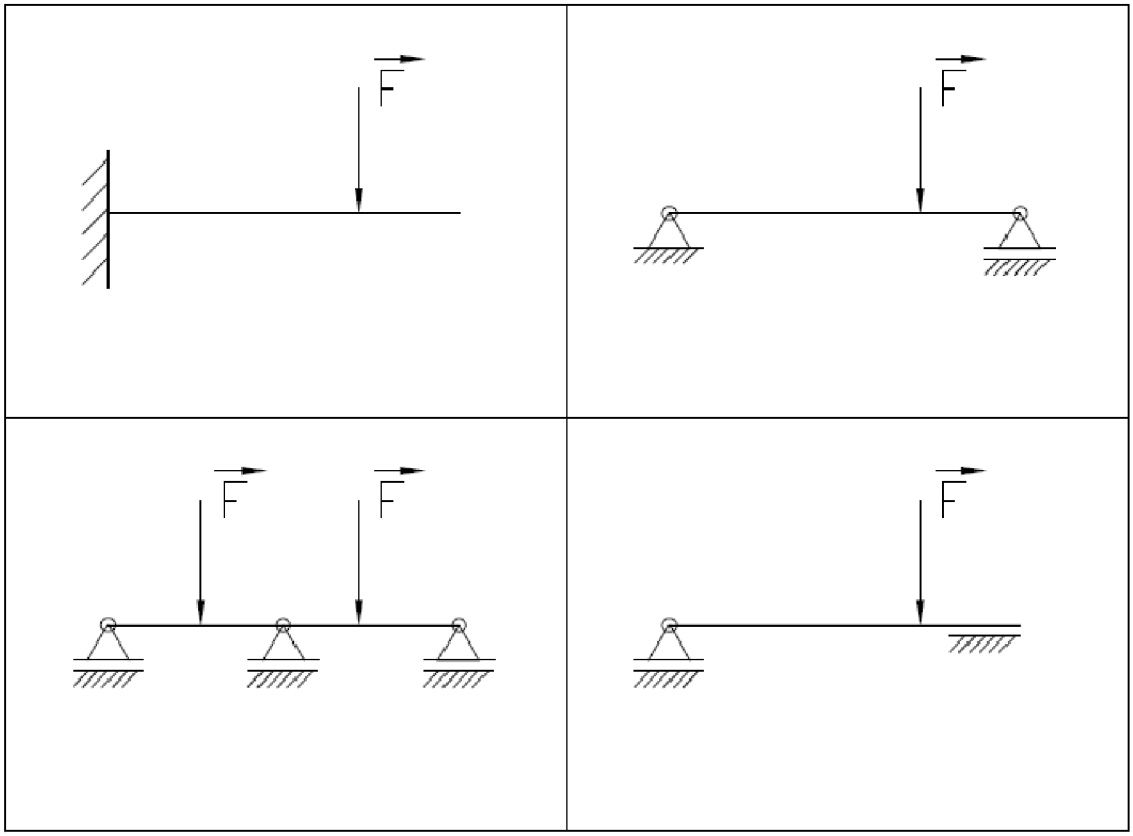
$$0 + 3 < 3$$

2 PŘEHLED ULOŽENÍ NOSNÍKŮ

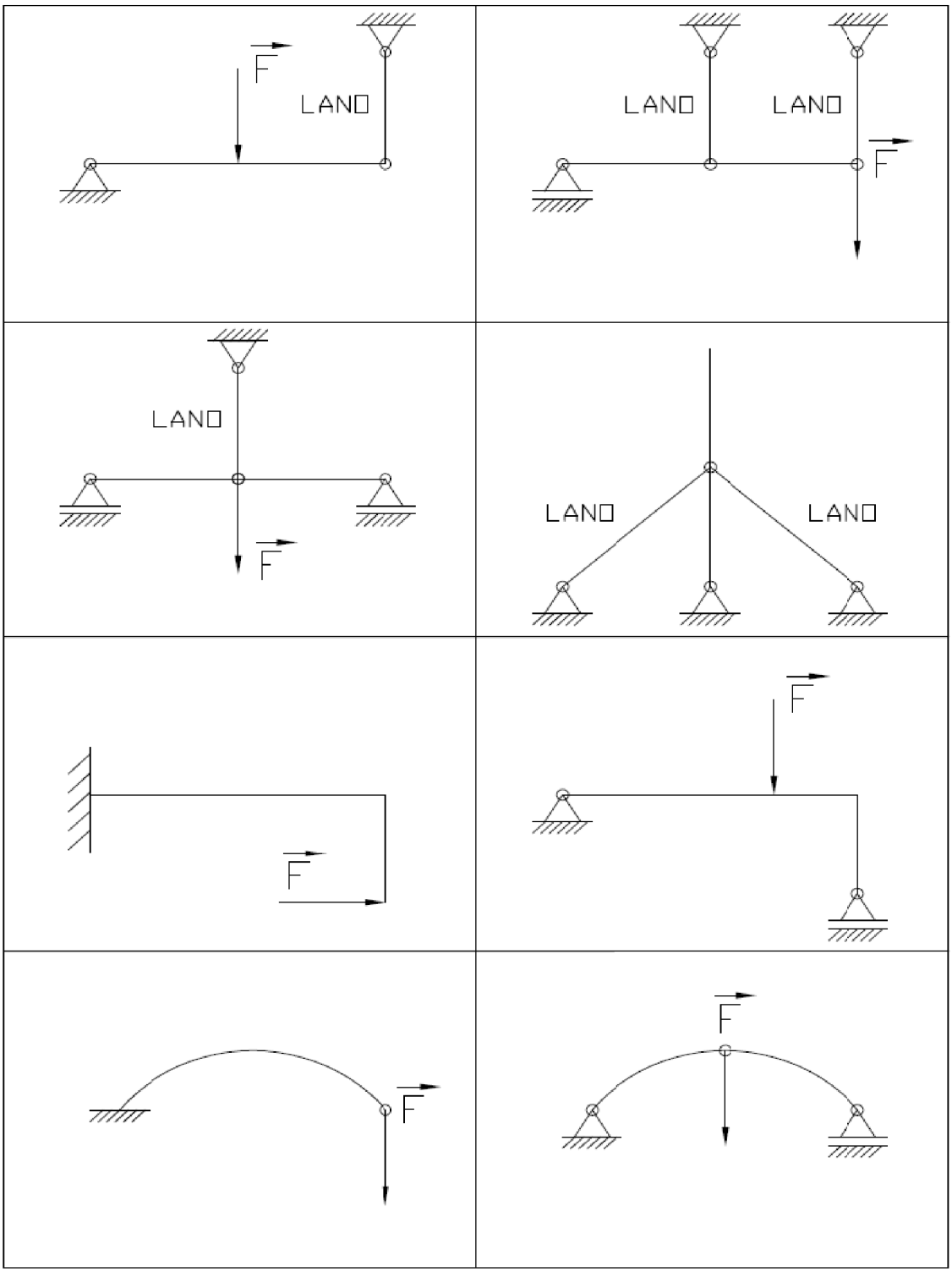
Charakter uložení záleží především na rozměrech nosníků a způsobů jejich namáhání. Realizace uložení je možná užitím vazeb a jejich vzájemných kombinací.

2.1 PŘÍKLADY STATICKY URČITÉHO ULOŽENÍ

Tab.1 Staticky určitá uložení

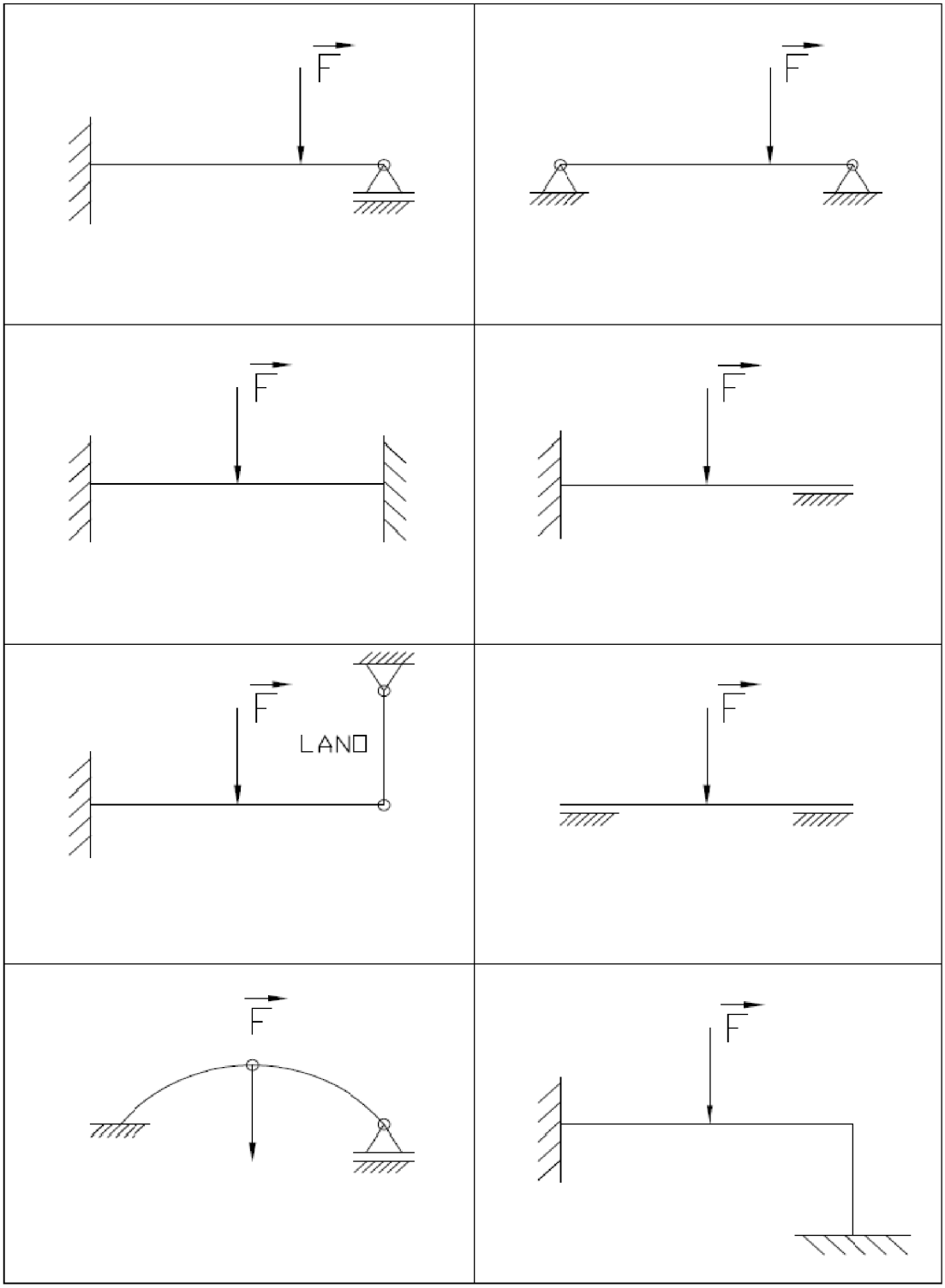


Tab .2 Staticky určitá uložení



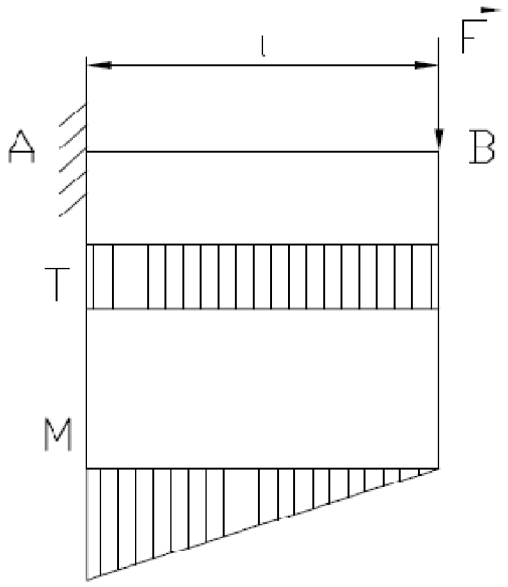
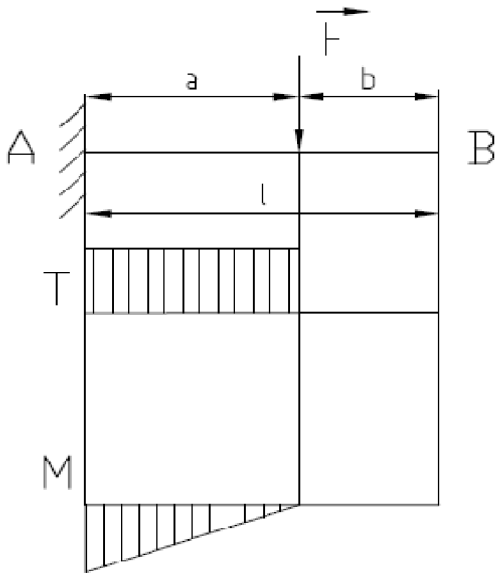
2.2 PŘÍKLADY STATICKY NEURČITÉHO ULOŽENÍ

Tab.3 Staticky neurčitá uložení

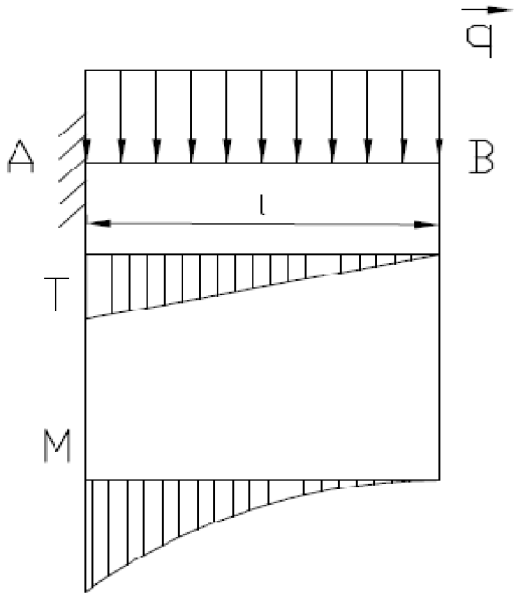
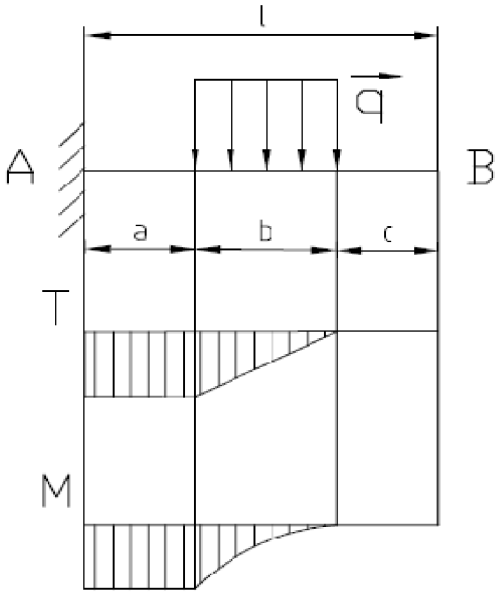


3 VYŠETŘENÍ ČASTÝCH ULOŽENÍ A NAMÁHÁNÍ NOSNÍKŮ

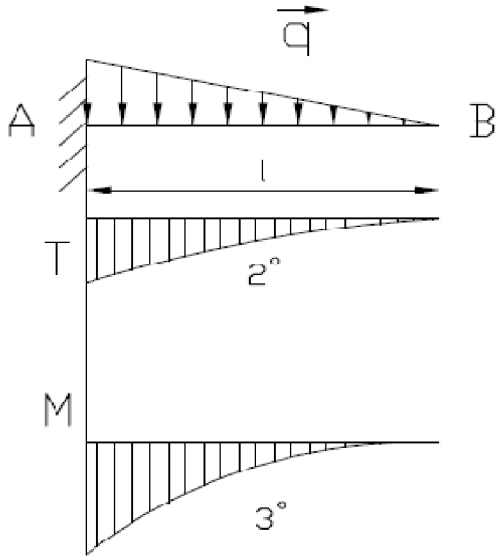
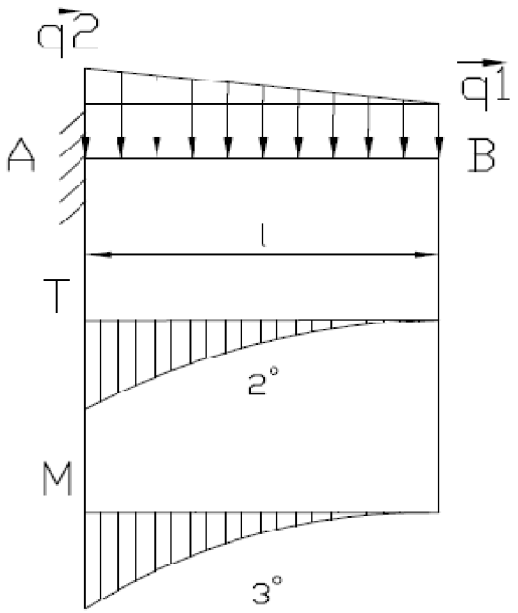
Tab.4 Výsledné vnitřní účinky „VVÚ“ staticky určitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce F
	$M_{A\,max} = Fl$ $\varphi = \frac{Fl^2}{2EJ}$ $w_B = \frac{Fl^3}{3EJ}$ $T = -F = -F_{RA}$
	$M_{A\,max} = Pa$ $\varphi_B = \frac{Fa^2}{2EJ}$ $w_B = \frac{Fa^2}{3EJ} \cdot \left(\frac{2a}{3} + b\right)$ $T = -F = -F_{RA}$

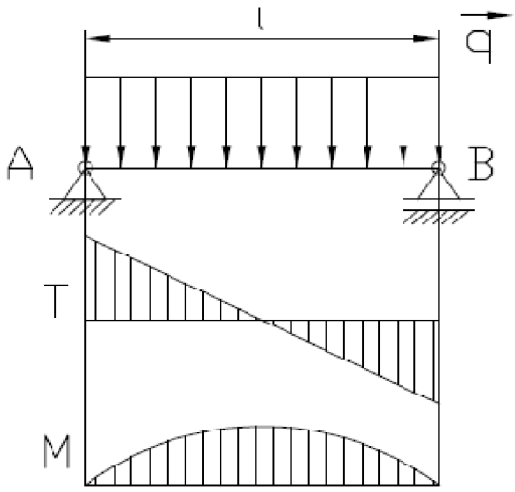
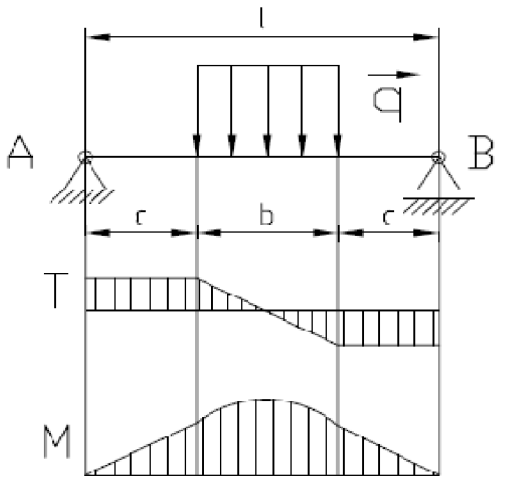
Tab. 5 VVÚ staticky určitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce F_r
	$M_{A\,max} = \frac{ql^2}{2}$ $\varphi_B = \frac{ql^3}{6EJ}$ $w_B = \frac{ql^4}{8EJ}$ $T = -ql = -F_{RA}$
	$M_{A\,max} = ql\left(\frac{b}{2} + a\right)$ $\varphi_B = \frac{F_1 + F_2}{EJ}$, $F_1 = \frac{qlb^2}{6}$, $F_2 = \frac{qla}{2} \cdot (a + b)$ $w_B = \frac{F_1 e_1 + F_2 e_2}{EJ}$, $e_1 = \frac{3b}{4} + c$ $e_2 = \frac{a}{3} \cdot \frac{4a + 3b}{2(a + b)} + b + c$ $T = -qb = -F_{RA}$

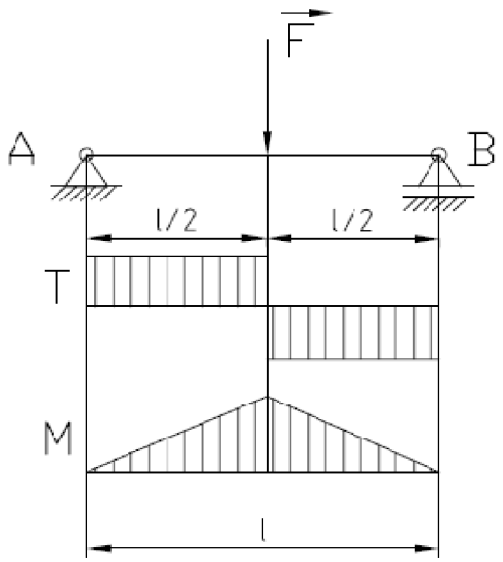
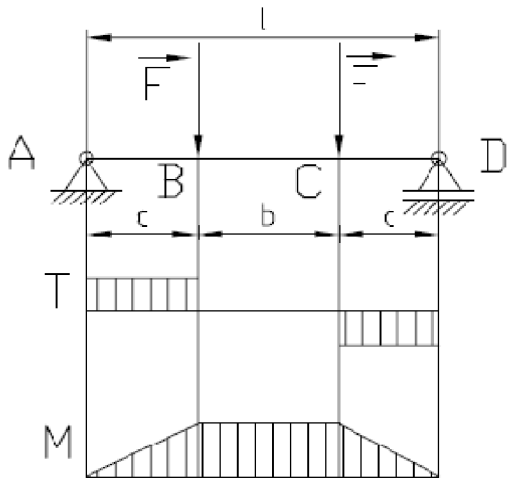
Tab. 6 VVÚ staticky určitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_{A\,max} = \frac{ql^2}{3}$ $\varphi_B = \frac{ql^3}{12EJ}$ $w_B = \frac{ql^4}{15EJ}$ $T = -\frac{ql}{2} = -F_{RA}$
	$M_{A\,max} = \frac{q_1 l^2}{2} + \frac{q_2 l^2}{3}$ $\varphi_B = \frac{(2q_1 l + q_2 l)\cdot l^2}{12EJ}$ $w_B = \frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{q_1 l}{8} + \frac{q_2 l}{15}\right)\cdot l^3$ $T = -\left(\frac{ql}{2} + ql\right) = -F_{RA}$

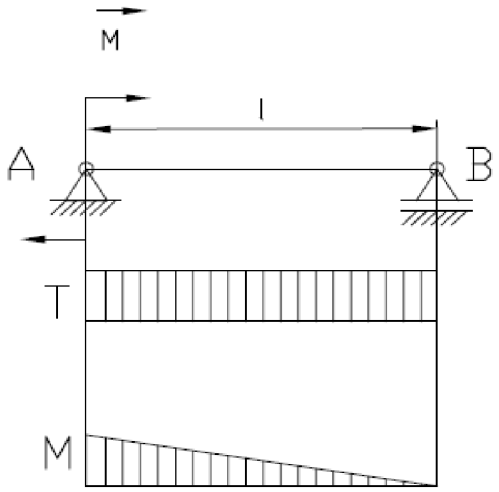
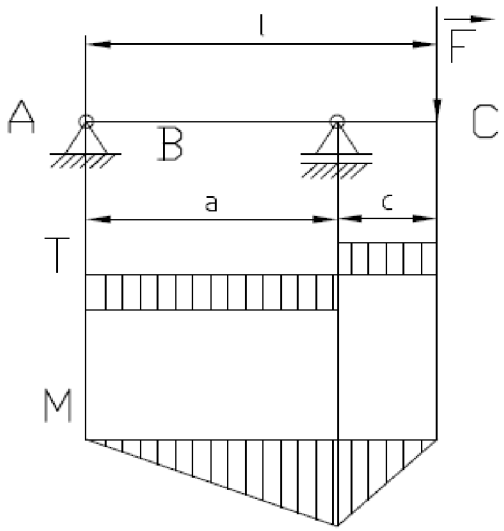
Tab. 7 VVÚ staticky určitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ}$ $w_{max} = \frac{5ql^4}{384EJ}$ $F_{RA} = F_{RB} = \frac{ql}{2} = F_R$ $T_A = -T_B = F_R - ql$
	$M_{max} = \frac{qb \cdot (l + 2c)}{8}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{qb \cdot (3l^2 - b^2)}{48EJ}$ $w_{max} = \frac{qb \cdot (8l^3 - 4lb^2 + b^3)}{384EJ}$ $F_{RA} = F_{RB} = \frac{qb}{2}$ $T_A = -T_B = \frac{qb}{2}$

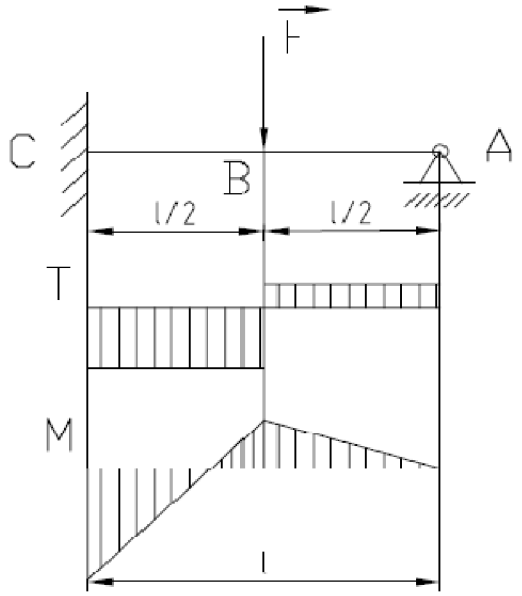
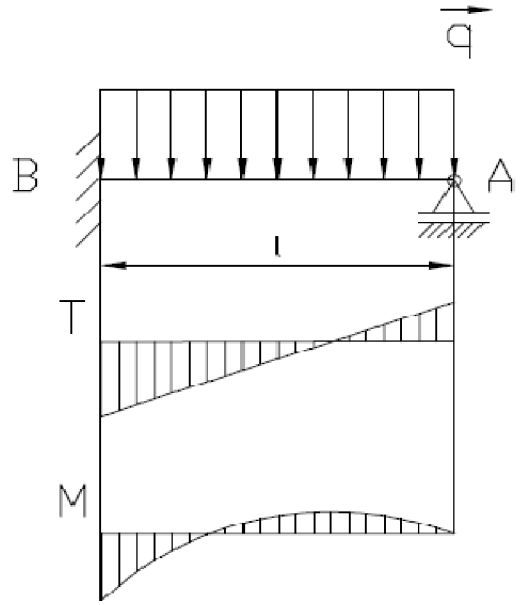
Tab. 8 VVÚ staticky určitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_{max} = \frac{Fl}{4}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Fl^2}{16EJ}$ $w_{max} = \frac{Fl^3}{48EJ}$ $F_{RA} = F_{RB} = \frac{qb}{2}$ $T = \pm\frac{F}{2}$
	$M_{max} = Fc$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Fc \cdot (l-c)}{2EJ}$ $w_{max} = \frac{Fc \cdot (3l^2 - 4c^2)}{24EJ}$ $F_{RA} = F_{RD} = F$ $T_{AB} = -T_{CD} = F$

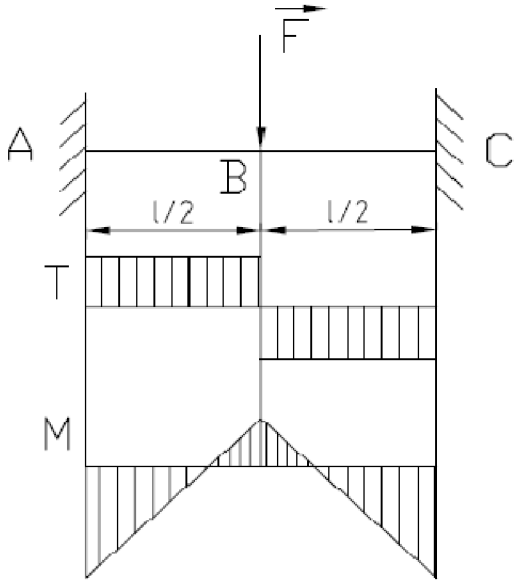
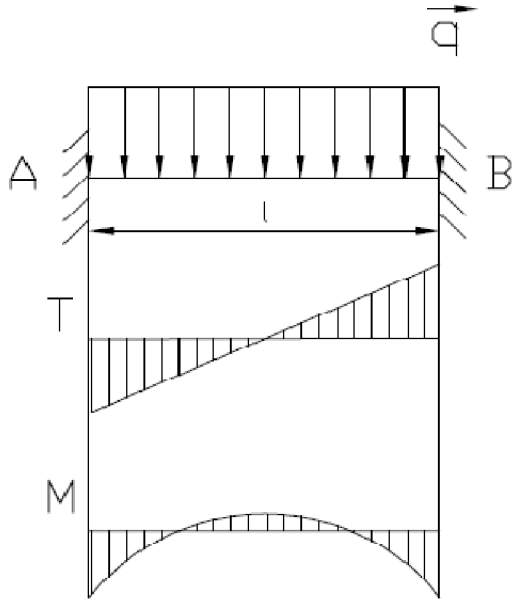
Tab. 9 VVÚ staticky určitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_{max} = M$ $\varphi_A = \frac{Ml}{3EJ}$ $\varphi_B = -\frac{Ml}{6EJ}$ $w_{max} = 0{,}0642 \cdot \frac{Ml^2}{EJ}$ $-F_{RA} = F_{RB} = \frac{M}{l}$ $T = -\frac{M}{l}$
	$M_{max} = Fc$ $\varphi_A = \frac{Fac}{6EJ}$ $\varphi_B = \frac{Fac}{3EJ}$ $w_{ABmax} = 0{,}0642 \cdot \frac{Fa^2c}{EJ}$ $w_C = \frac{Fc^2}{3EJ} \cdot (a + c)$ $F_{RA} = \frac{-Fc}{a}$ $F_{RB} = F \cdot \frac{c + a}{a}$ $T_{AB} = F_{RA}$ $T_{BC} = F$

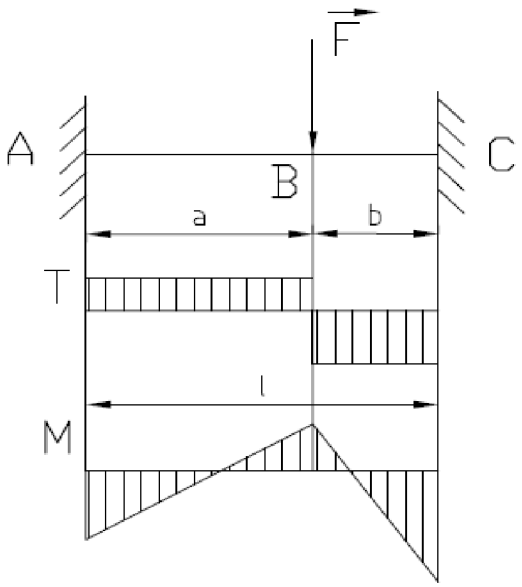
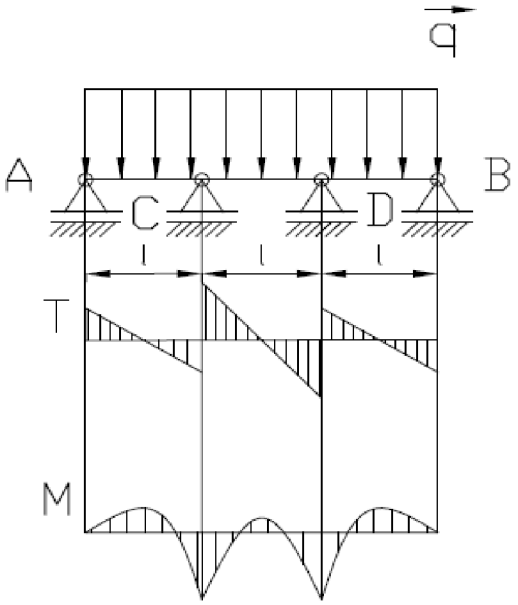
Tab. 10 VVÚ staticky neurčitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_B = \frac{5Fl}{32}$ $M_C = \frac{3Fl}{16}$ $\varphi_A = \frac{Fl^2}{32EJ}$ $w_{max} = 0{,}00932 \cdot \frac{Fl^3}{EJ}$ $F_{RA} = \frac{5F}{16}$ $F_{RC} = \frac{11F}{16}$ $T_{AB} = F_{RA}$ $T_{BC} = -F_{RB}$
	$M_{max} = \frac{9ql^2}{128}$ $M_B = -\frac{ql^2}{8}$ $\varphi_A = \frac{ql^3}{48EJ}$ $w_{max} = 0{,}0054 \cdot \frac{ql^4}{EJ}$ $F_{RA} = \frac{3ql}{8}$ $F_{RC} = \frac{5ql}{8}$ $T_A = F_{RA}$ $T_B = -F_{RB}$

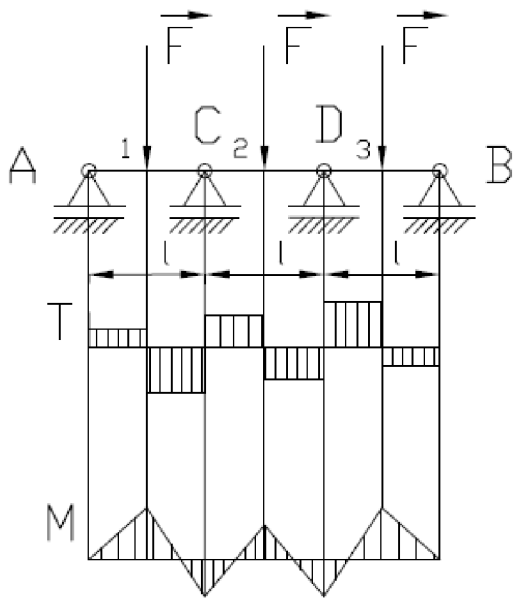
Tab. 11 VVÚ staticky neurčitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_A = M_C = -\frac{Fl}{8}$ $M_B = \frac{Fl}{8}$ $w_{max} = \frac{Fl^3}{192EJ}$ $F_{RA} = \frac{F}{2}$ $F_{RC} = \frac{F}{2}$ $T_A = \frac{F}{2}$ $T_B = -\frac{F}{2}$
	$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{(l/2)} = \frac{ql^2}{24}$ $w_{max} = \frac{ql^4}{384EJ}$ $F_{RA} = \frac{ql}{2}$ $F_{RB} = \frac{ql}{2}$ $T_A = \frac{ql}{2}$ $T_B = -\frac{ql}{2}$

Tab. 12 VVÚ staticky neurčitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_A = -\frac{Fab^2}{l^2}$ $M_B = 2\frac{Fa^2b^2}{l^3}$ $M_C = -\frac{Fa^2b}{l^3}$ $w_{max} = \frac{2F}{3EJ} \cdot \frac{a^3b^2}{(3a+b)^2}$ $F_{RA} = \frac{Fb^2}{l^3} \cdot (3a+b) = T_{AB}$ $F_{RC} = \frac{Fa^2}{l^3} \cdot (3b+a) = -T_{BC}$
	$M_{max} = M_C = M_D = 0{,}1ql^2$ $F_{RA} = F_{RB} = \frac{2ql}{5} = T_A = -T_B$ $F_{RC} = F_{RD} = \frac{11ql}{10} = T_C = -T_D$ $T = -F = -F_{RA}$

Tab. 13 VVÚ staticky neurčitých nosníků [6]

Nosník	Ohybový moment M, natočení φ, průhyb w, posouvající síla T, reakce Fr
	$M_{max} = M_1 = M_3 = \frac{7Fl}{40}$ $M_2 = \frac{Fl}{10}$ $F_{RA} = F_{RB} = \frac{2ql}{5}$ $F_{RC} = F_{RD} = \frac{23F}{20}$

4 METODY ŘEŠENÍ STATICKÉ NEURČITOSTI

Způsobů uložení existuje celá řada. Kombinací podpor, zatížení a uložení získáme velmi mnoho různých příkladů nosníků. V předchozích stránkách bylo vyšetřeno několik velmi častých uložení. V každé mechanice, ať strojírenské či stavební se setkáváme i s netypickými nosníky a nelze se tedy při jejich řešení spoléhat na analogii vyřešených příkladů. K úspěšnému zvládání statiky a pružnosti a pevnosti konstrukcí je znalost metodiky řešení statické neurčitosti nezbytnou nutností.

4.1 CASTIGLIANOVA VĚTA

Jeto jedinečný způsob řešení posuvů a natočení střednice, který se dá využít pro výpočet vazbových reakcí u staticky neurčitě uložených soustav. Castiglianova věta uvádí, že působí-li osamělé síly na lineárně pružnou soustavu, jejíž deformace jsou malé, pak posuv působiště libovolné síly po její nositelce je roven parciální derivaci celkové energie napjatosti podle této síly. Castiglianovu větu můžeme zapsat matematicky ve tvaru [4]

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \tag{7}$$

kde u_i je posuv působiště síly F_i ve směru síly F_i. Pro natočení podél střednice je rovnice zapsána ve tvaru

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \tag{8}$$

kde φ_i je úhel natočení (v radiánech) silové dvojice M_i ve směru působení M_i .Analogicky lze pro natočení podél průřezu

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \tag{9}$$

Castiglianovu větu můžeme použít pro určení posuvu v bodě, kde nepůsobí žádná síla ani silová dvojice. Postup výpočtu je následující [4]

- Sestavíme rovnici pro výpočet celkové energie napjatosti, do které zahrneme energii napjatosti vlivem doplňkové síly nebo silové dvojice Q_D, působící v bodě, jehož posuv počítáme.
- Napíšeme vztah pro určení požadovaného posuvu u_i ve směru Q_D, jako derivaci celkové energie napjatosti podle Q_D.
- Protože Q_D je doplňková síla, dosadíme do vztahu získaného ve druhém kroku za Q_D nulu

4.1.1 ENERGIE NAPJATOSTI

Vnější práce vykonaná při deformaci pružného tělesa je transformována na potenciální energii neboli energii napjatosti. Jestliže dojde k deformaci prutu ve směru působící síly o hodnotu y a je-li závislost mezi zatížením a deformací lineární, bude energie napjatosti tělesa rovna [4]

$$W = \int_0^y F\,dx = \frac{F}{2}y = \frac{F^2}{2k} \tag{10}$$

$$k = \frac{SE}{l} = \frac{M_K}{\varphi} = \frac{GJ_P}{l} \tag{11}$$

Tuto rovnici je možno zobecnit, jestliže si uvědomíme význam činitelů v ní vystupujících. V čitateli zde může být místo síly F posouvající síla, ohybový moment nebo kroutící moment. Ve jmenovateli potom musí být odpovídající tuhost příčného průřezu k. Takto můžeme získat vztahy pro energii napjatosti prutu pro jeho různá jednoduchá namáhání.

$$W = \frac{N^2 l}{ES} \quad tah\ a\ tlak \tag{12}$$

$$W = \frac{{M_K}^2 l}{2GJ_P} \quad krut \tag{13}$$

Síla T deformuje prvek prostým smykem, pak

$$W = \frac{T^2 l}{2SG} \quad smyk \tag{14}$$

Pro malé deformace v ohybu je poté energie napjatosti celého nosníku

$$W = \int \frac{N^2}{2ES}\,dx \quad tah\ a\ tlak \tag{15}$$

$$W = \int \frac{{M_o}^2}{2EJ}\,dx \quad ohyb \tag{16}$$

$$W = \int \frac{{M_k}^2}{2GJ_p}\,dx \quad krut \tag{17}$$

Pak můžeme přepsat vztahy pro posuvy a natočení, kde můžeme uvažovat proměnnost materiálových vlastností a příčného průřezu podél střednice[4]

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int \frac{1}{ES}\left(N\frac{\partial N}{\partial F_i}\right)dx \qquad tah\ a\ tlak \tag{18}$$

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int \frac{1}{EJ_z}\left(M_O\frac{\partial M_O}{\partial F_i}\right)dx \quad ohyb \tag{19}$$

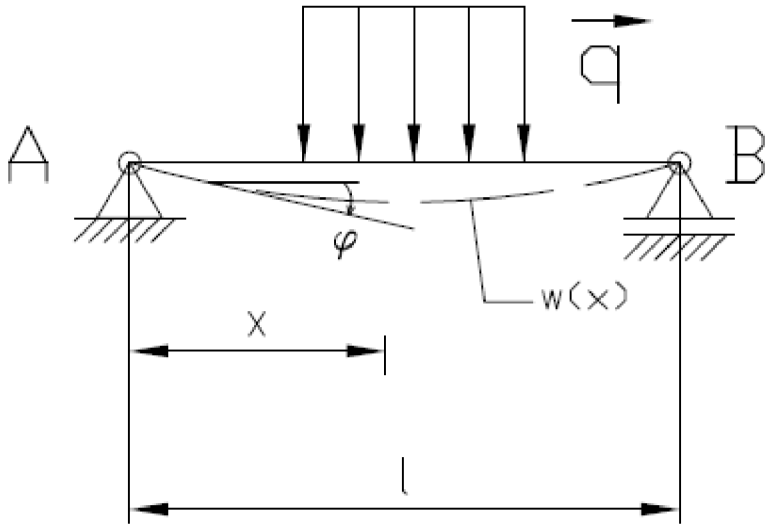
(20)

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} = \int \frac{1}{GJp}\left(M_K \frac{\partial M_K}{\partial M_i}\right) dx \quad krut$$

4.2 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE OHYBOVÉ ČARY

4.2.1 ODVOZENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE OHYBOVÉ ČÁRY

Uvažujme rovinný staticky určitý nosník s libovolným svislým zatížením $q_z(x)$ v rovině xz. Dané zatížení vyvolává pružnou deformaci nosníku, za níž se přímá osa nosníku přetvoří v rovinnou křivku, tkz.ohybovou čáru *w(x)*, znázorněnou čárkovaně. Jednotlivé svislé pořadnice ohybové čáry *w(x)* udávají průhyb nosníku v daném místě a jsou kladné směřují-li dolů. Pootočení φ průřezu nosníku, tj. sklon tečny k ohybové čáře s původní osou nosníku x, měříme kladně po smyslu otáčení hodinových ručiček [2].



Obr.4 Ohybová čára

Ohybová čára *w(x)=w* je velmi plochá a podle teorie malých deformací lze pro ni psát

$$\varphi = tg\varphi = \frac{dw}{dx} = w' \tag{21}$$

Křivost rovinné čáry je analyticky vyjádřená rovnicí *w=f(x)*, matematickou úpravou dostáváme

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{22}$$

kde ρ je poloměr křivosti, velmi malý výraz w'^2můžeme zanedbat a dostáváme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = -w'' \tag{23}$$

(24)

$$dosazení\ d\varphi = \frac{M}{dxEJ}$$

Po dosazení a úpravě získáme **diferenciální rovnici ohybové čáry rovinného nosníku 2. řádu** [2]

$$w''(x) = \pm\frac{M_y}{EJ_y} \tag{25}$$

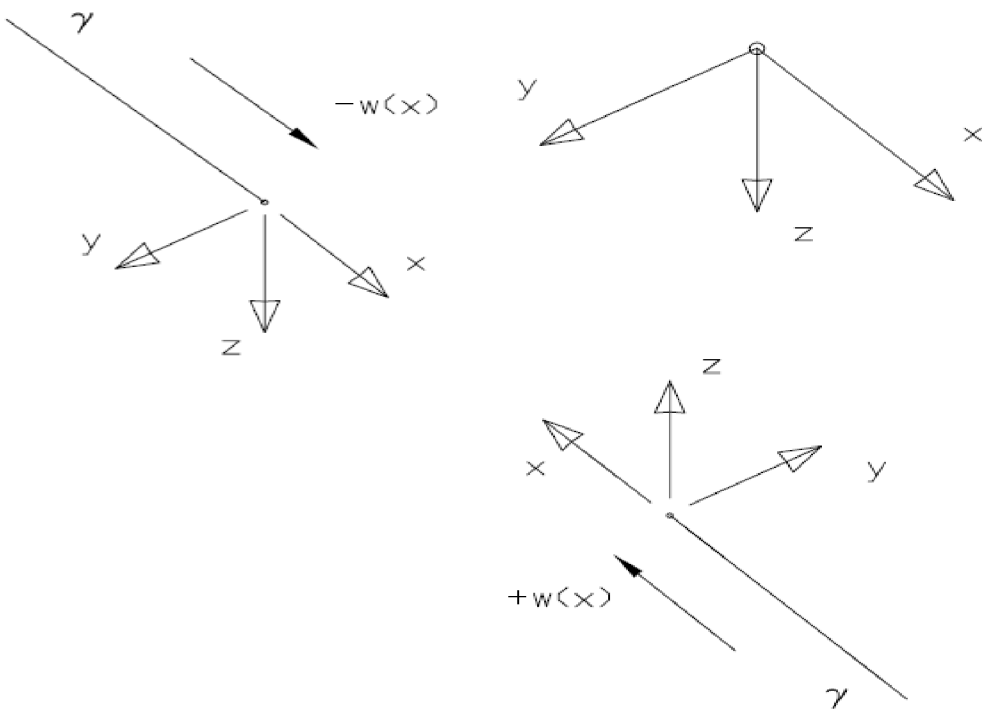
Druhá derivace ohybové čáry *w(x)*je přímo úměrná ohybovému momentu *M(x)* v daném místě „x“ nosníku a nepřímo úměrná ohybové tuhosti *EJ*. První přímou integrací získáme velikost natočení tečny ohybové čáry a při druhé integraci posunutí v bodě střednice [2].

Křivost nosníku ovlivňují nejen ohybové momenty *M(x)*, vyvolané zatížením *q(x)*, ale rovněž nerovnoměrná změna teplota po výšce průřezu nosníku. Uvažujeme-li vliv teploty, obdržíme po úpravě rovnici ohybové čáry nosníku ve tvaru [2]

$$w''(x) = \pm\frac{M_y}{EJ_y} - \frac{\alpha\Delta t}{h} \tag{26}$$

kde α je součinitel tepelné roztažnosti, Δt je teplotní rozdíl dolních a horních vláken průřezu nosníku a h je výška průřezu [2].

4.2.2 ZNAMÉNKOVÁ KONVENCE

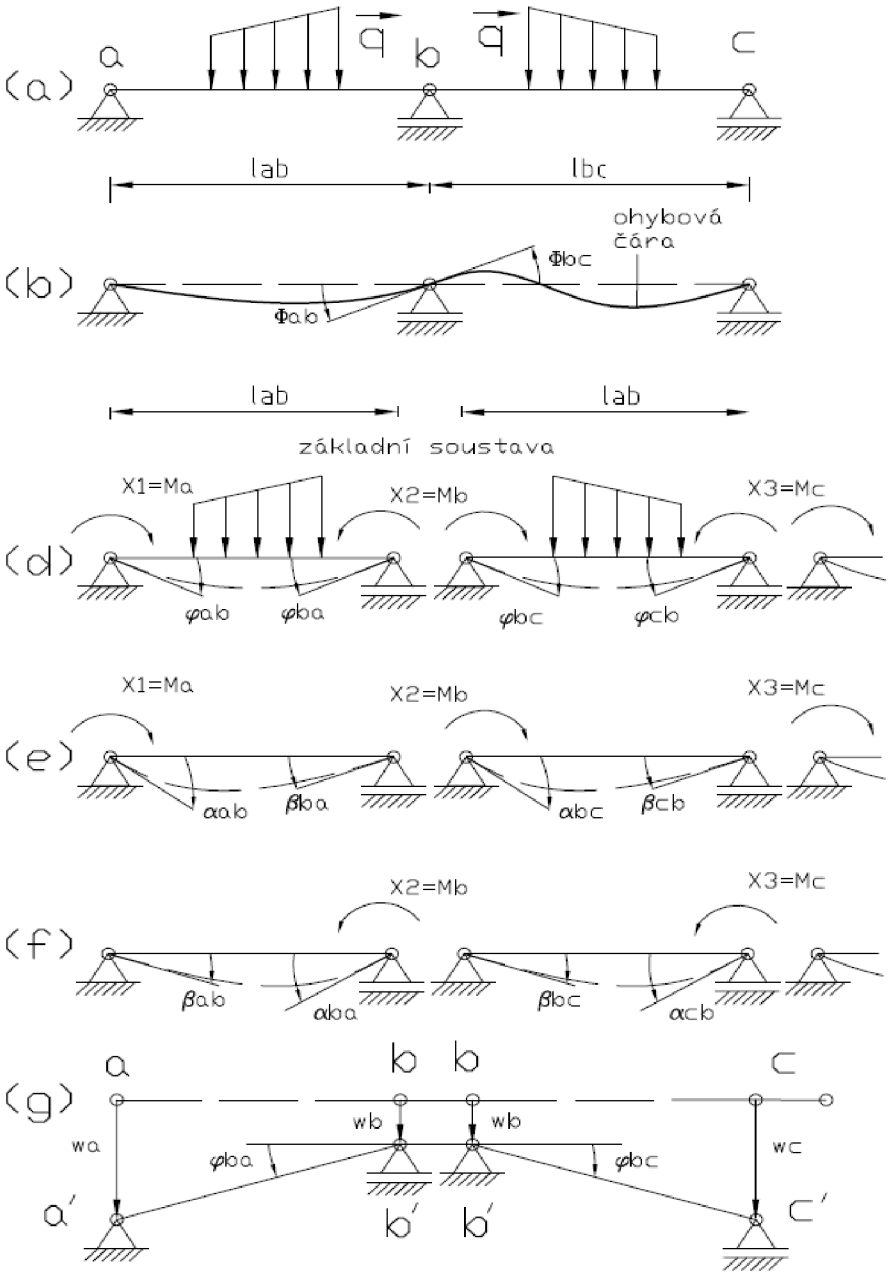


Obr.5 Znaménková konvence

4.3 METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

4.3.1 ODVOZENÍ TŘÍMOMENTOVÉ ROVNICE

Třímomentová rovnice je metoda silová, která volí za staticky neurčité veličiny X_i (i=1,2…n) spojitého nosníku podporové momenty M_i, ve vetknutí a nad vnitřními podporami. Z vyšetřovaného nosníku se vytvoří tkz. základní staticky určitá soustava, která je tvořena soustavou prostých nosníků v počtu rovném počtu polí spojitého nosníku a o rozpětích rovných rozpětím polí spojitého nosníku [2].



obr. 6 Rozklad nosníku na základní soustavu

Při stanovení deformačních podmínek vycházíme z ohybové čáry *obr.6 (b)* spojitého nosníku, kterou uvažujeme za zcela libovolného zatížení jako spojitou, tj. v žádném místě nemá zlom. U každé vnitřní podpory, např. b, spojitého nosníku musí platit [2]

$$\emptyset_{ba} = -\emptyset_{ba} \tag{27}$$

kde

$$\emptyset_{ba} = M_a\beta_{ba} + M_b\alpha_{ba} + \varphi_{ba} \tag{28}$$

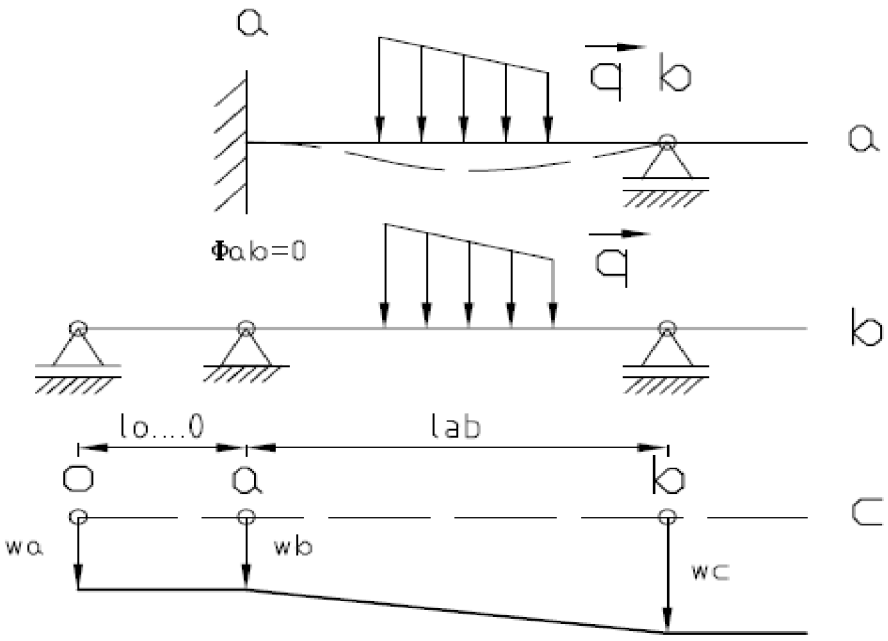
$$\emptyset_{bc} = M_b\alpha_{bc} + M_c\beta_{bc} + \varphi_{bc} \tag{29}$$

Jsou sklony tečen k ohybové čáře spojitého nosníku v průřezech těsně zleva a zprava podpory b (obr.6 b,d,e, f).

K deformačním úhlům připojujeme vždy dva indexy a znaménko; první index značí konec pole, jehož pootočení hledáme, druhý index pak udává opačný konec vyšetřovaného pole. Pootočení podporového průřezu je kladné, prohýbá-li se nosník v blízkosti podpory směrem dolů. Všechny úhly φ, α, β na obr. 6 jsou kladné [2].

Po dosazení vztahů (28), (29) do deformační podmínky (27) a úpravě obdržíme třímomentovou rovnici pro podporu b spojitého nosníku [2]

$$M_a\beta_{ba} + M_b(\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c\beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0 \tag{30}$$



Obr. 7 Vetknutý konec "a" spojitého nosníku

Třímomentovou rovnici lze napsat rovněž pro vetknutý konec a (obr. 7 a) spojitého nosníku, v němž je $\emptyset_{ab} = 0$. Za tím účelem připojíme k nosníku ještě jedno, tkz. nulové pole *oa* (obr. 7 b) o délce $l_{oa} -> 0$, které je nezatížené a dokonale neohebné (nedeformovatelné) [2].

Třímomentová rovnice pro vnitřní podporu *a* nosníku (obr.7 b) má pak podle (30) tvar

$$M_o\beta_{ao} + M_a(\alpha_{ao} + \alpha_{ab}) + M_b\beta_{ab} + \varphi_{ao} + \varphi_{ab} = 0 \tag{31}$$

Uvažujem-li v ní $M_o = 0,\ \beta_{ao} = \alpha_{ao} = \varphi_{ao} = 0$

Obdržíme přetvárnou rovnic

$$M_a\alpha_{ao} + M_b\beta_{ab} + \varphi_{ab} = 0 \tag{32}$$

shodnou s rovnicí pro oboustranně vetknutý nosník [2].

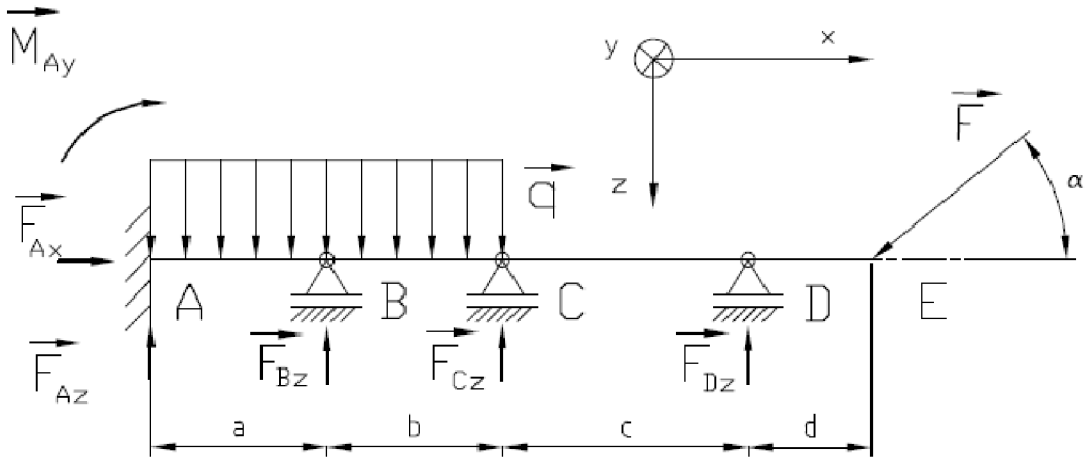
4.3.2 SPOJITÝ NOSNÍK S PŘEVISLÝM KONCEM

Má-li spojitý nosník převislý konec, je ohybový moment v krajní podpoře roven momentu převislého konce. Takto vypočtený moment pak dosazujeme jako staticky určitou veličinu do třímomentové rovnice pro krajní podporu [2].

5 ŘEŠENÍ ZVOLENÉHO PŘIKLADU

5.1 ZADÁNÍ

Příklad: Spojitý nosník konstantního průřezu po celé délce. Zatížený silou F = 3kN, $\alpha = 30°$ q = 1kN/m, a = 10, b = 10, c = 6, e = 2. Stupeň statické neurčitosti s = 3.



Obr. 8 Zvolený příklad

ROVNICE STATICKÉ ROVNOVÁHY:

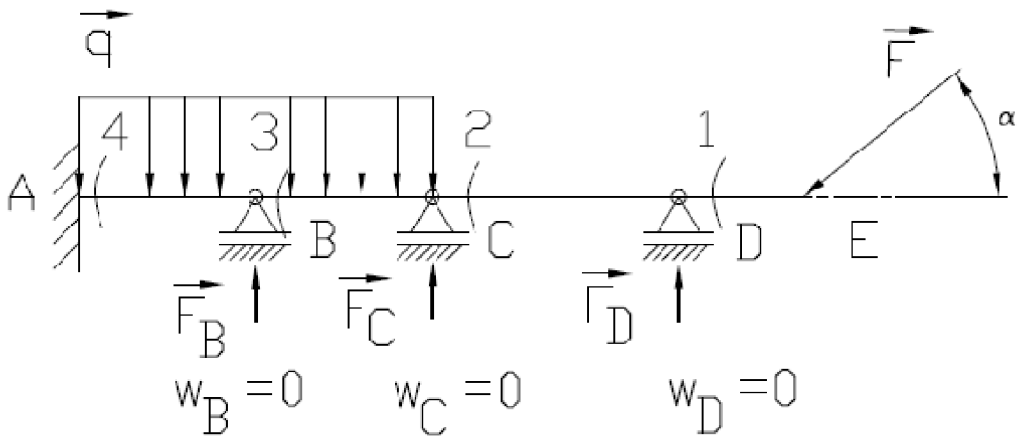
$$F_{Ax} - Fcos\alpha = 0 \tag{33}$$

$$F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} - F_{Dz} + q(a+b) + Fsin\alpha = 0 \tag{34}$$

$$-M_{Ay} + aF_{Bz} + (a+b)F_{Cz} + (a+b+c)F_{Dz} - q\frac{(a+c)^2}{2} + Fsin\alpha l = 0 \tag{35}$$

ČÁSTEČNÉ UVOLNĚNÍ:

Úlohu uvolníme na úroveň statické určitosti. V místě uvolnění zajistíme stejné deformace pomocí okrajových podmínek. Při řešení VVÚ uvolňujeme prvky od volného konce.



Obr.9 Částečné uvolnění

VVÚ:

$$\text{Úsek } 1\text{: } x_1 \epsilon (0, d)$$

$$T_1 = Fsin\alpha \tag{36}$$

$$M_{O1} = -\mathrm{x}_1 Fsin\alpha \tag{37}$$

$$\text{Úsek } 2\text{: } x_2 \epsilon (0, c)$$

$$T_2 = Fsin\alpha - F_D \tag{38}$$

$$M_{O2} = x_2 F_D - (x_2 + d)Fsin\alpha \tag{39}$$

$$\text{Úsek } 3\text{: } x_3 \epsilon (0, b)$$

$$T_3 = Fsin\alpha - F_D - F_C + x_3 q \tag{40}$$

$$M_{O3} = x_3 F_C + (x_3 + c)F_D - (x_3 + c + d)Fsin\alpha - \frac{{x_3}^2 q}{2} \tag{41}$$

$$\text{Úsek } 4\text{: } x_4 \epsilon (0, a)$$

$$T_4 = Fsin\alpha - F_D - F_C - F_B + (x_4 + b)q \tag{42}$$

$$M_{O4} = -\frac{(b + x_3)^2 q}{2} + x_4 F_B + (x_4 + b)F_C + (x_4 + c + b)F_D - (x_4 + b + c + d)Fsin\alpha - \frac{{x_3}^2 q}{2} \tag{43}$$

Pro vyčíslení všech stykových výslednic bylo užito programu Scia Engineer , graf závislosti normálových sil, posouvajících sil a ohybových momentů vložen na konci příkladu.

5.2 INTEGRÁLNÍ ŘEŠENÍ

DEFORMAČNÍ PODMÍNKY ZÍSKANÉ Z CASTIGLIANOVI VĚTY:

$$w_D{}^{FD} = \frac{\partial W}{\partial F_D} = 0 \tag{44}$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left(\int_0^d \left(M_{O1}\frac{\partial M_{O1}}{\partial F_D}\right)dx_1 + \int_0^c \left(M_{O2}\frac{\partial M_{O2}}{\partial F_D}\right)dx_2 + \int_0^b \left(M_{O3}\frac{\partial M_{O3}}{\partial F_D}\right)dx_3 + \int_0^a \left(M_{O4}\frac{\partial M_{O4}}{\partial F_D}\right)dx_4\right)$$

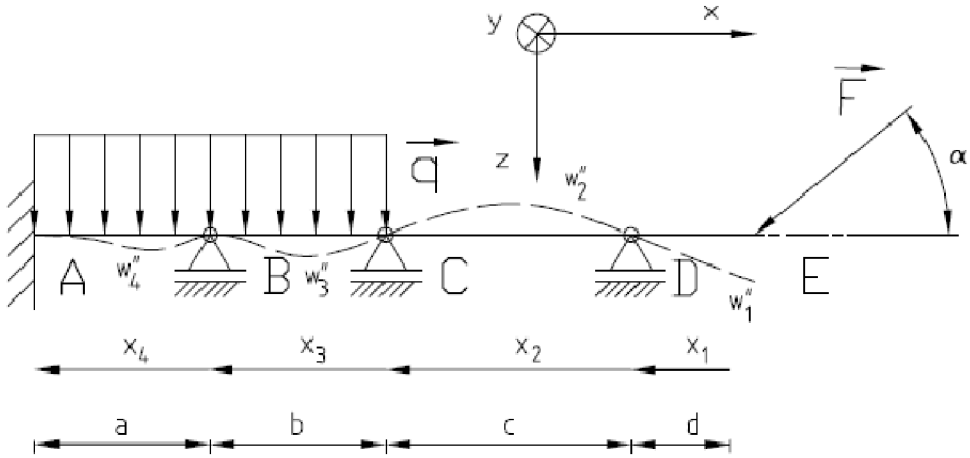
$$w_C{}^{FC} = \frac{\partial W}{\partial F_C} = 0 \tag{45}$$

$$w_B{}^{FB} = \frac{\partial W}{\partial F_B} = 0 \tag{46}$$

Nyní máme stejný počet rovnic jako neznámých. Soustavu je možné vyčíslit.

5.3 DIFERENCIÁLNÍ ŘEŠENÍ

ROVNICE OHYBOVÝCH ČAR PRO KAŽDÝ ÚSEK



Obr. 10 Přibližné znázornění ohyb. čáry

Pro každý z úseků můžeme psát:

$$w_1''(x_1) = \frac{M_{O1}}{EJ_y} \tag{47}$$

$$w_2''(x_2) = \frac{M_{O2}}{EJ_y} \tag{48}$$

$$w_3''(x_3) = \frac{M_{O3}}{EJ_y} \tag{49}$$

$$w_4''(x_4) = \frac{M_{O4}}{EJ_y} \tag{50}$$

Ohybové momenty 1-4 dosazujeme z VVÚ.

OKRAJOVÉ PODMÍNKY:

Okrajové podmínky sestavíme z vazebných podmínek a z podmínek spojitosti a hladkosti ohybové čáry.

Podpora D:

$$w_1(x_1 = d) = w_2(x_2 = 0) = 0 \tag{51}$$

$$w_1'(x_1 = d) = w_2'(x_2 = 0) \tag{52}$$

Podpora C:

$$w_2(x_2 = c) = w_3(x_3 = 0) = 0 \tag{53}$$

$$w_2'(x_2 = c) = w_3'(x_3 = 0) \tag{54}$$

Podpora B:

$$w_3(x_3 = b) = w_4(x_4 = 0) = 0 \tag{55}$$

$$w_3'(x_3 = b) = w_4'(x_4 = 0) \tag{56}$$

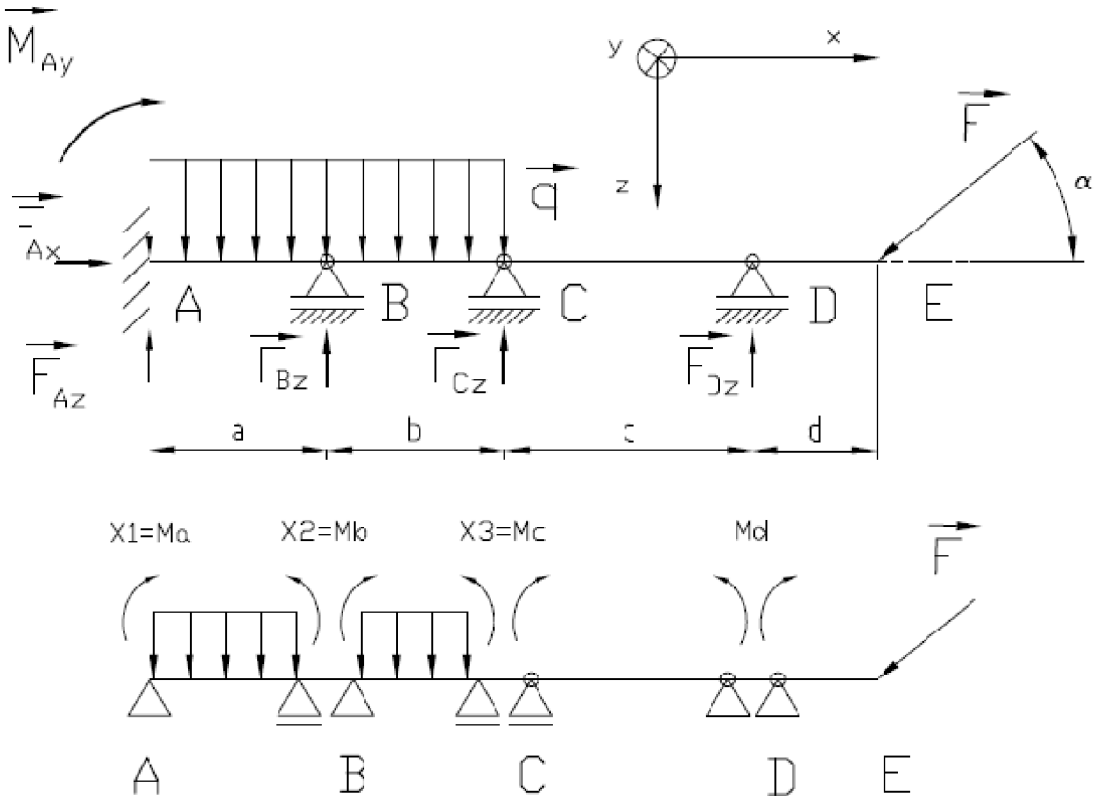
Podpora A:

$$w_4(x_4 = a) = 0 \tag{57}$$

$$w_4'(x_4 = a) = 0 \tag{58}$$

Po integrování diferenciálních rovnic ohybových čar a dosazením okrajových podmínek získáme soustavu jedenácti lineárních rovnic o jedenácti neznámých (osm integračních konstant a tři neznámé stykové výslednice). Převedením na maticový zápis získáváme čtvercovou matici 11 x 11.

5.4 METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC



Obr. 11 Základní soustava

Třímomentové rovnice pro podpory A,B,C spojitého nosníku s použitím nulového nezatíženého pole mají tvary [2]

$$M_o\beta_{ao} + M_a(\alpha_{ao} + \alpha_{ab}) + M_b\beta_{ab} + \varphi_{ao} + \varphi_{ab} = 0 \tag{59}$$

$$M_a\beta_{ba} + M_b(\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c\beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0 \tag{60}$$

$$M_b\beta_{cb} + M_c(\alpha_{cb} + \alpha_{cd}) + M_d\beta_{cd} + \varphi_{cb} + \varphi_{cd} = 0 \tag{61}$$

v nichž
$\beta_{ao} = \alpha_{ao} = 0, M_o = 0$

Deformační úhly α, β, φ stanovíme pomocí vzorců z tabulek, viz [2]

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \alpha_{cb} = \frac{a}{3EJ} = \frac{10}{3EJ} \tag{62}$$

$$\beta_{ab} = \beta_{ba} = \beta_{bc} = \beta_{cb} = \frac{a}{6EJ} = \frac{10}{6EJ} \tag{63}$$

$$\alpha_{cd} = \alpha_{dc} = \frac{c}{3EJ} = \frac{2}{EJ}, \beta_{cd} = \beta_{dc} = \frac{c}{6EJ} = \frac{1}{6EJ} \tag{64}$$

$$\varphi_{ab} = \varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \varphi_{cb} = \frac{qa^3}{24EJ} = \frac{10^3}{24EJ} \tag{65}$$

Po dosazení do třímomentových rovnic a upravě získáme soustavu tří lineárních rovnic

$$2M_a + M_b \qquad = -25 \tag{66}$$

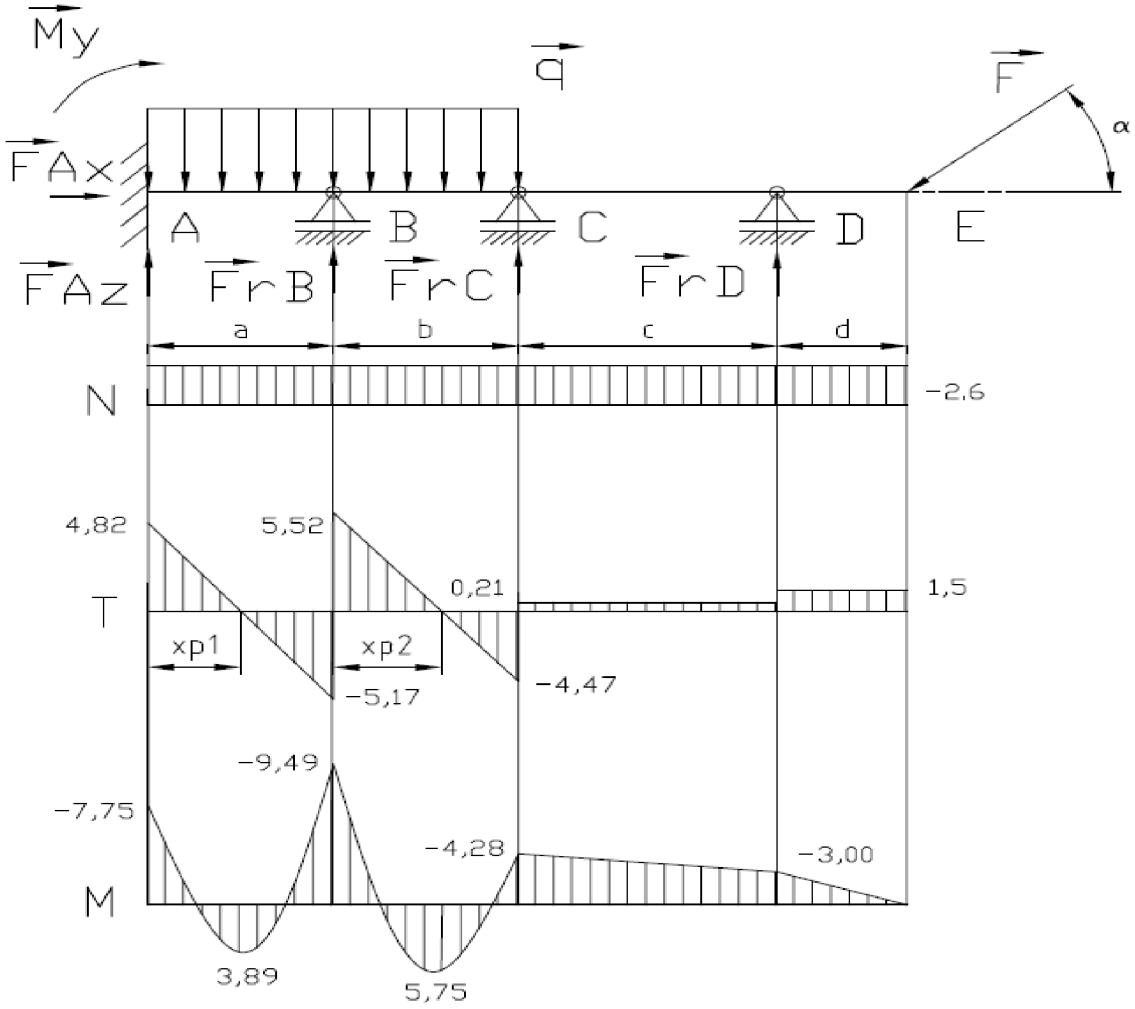
$$M_a + 4M_b + \quad M_c = -50 \tag{67}$$

$$M_b + 3{,}2M_c = -23{,}2 \tag{68}$$

$X_1 = M_a = -7{,}755\ kNm$

$X_2 = M_b = -9{,}490\ kNm$

$X_3 = M_c = -4{,}284\ kNm$



Obr. 12 Výsledné stykové síly

ZÁVĚR

Integrální přístup (Castiglianova věta)

Výhody:
Umožňuje rychle určit deformační charakteristiky v konkrétním bodě střednice
Umožňuje zahrnout vliv posouvající síly na průhyb a natočení
Ve srovnání s diferenciálním přístupem je výpočet podstatně rychlejší a snažší
Umožňuje volit různý souřadnicový systém v každém úseku
Je použitelný u zakřivených prutů
Nevýhody:
Lze ho použít pouze v lineární pružnosti
Nedá se použít při hledání extrémů

Diferenciální přístup (rovnice ohybové čáry)

Výhody:
Umožňuje řešit i velké průhyby pomocí rovnice pro velké deformace
Umožňuje určit v obecném místě velikost průhybu a natočení
Umožňuje najít místo extrémního průhybu a určit jeho velikost
Nevýhody:
Nezahrnuje vliv posouvající síly
Velká matematická složitost

Třímomentová rovnice

Výhody:
Efektivní řešení nosníku vícekrát staticky neurčitých
Při symetrickém zatížení je to nejrychlejší metoda
Nevýhody:
Nelze s ní řešit průhyb a natočení v místě střednice střednice
Řeší pouze ohybové momenty v místě vazeb a z nich stykové výslednice

POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

[1] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., BURŠA, J., *Mechanika těles – Pružnost a pevnost I.* 3. vyd. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.

[2] KADLČÁK, J., KYTÝR, J., *Statika stavebních konstrukcí II.* 2. vyd. Brno: CERM, 2004. 431 s.ISBN 80-214-2631-4.

[3] FLORIÁN, Z., ONDRÁČEK, E., PŘIKRYL, K., *Mechanika těles – Statika.* 6. vyd. Brno: CERM, 2003, 182 s. ISBN 80-214-2491-5.

[4] SHIGLEY, J E., MISCHKE, CH R., BUDYNAS, R G., *Konstruování strojních součástí.* 1.vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, VUTIUM, 2010, 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.

[5] HORNÍKOVÁ, J., BURŠA, J.,*Pružnost a pevnost – interaktivní učební text.*1.vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2002, (CD)

[6] DOBROVOLNÝ, B., SCHMITDT, Z., *Strojnické tabulky pro střední školy,* Praha: Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1955, 627 s.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

μ	[-]	Poissonovo číslo
μ_M	[-]	Počet neznámých parametrů momentu
μ_R	[-]	Počet neznámých parametrů polohy
A,B,C,D	[-]	Vazby
α, β, φ	[rad]	Deformační úhly
a,b.c,l	[m]	Délkové rozměry
E	[Mpa]	Modul pružnosti v tahu
F	[N]	Osamělá síla
φ	[rad]	Úhel natočení
Φab	[rad]	Sklony tečen k ohybové čáře
G	[Mpa]	Modul pružnosti ve smyku
J_p	[m^4]	Polární kvadratický moment
J_y	[m^4]	Osový kvadratický moment
k	[Nm^{-1}]	Tuhost pružného tělesa
l_n	[m]	Délka pole
M	[Nm]	Silová dvojice
N	[N]	Normálová síla
ν	[-]	Počet použitelných rovnic
q	[Nm^{-1}]	Liniová síla
ρ	[m]	Poloměr křivosti křivky
T	[N]	Posouvající síla
u	[m]	Deformační posuv ve směru osy x
w	[m]	Deformační posuv ve směru osy z
W	[J]	Energie napjatosti
ξ	[-]	Počet stupňů volnosti odebíraných vazbou
η	[-]	Počet deformačních parametrů odebíraných vazbami
Q_D	[N]	Doplňková síla, spojité zatížení

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 ……..Obecná rovinná soustava sil

Obr. 2 …….Prutová soustava

Obr. 3 …….Kinematický mechanismus

Obr. 4 …….. Ohybová čára

Obr. 5 ……..Znaménková konvence

Obr.6 ……...Rozklad nosníku na základní soustavu

Obr. 7 ……..Vetknutý konec „ a “spojitého nosníku

Obr. 8 ……...Zvolený příklad

Obr. 9 ……...Částečné uvolnění

Obr.10 ……Přibližné znázornění ohybové čáry

Obr.11 ……..Základní soustava

Obr.12 ……Výsledné stykové síly