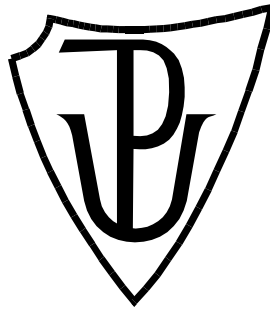


UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky



Výpočty objemů rotačních těles

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

| | |
|-------------------|--|
| Autor: | Zdeněk Maňák |
| Studijní program: | D18951 |
| Studijní obor: | Matematika se zaměřením na vzdělávání a fyzika |
| Forma studia: | Prezenční |
| Vedoucí práce: | doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc. |
| Rok: | 2021 |

Poděkování:

Chtěl bych touto cestou poděkovat doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za vedení mé bakalářské práce a cenné a hodnotné rady, které mně během psaní této práce dávala.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval/a samostatně s vyznačením všech použitých pramenů a spoluautorství. Souhlasím se zveřejněním bakalářské práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů. Byl/a jsem seznámen/a s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

V Olomouci dne *podpis bakaláře*

Bibliografická identifikace

| | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| Jméno a příjmení autora | Zdeněk Maňák |
| Název práce | Výpočty objemů rotačních těles |
| Typ práce | Bakalářská práce |
| Pracoviště | Katedra matematiky |
| Vedoucí práce | doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc. |
| Rok obhajoby práce | 2021 |

Abstrakt

Bakalářská práce „Výpočty objemů rotačních těles“ se zabývá určitým integrálem a jeho aplikacemi, zejména výpočtem objemů rotačních těles, a to pro různá zadání (křivky v kartézských souřadnicích, křivky zadané parametricky a křivky v polárních souřadnicích). Je koncipována jako sbírka řešených příkladů pro studenty vysokých škol, kteří studují integrální počet funkcí jedné proměnné. Důraz je kladen na detailní popis řešení příkladů tak, aby studenti mohli tuto práci využít i při samostudiu.

| | |
|---------------|--|
| Klíčová slova | Matematika, integrace, určitý integrál, Riemannův integrál, substituce, per partes, křivky zadané parametricky, křivky v polárních souřadnicích, křivky v kartézských souřadnicích, rotace, objem. |
| Počet stran | 56 |
| Počet příloh | 1 |
| Jazyk | Český |

Bibliographical identification

| | |
|--------------------------------|--|
| Autor's first name and surname | Zdeněk Maňák |
| Title | Calculations of volumes of rotating bodies |
| Type of thesis | Bachelor work |
| Department | Department of mathematics |
| Supervisor | doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc. |
| The year of presentation | 2021 |

Abstract

The bachelor's thesis "Calculations of volumes of rotating bodies" deals with a certain integral and its applications, especially the calculation of volumes of rotating bodies, for various assignments (curves in Cartesian coordinates, curves entered parametrically and curves in polar coordinates). It is designed as a collection of solved examples for university students who study the integral calculus of functions of one variable. Emphasis is placed on a detailed description of the solution of examples so that students can use this work in self-study.

| | |
|----------------------|---|
| Keywords | Mathematics, integration, definite integral, Riemann integral, substitution, per partes, curves entered parametrically, curves in polar coordinates, curves in cartesian coordinates, rotation, volume. |
| Number of pages | 56 |
| Number of appendices | 1 |
| Language | Czech |

Obsah

| | |
|---|----|
| 1. Neurčitý integrál | 8 |
| 1.1. Základní vzorce | 9 |
| 1.2. Per partes | 10 |
| 1.3. Substitute | 10 |
| 2. Riemannův určitý integrál | 11 |
| 2.1. Vlastnosti Riemannova určitého integrálu | 14 |
| 2.2. Matematická aplikace integrálního počtu | 15 |
| 2.3. Fyzikální aplikace integrálního počtu | 16 |
| 3. Objem rotačních těles | 18 |
| 3.1. Zadání v kartézských souřadnicích | 19 |
| 3.2. Zadání pomocí křivky dané parametricky | 20 |
| 3.3. Zadání v polárních souřadnicích | 20 |
| 4. Sbíрка řešených příkladů „Objemy rotačních těles“ | 21 |
| 4.1. Zadání pomocí křivek v kartézských souřadnicích | 21 |
| 4.2. Zadání pomocí křivek daných parametricky | 37 |
| 4.3. Zadání pomocí křivek v polárních souřadnicích | 45 |
| Závěr | 53 |
| Seznam použité literatury: | 54 |
| Příloha – práce s <i>WolframAlpha</i> | 56 |

Úvod

Matematická analýza má spoustu aplikací, které mohou být využívány v různých oborech lidské činnosti, především v přírodních a technických oborech. Budeme se zabývat aplikacemi integrálního počtu v matematice. Užitím integrálního počtu lze například vypočítat délku křivky, obsah plochy pod křivkou nebo objem různých těles.

Již ze střední školy máme jisté představy o geometrických útvech, kdy se učíme nazpaměť vzorečky různých útvarů a následně je využíváme při výpočtu např: objemu nebo obsahu. My se v práci zaměříme na studium integrálního počtu se zaměřením na výpočet objemů těles. Dále sestavíme sbírku vhodných příkladů pro dané téma a příklady názorně vyřešíme.

Aplikace integrálního počtu není omezena pouze na matematiku, jak jsme si řekli na začátku, ale využívá se i v jiných oborech. Další využití můžeme nalézt ve fyzice, kde může být integrace užita k výpočtu délky dráhy pohybujícího se tělesa (např: auta, lodě, rakety, či cyklisty), statických momentů nebo momentů setrvačnosti. Posledním případem je výpočet těžiště pro různé typy obrazců.

V této práci si uvedeme, jak integrální počet užít při výpočtu objemů rotačních těles. Plochy, které si v rovině nadefinujeme, necháme rotovat kolem jedné z kartézských os a následně spočteme objem vzniklého tělesa. Funkce, které nám budou rotující plochu definovat budou mít různý předpis. Naše funkce budou zadané parametricky, v polárních souřadnicích a v kartézských souřadnicích. Cílem je vypracovat vlastní sbírku řešených příkladů, zaměřenou na objemy rotačních těles, kde bude uveden názorný postup, jak se k objemu přišlo, a jak aplikovat určitý integrál na výpočet objemu pro různé předpisy funkcí. Obrázky rotujících ploch, které se v práci vyskytnou budou vytvořeny v programu *Graph*. Pro kontrolu výsledků a výpočet některých obtížných příkladů využijeme matematický software *WolframAlpha*. Nezkušený čtenář se může s programem seznámit v Příloze – práce s *WolframAlpha*.

1. Neurčitý integrál

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu I , a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že každá funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, která je diferencovatelná na intervalu I je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pokud pro každé $x \in I$ existuje derivace $F'(x)$, že platí: $F'(x) = f(x)$.

Za předpokladu že $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ na intervalu I , pak $F(x) + C$, kde C je nezávislá konstanta, je také $F(x) + C$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$, tzn. dvě primitivní funkce $F(x)$ a $D(x)$ funkce $f(x)$ na intervalu I se liší pouze o konstantu C . Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ s proměnou x na intervalu I nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ a značíme ji:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in I$$

„Integrovaní není jednoznačná operace (derivování např. je jednoznačná operace).

Křivku o rovnici $y = F(x)$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$, nazýváme integrální křivkou funkce $f(x)$. Známe-li jednu integrální křivku k , pak každou jinou integrální křivku $y = F(x) + C$ dostaneme posunutím křivky k ve směru osy y o konstantu C .“¹

Nechť $C_i \in \mathbb{R}$ a f_i jsou funkce vhodné k integraci v celém intervalu I , $i \in \mathbb{N}$. Pak platí:

$$\int \left[\sum_{i=1}^n C_i f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^n C_i \int f_i(x) dx.$$

Pro $n = 2$, $C_1 = C_2 = 1$, se sčítají nebo $C_1 = 1$; $C_2 = -1$, se odčítají:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Jsou-li si konstanty rovny $C_1 = C_2 = 1$; $C_i \geq 0$, dospějeme, že integrál součtu dvou funkcí lze rozdělit na součet dvou integrálů daných funkcí. Platí-li $C_1 \neq C_2 \rightarrow C_1 = 1$; $C_2 = -1$, pak dospějeme k rozdílu integrálů těchto dvou funkcí. Jinými slovy, integrací součinu konstanty C_i a funkce $f_i(x)$, můžeme danou konstantu C_i vytknout před integrační znak.

¹ Koresponduje s textem [1] str.10.

1.1. Základní vzorce

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \text{ pro } a \neq -1, a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C_1 = -\operatorname{arccos} x + C_2$$

C_1 a C_2 jsou konstanty.

1.2. Per partes

Per partes neboli integrace po částech je využití součinu dvou funkcí. Tato metoda vychází ze vzorce pro derivaci složené funkce

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Uvažujeme, že funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojité na intervalu I a mají derivaci u' a v' . Z integrujeme obě strany předchozí rovnice tak dostaneme:

$$\int (uv)' dx = \int (u'v + uv') dx.$$

Pravou stranu rovnice upravíme na součet dvou integrálů a následně převedeme na tvar:

$$\int (uv') dx = \int (uv)' dx - \int (u'v) dx,$$

rovnici pak lze přepsat do tvaru:

$$\int (uv') dx = uv - \int (u'v) dx.^2$$

1.3. Substituce

Substituční metoda je odvozena z derivace složené funkce $F[u]$, kde $u = G(x)$. Nejprve derivuje funkce $F[u]$ a pak její vnitřní funkci $G(x)$. Zápis derivace vypadá následovně:

$$F'[u] = F'[G(x)] = F'[G(x)] \cdot G'(x) = F'[u] \cdot G'(x).$$

Mějme funkci $F(u)$, která je primitivní funkcí k $f(u)$. Necht' naše funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, dále necht' funkce $u = G(x)$ má derivaci a je též spojitá na intervalu $\langle c, d \rangle$ a necht' platí že $x \in \langle a, b \rangle$ a platí $G(x) \in \langle a, b \rangle$. Potom funkce $F(u) = F(G(x))$ je primitivní funkce k funkci $F(u)G'(x) = f(G(x))G'(x)$ na intervalu $\langle a; b \rangle$. Necht' tedy platí:

$$\int f(G(x))G'(x) dx = \int f(u) du.^3$$

² Koresponduje s textem [2] str. 325.

³ Totéž, str. 333.

2. Riemannův určitý integrál

Mějme reálnou funkci $f(x)$, která je ohraničená na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$. Tato funkce $f(x)$ může na intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývat kladných i záporných hodnot.

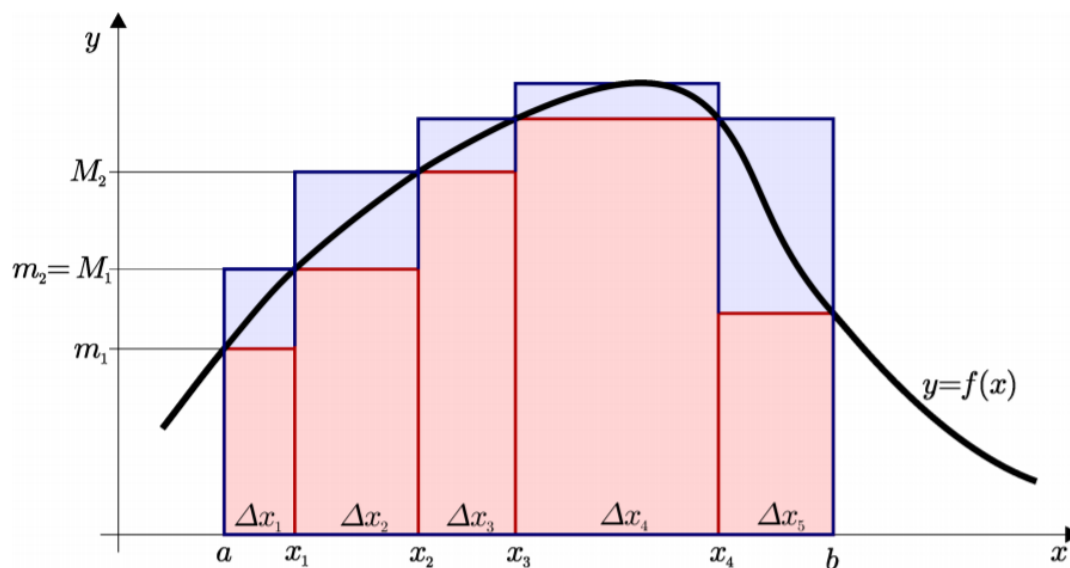
Uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na konečný počet dělicích bodů x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , $n = 1, 2, \dots, \infty$, tyto body nazveme dělicí normou D , pak pro dělicí body platí:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Pomocí dělicích bodů stanovíme nové intervaly (viz Obr.č.1) tzn. *dělicí částečné intervaly*: $\Delta x_i = \langle x_{i-1}; x_i \rangle$, kde $i = 1, 2, \dots, n$; kde Δx charakterizuje délku částečného intervalu, též tzn. „*dělicí norma D*“⁴. Sečteme-li všechny dělicí intervaly dostaneme výraz:

$$\Delta x = b - a.$$

Jednotlivé intervaly Δx_i nám funkci $f(x)$ rozdělí v bodech intervalu. „*Nechť M je supremum a m infimum množiny funkčních hodnot funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ a podobně M_i supremum a m_i infimum té funkce na částečném intervalu Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$.*“⁵



Obrázek 1: Zavedení Riemannova integrálu [3]

Označíme:

⁴ Koresponduje s textem [2] str.381.

⁵ Koresponduje s textem [1] str. 43.

$U = \sup f(x); V = \inf f(x); U = \sup f(x)$ a $V = \inf f(x)$, kde $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$,

$\hat{U} = \sup f(x) = \max(V, f(a), f(b)); \hat{V} = \inf f(x) = \min(U, f(a), f(b))$.

Dále necht' ξ_i je libovolně zvolený bod na intervalu $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, pak číslo:

$$\tilde{S}(f, D) = \sum f(\xi_i) \Delta x_i,$$

nazveme takzvaným „integrálním součtem funkce f příslušejícím dělení D intervalu

$\langle a, b \rangle$ a dané volbě $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ “⁶ (viz. Obr.č.2). Zavedeme označení: „ $m_i =$

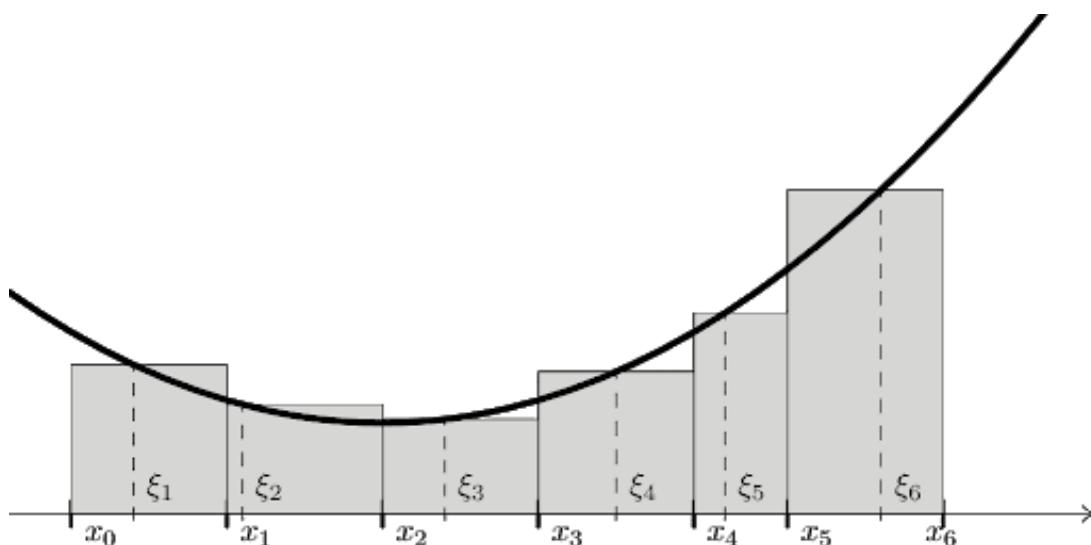
$\inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \sup s(f, D)$$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \inf S(f, D),$$
⁷

kde $s(f, D)$ je dolní součet a $S(f, D)$ je horní součet. Je zřejmé, že platí: $s(D) \leq S(D)$,

$D: \Delta x_i = \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ je příslušné dělení.



Obrázek 2: Grafické znázornění integrálního počtu s výběrem čísel ξ_i [5]

Poznámka:

Část funkce je vymezena obdélníkem o výšce m nebo M o základně Δx_i , kde ξ_i je bod funkce $f(x)$. Přistoupením k limitnímu přechodu, pro n dělicích bodů, který konverguje do nekonečna, pak nulová posloupnost norem dělení zajišťuje menší „základny“, což může vést ke splnutí dolního a horního součtu funkce $f(x)$.

⁶ Koresponduje s textem [2] str. 381.

⁷ Koresponduje s textem [4]

Máme interval $\langle a, b \rangle$ kde $a = x_0; b = x_n$. Bud' $R = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\}$ posloupnost čísel z intervalu $\langle a; b \rangle$ splňující nerovnost $x_{i-1} < \xi_1 < x_i$ potom součet je:

$$S(f, D, R) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

součet S je nazýván „*integrální součet funkce f* “ po příslušném dělení D (nebo také Δx_i) a výběru reprezentantů z $R = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\}$. Platí-li předchozí věta, pak řekneme, že funkce $f(x)$ je „*Riemannovsky integrovatelná*“ na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ splňující limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n, R_n) = I.$$

Limita musí být splněna pro libovolnou posloupnost dělicích bodů D_n , a libovolný výběr reprezentantů R_n , (D_n, R_n je konečný počet reprezentantů), kde pak součet S odpovídá integraci funkce $f(x)$. Platí tedy, že dolní součet musí být menší než horní součet:

$$m(b - a) \leq \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \leq M(b - a),$$

kde je m infimum a M je suprémum všech funkčních hodnot, tj. $m = \inf \{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$, a $M = \sup \{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$.

Pokud platí:

$$\int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx,$$

kdy výsledkem je vlastní číslo, pak je výše zmíněná funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx.$$

„*Bod, v němž funkce f není spojitá, se nazývá bod nespojitosti funkce f . Bod, v němž existují vzájemně různé konečné limity funkce f zprava a zleva, se nazývá bod nespojitosti prvního druhu funkce f . Bod, nespojitosti funkce f , v němž neexistuje aspoň jedna z jednostranných limit, se nazývá bod nespojitosti druhého druhu.*“⁸ „*Funkce, která má v určitém intervalu konečný počet bodů nespojitosti jen prvního druhu, se nazývá po částech spojitá na tomto intervalu a je v něm také integrovatelná.*“⁹

⁸ Koresponduje s textem [2] str. 382, Poznámka. 7.1.

⁹ Koresponduje s textem [2] str. 383, Věta 7.1.

2.1. Vlastnosti Riemannova určitého integrálu

Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ proměnné x platí následující vztahy, za předpokladu, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné v Riemannově smyslu na intervalu $\langle a, b \rangle$.¹⁰

1. $\int_a^b [f(x) \mp g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \mp \int_a^b g(x) dx$;
2. $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$, kde c je konstanta;
3. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$, kde $a < b < c$;
4. $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, jestliže $f(x) \leq 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$;
5. $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$, jestliže $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.
6. $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$, kde m je infimum a M supremum;
7. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

„Říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$, a v každém bodě intervalu (a, b) platí $F'(x) = f(x)$.“¹¹

„Ke každé funkci f , která je v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, existuje v tomto intervalu alespoň jedna taková funkce F , že je $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Funkce F je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.“¹²

„Jestliže funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a F je libovolná primitivní funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ pak rozdíl $F(b) - F(a)$ nazýváme „Newtonovým“ určitým integrálem funkce f v mezích od a do b .“¹³

„(Newtonova-Leibnizova věta, zvaná také základní věta integrálního počtu). Jestliže funkce f proměnné x je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).“¹⁴$$

¹⁰ Koresponduje s textem [2] str. 383, Věta 7.3.

¹¹ Totéž str. 384, Definice 7.3.

¹² Totéž str. 384, Věta 7.6.

¹³ Totéž str. 384, Definice 7.4.

¹⁴ Totéž str. 384, Věta 7.7.

2.2. Matematická aplikace integrálního počtu

Délka křivky

Uvažujeme-li spojitou funkci $f(x)$, která je definovaná na uzavřeném intervalu $x \in \langle a, b \rangle$, a pro funkci $f(x)$ existuje spojitá derivace, pak délku křivky (funkce) $f(x)$ vypočteme:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

kde $f'(x)$ značí derivaci funkce $f(x)$ a l je délka křivky na intervalu $\langle a, b \rangle$. Vzorec lze upravit i pro případ, že funkce bude zadaná parametricky.

Obsah obrazce

Máme-li funkci $f(x)$, která je Riemannovsky integrovatelná na intervalu: $x \in \langle a, b \rangle$ a je nezáporná, pak můžeme obsah obrazce vymezeného funkcí $f(x)$ definovat:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li obsah obrazce vymezen více funkcemi (podrobněji probereme v následující kapitole), např: $g(x)$ a $h(x)$, a platí: $g(x) > h(x)$, pak platí:

$$S = \int_a^b [g(x) - h(x)] dx.$$

I zde existuje mnoho podob těchto vzorců, např: pro křivky zadané parametricky.

Objem tělesa

Objem rotačního tělesa (kubatura tělesa) je další významná aplikace, které se budeme věnovat celou následující kapitolu (kapitola 3).

2.3. Fyzikální aplikace integrálního počtu

Integrální počet se využívá napříč obory, my se nyní podíváme do oblasti fyziky a statiky na jeho využití.

Pohyb

Uvažujme zrychlený pohyb, kde $a(t)$ je zrychlení v čase t , a je-li v_0 počáteční rychlost v čase t_0 tak po časovém intervalu Δt je rychlost $v(t)$ určena vztahem:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt, \quad t \in \langle t_0, t \rangle. \quad 15$$

Dále $v(t)$ je rychlost přímočarého pohybu v čase t , kde $t \in \langle t_0, t \rangle$, dojde ke změně dráhy v čase t . Je-li s_0 počáteční dráha v čase t_0 tak platí:

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt, \quad t \in \langle t_0, t \rangle. \quad 16$$

Těžiště

Předpokládejme, že máme těleso v homogenním tíhovém poli a budeme zkoumat polohu jeho těžiště. Na základní škole se k určení polohy těžiště používá olovnice. Těžiště je bod tělesa, kde moment výsledné tíhové síly k libovolné ose je roven součtu momentů jednotlivých sil vzhledem k ose.

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad 17$$

Analogicky platí předchozí vztah i pro ostatní osy. Pokud však pracujeme s tělesem, které je ze spojitě rozložené látky, pak vztah přepíšeme na tvar křivkových¹⁸ integrálů:

$$x_T = \frac{\int_m x dm}{\int_m dm} = \frac{\int_V \rho x dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} = \frac{1}{V} \int_V x dV. \quad 19$$

¹⁵ Koresponduje s textem [6] str. 14

¹⁶ Totéž

¹⁷ Koresponduje s textem [6] str. 24

¹⁸ K prostudování v textu [7] str. 16

¹⁹ Koresponduje s textem [6] str. 24

Opět lze psát i pro zbývající osy. Musíme si uvědomit, že jsme $dm = \rho dV$. Kde ρ je hustota látky a dV je objemový element hmotnostního elementu dm . Vztahy výše uvedené lze použít i pro homogenní plochy nebo jednorozměrné útvary.

Momenty setrvačnosti

Moment setrvačnosti tělesa je jinými slovy otáčení kolem osy. Již ze střední školy máme zaveden součet:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

kde r_i je vzdálenost středu o hmotnosti m_i od osy otáčení. Opět je-li látka spojitá platí vztah:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV,^{20}$$

kde jsme opět element hmotnosti vyjádřili jako: $dm = \rho dV$. Situaci ulehčuje *Steinerova věta*: $J = J_0 + mr^2$, kde a je vzdálenost od osy jsoucí těžištěm a J_0 je moment setrvačnosti v těžišti.

Práce

Ze základní školy víme, že za práci můžeme považovat následující pohyb tělesa. Uvažujme krychli, o kterou se zapřeme a budeme ji silou pohybovat po podlaze. Naše silové působení F bude konstantní, ale poloha krychle se během doby posunu změní z $s_1 \rightarrow s_2$. Dostaneme nám již známý vztah, který si přepíšeme do diferenciálního tvaru:

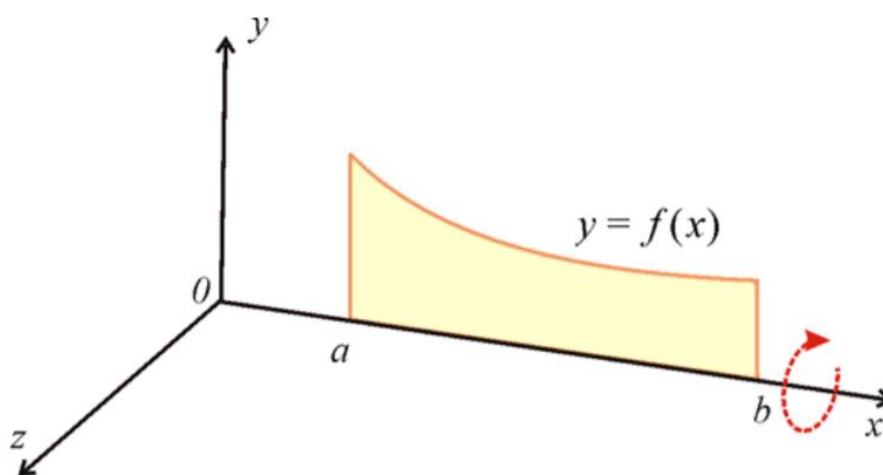
$$W = F \cdot \int_{s_1}^{s_2} ds = F(s_2 - s_1).^{21}$$

²⁰ Koresponduje s textem [6] str. 28

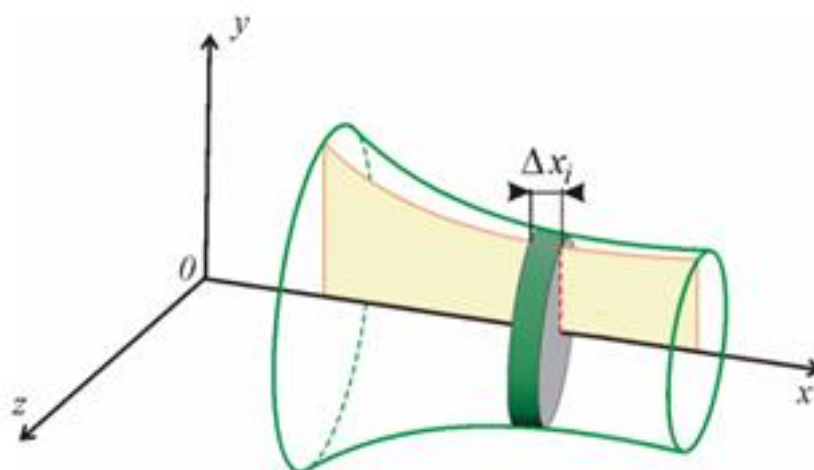
²¹ Koresponduje s textem [6] str. 22

3. Objem rotačních těles

Budeme pracovat s křivkami, které budou dány různými typy předpisů (viz níže) a budeme počítat objem tělesa vzniklého rotací plochy. Chceme-li zjistit objem tělesa, který vznikne rotací plochy kolem osy x , musíme nejprve v rovině XY omezit naši funkci $y = f(x)$ na intervalu (a, b) přímkami tak, že plocha, která bude rotovat kolem osy x bude ohraničena přímkami: $x = a, x = b, y = 0$ a naší funkcí $y = f(x)$ viz Obr. č. 3 (žlutá plocha). V této práci budeme zpracovávat postupy pro výpočet objemů těles zadané jako funkce $f(x)$ a necháme je rotovat kolem kartézských os.



Obrázek 3: Funkce $f(x)$ v rovině XY [8]



Obrázek 4: Funkce $f(x)$ rotovala kolem osy x [8]

Na *Obr. č. 3* vidíme funkci $y = f(x)$ v rovině XY . Žlutou plochu ohraničenou grafem funkce $y = f(x)$, osou x a rovnoběžkami s osou y v bodech a, b necháme rotovat kolem osy x , viz *Obr. č. 4*. Dostaneme tak těleso, které je na obrázku vyznačeno zelenou barvou. Pokud se blíže podíváme, těleso lze rozdělit na konečný počet n válců tloušťky (výšky) Δx_i . Jde o kruhovou podstavu s tloušťkou (výškou) Δx_i . Objem celého tělesa si tedy lze představit, lépe řečeno přiblížit jako:²²

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \pi \sum_{i=1}^n f^2(x) \Delta x_i.$$

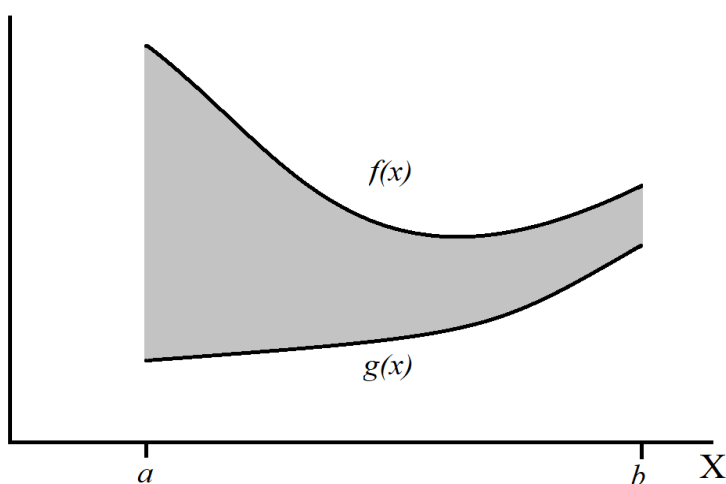
Pro $n \rightarrow \infty$ a $\Delta x_i \rightarrow 0$ předeme na tvar:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

3.1. Zadání v kartézských souřadnicích

Objem rotačního tělesa V vznikne rotací plochy kolem jedné kartézské osy. Plocha, která rotuje kolem osy např: x je ohraničena přímkami: $x = a, x = b, y = 0$ a funkcí $y = f(x)$ viz *Obr. č. 3* (žlutá plocha), objem tělesa vypočteme jako:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$



Obrázek 5: Vymezení plochy funkcemi $f(x)$ a $g(x)$

²² Koresponduje s textem [8] kapitola: 3.3, str. 170.

Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ Obr.č.5. vymezeny na oblasti \mathbb{R} . Obě funkce, necht' jsou definované v celé rovině \mathbb{R}^2 a necht' funkce $f(x)$ omezuje oblast \mathbb{R} shora a funkce $g(x)$ omezuje oblast \mathbb{R} zdola na intervalu $x \in \langle a, b \rangle, f(x) > g(x)$. Rotací, této ohraničené plochy kolem kartézské osy x dostaneme objem tělesa:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx. ^{23}$$

3.2.Zadání pomocí křivky dané parametricky

Objem rotačního tělesa V , který vznikne z křivek zadaných parametricky $x = \varphi(t), y = \psi(t), \varphi(t) \geq 0, \psi'(t) \neq 0, \psi(t) \geq 0, \varphi'(t) \neq 0 t \in \langle a, b \rangle$ kolem jedné z os. A dále necht' platí: $\varphi(a) = x_1, \psi(b) = x_2$, vypočítáme²⁴:

$$V_x = \pi \int_a^b \psi^2 |\varphi'| dt.$$

$$V_y = \pi \int_a^b \varphi^2 |\psi'| dt.$$

3.3.Zadání v polárních souřadnicích

Objem rotačního obrazce, který je zadán pomocí průvodiče r a úhlu θ a rotuje kolem osy x resp. osy y lze vypočíst tak, že použijeme předpis rovnic, které jsou uvedeny v polárních souřadnicích (využívají našich nových neznámých). Uvažujeme $r = f(\theta)$, kde $\left[0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}\right]$ respektive $\left[-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}\right]$.

Rotace kolem osy x :

$$V_x = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\theta) \right) d\theta. ^{25}$$

Rotace kolem osy y :

$$V_y = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \sin(\theta) + r \cdot \cos(\theta) \right) d\theta. ^{26}$$

²³ K prostudování v textu [8] kapitola 3.1, str. 147

²⁴ Koresponduje s textem [8] kapitola 3.1, str. 149

²⁵ Koresponduje s textem [1] str. 90

²⁶ Totéž

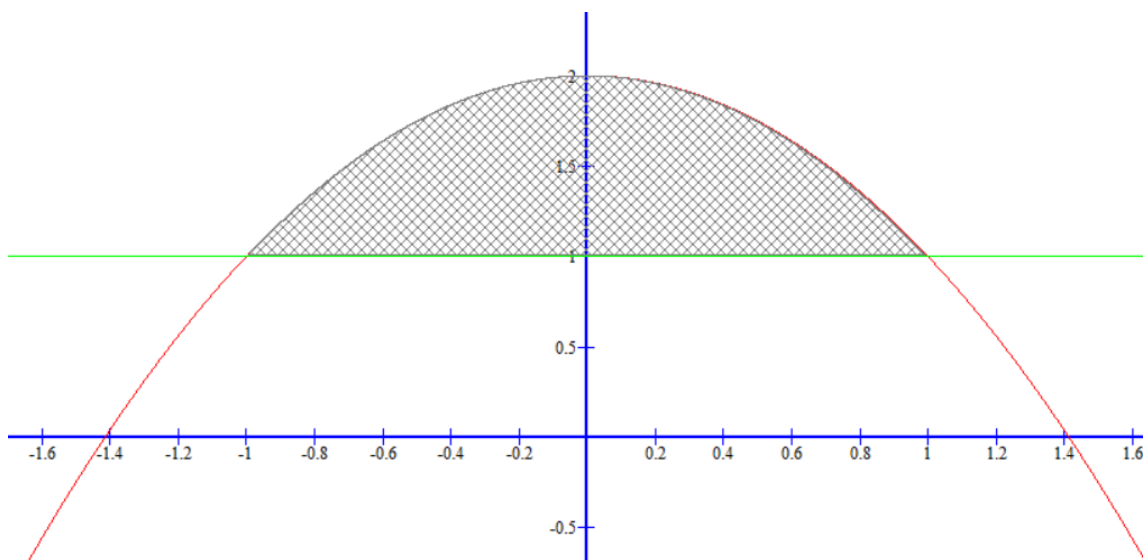
4. Sbírka řešených příkladů „Objemy rotačních těles“

4.1. Zadání pomocí křivek v kartézských souřadnicích

4.1.1. Příklad č. 1

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = 1$ kolem osy x , viz *Obr.č.6*.



Obrázek 6: Plocha vymezená funkcí $f(x)$ a $g(x)$

Budeme hledat průsečíky, tedy body, v nichž se funkce protínají:

$$f(x) = g(x)$$

$$2 - x^2 = 1$$

$$-x^2 = -1$$

$$x = \pm 1$$

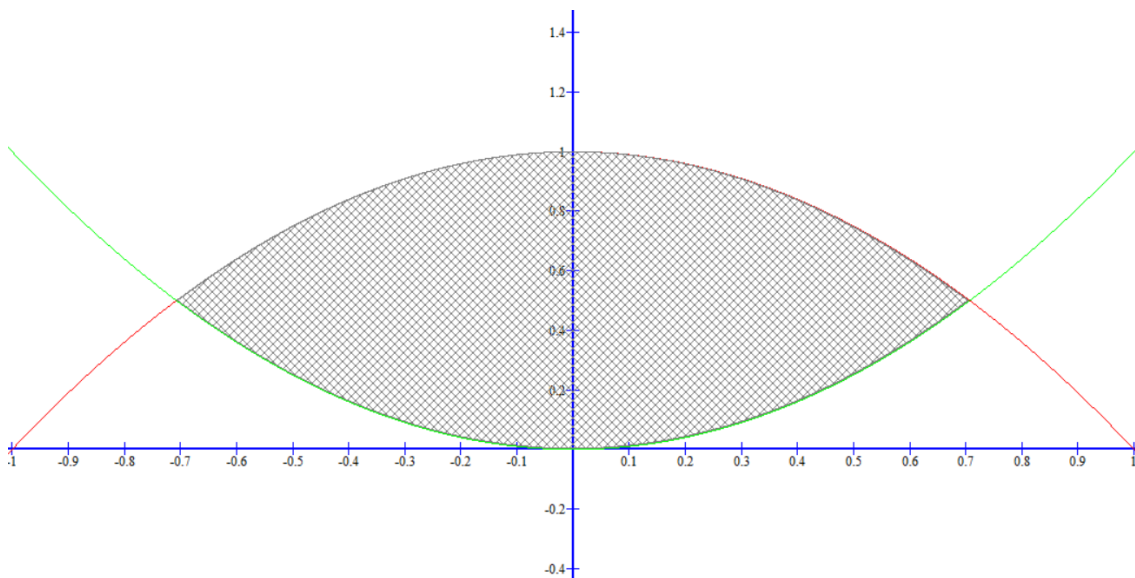
Průsečíky vyšly $x = \pm 1$, toho si lze povšimnout i na *Obr.č.6*. Objem spočteme následovně:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 ((2 - x^2)^2 - 1^2) dx = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4x^2 + x^4 - 1) dx = \\ &= \pi \int_{-1}^1 (3 - 4x^2 + x^4) dx = \pi \left[3x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \\ &= \pi \left[3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} + 3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right] = \frac{56}{15} \pi. \end{aligned}$$

4.1.2. Příklad č. 2

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$f(x): y = 1 - x^2$ a $g(x): y = x^2$ kolem osy x , viz Obr.č.7. [9].



Obrázek 7: Plocha vymezená dvěma parabolami

Načrtneme křivky a určíme průsečíky obou funkcí, tzn. průsečíky získáme tak, že si budou funkce rovny.

$$f(x) = g(x) \rightarrow 1 - x^2 = x^2 \rightarrow 1 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dostáváme dva průsečíky, což se vidět i na Obr.č.7. Z obrázku je také vidět, že platí: $f(x) > g(x)$, tedy od funkce $f(x)$ budeme odečítat funkci $g(x)$. Užitím vlastností integrálního počtu, a vztahu $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$ z kapitoly: 3.1.

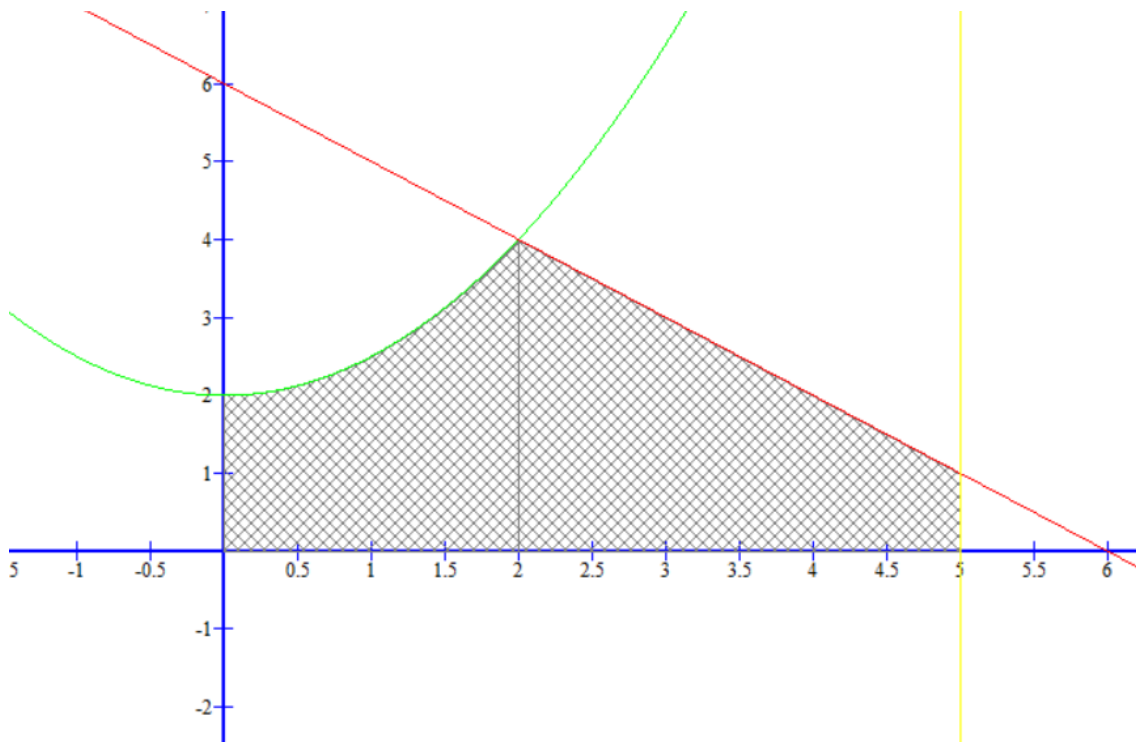
(Zadání v kartézských souřadnicích) vypočteme objem následovně:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ((1 - x^2)^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2 + x^4 - x^4) dx = \\ &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx = \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi. \end{aligned}$$

4.1.3. Příklad č. 3

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$x = 0, x = 5, y = 0, y = \frac{x^2}{2} + 2, y = -x + 6$ kolem osy x , viz Obr.č.8.



Obrázek 8: Plocha vymezená parabolou a klesající přímkou

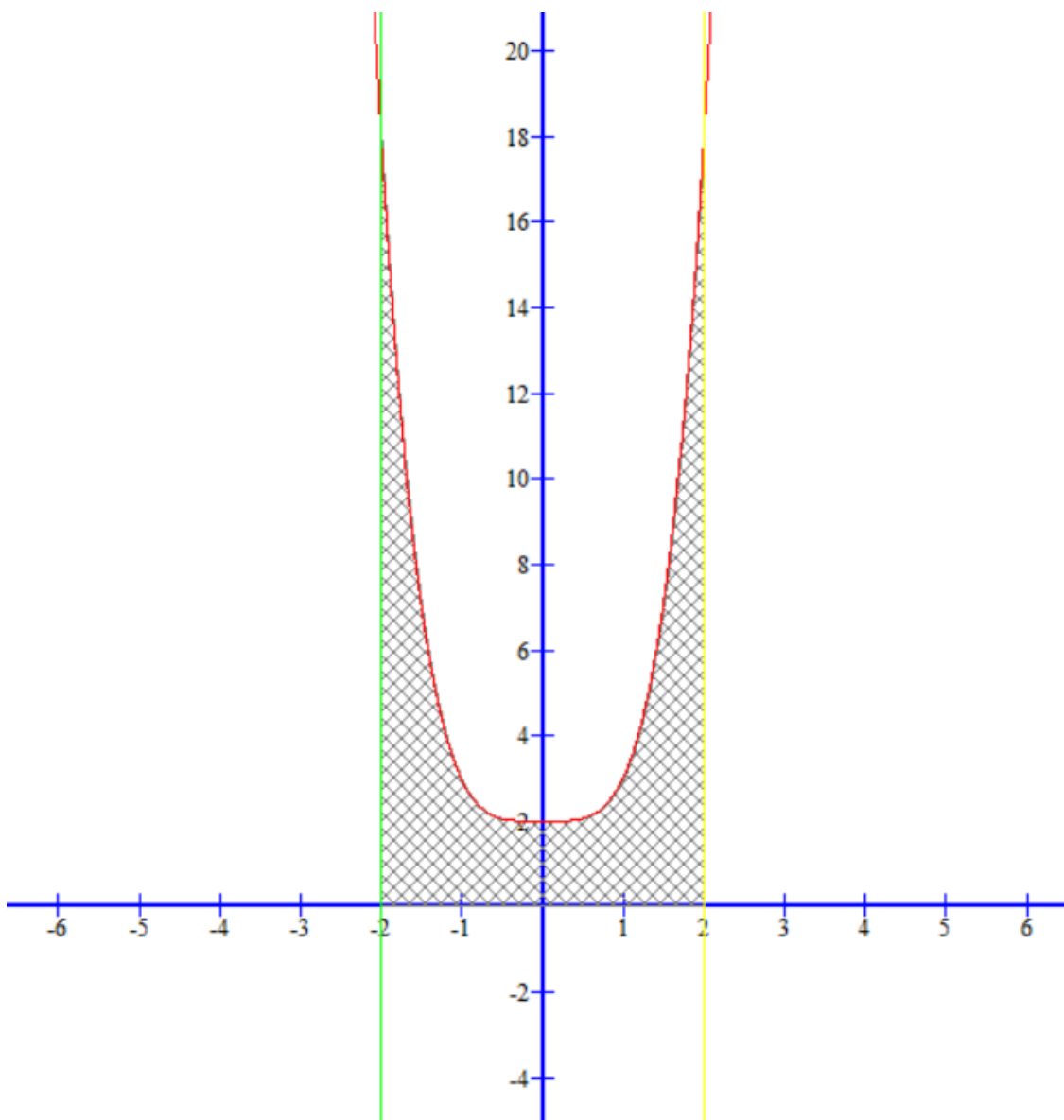
Musíme uvážit složitost obrazce, který vznikl a rozdělil si jej na více částí. K tomu využijeme omezenosti obrazce na intervalu $x \in \langle 0; 5 \rangle$. Porovnáme funkce: $y = \frac{x^2}{2} + 2$, $y = -x + 6$ a získáme průsečík těchto funkcí v bodě $P = [2; 4]$. Tímto bodem vedeme kolmici k ose x , viz Obr.č.8, a tím si obrazec rozdělíme na dvě části (využití vlastností integrálního počtu, viz. kap. 2.1. Vlastnosti Riemannova určitého integrálu). Získáme tak dvě plochy, s nimiž budeme pracovat. Budeme tedy počítat dva různé objemy pro různé části našeho tělesa v různých intervalech, které nakonec sečteme a získáme požadovaný objem.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 2 \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 4 \right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{20} + \frac{2x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = \\ &= \pi \left(\frac{2^5}{20} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) = \pi \left(\frac{32}{20} + \frac{16}{3} + 8 \right) = \frac{224}{15} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \int_2^5 (-x + 6)^2 dx = \pi \int_2^5 (x^2 - 12x + 36) dx = \\
 &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - 6x^2 + 36x \right]_2^5 = \pi \left(\frac{125}{3} - 150 + 180 - \left(\frac{8}{3} - 24 + 72 \right) \right) = 21\pi. \\
 V &= V_1 + V_2 = \frac{224}{15}\pi + 21\pi = \frac{539}{15}\pi.
 \end{aligned}$$

4.1.4. Příklad č. 4

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $y = x^4 + 2$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ kolem osy x , viz *Obr.č.9*.



Obrázek 9: Plocha vymezená parabolou a třemi přímkami

Vzhledem k tomu, že se jedná o funkce (plochu tělesa), které jsou souměrné podle osy y , lze pro zjednodušení počítat jen objem poloviny vzniklého obrazce. Budeme tedy uvažovat interval $x = \langle 0; 2 \rangle$, protože průsečíky funkcí jsou $P_1 = [2; 18]$ a $P_2 = [-2; 18]$. Pro polovinu objemu obrazce bude platit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \pi \int_0^2 (x^4 + 2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^8 + 4x^4 + 4) dx = \\ &= \pi \left[\frac{x^9}{9} + \frac{4x^5}{5} + 4x \right]_0^2 = \pi \left[\frac{512}{9} + \frac{128}{5} + 8 \right] = \frac{4072}{45} \pi. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že jsme si povšimli symetrie a počítali jen polovinu objemu tělesa v kladné části kartézského souřadného systému, musíme nyní připočíst i druhou část objemu.

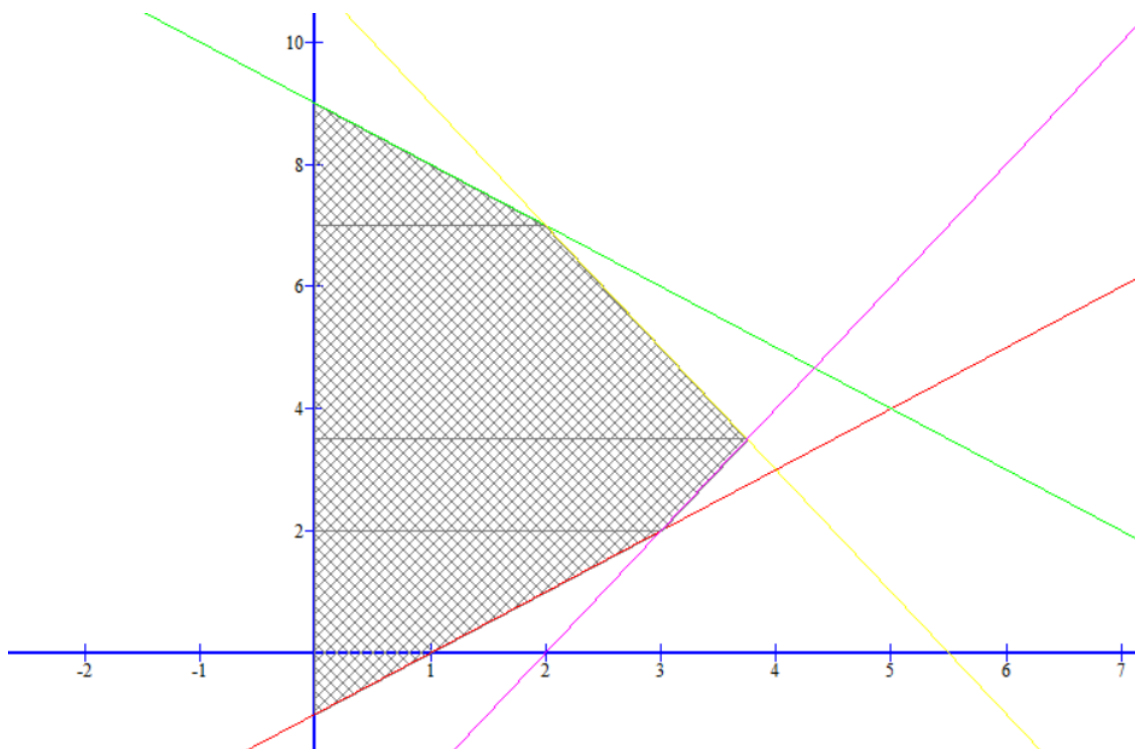
$$\frac{1}{2}V = \frac{4072}{45} \pi \rightarrow V = \frac{8144}{45} \pi.$$

V je náš výsledný objem, který jsme hledali.

4.1.5. Příklad č. 5

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$y = x - 1, y = -x + 9, y = -2x + 11, y = 2x - 4$ a $x = 0$ kolem osy y , viz *Obr.č.10*.



Obrázek 10: Plocha vymezená pěti přímkami (viz zadání)

Vzhledem k složitosti obrazce, kdy je obrazec vytvořen ze čtyř částí různých funkcí (různých přímk), musíme nejprve stanovit intervaly, jejich konečné body budou body, kde budou mít naše funkce průsečíky:

$$x - 1 = 2x - 4 \rightarrow 2x - x = -1 + 4 \rightarrow x = 3 \Rightarrow P_1 = [3; 2]$$

$$-2x + 11 = 2x - 4 \rightarrow 2x + 2x = 11 + 4 \rightarrow x = 3,75 \Rightarrow P_2 = [3,75; 3,5]$$

$$-x + 9 = -2x + 11 \rightarrow -x + 2x = 11 - 9 \rightarrow x = 2 \Rightarrow P_3 = [2; 7]$$

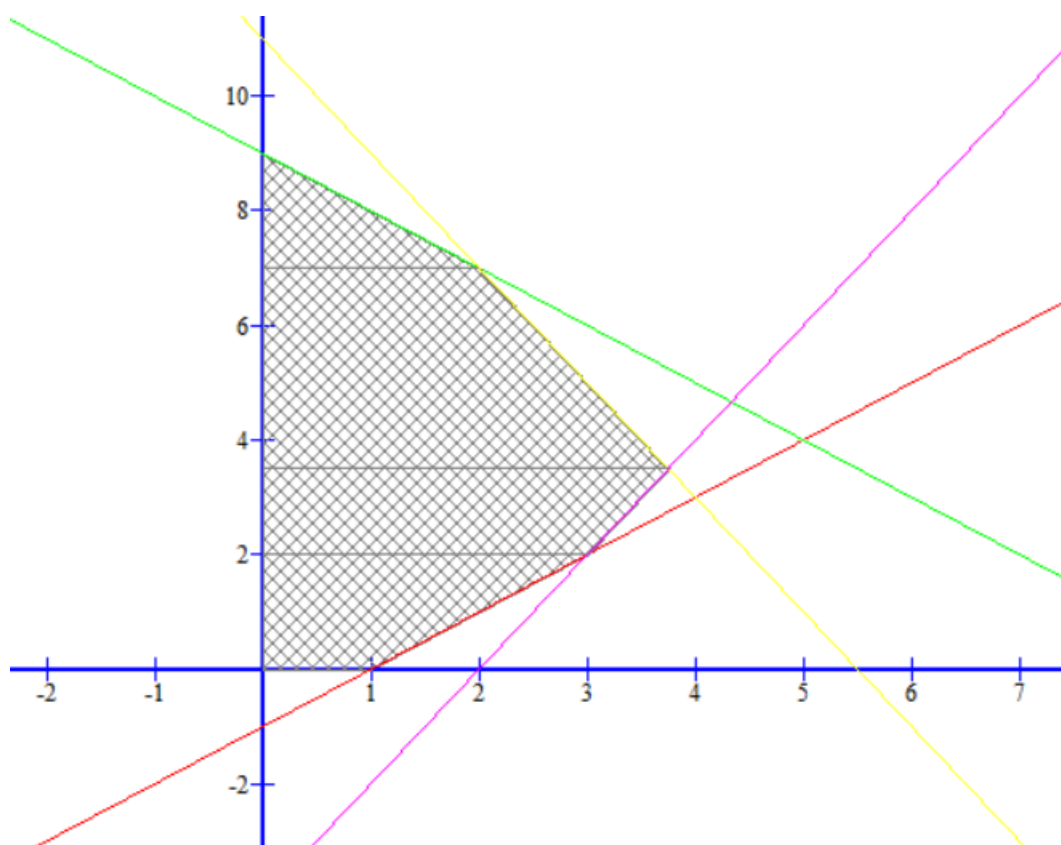
Stanovili jsem průsečíky a z nich intervaly: $y = \langle -1; 0 \rangle$, $y = \langle 0; 2 \rangle$, $y = \langle 2; 3,5 \rangle$, $y = \langle 3,5; 7 \rangle$, $y = \langle 7; 9 \rangle$. Nyní si musíme uvědomit, že pokud rotujeme kolem osy y , musíme počítat s proměnná y nikoliv x . Ve výpočtu se objeví absolutní hodnota, protože část plochy, která bude rotovat je pod osou x (objem této části by byl záporný). Objem obrazce vypočítáme následovně:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\int_7^9 (9-y)^2 dy + \int_{3,5}^7 \left(\frac{11-y}{2} \right)^2 dy + \int_2^{3,5} \left(\frac{y+4}{2} \right)^2 dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^2 (y+1)^2 dy + \left| \int_{-1}^0 (y+1)^2 dy \right| \right] = \\ &= \pi \left[\int_7^9 (y^2 - 18y + 81) dy + \frac{1}{4} \int_{3,5}^7 (y^2 - 22y + 121) dy + \frac{1}{4} \int_2^{3,5} (y^2 + 8y + 16) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^2 (y^2 + 2y + 1) dy + \left| \int_{-1}^0 (y^2 + 2y + 1) dy \right| \right] = \\ &= \pi \left[\left[\frac{y^3}{3} - \frac{18y^2}{2} + 81y \right]_7^9 + \left[\frac{y^3}{12} - \frac{22y^2}{8} + \frac{121y}{4} \right]_{3,5}^7 + \left[\frac{y^3}{12} + \frac{8y^2}{8} + \frac{16y}{4} \right]_2^{3,5} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} + 1y \right]_0^2 + \left| \left[\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} + 1y \right]_{-1}^0 \right| \right] = \\ &= \pi \left[\frac{8}{3} + \frac{2863}{96} + \frac{549}{32} + \frac{26}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{2815}{48} \pi. \end{aligned}$$

U tohoto příkladu si musíme dát pozor na meze v nichž počítáme objem jednotlivých částí obrazce a uvědomit si, že plocha vzniklá z těchto funkcí rotuje kolem osy y . Aby nedošlo ke spletní si intervalů, s nimiž budeme počítat. Pojdme si v dalším příkladě ukázat situaci, co by se stalo, kdybychom uvažovali rotaci obrazce kolem osy x .

4.1.6. Příklad č. 6

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami: $y = x - 1, y = -x + 9, y = -2x + 11, y = 2x - 4, y = 0$ a $x = 0$ kolem osy x , viz Obr.č.11.



Obrázek 11: Plocha vymezená šesti přímkami (viz zadání)

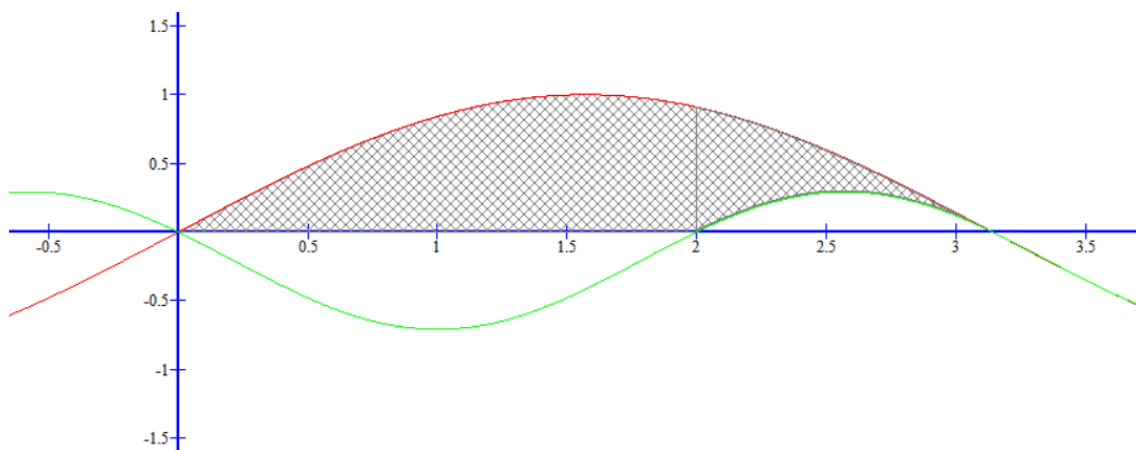
Z předchozího příkladu č. 5 máme spočteny průsečíky křivek: $P_1 = [3; 2]$, $P_2 = [3,75; 3,5]$, $P_3 = [2; 7]$. Z průsečíků si stanovíme intervaly, tzn. obrazec rozdělíme na části a ty budeme jednotlivě integrovat. Intervaly: $x = \langle 0; 2 \rangle, y = \langle 2; 3,75 \rangle$. Dále si můžeme všimnout, že se plocha zmenšila, chybí malá část plošky pod osou x .

$$\begin{aligned}
V &= \pi \left[\int_0^2 (-x + 9)^2 dx - \int_1^2 (x - 1)^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \left[\int_2^{3,75} (-2x + 11)^2 dx - \int_3^{3,75} (2x - 4)^2 dx - \int_2^3 (x - 1)^2 dx \right] \right] = \\
&= \pi \left[\int_0^2 (x^2 - 18x + 81) dx - \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx \right. \\
&\quad \left. + \left[\int_2^{3,75} (4x^2 - 44x + 121) - \int_3^{3,75} (4x^2 - 16x + 16) dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_2^3 (x^2 - 2x + 1) dx \right] \right] = \\
&= \pi \left[\left[\frac{x^3}{3} - \frac{18x^2}{2} + 81x \right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 1x \right]_1^2 + \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{44x^2}{2} + 121x \right]_3^{3,75} \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 16x \right]_3^{3,75} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 1x \right]_2^3 \right] = \\
&= \pi \left[\frac{386}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2401}{48} - \frac{93}{16} - \frac{7}{3} \right] = \frac{1359}{8} \pi.
\end{aligned}$$

Pokud se nyní podíváme na výsledek z příkladu č.5 a příkladu č.6, uvidíme, že i když je plocha obou obrazců stejná, tak objemy se změnilly. Změnily se z důvodů otočení kolem jiné kartézské osy.

4.1.7. Příklad č. 7

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x \cdot \sin(x - 2)$ kolem osy x na intervalu $x \in \langle 0, \pi \rangle$, viz
 Obr.č.12.



Obrázek 12: Plocha vymezená funkcí $f(x)$ a $g(x)$

Interval $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nám určuje plochu, kterou necháme rotovat. Pro zjednodušení výpočtu budeme pracovat s intervaly: $x \in \langle 0, 2 \rangle$, $x \in \langle 2, \pi \rangle$, viz Obr.č.12.

$$V = \pi \left[\int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx - \int_2^{\pi} (\sin x \cdot \sin(x - 2))^2 dx \right] =$$

Pro zjednodušení a přehlednost textu budeme každý z integrálů počítat zvlášť:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx &= \int_0^{\pi} [(\sin x)(\sin x)] dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| \\ &= -\sin x \cdot \cos x - \int_0^{\pi} (-\cos x \cdot \cos x) dx = \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int_0^{\pi} (\cos x)^2 dx = \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int_0^{\pi} (1 - (\sin x)^2) dx = \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int_0^{\pi} 1 dx - \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = \end{aligned}$$

$$2 \cdot \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = -\sin x \cdot \cos x + \int_0^{\pi} 1 dx = -\sin x \cdot \cos x + [x]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Další část integrálu:

$$\begin{aligned} \left| \int_2^{\pi} \sin^2(x) \cdot \sin^2(x-2) dx \right| &= \left| \int_2^{\pi} (1 - \cos^2(x)) \cdot (1 - \cos^2(x-2)) dx \right| = \\ &= \left| \int_2^{\pi} 1 - \cos^2(x) - \cos^2(x-2) + \cos^2(x) \cos^2(x-2) dx \right| = \end{aligned}$$

Lze rozdělit na součet integrálů:

$$= \left| \int_2^{\pi} 1 dx - \int_2^{\pi} \cos^2(x) dx - \int_2^{\pi} \cos^2(x-2) dx + \int_2^{\pi} \cos^2(x) \cos^2(x-2) dx \right| =$$

Tyhle integrály budeme každý počítat zvlášť:

$$\int_2^{\pi} 1 dx = [x]_2^{\pi} = \pi - 2$$

$$\begin{aligned} \int_2^{\pi} \cos^2(x) dx &= \int_2^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_2^{\pi} (\cos(2x)) dx + \frac{1}{2} \int_2^{\pi} 1 dx = \\ &= \left| \frac{s = 2x}{ds = 2 dx} \right| = \frac{1}{4} \int_2^{\pi} (\cos(s)) ds + \frac{1}{2} \int_2^{\pi} (1) du = \left[\frac{\sin(s)}{4} \right]_2^{\pi} + \left[\frac{x}{2} \right]_2^{\pi} = \left[\frac{\sin(2x)}{4} \right]_2^{\pi} + \left[\frac{x}{2} \right]_2^{\pi} \\ &= \left[\frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x)) \right]_2^{\pi} = \frac{1}{4} (-4 + 2\pi - \sin(4)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^{\pi} \cos^2(x-2) dx &= \left| \frac{u = 2-x}{du = -dx} \right| = - \int_0^{\pi} \cos^2(u) du = - \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos(2u) + \frac{1}{2} \right) du = \\ &= - \frac{1}{2} \int_2^{\pi} (\cos(2u)) du + \frac{1}{2} \int_2^{\pi} 1 du = \left| \frac{s = 2u}{ds = 2 du} \right| = - \frac{1}{4} \int_2^{\pi} (\cos(s)) ds - \frac{1}{2} \int_2^{\pi} (1) du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left[\frac{\sin(s)}{4}\right]_2^\pi - \left[\frac{u}{2}\right]_2^\pi = -\left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_2^\pi - \left[\frac{u}{2}\right]_2^\pi = -\left[\frac{\sin(2(2-x))}{4}\right]_2^\pi - \left[\frac{2-x}{2}\right]_2^\pi = \\
&= \left[+\frac{x-2}{2} - \left(\frac{\sin(2(2-x))}{4}\right)\right]_2^\pi = \frac{1}{4}(-4 + 2\pi - \sin(4)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_2^\pi \cos^2(x) \cos^2(x-2) dx = \\
&= \frac{1}{32} [4(2x - \sin(4-2x)) + \sin(2x) + x \cdot \cos(4)] - \sin(4-4x) \Big|_2^\pi \\
&= \frac{1}{32} [4(2\pi - \sin(4-2\pi)) + \sin(2\pi) + \pi \cdot \cos(4)] - \sin(4-4\pi) \\
&\quad - \frac{1}{32} [4(4 - \sin(4)) + 2 \cdot \cos(4)] - \sin(-4) = \\
&= \frac{1}{16} (2(\pi-2)(2 \cdot \cos(4)) - 5 \cdot \sin(4)).
\end{aligned}$$

Dosadíme do vyjádření druhého integrálu:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_2^\pi \sin^2(x) \cdot \sin^2(x-2) dx \right| = \\
&= \left(\pi - 2 - \frac{1}{4}(-4 + 2\pi - \sin(4)) - \frac{1}{4}(-4 + 2\pi - \sin(4)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} (2(\pi-2)(2 \cdot \cos(4)) - 5 \cdot \sin(4)) \right) = \\
&= \frac{1}{16} (3 \cdot \sin(4) + 2 \cdot (\pi-2)(2 \cdot \cos(4))).
\end{aligned}$$

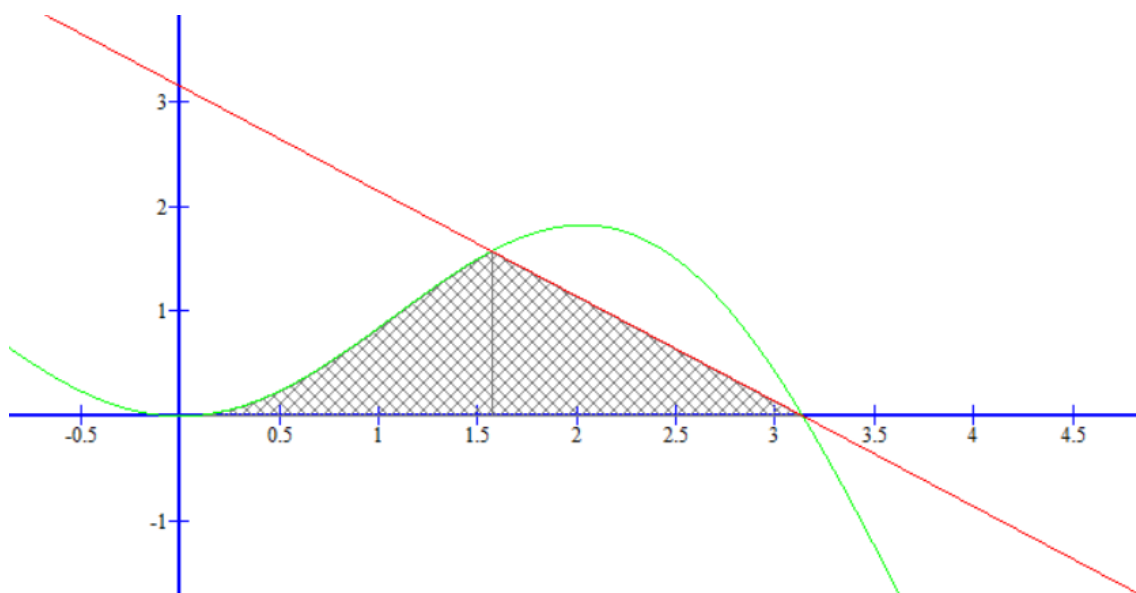
Dosadíme zpět do předpisu pro výpočet objemu tělesa:

$$V = \pi \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{16} (3 \cdot \sin(4) + 2 \cdot (\pi-2)(2 \cdot \cos(4))) \right].$$

U příkladu jsme si částečně pomáhali matematickým programe *WolframAlpha*, protože příklad je obtížný.

4.1.8. Příklad č. 8

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami: $y = x \cdot \sin(x)$, $y = -x + \pi$, $y = 0$, $x = 0$ kolem osy x na intervalu $x \in \langle 0, \pi \rangle$, viz Obr.č.13.



Obrázek 13: Plocha vymezená sinusovkou a přímkou

Nejdříve musíme určit body, v nichž budou funkce nabývat stejných hodnot. Víme, že těleso bude rotovat v intervalu $x \in \langle 0, \pi \rangle$. Pokud porovnáme obě funkce, abychom zjistili průsečíky těchto funkcí, dospějeme k bodu: $P = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, pomocí tohoto bodu (lépe řečeno: pomocí vlastností integrálního počtu) si výpočet rozdělíme na dvě části.

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi)^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \sin(x))^2 dx \right] = \\ &= \pi \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^2 - 2\pi x + \pi^2) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cdot \sin^2(x)) dx \right] = \end{aligned}$$

Vypočítám první integrál:

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + x\pi^2 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} - \pi \cdot \pi^2 + \pi \cdot \pi^2 - \left(\frac{\pi^3}{8 \cdot 3} - \pi \cdot \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \pi^2 \right) = \frac{\pi^3}{24}$$

U druhého integrálu nejprve využijeme goniometrické funkce a následně použijeme metodu „per partes“:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cdot \sin^2(x)) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cdot (1 - \cos(2x))) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x^2 \cos(2x)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x) = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = \cos(2x) \quad v = \sin(x) \cos(x) \end{array} \right| = \end{aligned}$$

Pozor! Vztah: $\sin(x) \cos(x)$ lze přepsat na tvar: $\frac{1}{2} \sin(2x)$.

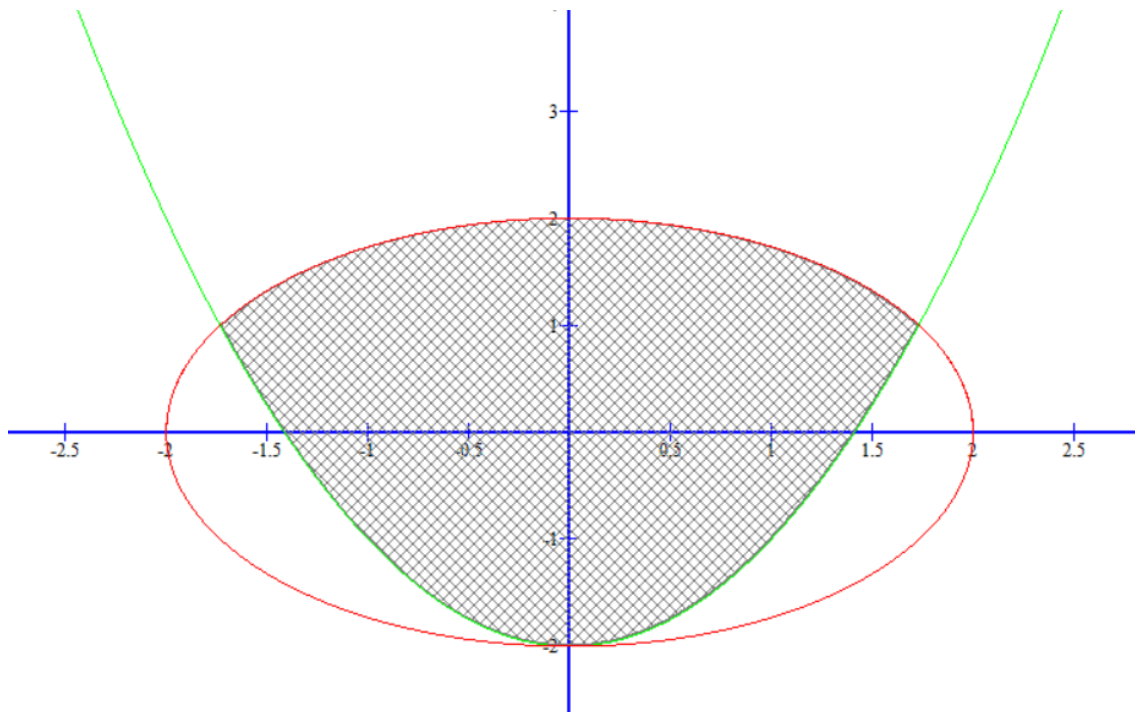
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2) dx - \frac{1}{2} \left[\left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \sin(2x)) dx \right] = \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4} x^2 \cdot \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \sin(2x)) dx = \\ &\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \sin(2x)) dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \sin(2x) \quad v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right| \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4} x^2 \cdot \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left(\left[-x \cdot \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx \right) = \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4} x^2 \cdot \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} [x \cdot \cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4} x^2 \cdot \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} [x \cdot \cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{48} \pi (6 + \pi^2). \end{aligned}$$

Nesmíme zapomenout dosadit zpět do rovnice pro výpočet objemu, neboť jsme pro zjednodušení výpočtu počítali každý integrál zvlášť. Výsledný objem:

$$V = \pi \left[\frac{\pi^3}{24} + \frac{1}{48} \pi (6 + \pi^2) \right] = \frac{\pi^4}{16} + \frac{\pi^2}{8}.$$

4.1.9. Příklad č. 9

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $x^2 + y^2 = 4, y = x^2 - 2$ kolem osy y , viz *Obr.č.14*.



Obrázek 14: Plocha vymezená kružnicí a parabolou

Jestliže bude těleso rotovat kolem osy y , musíme si nejprve stanovit interval v němž se plocha tělesa bude nacházet a následně si interval rozdělit na podintervaly, abychom si ujasnili odkud kam nám dané funkce určují onu rotující plochu. Podintervaly se určí pomocí průsečíků zadaných funkcí. Plocha bude rotovat v intervalu: $y = \langle -2; 2 \rangle$.
nejprve určíme průsečíky tak, že za jednu z proměnných: $x^2 + y^2 = 4$ dosadíme: $y = x^2 - 2$.

$$x^2 + (x^2 - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + x^4 - 4x^2 + 4 = 4$$

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

Rovnice má na množině komplexních čísel celkem tři řešení: $P_1 = [0; -2], P_2 = [\sqrt{3}; 1], P_3 = [-\sqrt{3}; 1]$, pomocí těchto zjištěných bodů lze již snadno určit podintervaly: $y = \langle -2; 1 \rangle, y = \langle 1; 2 \rangle$, které využijeme při integraci.

$$V = \pi \left[\int_1^2 \sqrt{4-y^2} dy + \int_0^1 \sqrt{y+2} dy + \left| \int_{-2}^0 \sqrt{y+2} dy \right| \right] =$$

Výpočet objemu si rozdělíme na tři části, z důvodu přehlednosti a budeme každý integrál počítat zvlášť (žádný jiný důvod to nemá):

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{4-y^2} dy &= \left| \begin{array}{l} y = 2 \cdot \sin(u) \\ dy = 2 \cdot \cos(u) du \end{array} \right| = 2 \int_1^2 2 \cdot \cos^2(u) du = \\ &= 2 \int_1^2 2 \cdot \cos^2(u) du = 4 \int_1^2 \cos^2(u) du = 4 \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \cos(2u) + \frac{1}{2} \right) du = \\ &= 2 \int_1^2 (\cos(2u)) du + 2 \int_1^2 (1) du = \left| \begin{array}{l} s = 2u \\ ds = 2 du \end{array} \right| = \int_1^2 (\cos(s)) ds + 2 \int_1^2 (1) du = \\ &= \sin(s) + 2 \int_1^2 1 du = \sin(s) + 2u = \sin(2u) + 2u = 2u + 2 \sin(u) \cos(u) = \\ &= 2u + 2 \sin(u) \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \end{aligned}$$

Na začátku výpočtu jsme si zavedli substituci, z ní teď vyjádříme proměnnou u jako:

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{y}{2} \right).$$

A dosadíme zpět do rovnice a nesmíme zapomenout na meze:

$$\begin{aligned} &= 2u + 2 \sin(u) \sqrt{1 - \sin^2(u)} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{y}{2} \right) + y \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \left(\sin^{-1} \left(\frac{y}{2} \right) \right)} = \\ &= \left[2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{y}{2} \right) \right]_1^2 + \left[y \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \right]_1^2 = \left[2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{y}{2} \right) \right]_1^2 + \left[y \cdot \sqrt{\frac{4-y^2}{4}} \right]_1^2 = \\ &= \left[2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{y}{2} \right) \right]_1^2 + \left[y \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4-y^2} \right]_1^2 = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{2}{2} \right) - \left(2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) = \\ &= \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Nyní vypočteme další integrál v pořadí. Výpočet bude stejný i pro poslední integrál:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{y+2} dy &= \left| \begin{array}{l} u = y + 2 \\ du = dy \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(y+2)^3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(1+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(0+2)^3} = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Pro poslední integrál dostaneme:

$$= \left| \int_{-2}^0 \sqrt{y+2} dy \right| = \left| \left[\frac{2}{3} \sqrt{(y+2)^3} \right]_{-2}^0 \right| = \left| \frac{2}{3} \sqrt{(0+2)^3} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Dosadíme zpět do předpisu pro výpočet objemu tělesa:

$$V = \pi \left[\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] = \pi \left[\frac{2}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

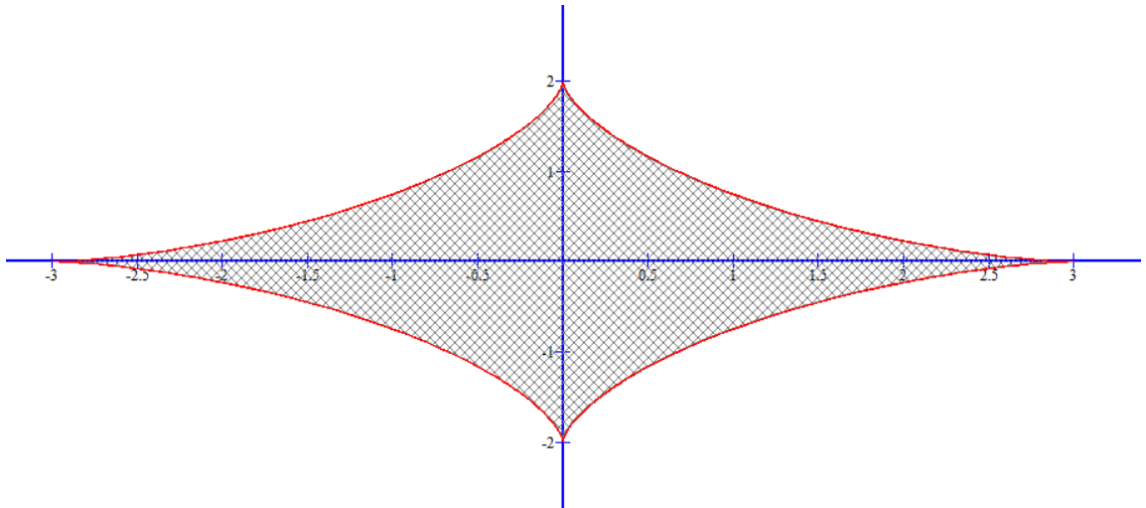
Poznámka:

Vždy pokud máte za úkol spočítat objem tělesa, které rotuje kolem osy y , je důležité si uvědomit, že proměnná y se musí vyskytovat v naší funkci, kterou budeme integrovat, tzn. máme-li napsáno čemu je rovna proměnná y , pak musíme tvar funkce upravit tak, aby proměnná y byla nezávislou proměnou.

4.2. Zadání pomocí křivek daných parametricky

4.2.1. Příklad č. 1

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $x = a \cdot \sin^3(t)$ a $y = b \cdot \cos^3(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kolem osy x , viz Obr.č.15. [9]



Obrázek 15: Plocha dané funkce kde $a = 3$, $b = 2$.

Plocha, která vznikla po vykreslení funkcí je souměrná podle osy x a y , vzhledem k tomu budeme plochu rotovat kolem osy x . Pro zjednodušení výpočtu budeme počítat jen polovinu objemu a na závěr vypočtený objem vynásobíme dvěma.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [b \cdot \cos^3(t)]^2 \cdot 3a \cdot \sin^2(t) \cdot \cos(t) dt = \\ &= 3ab^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(t) \cdot \sin^2(t) dt =\end{aligned}$$

Zavedeme substituci a cosinu si rozepíšeme:

$$\begin{aligned}&= \left| \begin{array}{l} \sin(t) = z \\ \cos(t) dt = dz \\ z_1 = \sin(0) = 0 \\ z_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right| = 3ab^2\pi \int_0^1 z^2 \cdot (1 - z^2)^3 dz = \\ &= 3ab^2\pi \int_0^1 z^2 \cdot (1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6) dz = 3ab^2\pi \int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3ab^2\pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right]_0^1 = 3ab^2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right] = \\
&= 3ab^2\pi \frac{16}{315} = ab^2\pi \frac{16}{105}.
\end{aligned}$$

Celkový objem tedy je:

$$V = \frac{32}{105} ab^2\pi.$$

4.2.2. Příklad č. 2

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $x = 6 + 7 \cos(t)$, $y = 4 + 3 \sin(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy y , viz *Obr.č.16*.

Nejprve se na funkce musíme podívat a vyjádřit si proměnnou t :

$$\cos(t) = \frac{x-6}{7}, \quad \sin(t) = \frac{y-4}{3}.$$

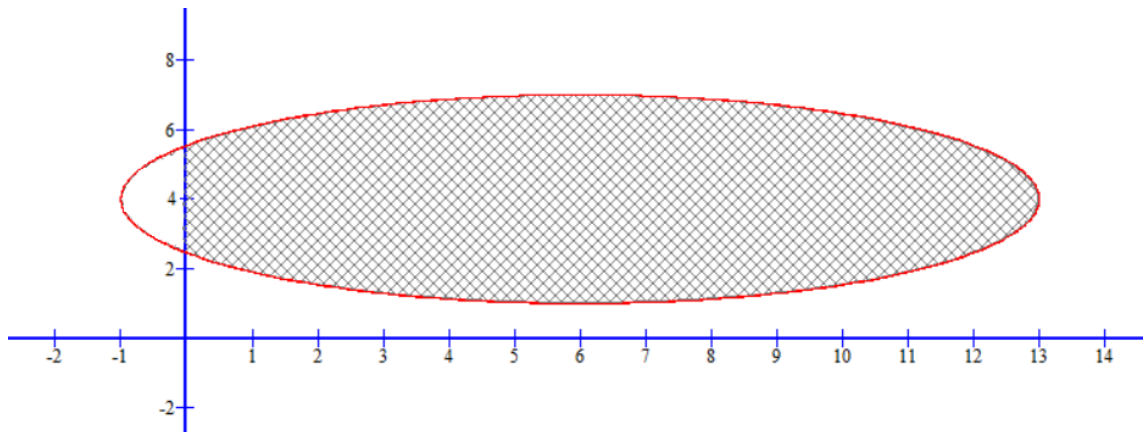
Budeme-li uvažovat součet proměnné t umocněné na druhou dostaneme dle vzorce, že jejich součet je roven jedné:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1,$$

po dosazení zpět do proměnných x a y platí rovnice:

$$\left(\frac{x-6}{7} \right)^2 + \left(\frac{y-4}{3} \right)^2 = 1.$$

Získali jsme obecnou rovnici pro elipsu, se středem v bodě $S = [6,4]$ a velikost hlavní poloosy $a = 7$, vedlejší $b = 3$, viz *Obr.č.16*.



Obrázek 16: Plocha vymezená elipsou

Parametrické vyjádření je $k(t) = [6 + 7 \cos(t), 4 + 3 \sin(t)]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Nyní budeme hledat průsečíky, a těleso pak necháme rotovat kolem osy y .

Pro $y = 0$ pak zjistíme, že průsečíky s osou x neexistují. Pro $x = 0$ dostaneme dva kořeny: $y = \frac{28 \pm 3\sqrt{13}}{7}$. Z rovnice si vyjádříme proměnnou x a určíme meze.

$$x = \sqrt{49 \cdot \left(1 - \frac{(y-4)^2}{9}\right)} + 6.$$

Protože elipsa je souměrná podle přímky $y = 4$ můžeme objem spočítat jako dvojnásobek objemu tělesa vzniklého rotací na mezích $y \in \langle 4, 7 \rangle$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \pi \int_4^7 \left[\sqrt{49 \cdot \left(1 - \frac{(y-4)^2}{9}\right)} + 6 \right]^2 dy = \\ &= \left| \frac{y-4}{dy} = \frac{z}{dz} \right| = \pi \int_4^7 \left[\sqrt{49 \cdot \left(1 - \frac{z^2}{9}\right)} + 6 \right]^2 dz = \\ &= \pi \left[-\frac{49y^3}{27} + \frac{196y^2}{9} - 14(4-y)\sqrt{-y^2 + 8y - 7} - \frac{19y}{9} - 126 \sin^{-1}\left(\frac{4-y}{3}\right) \right]_4^7 = \\ \frac{1}{2}V &= \pi(206 + 63\pi). \end{aligned}$$

Objem celého tělesa je tedy:

$$V = 412\pi + 126\pi^2.$$

4.2.3. Příklad č. 3

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $x = 6 + 7 \cos(t)$, $y = 4 + 3 \sin(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy y , viz *Obr.č.16*. Tentokrát rovnice nepřevádějte na kartézský tvar, ale počítejte s parametrickým předpisem.

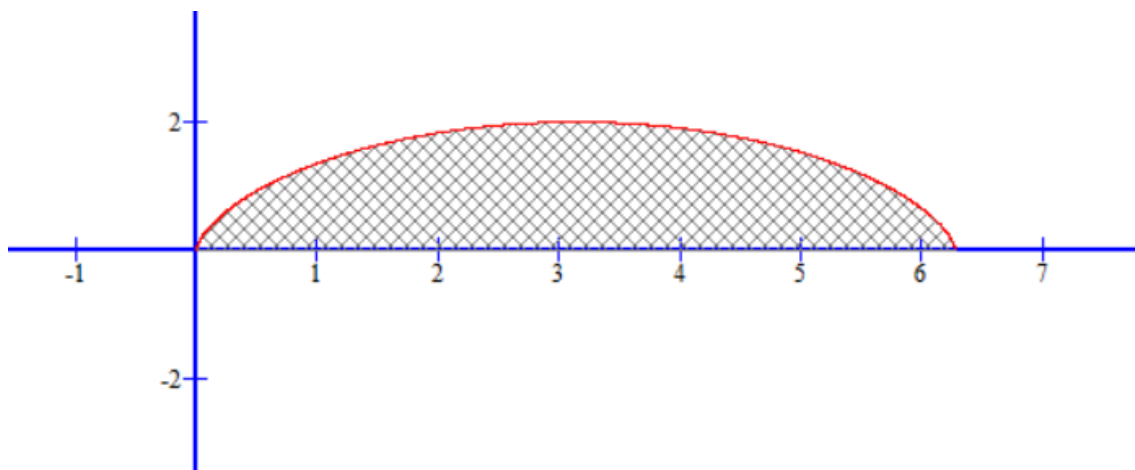
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [6 + 7 \cos(t)]^2 \cdot (3 \cos(t)) dt = \\ &= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [6 + 7 \cos(t)]^2 \cdot \cos(t) dt = \\ &= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [49 \cos^3(t) + 84 \cos^2(t) + 36 \cos(t)] dt = \\ &= 3\pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} [49 \cos^3(t)] dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [84 \cos^2(t)] dt + 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [36 \cos(t)] dt \right] = \\ &= 3\pi \left[\frac{49}{12} (9 \sin(t) + \sin(3t)) + 42(t + \sin(t) \cos(t)) + 36 \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left[126\pi + \frac{873}{4} \pi \sin(t) + 63\pi \sin(2t) + \frac{49}{4} \pi \sin(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &\frac{1}{2}V = \pi(206 + 63\pi).\end{aligned}$$

Objem celého tělesa je tedy:

$$V = 412\pi + 126\pi^2.$$

4.2.4. Příklad č. 4

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$, pro $a > 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x , viz
Obr.č.17.



Obrázek 17: Plocha pro $a = 1$

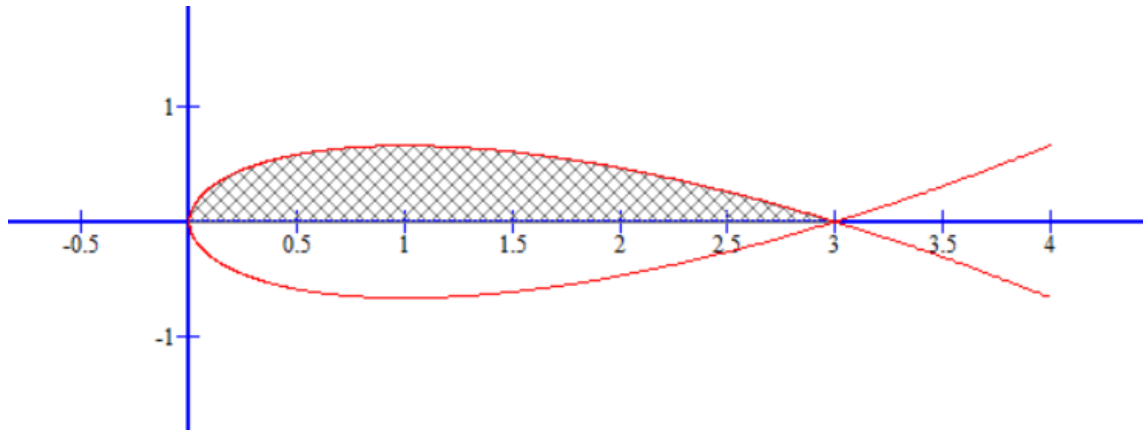
Na *Obr.č.17* je obrázek funkcí, pro $a = 1$, výpočet objemu je roven:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos(t))]^2 \cdot a(1 - \cos(t)) dt = \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} [(1 - \cos(t))]^3 dt = \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (-\cos^3(t) + 3\cos^2(t) - 3\cos(t) + 1) dt = \\ &= a^3 \pi \left[\frac{1}{12} (30t - 45 \sin(t) + 9 \sin(2t) - \sin(3t)) \right]_0^{2\pi} = \\ &V = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

4.2.5. Příklad č. 5

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$$x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle, \text{ kolem osy } x, \text{ viz Obr.č.18.}$$



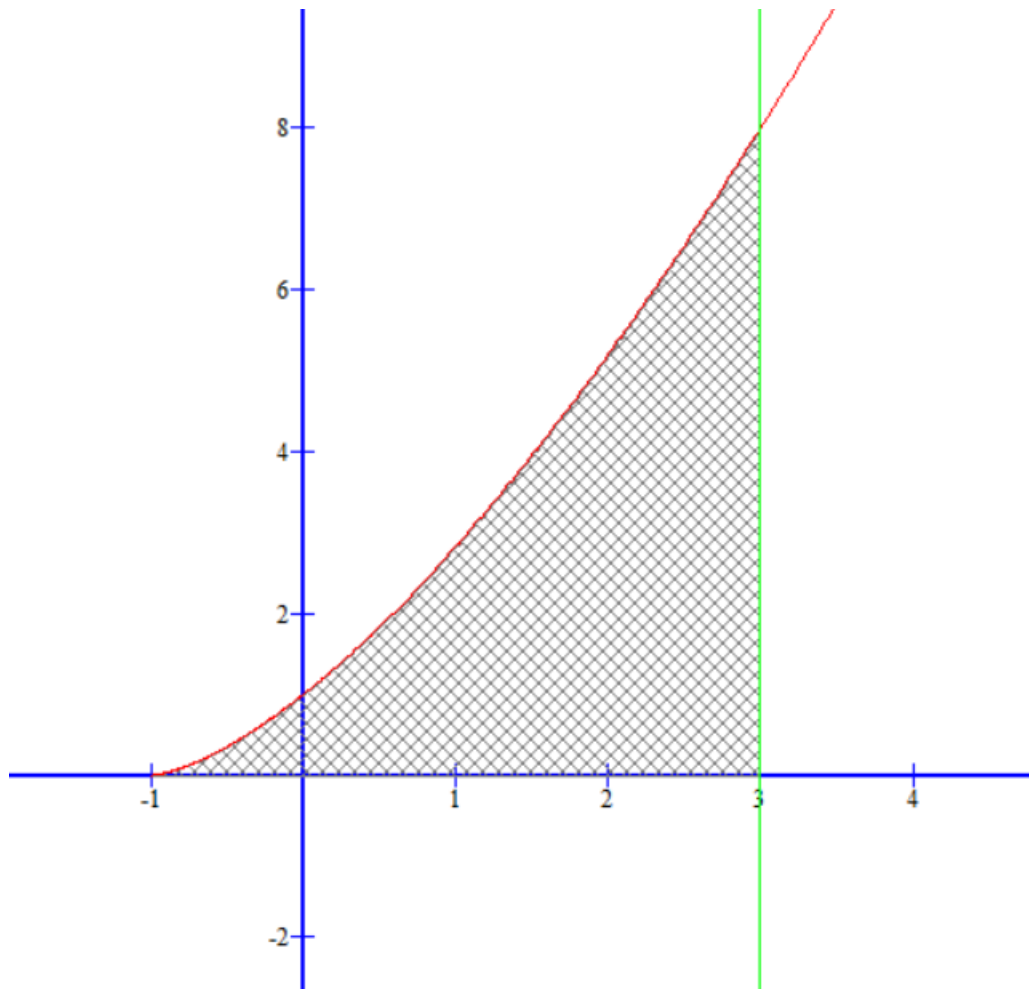
Obrázek 18: Plocha funkce pro $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$

Vzhledem k obrázku je nám jasné, že objekt je podle osy x souměrný, výpočet je následující:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(t - \frac{t^3}{3} \right)^2 \cdot 2t \right) dt = \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(t^2 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{t^6}{9} \right) \cdot 2t \right) dt = \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(2t^3 - \frac{4}{3}t^5 + \frac{2}{9}t^7 \right) dt = \\ &= \pi \left[\frac{2}{4}t^4 - \frac{4}{18}t^6 + \frac{2}{72}t^8 \right]_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}^4 - \frac{2}{9}\sqrt{3}^6 + \frac{1}{36}\sqrt{3}^8 \right) = \\ &= \pi \left(\frac{9}{2} - \frac{54}{9} + \frac{81}{36} \right) = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

4.2.6. Příklad č. 6

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:
 $x = t^2 - 1, y = t^3$, přímkami $y = 0, x = 3$ kolem osy x , viz Obr.č.19.



Obrázek 19: Plocha vymezená funkcemi pro $t \in \langle -2, 2 \rangle$.

Tím, že je naše plocha omezena přímkami $x = 3$ a $y = 0$, lze dopočítat parametr t pro naši vyšrafovanou plochu. Parametr pro plochu je na intervalu $t \in \langle 0, 2 \rangle$.

Objem vypočteme jako:

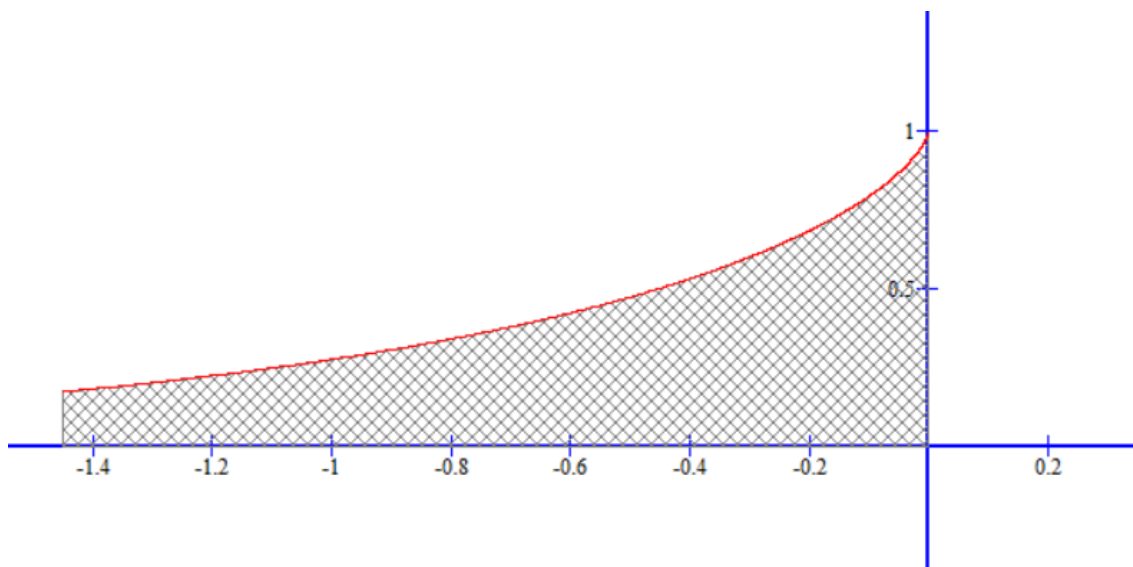
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (t^3)^2 \cdot (2t) dt = \pi \int_0^2 2t^7 dt = \\ &= \pi \left[\frac{t^8}{4} \right]_0^2 = 64\pi. \end{aligned}$$

4.2.7. Příklad č. 7

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$$x = \cos(t) + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right), y = \sin(t), \text{ kde } t \in \left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{2} \right), \text{ kolem osy } y, \text{ viz Obr.č.20.}$$

K výpočtu využijte matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 20: Plocha vymezená funkcí

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(t) + \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right)^2 \cos(t) dt = \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^3(t) + 2 \cdot \cos^2(t) \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \ln^2 \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \cdot \cos(t) \right] dt = \end{aligned}$$

Využijeme matematický program: *WolframAlpha*. Do hledáčku na stránce programu zadáme předpis naší integrace v tomto znění:

*(integrate (cos^3(t)+2*cos^2(t)*ln(tg(t/2))+ln^2(tg(t/2))*cos(t)) dt from pi/18 to pi/2),*

získáme výsledek:

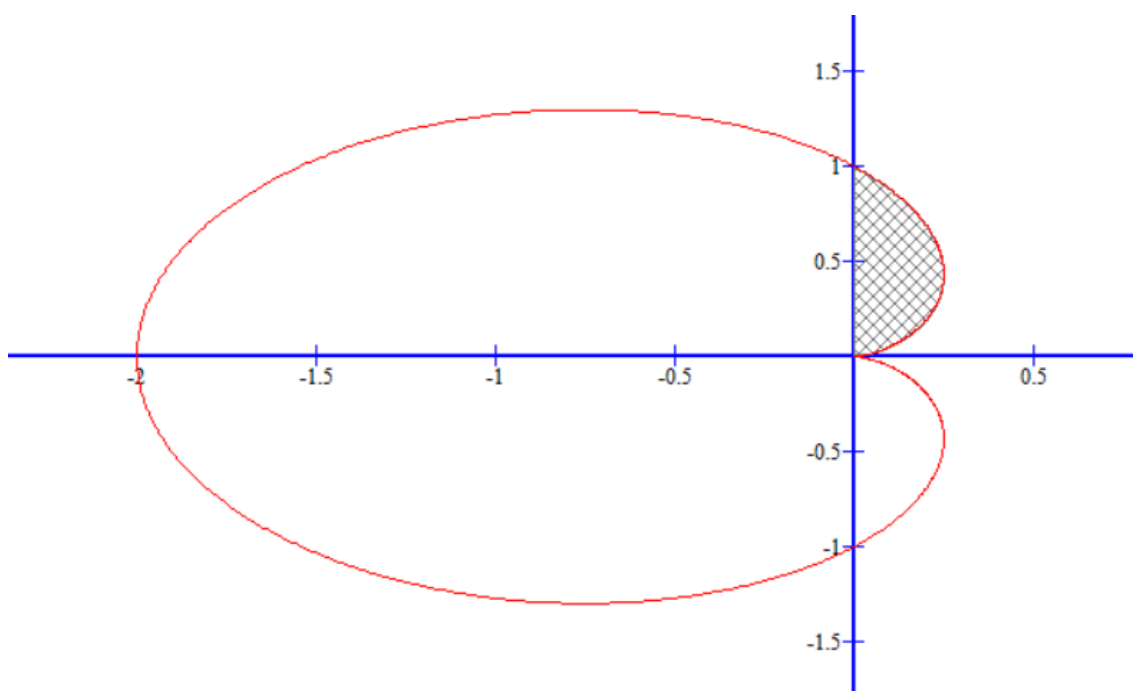
$$V = \frac{286279\pi}{1000000}.$$

4.3. Zadání pomocí křivek v polárních souřadnicích

4.3.1. Příklad č. 1

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami: $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$, kde r je průvodič závislý na úhlu θ , a θ je úhel v intervalu $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ kolem osy y . Na obr.č.21 je zobrazena funkce $r(\theta)$ na intervalu $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

K výpočtu využijte matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“ více v Příloze – práce s *WolframAlpha*.



Obrázek 21: Funkce, kde $\theta \in \langle 0; 2\pi \rangle$, plocha na intervalu $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

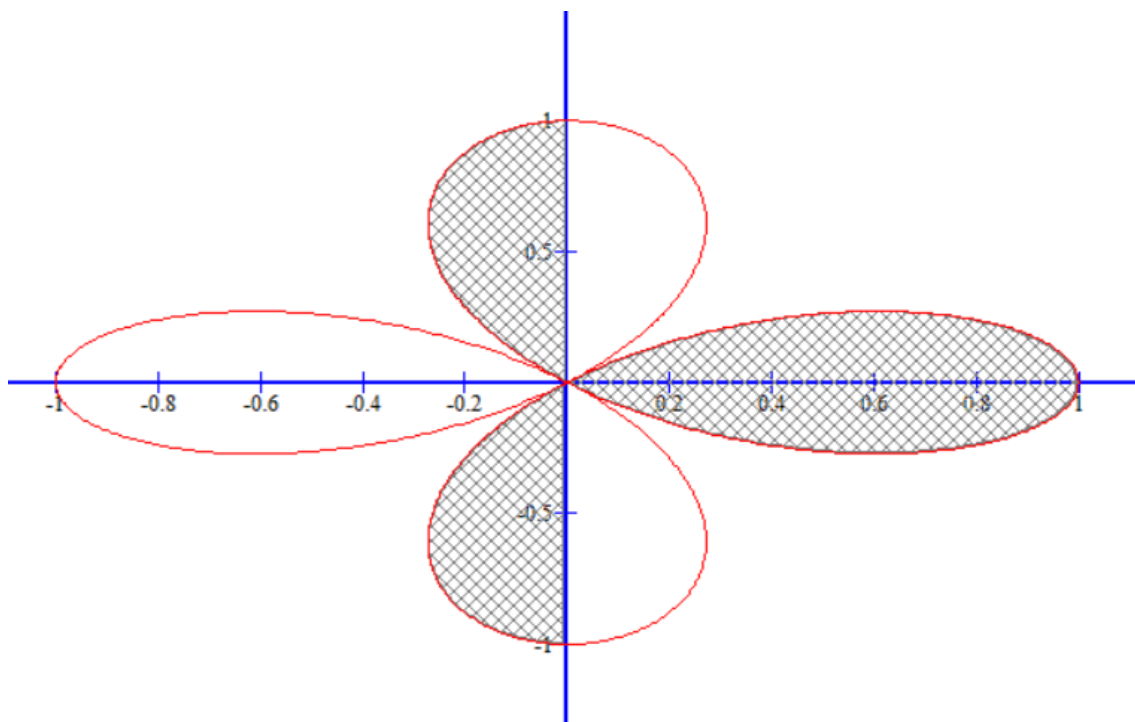
$$V = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \sin(\theta) + r \cdot \cos(\theta) \right) d\theta =$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(\theta)]^2 \cdot \cos^2 \theta (\sin(\theta) \cdot \sin(\theta) + [1 - \cos(\theta)] \cdot \cos(\theta)) d\theta =$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{5}{4} \theta + \frac{19}{8} \cdot \sin(\theta) - \frac{31}{32} \cdot \sin(2\theta) + \frac{7}{16} \cdot \sin(3\theta) - \frac{3}{16} \cdot \sin(4\theta) + \frac{1}{16} \cdot \sin(5\theta) - \frac{1}{96} \cdot \sin(6\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - \frac{5}{8} \pi^2.$$

4.3.2. Příklad č. 2

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami: $r(\theta) = \cos(2\theta)$, kde θ je úhel v intervalu $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ kolem osy y , viz Obr.č.22. K výpočtu využijte matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 22: Funkce: $r(\theta)$ na intervalu $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a plocha kde $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

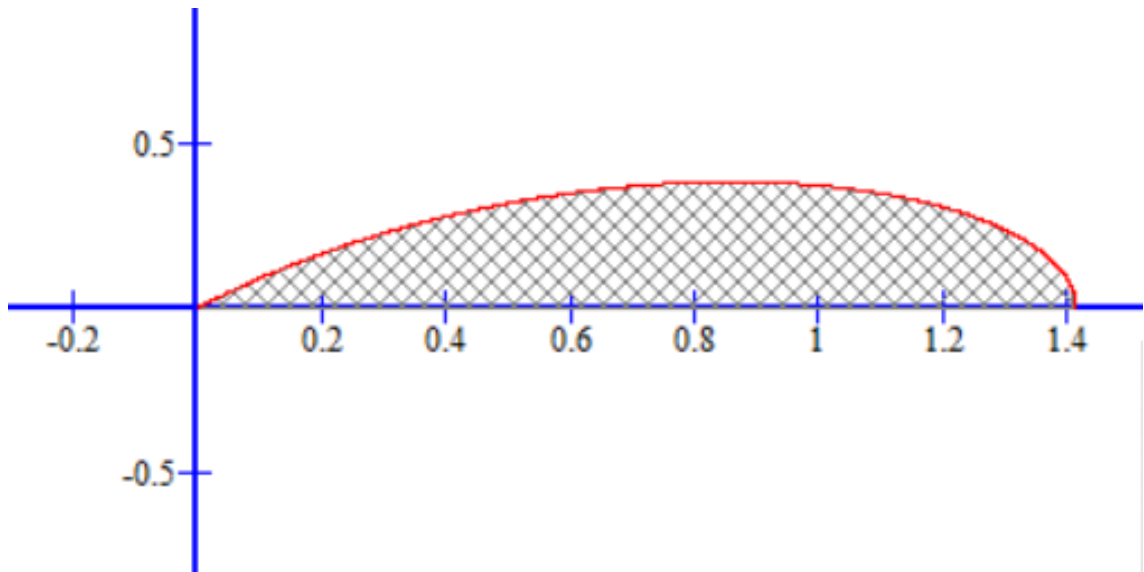
Na Obr.č.22. je zobrazena funkce: $r(\theta) = \cos(2\theta)$, kde $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a plocha části funkce na intervalu $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ na obrázku vyznačeno vyšrafovanou částí.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \sin(\theta) + r \cdot \cos(\theta) \right) d\theta = \\
 &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2\theta) \cdot \cos^2 \theta \cdot ([-2\sin(2\theta)] \cdot \sin(\theta) + \cos(2\theta) \cdot \sin(\theta)) d\theta = \\
 &= \pi \cdot \left[-\frac{\sin(\theta)}{8} + \frac{\sin(7\theta)}{112} + \frac{\sin(9\theta)}{144} - \frac{\cos(3\theta)}{48} - \frac{\cos(5\theta)}{80} - \frac{\cos(7\theta)}{224} - \frac{\cos(9\theta)}{288} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 V &= \frac{16}{63} \pi.
 \end{aligned}$$

4.3.3. Příklad č. 3

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$r(\theta) = \sqrt{2 \cdot \cos^2(2\theta)}$, kde $\theta \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle$ kolem osy x , viz Obr.č.23. K výpočtu využijte matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 23: Plocha vymezená funkcí: $r(\theta) = \sqrt{2 \cdot \cos^2(2\theta)}$, kde $\theta \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle$.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 \cdot \cos^2(2\theta)] \cdot \sin^2 \theta \\
 &\quad \cdot \left(\left[-2\sqrt{2} \sqrt{\cos^2(2\theta)} \cdot \tan(2\theta) \right] \cdot \cos(\theta) - \sqrt{2 \cdot \cos^2(2\theta)} \cdot \sin(\theta) \right) d\theta =
 \end{aligned}$$

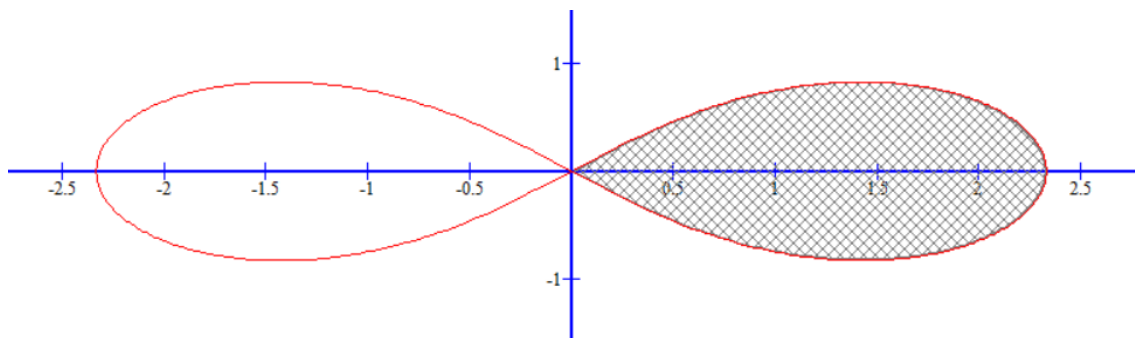
$$V = \frac{4}{105} (9\sqrt{2} - 16)\pi.$$

4.3.4. Příklad č. 4

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$r(\theta) = \sqrt{2 \cdot e \cdot \cos(2\theta)}$ kde $\theta \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$ kolem osy y . [10] Ale Obr.č.24. je

zobrazena funkce $r(\theta) = \sqrt{2 \cdot e \cdot \cos(2\theta)}$ kde $\theta \in \langle -\pi; \pi \rangle$. K výpočtu využijte matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 24: Plocha vymezená-Bernoulliho lemniskáta

$$V = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \sin(\theta) + r \cdot \cos(\theta) \right) d\theta =$$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 \cdot e \cdot \cos(2\theta)}^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(-2\sqrt{2e} \cdot \sqrt{\cos^2(2\theta)} \cdot \tan(2\theta) \cdot \sin(\theta) + \sqrt{2 \cdot e \cdot \cos(2\theta)} \cdot \cos(\theta) \right) d\theta =$$

Využijeme program *WolframAlpha*, s příkazem „*integrate*“ pomocí něhož dospějeme k výsledku:

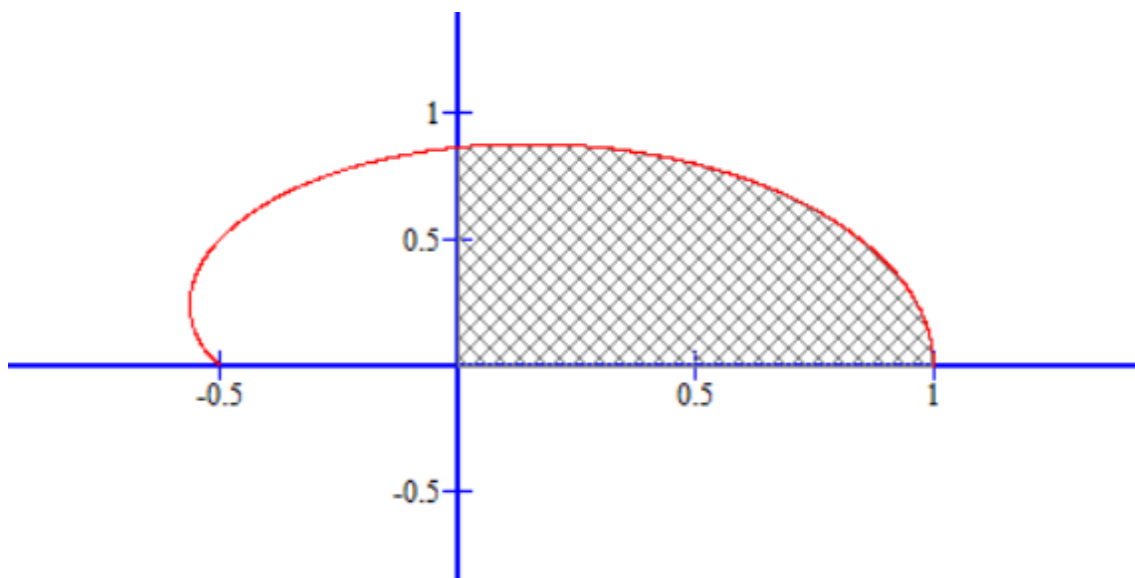
$$V = \frac{592367}{100000} \pi.$$

4.3.5. Příklad č. 5

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$r(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$, kde $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ kolem osy x . K výpočtu využijte matematický program:

WolframAlpha s příkazem „*integrate*“. Ale Obr.č.25. je funkce $r(\theta)$ kde $\theta \in \langle 0; \pi \rangle$.



Obrázek 25: Funkce $r(\theta)$ kde $\theta \in \langle 0; \pi \rangle$ a vyšrafovaná plocha kde $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

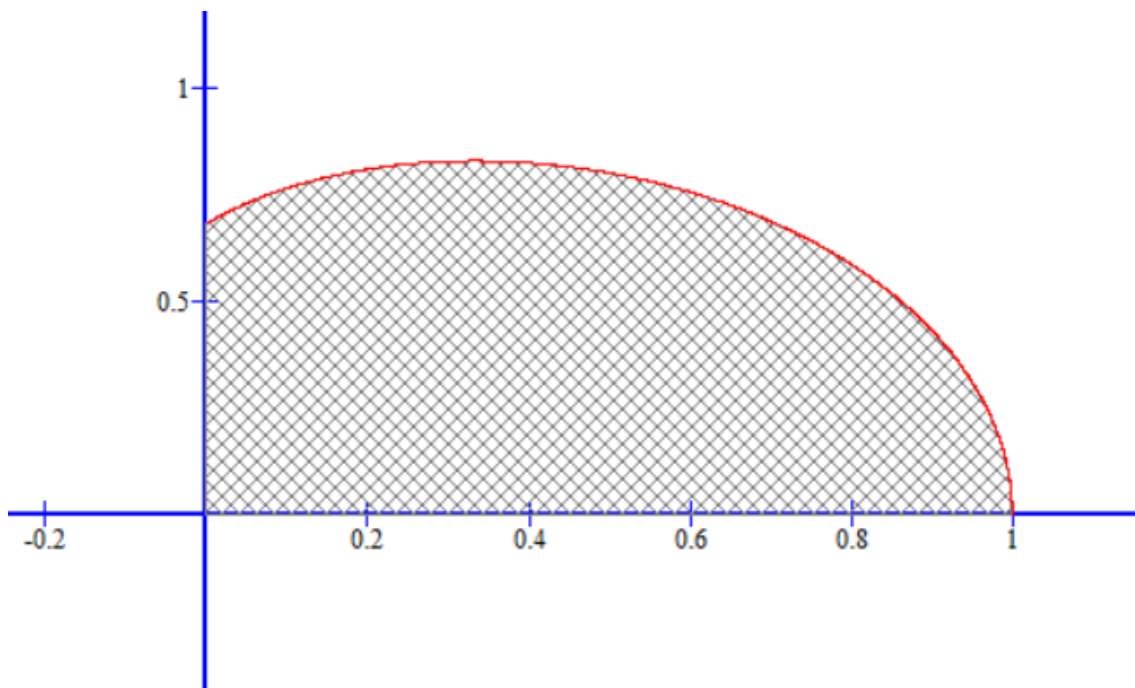
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(-\frac{1}{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \cos(\theta) - \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\
 &= \pi \left[\frac{13}{32} \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7}{32} \cos\left(\frac{4\theta}{3}\right) + \frac{1}{24} \cos(2\theta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{32} \cos\left(\frac{8\theta}{3}\right) - \frac{1}{32} \cos\left(\frac{10\theta}{3}\right) - \frac{1}{96} \cos(4\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 V &= \frac{53}{96} \pi.
 \end{aligned}$$

4.3.6. Příklad č. 6

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$r(\theta) = \cos\left(\frac{\theta^2}{3}\right)$, kde $\theta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ kolem osy x , viz Obr.č.26. K výpočtu využijte

matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 26: Plocha vymezená funkcí: $r(\theta)$ kde $\theta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

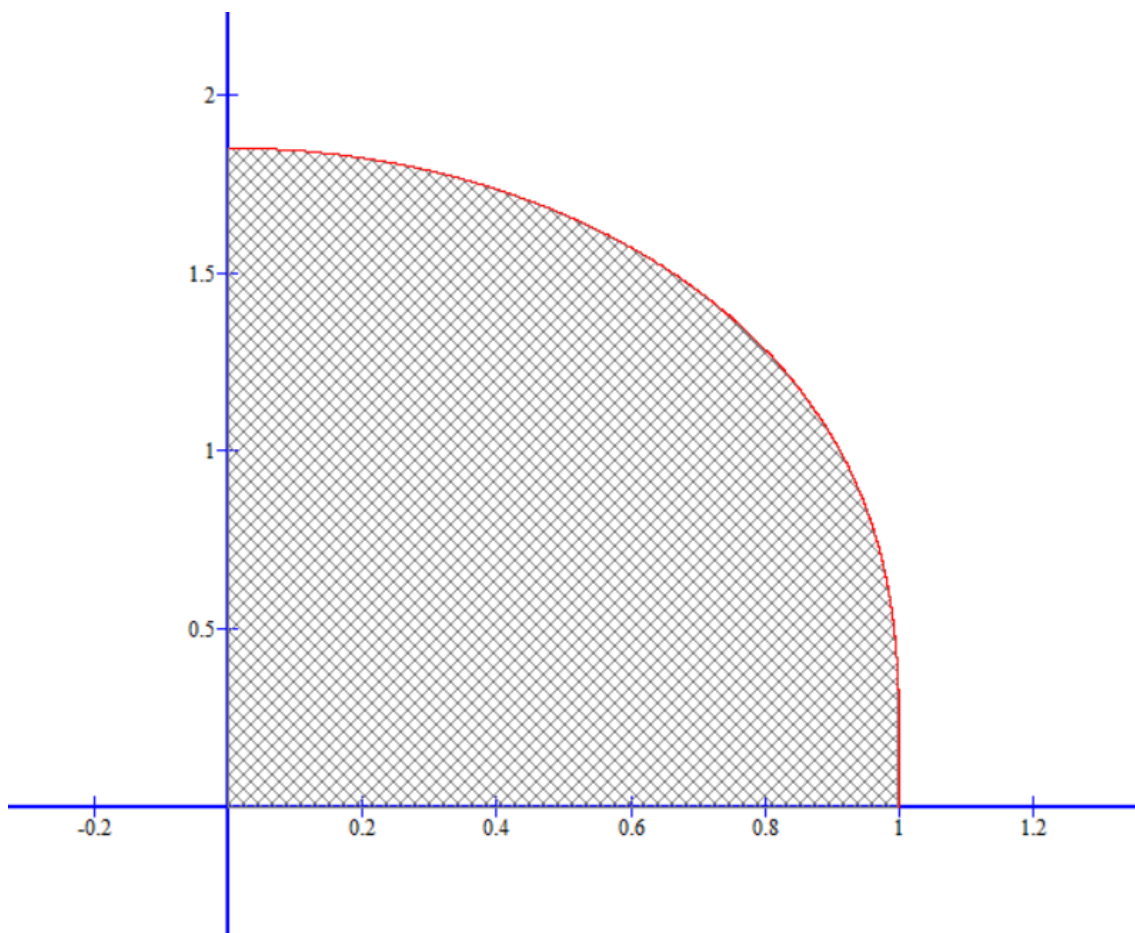
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta^2}{3}\right) \right)^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(-\frac{2}{3} \theta \cdot \sin\left(\frac{\theta^2}{3}\right) \cdot \cos(\theta) - \cos\left(\frac{\theta^2}{3}\right) \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\ &V = \frac{506008}{1000000} \pi. \end{aligned}$$

4.3.7. Příklad č. 7

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$$r(\theta) = \frac{1}{\cos(\sin(\theta))}, \text{ kde } \theta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \text{ kolem osy } x, \text{ viz Obr.č.27. K výpočtu využijte}$$

matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 27: Plocha vymezená funkcí r , kde $\theta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

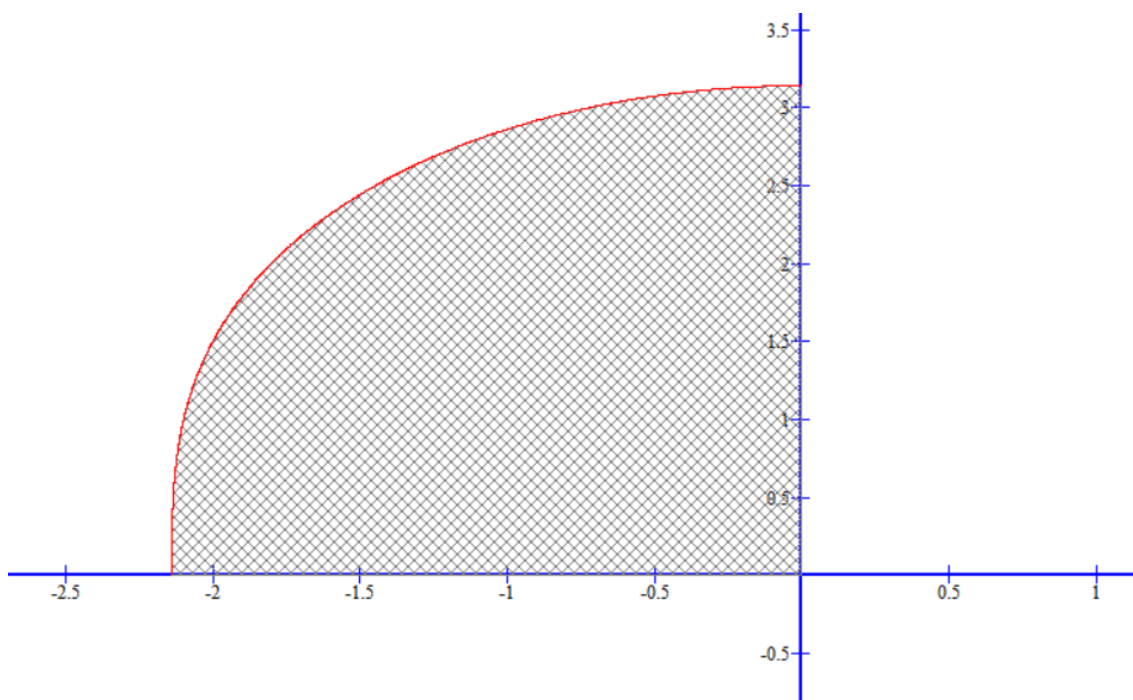
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos(\sin(\theta))} \right)^2 \cdot \sin^2 \theta \\ &\quad \cdot \left(\tan(\sin(\theta)) \frac{1}{\cos(\sin(\theta))} \cos^2(\theta) - \frac{1}{\cos(\sin(\theta))} \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \end{aligned}$$

$$V = \frac{248\,969}{100\,000} \pi.$$

4.3.8. Příklad č. 8

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami:

$r(\theta) = \cos^2(\theta) - \pi$, kde $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$ kolem osy x , viz Obr.č.28. K výpočtu využijte matematický program: *WolframAlpha* s příkazem „*integrate*“.



Obrázek 28: Plocha vymezená funkcí $r(\theta) = \cos^2(\theta) - \pi$.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\theta) \right) d\theta = \\
 &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2(\theta) - \pi)^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot (-2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos^2(\theta) - (\cos^2(\theta) - \pi) \cdot \sin(\theta)) d\theta = \\
 &= \pi \left[\frac{1}{26880} (-210(-9 + 42\pi - 80\pi^2 + 96\pi^3) \cos(\theta) \right. \\
 &\quad + 140(2 + \pi)(3 - 12\pi + 16\pi^2) \cos(3\theta) - 84\pi(20\pi - 7) \cos(5\theta) \\
 &\quad \left. + 15(28\pi - 9) \cos(7\theta) - 35 \cos(9\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \\
 V &= \frac{2}{21} - \frac{2}{5}\pi + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi^3.
 \end{aligned}$$

Závěr

Touhle prací jsem si přiblížil integrální počet jedné reálné proměnné. Práci jsem sepsal tak, že již v úvodu seznamuji čtenáře s možnostmi využití integrálního počtu. Na to později navazují kapitoly matematická/fyzikální aplikace integrálního počtu.

Začátek práce je věnován seznámení se s integrálním počtem. Je zde zmíněn Riemannův určitý integrál, vlastnosti integrálního počtu, metoda substituce a metoda per partes. V kapitole „Objem rotačních těles“ jsou uvedeny vzorce pro výpočet objemů těles pro různý předpis funkcí. Hlavní náplní je studium integrálního počtu a sestavení vlastní sbírky názorně řešených příkladů.

V praktické části práce se čtenář setkává se sérií vypracovaných příkladů. Příklady mají různou obtížnost, aby se čtenář během samostudia zdokonalil v dané problematice. Jsou zde křivky zadané: parametricky, v polárních souřadnicích a v kartézských souřadnicích. Každá ze zmíněných kapitol obsahuje hrstku názorně řešených příkladů, které jsou dostatečně popsány, aby i méně zkušený čtenář dané problematice alespoň trochu porozuměl. Součástí příkladů jsou i obrázky funkcí (křivek) a vyšrafovaných ploch, které rotují kolem os. Obrázky jsou vytvořeny v programu *Graph*. Kromě programu *Graph* jsme využili i online matematický software *WolframAlpha*, který jsme používali k výpočtu obtížných příkladů a ke kontrole našich výpočtů. Při sestavování sbírky příkladů jsme zjistili, že příklady, které mají předpis v polárních souřadnicích jsme zvolili obtížné, než jsme sami schopni spočítat, proto jsme při jejich výpočtu využili program *WolframAlpha*. Příklady ze zbylých dvou kapitol (křivky v kartézských souřadnicích a křivky dané parametricky) pro nás nebyly tak obtížné. Při užití programu jsme postupovali následovně: zadali jsme příkaz: „*integrate*“ a za příkaz jsme napsali parametry (předpis pro integraci, k němuž jsme dospěli po dosazení do vzorce pro výpočet objemu), a program pak rovnici vypočetl, více v Příloze – práce s *WolframAlpha*.

Hlavním cílem práce bylo přiblížit čtenáři integrální počet jedné reálné proměnné pro různé typy předpisů funkcí a vysvětlit výpočet objemů těles vzniklých z rotujících ploch daných funkcí. Dále jsme vypracovali vlastní sbírku názorně řešených příkladů pro různé předpisy funkcí, které čtenáři pomohou při samostudiu integrálního počtu. Vytvořená sbírka celkem obsahuje 24 řešených příkladů.

Seznam použité literatury:

- [1] LAITCHOVÁ, Jitka. *MATEMATICKÁ ANALÝZA 2: Integrální počet*. Olomouc, 2001, str.10. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [2] JIRÁSEK, František a Josef BENDA. *Matematika pro bakalářské studium*. 1. Praha: Ekopress, 2006, 506 s. ISBN 80-869-2902-7.
- [3] HAJTMAR, Jaroslav. *Integrální počet: Určitý integrál – zavedení pojmu* [online]. In: s. 16 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: https://gyza.cz/storage/dum/VY_32_INOVACE_M0309.pdf
- [4] Riemannův integrál: Konstrukce dolního a horního součtu. In: *Studijní texty* [online]. Brno: muni [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i12.html>
- [5] *Matematika (nejen) pro krajináře a nábytkáře: Riemannův integrál* [online]. Brno: MENDELU, 2012 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: <https://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse10.html>
- [6] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo VOLF. *Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku*. [online]. [cit. 2021-04-03]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/7455733-Integralni-pocet-ve-fyzice-studijni-text-pro-resitele-fo-a-ostatni-zajemce-o-fyziku-miroslava-jaresova-ivo-volf-uvod-3.html>. Studijní text.
- [7] BOUCHALA, Jiří a Oldřich VLACH. *KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL* [online]. 2012 [cit. 2021-04-21]. Dostupné z: <https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/kpi.pdf>. Studijní text. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni.
- [8] KREML, Pavel. *Matematika II* [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2007 [cit. 2021-04-03]. ISBN 978-80-248-1316-5. Dostupné z: <https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/>
- [9] Riemannův integrál: Objem rotačních těles. <https://www.math.muni.cz/> [online]. Brno: MUNI, 2013 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i23.html>
- [10] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo VOLF. *MATEMATIKA KŘIVEK: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku. Fyzikální olympiáda* [online]. Praha, s.

64 [cit. 2021-04-21]. Dostupné z:

<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>

[11] BOUCHALA, Jiří. *Matematická analýza 1*. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 1998. ISBN 80-707-8519-5.

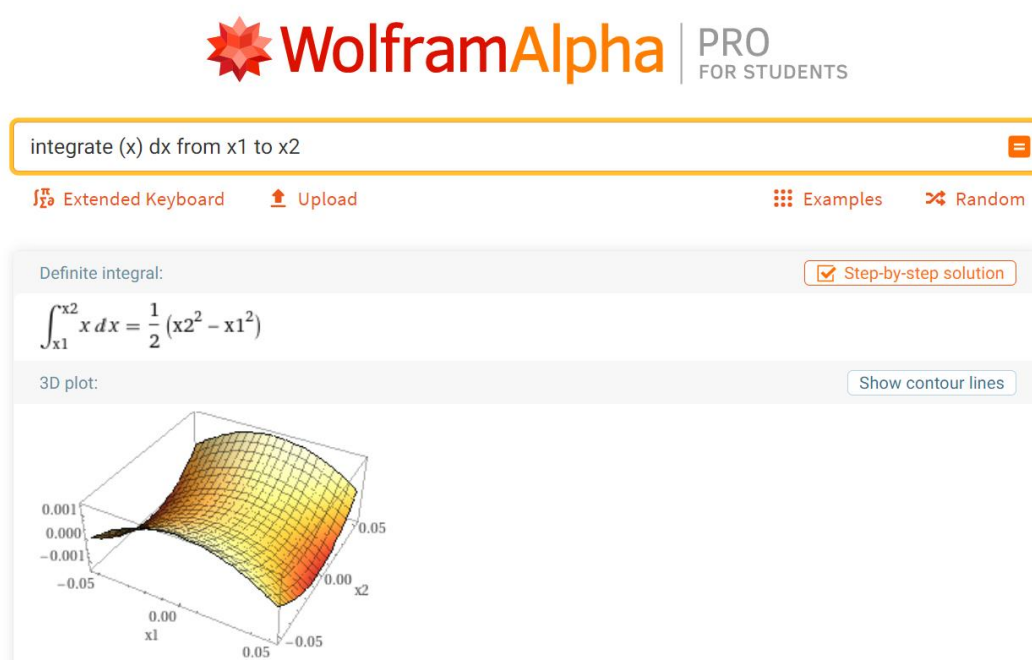
[12] VRBENSKÁ, Helena a Jana BĚLOHLÁVKOVÁ. *Základy matematiky pro bakaláře II*. 2. vyd. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 2003. ISBN 80-248-0406-9.

[13] WolframAlpha: PRO FOR STUDENTS. *WolframAlpha: PRO FOR STUDENTS* [online]. USA: -, 2009 [cit. 2021-03-14]. Dostupné z: <https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%3Dt%5E2%2C+y%3Dt-t%5E3%2F3>

Příloha – práce s WolframAlpha

Do vyhledávací lišty napíšeme příkaz: „*integrate*“ za příkaz napíšeme parametry – přepis pro integraci, k němuž jsme dospěli po dosazení do vzorce pro výpočet objemu (záleží na typu zadání, podle toho, jakými křivkami je plocha pro rotaci kolem osy definovaná). Stiskneme rovná se (nebo klikneme na Enter) a program vypočte naši rovnici (integraci).

Př: Na *Obr.č.29* je příklad, kdy náš parametr je x a integrace probíhá na mezích od x_1 do x_2 . (Příklad je pouze ilustrativní a má jen předváděcí charakter).



Obrázek 29: Práce s programem WolframAlpha

Typ: Budete-li počítat objem tělesa nezapomeňte před příkaz integrace připsat konstantu π (viz vzorec pro objem), pokud zapomenete a program Vaše zadání vypočítá bez něj tak se nic neděje, výsledek si zapište a vynásobte ho konstantou π , aby byl výsledek správný. Postup lze využít, neboť je v souladu s vlastnostmi Riemannova určitého integrálu.