Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2021 Aleš Horáček

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Přibližné metody řešení algebraických rovnic

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor: Aleš Horáček

Studijní program: B1101

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Informatika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové 2021

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové Aleš Horáček

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D. nejen za její rady a velmi cenné připomínky, ale především za její trpělivost a ochotu při vedední této práce.
Dále bych rád poděkoval své přítelkyni a rodině za podporu po celou dobu studia.

Anotace

HORÁČEK, A. *Přibližné metody řešení algebraických rovnic.* Hradec Králové, 2021. Bakalářská práce na Přirodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Bakalářská práce se zabývá přibližnými metodami řešení algebraických rovnic. Každá metoda je názorně odvozena a ilustrována na řešených příkladech. Obsahem jsou jak klasické metody, tak i metody méně tradiční. Součástí práce je i sbírka řešených úloh.

Klíčová slova:

algebraická rovnice, přibližné metody řešení, Newtonova metoda, metoda regula falsi, Müllerova metoda, řetězové zlomky

Annotation

HORÁČEK, A. *Approximate Methods for Solving Algebraic Equations.* Hradec Králové, 2021. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové Thesis Supervisor RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

This thesis deals with approximate methods for solving algebraic equations. Each method is described and well ilustrated with solved examples. The thesis includes classical methods but also methods that are less traditional and also includes the collection of solved problems.

Key words:

algebraic equation, approximate methods, Newton method, regula falsi method, Müller's metod, continued fraction

Obsah

Úvod

Jedním z nejdůležitějších problémů v matematice vůbec je řešení rovnice. Počet různých typů rovnic je vysoký, tato práce se však zabývá rovnicemi algebraickými. Jedná se totiž o velice rozsáhlou kategorii rovnic, které mají poměrně jednoduchý tvar, a samotná praxe (ať už matematická nebo technická) ukazuje, že mají i velice široký rozsah využití. Navíc se metodami matematické analýzy dá dokázat, že se i řešení mnoha nealgebraických rovnic dá alespoň přibližně převést na řešení rovnic algebraických.

Pro aplikaci matematiky v technických vědách je velice důležité téma přibližného řešení algebraických rovnic. Cílem bakalářské práce je jasně a srozumitelně vyložit princip jednotlivých metod, názorně je ilustrovat, a nastínit jejich aplikaci.

Samotná práce je rozdělena na tři kapitoly. V první kapitole jsou shrnuty základní potřebné pojmy a vlastnosti polynomů. Ve druhé kapitole se práce věnuje ohraničení a separaci reálných kořenů rovnice a samotným přibližným metodám řešení algebraických rovnic. Zahrnuty jsou jak běžné metody, mezi které se řadí metoda půlení intervalů, metoda regula falsi nebo Newtonova metoda, tak i méně tradiční metody, jako jsou Müllerova metoda nebo metoda řetězových zlomků.

Třetí kapitolu, tedy praktickou část práce, tvoří sbírka řešených úloh, ve které jsou jednotlivé metody aplikovány. K vyčíslení jednotlivých výpočtů a tvorbě tabulek byl využit tabulkový procesor MS Excel. Postup řešení úloh je zapsán tak, aby mohl být pomůckou pro další studenty zabývající se touto problematikou.

Kapitola 1

Polynomy a algebraické rovnice

Hlavními zdroji pro tuto kapitolu jsou [7], [1]

Definice 1.1. *Nechť M je nějaká neprázdná množina komplexních čísel.* ***Komplexní funkcí*** *f nazýváme předpis, který každému číslu $x \in M$ jednoznačně přiřadí komplexní číslo, které označíme $f(x)$.*

Definice 1.2. *Nechť n je libovolné nezáporné celé číslo a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ komplexní čísla. Komplexní funkce f definovaná předpisem*

$$(\forall x \in \mathbb{C}) f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

se nazývá ***komplexní polynom jedné proměnné*** *(nebo polynom jedné proměnné definovaný nad $\mathbb{C}$), resp.* ***polynomická funkce nad $\mathbb{C}$.***

Poznámka 1.1.

- O komplexním polynomu jedné proměnné budeme v dalším hovořit *jako o polynomu jedné proměnné* nebo pouze jako o *polynomu.*
- Místo toho, abychom říkali:
  Je daný polynom f, který komplexnímu číslu x přiřazuje komplexní číslo

  $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

  budeme jednoduše říkat:
  Je daný polynom $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění, zda $f(x)$, resp. f, značí funkci, resp. hodnotu funkce f v čísle x, vždy na to výslovně upozorníme.
- Komplexní čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty** daného polynomu.
- Pylynom $f(x) = a_n \in \mathbb{C}$ se nazývá **konstanta.**
- Polynom, který každému komplexnímu číslu přiřazuje nulu, se nazývá **nulový polynom** a píšeme jednoduše polynom 0, resp. $f(x) = 0$.
- Výrazy $a_i x^{n-i}$, $i = 0,1,2, \ldots, n$, se nazývají **členy** polynomu. Členy a_n, $a_{n-1}x$, $a_{n-2}x^2$, $a_{n-3}x^3$ atd. nazýváme absolutní, lineární, kvadratický, kubický (ale také člen nultého, prvního, druhého, třetího atd. stupně.) Člen $a_0 x^n$ se nazývá **vedoucí** člen polynomu.

Definice 1.3. *Nechť* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ *je nenulový polynom. Stupněm polynomu rozumíme nejvyšší exponent proměnné* x *s nenulovým koeficientem. Píšeme st* $f(x)$*. Stupeň nulového polynomu nedefinujeme.*

Poznámka 1.2.

- Je-li $a_0 = 1$ a zároveň st $f(x) = n$, pak říkáme, že $f(x)$ je **normovaný** polynom.
- Polynom 1. stupně se nazývá lineární, 2. stupně kvadratický, 3. stupně kubický.
- Protože připojením libovolného počtu členů s nulovými koeficienty se daný polynom zřejmě nezmění, můžeme pro libovolné polynomy předpokládat, že je lze vyjádřit tak, že mají stejný počet členů.

Definice 1.4. *Nechť* $f(x)$, $g(x)$ *jsou libovolné polynomy z ,* $c \in \mathbb{C}$*. Součtem polynomů* $f(x)$ *a* $g(x)$*, resp.* $c-$*násobkem polynomu* $f(x)$*, rozumíme komplexní funkci* $h_1 = f + g$*, resp.* $h_2 = cf$ *takovou, že platí*

$$(\forall x \in \mathbb{C})h_1(x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x), \text{ resp. } (\forall x \in \mathbb{C})h_2(x) = (cf)(x) = cf(x).$$

Poznámka 1.3. Jsou-li tedy $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ libovolné polynomy a c komplexní číslo, pak pro každé komplexní číslo x platí:

$$h_1(x) = f(x)+g(x) = (a_0+b_0)x^r+(a_1+b_1)x^{r-1}+\cdots+(a_r+b_r), \quad r = \max\{n,m\},$$

resp.

$$h_2(x) = cf(x) = (ca_0)x^n + (ca_1)x^{n-1} + \cdots + ca_n.$$

Tedy součtem dvou polynomů, resp. komplexním násobkem polynomu, je opět polynom.

Definice 1.5. *Nechť* $f(x)$, $g(x)$ *jsou libovolné polynomy. Součinem polynomů* $f(x)$ *a* $g(x)$ *rozumíme komplexní funkci* $h_3 = f \cdot g$ *takovou, že platí*

$$(\forall x \in \mathbb{C})h_3(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Poznámka 1.4. Jsou-li tedy $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ libovolné polynomy, pak pro každé komplexní číslo x platí:

$$h_3(x) = f(x) \cdot g(x) = c_0x^r + c_1x^{r-1} + \cdots + c_r, \quad r = m + n,$$

kde

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \quad k = 0,1,\ldots,r.$$

Tedy součinem dvou polynomů je opět polynom.

Věta 1.1. *Dva polynomy* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ *a* $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ *jsou totožné (tj. nabývají stejné hodnoty pro každé komplexní číslo* x*), právě když* $m = n$ *a* $a_i = b_i$ *pro každé* $i = 0,1,\ldots,n$*.*

Definice 1.6. *Řekneme, že polynom $f(x)$ je dělitelný polynomem $g(x)$, resp. že polynom $g(x)$ dělí polynom $f(x)$, právě když existuje polynom $q(x)$ tak, že platí*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Píšeme $g(x)|f(x)$.

Definice 1.7. *Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ se nazývají asociované, právě když $f(x)$ dělí $g(x)$ a zároveň $g(x)$ dělí $f(x)$. Píšeme $f(x) \sim g(x)$.*

Poznámka 1.5. Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ jsou asociované, právě když existuje komplexní číslo c, $c \neq 0$, tak, že $f(x) = c \cdot g(x)$.

Věta 1.2. *Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou libovolné polynomy, $g(x) \neq 0$. Potom existují jednoznačně určené polynomy $q(x)$, $r(x)$ tak, že*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \text{ a } st\ r(x) < st\ g(x).$$

Definice 1.8. *Nechť je dán polynom $f(x)$ alespoň prvního stupně. Komplexní číslo c se nazývá **kořen polynomu** $f(x)$, jestliže platí*

$$f(c) = 0.$$

Věta 1.3. *Polynom $f(x)$, který je alespoň prvního stupně, je dělitelný polynomem $x - c$, právě když c je kořenem polynomu $f(x)$.*

Důsledek. Nechť $f(x)$ je libovolný polynom alespoň prvního stupně a c je libovolné komplexní číslo. Pak

$$f(x) = (x - c) \cdot g(x) + f(c).$$

Věta 1.4. *Nechť $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ je libovolný polynom a c je libovolné komplexní číslo. Nechť $f(x) = (x - c)g(x) + f(c)$. Pak*

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

kde

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 + c \cdot b_0 \\
b_2 &= a_2 + c \cdot b_1 \\
&\vdots \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + c \cdot b_{n-2} \\
f(c) &= a_n + c \cdot b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Tyto údaje zapíšeme do tabulky, která se nazývá Hornerovo schema. Do prvního řádku zapíšeme všechny koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ (včetně těch nulových). Do třetího řádku se postupně zapisují koeficienty polynomu $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, f(c)$.

c	a_0	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
		$c \cdot b_0$	$\cdots$	$c \cdot b_{i-1}$	$\cdots$	$c \cdot b_{n-2}$	$c \cdot b_{n-1}$
	$a_0 = b_0$	b_1	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_{n-1}	$f(c)$

Definice 1.9. *Nechť* $f_1(x), f_2(x)$ *jsou libovolné polynomy. Polynom* $d(x)$ *se nazývá* ***největší společný dělitel*** *polynomů* $f_1(x), f_2(x)$*, právě když platí:*

1. $d(x)|f_1(x) \wedge d(x)|f_2(x)$
2. *pro každý polynom* $h(x)$ *platí:*

$$[h(x)|f_1(x) \wedge h(x)|f_2(x)] \Rightarrow h(x)|d(x).$$

Píšeme $d(x) = (f_1(x),f_2(x))$*. Dva polynomy, které nemají největšího společného dělitele alespoň prvního stupně, se nazývají nesoudělné.*

Věta 1.5. *Nechť* $d(x) = (f_1(x),f_2(x))$*. Pak pro polynom* $d_1(x)$ *platí:*

$$d_1(x) = (f_1(x),f_2(x)) \Leftrightarrow d(x) \sim d_1(x).$$

Poznámka 1.6. Z definice 1.9 plyne:

- Jestliže $f_1(x) = f_2(x) = 0$, pak $(f_1(x),f_2(x)) = 0$.
- Jestliže $f_1(x) = 0$, resp. $f_2(x) = 0$, pak $(f_1(x),f_2(x)) = f_2(x)$, resp. $(f_1(x),f_2(x)) = f_1(x)$
- Jestliže $f_1(x)|f_2(x)$, resp. $f_2(x)|f_1(x)$, pak $(f_1(x),f_2(x)) = f_1(x)$, resp. $(f_1(x),f_2(x)) = f_2(x)$.

Věta 1.6. *K libovolným dvěma polynomů existuje jejich největší společný dělitel.*

Důkaz. Nechť $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou dva nenulové polynomy, st $f_1(x) = m$, st $f_2(x) = n$, $m \geq n$. Podle věty 1.2 existují polynomy $q_1(x)$ a $f_3(x)$, takové, že

$$f_1(x) = q_1(x) \cdot f_2(x) + f_3(x), \quad 0 \geq \text{st } f_3(x) < n.$$

Pokud je polynom $f_3(x) = 0$, je $(f_1(x),f_2(x)) = f_2(x)$. Pokud je polynom $f_3(x) \neq 0$, dělme jím polynom $f_2(x)$. Opakováním tohoto postupu dostaneme řetězec vztahů:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= q_2(x)f_3(x) + f_4(x), \\ f_3(x) &= q_3(x)f_4(x) + f_5(x), \\ &\vdots \\ f_{k-4}(x) &= q_{k-4}(x)f_{k-3}(x) + f_{k-2}(x), \\ f_{k-3}(x) &= q_{k-3}(x)f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x), \\ f_{k-2}(x) &= q_{k-2}(x)f_{k-1}(x) + f_k(x). \end{aligned}$$

Stupně polynomů $f_3(x)$, $f_4(x), \ldots$ se stále zmenšují. Po konečném počtu kroků dojdeme ke vztahu, ve kterém je zbytek nulový polynom. Nechť $f_{k-1}(x)$ je polynom alespoň nultého stupně, zatímco $f_k(x)$ je nulový polynom. V [7] (str. 63) lze najít důkaz, že $f_{k-1}(x)$ je *největším společným dělitelem polynomů* $f_1(x)$ *a* $f_2(x)$.

□

Poznámka 1.7.

- Důkaz předchozí věty je konstruktivní. Největší společný dělitel dvou polynomů pak hledáme způsobem v něm popsaným.
- Tento způsob hledání největšího společného dělitele se nazývá Euklidův algoritmus postupného dělení.
- Je-li v Euklidově algoritmu $f_{k-1}(x)$ polynom stupně 0, tj. $f_{k-1}(x)$ je nenulová konstanta, pak jsou oba polynomy $f_1(x)$, $f_2(x)$ nesoudělné.
- Největší společný dělitel dvou polynomů se nezmění (či se změní jen v polynom, který je jeho nenulovým násobkem), násobíme-li v průběhu Euklidova algoritmu dělence či dělitele libovolným nenulovým komplexním číslem.

Definice 1.10. *Nechť $f(x)$ je libovolný polynom alespoň prvního stupně. Komplexní číslo c se nazývá $r-$**násobným kořenem** polynomu $f(x)$ $(r \geq 1)$, právě když platí:*

$$(x-c)^r | f(x) \wedge (x-c)^{r+1} \nmid f(x).$$

Věta 1.7. *Nechť $d(x)$ je největší společný dělitel polynomů $f(x)$ a $f'(x)$. Nechť $f(x) = d(x)F(x)$. Potom polynom $F(x) = 0$ má stejné kořeny jako polynom $f(x)$, ale každý z nich je jednoduchý.*

Věta 1.8. *Polynom $f(x)$ má alespoň jeden vícenásobný kořen, právě když $(f(x), f'(x))$ je polynom alespoň prvního stupně.*

Věta 1.9. *(Základní věta algebry) Každý polynom alespoň prvního stupně s komplexními koeficienty má v množině komplexních čísel alespoň jeden kořen.*

Definice 1.11. ***První derivací*** *polynomu*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

nazýváme polynom

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + \cdots + n \cdot a_nx^{n-1}.$$

Poznámka 1.8. Druhou derivací polynomu $f(x)$ rozumíme derivaci první derivace. Obecně $r-$tou derivací daného polynomu rozumíme derivaci z $(r-1)-$ní derivace, tj.

$$f^{(r)}(x) = \left[f^{(r-1)(x)}\right]', \quad r = 1,2,\ldots,$$

přičemž se dohodneme, že $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Definice 1.12. *Nechť f je libovolná komplexní funkce. Proces hledání takového komplexního čísla c, pro které je $f(c) = 0$, se nazývá* ***řešení rovnice.***

Poznámka 1.9.

- Číslo c nazýváme kořenem rovnice $f(x) = 0$, nebo také nulovým bodem funkce f.

- Zadat rovnici
$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$
znamená položit otázku, zda existuje takové komplexní číslo c, že $f(c) = 0$. Pokud takové číslo existuje, bývá nejčastější úlohou toto číslo najít.

Definice 1.13. *Nechť rovnice* (1.1) *má tvar*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Potom mluvíme o ***algebraické rovnici*** $n-$***tého stupně o jedné neznámé.***

Poznámka 1.10.

- Je důležité si uvědomit, že zápis rovnice ve tvaru $f(x) = 0$ neznamená rovnost dvou polynomů (tj. polynomu $f(x)$ a nulového polynomu), ale úlohu zjistit, zda existuje takové komplexní číslo c, že $f(c) = 0$.

- Protože rovnice $f(x) = 0$ vznikne vlastně formálně z polynomu $f(x)$, dají se na rovnice převést pojmy, které jsme si uvedli pro polynomy. Tedy mluvíme např. o
  - koeficientech rovnice
  - členu $k-$tého stupně
  - rovnici $n-$tého stupně
  - normované rovnici

- Rovnice, které nejsou algebraické, se nazývají transcendentní, tj. např. rovnice exponanciální, logaritmické, goniometrické apod.

Kapitola 2

Přibližné metody řešení algebraických rovnic

Nyní se dostáváme k samotnému jádru práce. V této kapitole si ukážeme metody, které nám pomůžou nalézt přibližné hodnoty všech reálných kořenů algebraické rovnice s reálnými koeficienty s předem danou přesností. V dalším se tedy budeme zabývat rovnicí

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 0,1,\ldots,n).$$

Postup řešení rovnice $f(x) = 0$ se skládá ze tří kroků:

1. ohraničení kořenů (tj. nalazení takového intervalu, v němž leží všechny kořeny rovnice $f(x) = 0$),
2. seperace kořenů (tj. určení takových intervalů, že v každém z nich leží právě jeden kořen rovnice $f(x) = 0$),
3. aproximace kořene (tj. proces postupného zužování intervalu, ve kterém leží hledaný kořen).

Protože reálné polynomy jsou speciální případy reálných funkcí jedné reálné proměnné, jsou polynomy velmi "příjemné" funkce:

- jejich definiční obor je vždy celá množina $\mathbb{R}$,
- v množině $\mathbb{R}$ jsou všude spojité,
- v množině $\mathbb{R}$ mají derivace libovolného řádu a těmito derivacemi jsou opět polynomy.

Věta 2.1. *(Bolzanova věta) Jestliže v koncových bodech intervalu $\langle a; b\rangle$ nabývá funkce f hodnoty opačných znamének, existuje v intervalu $(a; b)$ alespoň jeden bod c takový, že*

$$f(c) = 0.$$

Věta 2.2. *(Věta o střední hodnotě) Nechť f je libovolná funkce a $\langle a; b\rangle$ libovolný uzavřený interval. Potom uvnitř intervalu $(a; b)$ leží alespoň jeden bod ξ, pro který platí*

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi).$$

Důkazy vět 2.1 a 2.2 lze najít v [7]

2.1 Ohraničení a seperace reálných kořenů rovnice

Dříve, než začneme se samotnými metodami přibližného řešení rovnic, protřebujeme separovat reálné kořeny těchto rovnic. Uveďme bez důkazů několik vět, které nám pro začátek umožní ohraničit všechny kořeny rovnice. Hlavními zdroji informací pro tuto sekci jsou [7], [4], [8].

Věta 2.3. *Nechť $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ je rovnice s reálnými koeficienty $a_0, \ldots ,a_n$. Položme $A = max(|a_1|, \ldots ,|a_n|)$. Potom všechny reálné kořeny rovnice leží v intervalu*

$$\left\langle -1 - \frac{A}{|a_0|}; 1 + \frac{A}{|a_0|} \right\rangle$$

.

Důkaz lze najít v [7].

Věta 2.4. *Nechť je dána rovnice $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, kde je alespoň jeden z koeficientů $a_1, \ldots , a_n$ záporný. Nechť je $a_0 > 0$ a a_k $(k \geq 1)$ je první záporný koeficient. Pak můžeme za horní mez kladných reálných kořenů rovnice vzít číslo*

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \tag{2.1}$$

kde B je největší z absolutních hodnot záporných koeficientů polynomu $f(x)$.

Důkaz této věty lze nalézt v [4].

Poznámka 2.1.

- Je-li koeficient $a_0 < 0$, stačí uvažovat polynom $-f(x)$, který má stejné kořeny jako polynom $f(x)$.
- Jsou-li všechny koeficienty v rovnici nezáporné, pak tato rovnice nemá kladné kořeny a všechny reálné kořeny rovnice jsou shora ohraničeny číslem nula.
- Chceme-li získat dolní ohraničení rovnice $f(x) = 0$, aplikujeme větu 2.4 na rovnici $g(x) = 0$, kde
$$g(x) = (-1)^n \cdot f(-x).$$
Je-li potom číslo R horním ohraničením kořenů $g(x) = 0$, je zřejmé, že číslo $-R$ je dolním ohraničením rovnice $f(x) = 0$.
- Dále je zřejmě, že c je kořenem polynomu $f(x)$, právě když $-c$ je kořenem polynomu $g(x)$.

Věta 2.5. *Nechť $c > 0$ je takové kladné reálné číslo, že*

$$f(c) > 0, f'(c) \geq 0,f''(c) \geq 0, \ldots ,f^{(n)}(c) \geq 0.$$

Potom každý kladný reálný kořen rovnice $f(x) = 0$ je menší než číslo c.

Důkaz této věty lze najít v [7].

Příklad 2.1. *Určete ohraničení všech reálných kořenů rovnice*

$$f(x) = x^5 - 3{,}5x^4 - 4x^2 + 8 = 0. \tag{2.2}$$

Řešení.

1. Nejdříve podle věty 2.3 určíme interval, ve kterém leží všechny reálné kořeny rovnice (2.2). Položme $A = 8$. Potom všechny kořeny rovnice leží v intervalu $\langle 9; 9 \rangle$.

2. Podle věty 2.4 nyní snížíme horní ohraničení kladných reálných kořenů rovnice 2.2. Protože první záporný koeficient je $a_1 = -3{,}5$, položme $k = 1$. Dále položme $B = 4$. Pro kladné reálné kořeny c rovnice (2.2) tedy platí

$$c < 1 + \sqrt[1]{\frac{4}{1}} = 5.$$

Všechny reálné kořeny tedy leží v intervalu $\langle -9; 5)$.

3. Podle věty 2.5 se nyní pokusme snížit horní hranici. Zvolme např. $a = 4$ a ověřme, zda

$$f(a) > 0 \quad f'(a) \geq 0, \quad f''(a) \geq 0, \quad f'''(a) \geq 0, \quad f^{(4)}(a) \geq 0, \quad f^{(5)}(a) \geq 0.$$

K tomu využijeme Hornerovo schema.

4	1	−3,5	0	−4	0	8
		4	2	8	16	64
	1	0,5	2	4	16	72

Protože všechny koeficienty v posledním řádku Hornerova schematu jsou kladná reálná čísla a $a = 4$ je kladné reálné číslo, je jistě

$$f'(a) > 0, \quad f''(a) > 0, \quad f'''(a) > 0, \quad f^{(4)}(a) > 0, \quad f^{(5)}(a) > 0.$$

a platí, že $c < 4$.
Pokusíme se ještě snížit horní hranici kladných reálných kořenů a zvolíme $a = 3$.

3	1	−3,5	0	−4	0	8
		3	−1,5	−4,5	−25,5	−76,5
	1	−0,5	−1,5	−8,5	−25,5	-68,5

Odtud vidíme, že $f(a) < 0$ a podmínky věty 2.5 nejsou splněny.

4. Nakonec snížíme dolní hranici pro záporné reálné kořeny. Pro tuto operaci použijeme rovnici

$$g(x) = (-1)^n \cdot f(-x) = 0,$$

tedy $g(x) = x^5 + 3.5x^4 + 4x^2 - 8 = 0$ a aplikujeme větu 2.4. Označme $B' = 8$ a $k' = 5$. Pro kladné reálné kořeny c' rovnice $g(x) = 0$ platí

$$c' < 1 + \sqrt[5]{8} < 2.$$

Pro snížení odhadu opět použijeme větu 2.5 a zvolíme například $a = 1$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 3{,}5 & 0 & 4 & 0 & -8 \\
 & & 1 & 4{,}5 & 4{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 \\
\hline
 & 1 & 4{,}5 & 4{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 & \vert\; 0{,}5
\end{array}
$$

Protože všechny koeficienty v posledním řádku Hornerova schematu jsou kladná reálná čísla a $a = 1$ je kladné reálné číslo, je jistě

$$g'(a) > 0, \quad g''(a) > 0, \quad g'''(a) > 0, \quad g^{(4)}(a) > 0, \quad g^{(5)}(a) > 0.$$

a platí, že $c' < 1$. Označme $R = 1$, tj. číslo R je horní ohraničení kladných reálných kořenů rovnice $g(x) = 0$. Potom podle poznámky 2.1 je číslo $-R$ dolním ohraničením reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ a pro všechny reálné kořeny c rovnice $f(x) = 0$ platí:

$$c \in (-1; 4)\,.$$

Definice 2.1. *Nechť je daná konečná posloupnost nenulových reálných čísel* $a_1, a_2, \dots, a_n$. ***Znaménkovou změnou*** *rozumíme každou dvojici* a_i, a_{i+1}, $i = 1,2,\dots,n-1$, *pro kterou platí*

$$a_i \cdot a_{i+1} < 0.$$

Poznámka 2.2.

- Řekneme, že mezi dvěma po sobě jdoucími členy polynomu je znaménková změna, mají-li koeficienty obou členů opačná znaménka.
- Jsou-li některé koeficienty nulové, tak je při určování znaménkových změn vynecháváme.

Věta 2.6. *(Descartova věta) Počet kladných kořenů rovnice* $f(x) = 0$ *je nejvýše roven počtu znaménkových změn v polynomu* $f(x)$. *Pokud je menší, je menší o sudé číslo. Přitom* $r-$*násobný kořen považujeme za* r *kořenů.*

Pro samotnou separaci kořenů je nutné odstranit všechny násobné kořeny. K tomu nám pomůže věta 1.7.

Předpokládejme nyní, že rovnice $f(x) = 0$ nemá vícenásobné kořeny. Aplikujme na polynomy $f(x)$ a $f'(x)$ Euklidův algoritmus a to tak, že zbytky po dělení zapíšeme se záporným znaménkem. Označme dále $f(x) = f_0(x)$ a $f'(x) = f_1(x)$. Dostaneme tento řetězec vztahů:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= f_1(x) \cdot q_1(x) - f_2(x) \\
f_1(x) &= f_2(x) \cdot q_2(x) - f_3(x) \\
f_2(x) &= f_3(x) \cdot q_3(x) - f_4(x) \\
&\;\vdots \\
f_{m-2}(x) &= f_{m-1}(x) \cdot q_{m-1}(x) - f_m(x) \\
f_{m-1}(x) &= f_m(x) \cdot q_m(x).
\end{aligned}
$$

Zbytek $f_m(x)$ je nenulová konstanta. V opačném případě by rovnice $f(x) = 0$ měla vícenásobný kořen, což jsme v předpokladech vyloučili.

Definice 2.2. *Systém polynomů*

$$f(x) = f_0(x), f_1(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x),$$

psaný v tomto pořadí, nazýváme ***Sturmovým řetezcem*** *polynomu* $f(x)$.

Poznámka 2.3. Při hledání polynomů Sturmova řetězce jsou podstatná znaménka, proto si můžeme v Euklidově algoritmu zjednodušit výpočet pouze tak, že dělence nebo dělitele násobíme kladným reálným číslem.

Věta 2.7. *(Sturm) Nechť* $f(x)$ *je polynom s jednoduchými kořeny. Nechť a,b,* $a < b$ *jsou reálná čísla, která nejsou kořeny polynomu* $f(x)$.
Nechť $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ *je Sturmův řetězec polynomu* $f(x)$*, nechť a je libovolné reálné číslo.*
Označíme-li počet znaménkových změn v posloupnosti $f_0(c), f_1(c), \dots, f_m(c)$ *jako* $Z(c)$*, pak platí:*

1. $Z(b) \leq Z(a)$.
2. *Počet všech reálných kořenů polynomu* $f(x)$ *v intervalu* $(a; b)$ *je roven číslu* $Z(a) - Z(b)$.

Důkaz lze najít v [7] (str. 179).

Příklad 2.2. *Separujte reálné kořeny rovnice*

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0.9 = 0$$

Řešení.

1. Nejdříve určíme interval, kde leží všechny reálné kořeny rovnice. V tomto případě se jedná o interval $(-2; 4)$.
2. Nyní najdeme Sturmův řetězec polynomu $f(x)$:
   - Eukleidovým algoritmem určíme $(f(x), f'(x))$,
   - každý zbytek $r_i(x)$ v Eukleidově algoritmu nahradíme polynomem opačným, tj. $f_i(x) = -r_i(x)$, $i = 2{,}3, \dots$.
   - Pokud poslední zbytek v Eukleidově algoritmu nebude nenulová konstanta, nýbrž polynom prvního stupně, pak $f(x)$ nemá jednoduché kořeny, a budeme muset násobné kořeny odstranit.

   Máme tedy $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0.9$, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 10x + 2$. Polynom $f(x)$ můžeme vynásobit číslem 4. Dostáváme:

   $$(4x^4 - 8x^3 - 20x^2 + 8x + \frac{18}{5}) : (4x^3 - 6x^2 - 10x + 2) = x - \frac{1}{2} + \frac{-13x^2 + x + \frac{23}{5}}{4x^3 - 6x^2 - 10x + 2}.$$

   Zbytkem po dělení je polynom $r_2(x) = -13x^2 + x + \frac{23}{5}$. Položme

   $$f_2(x) = -r_2(x) = 13x^2 - x - \frac{23}{5}$$

a pokračujme v Euklidově algoritmu.

$$(4x^3 - 6x^2 - 10x + 2) : \left(13x^2 - x - \frac{23}{5}\right) = \frac{4}{13}x - \frac{74}{169} + \frac{-\frac{7624}{845}x - \frac{12}{845}}{13x^2 - x - \frac{23}{5}}.$$

Zbytkem po dělení je polynom $r_3(x) = -\frac{7624}{845}x - \frac{12}{845}$. Položme tedy

$$f_3(x) = -r_3(x) = \frac{7624}{845}x + \frac{12}{845},$$

a pokračujme dále.

$$\left(13x^2 - x - \frac{23}{5}\right) : \left(\frac{7624}{845}x + \frac{12}{845}\right) = \frac{10985}{7624}x - \frac{1643525}{14531344} + \frac{-\frac{83526053}{18164180}}{\frac{7624}{845}x + \frac{12}{845}}.$$

Potom $f_4(x) = -r_4(x) = \frac{83526053}{18164180}$. Položme dále $f(x) = f_0(x)$ a $f'(x) = f_1(x)$. Potom dostáváme Sturmovu posloupnost:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0y9 \\
f_1(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 10x + 2 \\
f_2(x) &= 13x^2 - x - \frac{23}{5} \sim 65x^2 - 5x - 23 \\
f_3(x) &= \frac{7624}{845}x + \frac{12}{845} \sim 7624x + 12 \\
f_4(x) &= \frac{83526053}{18164180}
\end{aligned}$$

3. Abychom zjistili počet znaménkových změn v Sturmově řetězci v koncových bodech intervalu $(-2; 4)$, ve kterém leží všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$, stačí určit znaménka hodnot jednotlivých členů Sturmova řetězce v bodech -2 a 4. Sestavme tabulku

a	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$Z(a)$
-2	+	-	+	-	+	4
4	+	+	+	+	+	0

Jestliže $Z(a)$ je počet znaménkových změn v posloupnosti reálných čísel

$$f_0(a), f_1(a), \ldots, f_4(a),$$

pak podle Sturmovy věty 2.7 leží v intervalu $(-2; 4)$ právě čtyři reálné kořeny (protože $Z(-2) - Z(4) = 4$). Pokusme se nyní separovat kořeny postupným dosazováním za a celočíselnými hodnotami intervalu $(-2; 4)$.

a	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$Z(a)$
-2	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	+	+	2
4	+	+	+	+	+	0

Protože je $Z(-2) - Z(0) = 2$, v intervalu $(-2; 0)$ leží právě dva reálné kořeny.

a	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$Z(a)$
-2	+	-	+	-	+	4
-1	+	+	-	+	+	3
0	+	+	-	+	+	2
4	+	+	+	+	+	0

Protože $Z(-2) - Z(-1) = Z(-1) - Z(0) = 1$, povedlo se nám separovat dva reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$. První z nich leží v intervalu $(-2; -1)$ a druhý v $(-1; 0)$. Pokračujme dále v dosazování:

a	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$Z(a)$
-2	+	-	+	-	+	4
-1	+	+	-	+	+	3
0	+	+	-	+	+	2
1	-	-	+	+	+	1
3	-	+	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

Protože $Z(0) - Z(1) = Z(3) - Z(4) = 1$, úspěšně jsme separovali další dva kořeny.

První kořen leží v intervalu $(-2; -1)$, druhý v $(-1; 0)$, třetí reálý kořen rovnice leží v intervalu $(0; 1)$ a čtvrtý v $(3; 4)$.

2.2 Metoda půlení intervalů

Poznámka 2.4. [5] Velmi důležitou otázkou je "zastavení"výpočtu v přibližných metodách. Nechť je dána požadovaná přesnost ϵ a generujme posloupnost postupných aproximací s_0,$s_1, \ldots$,s_n, pokud není splněna jedna z podmínek:

$$|s_n - s_{n-1}| < \epsilon, \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{s_n - s_{n-1}}{s_n}\right| < \epsilon, \quad s_n \neq 0 \tag{2.4}$$

$$|f(s_n)| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Obecně lze uvažovat jakoukoliv posloupnost získanou přibližnými metodami uvedenými dále. Při použití těchto kritérií se však mohou vyskytnou problémy. Například je možné, že hodnota $f(s_n)$ je blízká nule, zatímco s_n se podstatně liší od hledaného kořenu c. Nejvhodnějším kritérem pro zastavení výpočtu bez dodatečných znalostí o funkci f nebo kořenu c je (2.4), které budeme dále v našich výpočtech používat. Bude-li použité jiné kritérium pro zastavení výpočtu, bude na to upozorněno.

Nejjednodušší přibližnou metodou hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$ je metoda půlení intervalu, která je založená na větě 2.1. Zdroji pro tuto část jsou [5], [8], [7].

Předpokládejme, že v intervalu $\langle a; b\rangle$ má rovnice $f(x) = 0$ právě jeden kořen c a platí, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Označme $a = a_0$, $b = b_0$. Interval $\langle a_0; b_0\rangle$ rozdělíme bodem s_0 na dvě poloviny tak, že $s_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Z toho dále vyplývá, že mohou nastat tyto tři možnosti:

1. pokud $f(a_0) < 0 \wedge f(s_0) < 0$, označíme $s_0 := a_1$ a $b_0 := b_1$. Potom kořen c leží v intervalu $\langle a_1; b_1\rangle$.
2. pokud $s_0 = 0$, potom je $s_0 = c$ a kořen je nalezen.
3. pokud $f(a_0) < 0 \wedge f(s_0) > 0$, označíme $a_0 := a_1$ a $s_0 := b_1$. Potom kořen c leží v intervalu $\langle a_1; b_1\rangle$.

Předpokládejme dále, že bod s_0 není kořenem rovnice $f(x) = 0$. Vzniklý interval $\langle a_1; b_1\rangle$ rozdělíme bodem s_1 na dvě části tak, že $s_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Ověříme podmínky 1.-3. a pokud $f(s_1) \neq 0$ získáme interval $\langle a_2; b_2\rangle$, ve kterém leží kořen rovnice. Tímto způsobem dostaneme posloupnost intervalů

$$\langle a_0; b_0\rangle \supset \langle a_1; b_1\rangle \supset \cdots \supset \langle a_n; b_n\rangle \supset \cdots ,$$

přičemž $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, $n = 0,1,2,\ldots$. Pro koncové body těchto intervalů platí

$$\begin{aligned} a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq c \\ c \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_0 \end{aligned}$$

a délky těchto intervalů jsou dány vztahem

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

kde $n = 1,2,\ldots$.
Protože posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou omezené, monotonní a délka intervalů $\langle a_n; b_n\rangle$ konverguje k nule, platí

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Ukažme nyní, že prvek c je kořenem rovnice $f(x) = 0$. Funkce f je spojitá a platí $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, $n = 0,1,\ldots$. Odtud

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) f(a_n) = f^2(c) \leq 0.$$

Potom ale platí, že $f(c) = 0$.

Věta 2.8. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť f má v intervalu $\langle a; b\rangle$ právě jeden kořen c. Pak metoda půlení intervalu generuje posloupnost*

$$s_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$

která konverguje ke kořenu c.

Příklad 2.3. *Metodou půlení intervalů najděte kořen funkce $f(x) = x^3 + 27x - 72$ ležící v intervalu $\langle 2; 3\rangle$ s přesností na 5 desetinných míst.*

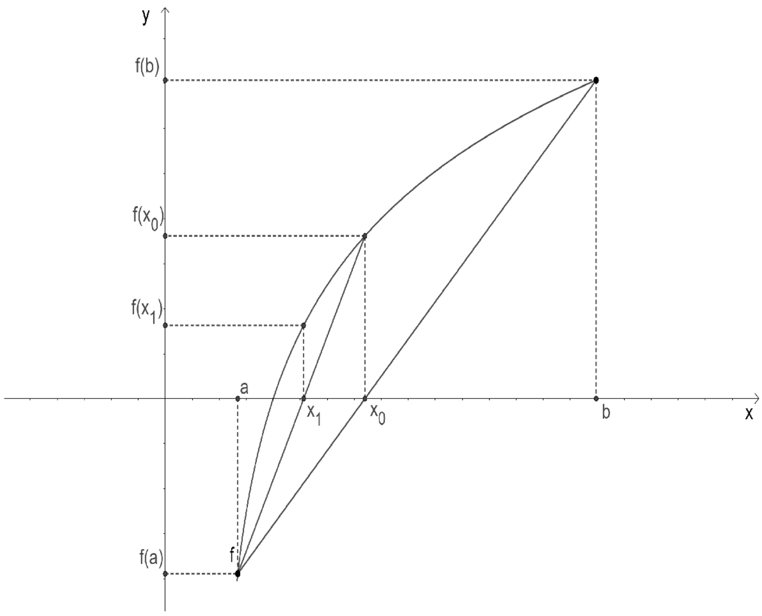
Řešení. Sestavíme tabulku.

k	a_k	$f(a_k)$	s_k	$f(s_k)$	b_k	$f(b_k)$	$\left\lvert\frac{s_k - s_{k-1}}{s_k}\right\rvert$
0	2	-10	2,5	11,125000	3	36	
1	2	-10	2,25000	0,14063	2,50000	11,12500	0,11111
2	2	-10	2,12500	-5,02930	2,25000	0,14063	0,05882
3	2,12500	-5,02930	2,18750	-2,46997	2,25000	0,14063	0,02857
4	2,18750	-2,46997	2,21875	-1,17117	2,25000	0,14063	0,01408
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	2,24658	-0,00349	2,24670	0,00165	2,24683	0,00680	0,00005
13	2,24658	-0,00349	2,24664	-0,00092	2,24670	0,00165	0,00003
14	2,24664	-0,00092	2,24667	0,00037	2,24670	0,00165	0,00001

Pro $k = 14$ je chyba $\epsilon = 10^{-5}$, proto jsme našli kořen $s_{14} = c = 2{,}246664$ s požadovanou přesností. Je důležité zmínit, že princip výpočtu je velice jednoduchý, avšak jsme museli vykonat vysoký počet kroků k získání aproximace s danou přesností. Ukažme si tedy jiné a rychlejší metody.

2.3 Metoda regula falsi

Metoda půlení intervalů je příliš mechanická, protože interval půlíme bez ohledu na průběh funkce v děleném intervalu. Informace pro tuto sekci jsou čerpány především z [5],[8] a také [7].



Obrázek 2.1: Regula falsi

Na obrázku 2.1 je nakreslen průběh funkce f v intervalu $\langle a; b\rangle$, kde hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka. Oblouk grafu funkce f nahradíme tětivou, která protne osu x v bodě x_0. Pro hodnotu $f(x_0)$ mohou nastat tyto možnosti:

1. $f(x_0) < 0$,

2. $f(x_0) = 0$, tedy x_0 je kořen rovnice $f(x) = 0$ a jsme hotovi,

3. $f(x_0) > 0$.

Vezměme nyní bod x_0 a ten z krajních bodů intervalu $\langle a; b\rangle$, ve kterém má funkce f opačné znaménko než hodnota $f(x_0)$ (v našem případě je to bod a). V intervalu $\langle a; x_0\rangle$ nyní graf funkce opět nahradíme tětivou, která protne osu x v bodě x_1. Protože $f(x_1) \cdot f(a) < 0$, nahradíme graf funkce f v intervalu $\langle a; x_1\rangle$ tětivou a jejím průsečíkem s osou x je bod x_2. Stejným způsobem dostaneme další body x_3,x_4,$x_5, \ldots$. Tyto body nazýváme postupnými aproximacemi hledaného kořenu.

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet průsečíku tětivy spojující body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$ s osou x. Zapíšeme rovnici přímky určenou dvěma body $[a; f(a)]$, $[b; f(b)]$ jako

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{2.6}$$

Průsečík x_0 přímky (2.6) s osou x je bod na přímce (2.6), jehož souřadnice y je rovna nule, tj bod $[x_0,0]$. Potom platí

$$x_0 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a).$$

Další postup aplikujeme na ten z intervalů $\langle a; x_0\rangle$, $\langle x_0; b\rangle$, v jehož koncových bodech má funkce f opačná znaménka. V našem případě je to interval $\langle a; x_0\rangle$. Sestrojme nyní tětivu danou body $[a; f(a)]$ a $[x_0; f(x_0)]$. Ta protíná osu x v bodě

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)} \cdot f(x_0).$$

Analogicky bychom vyjádřili

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - a}{f(x_1) - f(a)} \cdot f(x_1).$$

Opakováním tohoto procesu dostáváme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} \cdot f(x_k), \qquad k = 0,1, \ldots, \tag{2.7}$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$. Předpokládáme, že počáteční aproximace x_0, x_1 jsou vybrány tak, že $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.

Věta 2.9. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť je f' spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Nechť dále $f(a) \cdot f(b) < 0$ a c je jediný kořen v $\langle a; b\rangle$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená metodou regula falsi konverguje pro libovolné počáteční aproximace x_0, $x_1 \in \langle a; b\rangle$, $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ ke kořenu $c \in (a; b)$ funkce f.*

Důkaz této věty je značně obsáhlý a lze ho najít v [2].

Nyní si ukážeme případ, kdy je funkce f i její první derivace spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a f'' nemění znaménko na $\langle a; b\rangle$ a tuto situaci vystihneme z geometrického hlediska.

Předpokládejme že funkce f a f' jsou spojité na intervalu $\langle a;b\rangle$, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f(x)$ má jediný kořen v intervalu $\langle a;b\rangle$, $f^{'}(x)>0$, $f^{''}(x)\leq 0$ pro každé x z intervalu $\langle a;b\rangle$. Položme $a=x_0$, $b=x_1$. Z předpokladů plyne, že pro bod

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)$$

platí $x_0 < x_2 < x_1$. Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle x_0;x_1\rangle$ konkávní, potom tedy sečna určená body $[x_0;f(x_0)]$, $[x_1;f(x_1)]$ leží pod grafem funkce a pro průsečík x_2 této sečny s osou x leží napravo od hledaného kořene c, kterému se chceme přiblížit. Pro bod c tedy platí: $c<x_2<x_1$. Z toho ale vyplývá, že $f(x_2)<0$ a znovu aplikujeme metodu regula falsi na interval $\langle x_0;x_2\rangle$:

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_0}{f(x_2)-f(x_0)}\cdot f(x_2).$$

Indukcí můžeme odvodit obecný vztah

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_0}{f(x_k)-f(x_0)}\cdot f(x_k), \qquad f(x_k)\cdot f(x_0)<0, \qquad k=1{,}2,\dots.$$

O bodu x_0 můžeme v jistém smyslu říct, že je "pevný", protože z něj vycházejí všechny sečny. Protože jsme předpokládali, že $f'(x)>0$ a $f''(x)\leq 0$, podobné úvahy lze provést i v dalších případech, kdy

1. $f'(x)>0$ a $f''(x)\geq 0$,
2. $f'(x)<0$ a $f''(x)\leq 0$,
3. $f'(x)<0$ a $f''(x)\geq 0$.

Nechť f a f' je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, $f(a)\cdot f(b)<0$ a nechť f'' nemění znaménko na intervalu $\langle a;b\rangle$. Pak "pevný"je ten koncový bod intevralu, v němž znaménko funkční hodnoty je stejné jako znaménko f'' na intervalu $\langle a;b\rangle$.

Příklad 2.4. *Vypočtěte kořen rovnice*

$$x^4-4x^3-2x^2+11x-12=0$$

ležící v intervalu $\langle 3;4{,}5\rangle$ s přesností na čtyři desetinná čísla.

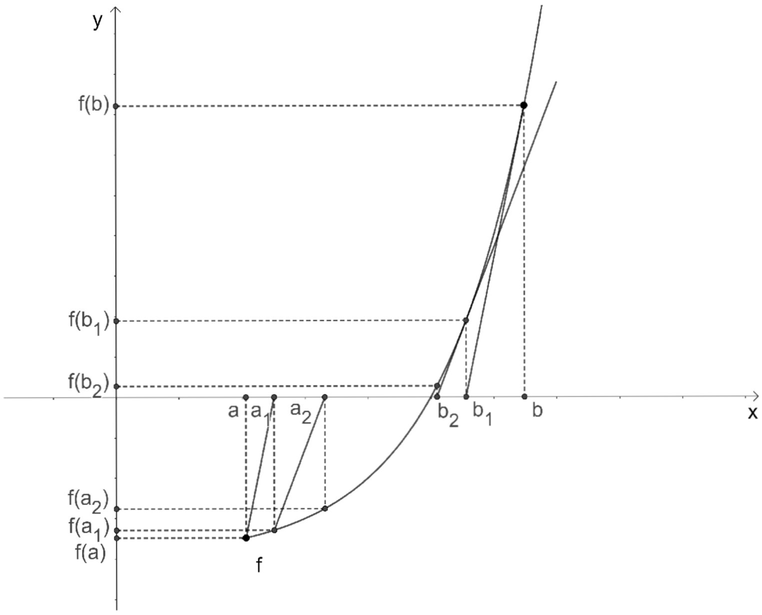
Řešení. $f'(x)=4x^3-12x^2-4x+11$, $f''(x)=12x^2-24x-4$. Platí, že $f''(x)>0$ v intervalu $\langle 3;4{,}5\rangle$ a $f(b)>0$, proto je bod b pevný. Sestavíme tabulku:

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_k	$f(x_k)$
0	3,0000	4,5000	-24,0000	42,5625	3,5408	-18,5094
1	3,5408	4,5000	-18,5094	42,5625	3,8315	-8,6901
2	3,8315	4,5000	-8,6902	42,5625	3,9449	-3,1141
3	3,9449	4,5000	-3,1142	42,5625	3,9827	-1,0052
4	3,9827	4,5000	-1,0053	42,5625	3,9947	-0,3134
5	3,9947	4,5000	-0,3134	42,5625	3,9984	-0,0966
6	3,9984	4,5000	-0,0967	42,5625	3,9995	-0,0297
7	3,9995	4,5000	-0,0297	42,5625	3,9998	-0,0091
8	3,9998	4,5000	-0,0091	42,5625	4,0000	-0,0028

Vidíme, že $x_8=4$. Snadno lze ověřit, že $f(4)=0$, nalezli jsme tedy hledaný kořen $x_8=c=4$.

2.4 Newtonova metoda

Předchozí metody požadovaly dvě počáteční aproximace. Newtonova metoda, nebo také metoda tečen, avšak požaduje pouze jednu počáteční aproximaci x_0. Informace v této sekci jsou čerpány z [7] a [6].



Obrázek 2.2: Newtonova metoda

Na obrázku 2.2 je nakreslen graf funkce f. Sestrojme v bodě $B[b,f(b)]$ tečnu o rovnici

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Jejím průsečíkem s osou x je bod $[b_1,0]$ a platí

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Bodem $B_1[b_1,f(b_1)]$ vedeme další tečnu, která protne osu x v bodě $[b_2,0]$, tedy

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}.$$

Opakováním tohoto procesu máme:

$$\begin{aligned} b_1 &= b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \\ b_2 &= b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}, \\ b_3 &= b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)}, \\ &\vdots \\ b_{k+1} &= b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}, \quad k = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

Z obrázku 2.2 je zřejmé, že posloupnost je klesající, tj. $b > b_1 > b_2 > b_3 > \dots$ a že $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

Abychom se k bodu c blížili i z druhé strany, sestrojíme v bodě $A[a; f(a)]$ rovnoběžku s tečnou vedenou bodem $B[b; f(b)]$. Rovnice této rovnoběžky je

$$y - f(a) = f'(b)(x - a)$$

a její průsečík s osou x má souřadnici

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

V bodě $A_1[a_1, f(a_1)]$ veďme další rovnoběžku s tečnou sestrojenou v bodě B_2 a získáme další průsečík $[a_2, 0]$ s osou x v bodě

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(b_1)}.$$

Opakováním tohoto procesu máme

$$\begin{aligned}
a_1 &= a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \\
a_2 &= a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(b_1)}, \\
a_3 &= a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(b_2)}, \\
&\vdots \\
a_{k+1} &= a_k - \frac{f(a_k)}{f'(b_k)}, \quad k = 0,1,\dots
\end{aligned}$$

Z obrázku 2.2 jde vidět, že posloupnost je rostoucí, tj, $a < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ a že $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Pokud zvolíme číslo n dostatečně velké, můžeme vyrobit interval $\langle a_n; b_n\rangle$ tak malým, jak potřebujeme.

Poznámka 2.5. Z obrázku 2.2 také vyplývá, že záleží na tom, ve kterém koncovém bodě začneme konstruovat tečny. Například pokud bychom začali v bodě A, nemuseli bychom se dostat k žádnému výsledku. Lze odvodit, že abychom se dostali k cíli, začneme sestrojovat tečny v tom koncovém bodu intervalu, ve kterém mají f a f'' stejné znaménko.

Dokažme nyní, že tato metoda je správná nezávisle na získané představě z grafu funkce f.

Předpokládejme, že funkce f má uvnitř intervalu $\langle a; b\rangle$ kořen a v celém intervalu je $f'(x) > 0$ a $f''(x) > 0$. Chceme dokázat, že

- $b, b_1, b_2, \dots$ je klesající posloupnost čísel, kde každé z nich je větší než kořen c,

- a,$a_1, a_2, \ldots$ je rostoucí posloupnost čísel, kde každé z nich je menší než kořen c

- obě posloupnosti jsou konvergentní a jejich limita je číslo c.

Protože je funkce f v intervalu $\langle a; b\rangle$ rostoucí a konvexní a v intervalu $(a; b)$ leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$, je $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$.

V intervalu $\langle a; b\rangle$ je i $f''(x) = (f'(x))' > 0$. To znamená, že i funkce $f'(x)$ je v intervalu $\langle a; b\rangle$ rostoucí. Speciálně z toho vyplývá, že pro každé ξ, pro které je $a \leq \xi < b$, platí $f'(\xi) < f'(b)$.

Použijme nejdřív větu 2.2 o střední hodnotě na interval $\langle a; c\rangle$. Podle ní existuje takové číslo ξ_1, $a < \xi_1 < c$, že $f(a) - f(c) = (a - c) \cdot f'(\xi_1)$. Protože je $f(c) = 0$, platí:

$$c - a = -\frac{f(a)}{f'(\xi_1)}. \tag{2.8}$$

Použijme větu o střední hodnotě na interval $\langle c; b\rangle$. Podle ní existuje opět takové číslo ξ_2, $c < \xi_2 < b$, že platí $f(b) - f(c) = (b - c) \cdot f'(\xi_2)$. Protože je $f(c) = 0$, dostáváme

$$c - b = -\frac{f(b)}{f'(\xi_2)}. \tag{2.9}$$

Vezměme nyní v úvahu čísla $a_1 = a - \dfrac{f(a)}{f'(b)}$ a $b_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$. Protože je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, platí:

$$a_1 = a + \frac{|f(a)|}{f'(b)} > a \quad \text{a} \quad b_1 = b - \frac{|f(b)|}{f'(b)} < b.$$

Ze vztahů (2.8) a (2.9) plyne:

$$\begin{aligned} c - a &= -\frac{f(a)}{f'(\xi_1)} > -\frac{f(a)}{f'(b)}, \quad \text{tj.} \quad c > a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \\ c - b &= -\frac{f(b)}{f'(\xi_2)} < -\frac{f(b)}{f'(b)}, \quad \text{tj.} \quad c < b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \end{aligned}$$

Celkem:

$$a < a - \frac{f(a)}{f'(b)} < c < b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

tedy

$$a < a_1 < c < b_1 < b.$$

Všechny předpoklady, které platí pro interval $\langle a; b\rangle$, platí i pro interval $\langle a_1; b_1\rangle$. Zopakujme tuto úvahu, avšak místo intervalu $\langle a; b\rangle$ vyjděme z intervalu $\langle a_1; b_1\rangle$ a dostáváme

$$a_1 < a_2 < c < b_2 < b_1.$$

Opakovaným použitím tohoto postupu dostaneme pro každé přirozené číslo n

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < c < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b.$$

Tímto jsme dokázali první dvě části tvrzení.

Abychom dokázali konvergenci těchto posloupností k limitě c, stačí dokázat, že s rostoucím číslem n se délka intervalu $\langle a_n; b_n \rangle$ blíží k nule.

Určeme nejdřív délku intervalu $\langle a_1; b_1 \rangle$:

$$b_1 - a_1 = \left(b - \frac{f(b)}{f'(b)}\right) - \left(a - \frac{f(a)}{f'(b)}\right) = b - a - \frac{f(b) - f(a)}{f'(b)}.$$

Podle věty o střední hodnotě existuje takový bod η_1, $a < \eta_1 < b$, že $f(b) - f(a) = f'(\eta_1)(b - a)$. Dosazením do posledního vztahu dostáváme:

$$b_1 - a_1 = (b - a)\left[1 - \frac{f'(\eta_1)}{f'(b)}\right].$$

Podobné vyjádření najdeme pro délku intervalu $\langle a_2; b_2 \rangle$:

$$b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)\left[1 - \frac{f'(\eta_2)}{f'(b_1)}\right],$$

kde η_2 je číslo, které splňuje nerovnost $a_1 < \eta_2 < b_1$. Po n krocích máme:

$$b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})\left[1 - \frac{f'(\eta_n)}{f'(b_{n-1})}\right],$$

kde $a_{n-1} < \eta_n < b_{n-1}$. Z těchto vztahů vyplývá:

$$b_n - a_n = (b - a)\left[1 - \frac{f'(\eta_1)}{f'(b)}\right] \cdot \left[1 - \frac{f'(\eta_2)}{f'(b_1)}\right] \cdots \left[1 - \frac{f'(\eta_n)}{f'(b_{n-1})}\right].$$

Položme $b_0 := b$. Protože f' je rostoucí funkce v intervalu $[a; b]$, platí pro každé $i = 1,2,\ldots,n$:

$$\frac{f'(\eta_i)}{f'(b_{i-1})} > \frac{f'(a)}{f'(b)}.$$

Potom je

$$b_n - a_n < (b - a)\left[1 - \frac{f'(a)}{f'(b)}\right]^n.$$

Jelikož f' je rostoucí funkce, je $0 < \dfrac{f'(a)}{f'(b)} = q < 1$. Z nerovnosti

$$b_n - a_n < (b - a)(1 - q)^n$$

plyne, že $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Protože je $a_n < c < b_n$, platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$. Tímto je důkaz hotov. [7] (str. 190)

Poznámka 2.6. Úloha je formulovaná a dokázaná pro případ, kdy $f'(x) > 0$ a $f''(x) > 0$. Případ, kdy $f'(x) < 0$ a $f''(x) < 0$ je možné převést na původní pomocí rovnosti $f(x) = -g(x)$, neboť v celém intervalu $\langle a; b \rangle$ je $g'(x) > 0$, $g''(x) > 0$. Analogicky lze ukázat, že případy, kdy

- $f'(x) < 0$ a $f''(x) > 0$,

- $f'(x) > 0$ a $f''(x) < 0$

jsou opět ve shodě s názornou představou, kterou lze získat nakreslením grafu.

Věta 2.10. *Nechť c je jediný kořen polynomu $f(x)$ v intervalu $\langle a; b\rangle$. Nechť v celém intervalu $\langle a; b\rangle$ je $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) \neq 0$. Označme jako u_1 to z čísel a, b, ve kterém $f(u_1)$ a $f''(u_1)$ mají stejná znaménka. Dále označme jako v_1 to z čísel a, b, ve kterém $f(v_1)$ a $f''(v_1)$ mají opačná znaménka. Vytvořme tyto dvě posloupnosti:*

$$
\begin{aligned}
u_1,\ u_2 = u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)}, \quad u_3 = u_2 - \frac{f(u_2)}{f'(u_2)}, \ldots \\
v_1,\ v_2 = v_1 - \frac{f(v_1)}{f'(u_1)}, \quad v_3 = v_2 - \frac{f(v_2)}{f'(u_2)}, \ldots
\end{aligned}
$$

Potom jedna z posloupností je klesající, druhá je rostoucí a obě konvergují k číslu c.

Poznámka 2.7. Při praktických výpočtech budeme sestrojovat pouze první posloupnost z věty 2.10.

Poznámka 2.8. Odvodíme ještě vzorec, který nám pomůže odhadnout chybu po $n-$tém kroku. Nechť c_1,c_2,$c_3, \ldots$ je posloupnost, která konverguje k číslu c. Podle toho, zda je $c_n < c$ nebo $c_n > c$, použijeme větu o střední hodnotě na interval $\langle c_n; c\rangle$ nebo $\langle c; c_n\rangle$. Podle této věty exisujte takový bod ξ, ležící mezi čísly c_n a c tak, že $f(c) - f(c_n) = (c - c_n) \cdot f'(\xi)$. Protože $f(c) = 0$, máme:

$$|c - c_n| = \frac{|f(c_n)|}{f'(\xi)}.$$

Pokud je v intervalu $\langle a; b\rangle$ $|f'(x)| \geq m > 0$, dostaneme:

$$|c - c_n| \leq \frac{|f(c_n)|}{m}, \tag{2.10}$$

což je vzorec, který nám umožní odhadnout, jak daleko leží číslo c_n od skutečné hodnoty kořenu c. Tento vzorec lze navíc použít pro jakoukoliv posloupnost, jejíž limita je číslo c.

Příklad 2.5. *Vypočtěte Newtonovou metodou kořen rovnice*

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0$$

ležící v intervalu $\langle 3; 4{,}5\rangle$ s přesností na 7 desetinných míst.

Řešení. Nejdříve určíme $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 11$ a $f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$. Dále určíme $f(3) = -24$, $f(4{,}5) = 42{,}5625$, $f''(3) = 32$, $f''(4{,}5) = 131$. Protože $f(4{,}5) > 0$ a $f''(4{,}5) > 0$, určíme jako původní aproximaci $u_1 = 4{,}5$. S použitím věty (2.10) sestavíme tabulku.

k	u_k	$f(u_k)$	$f'(u_k)$
1	4,5000000	42,5625000	114,5000000
2	4,1282751	8,3507378	71,4021150
3	4,0113215	0,6738797	60,0461946
4	4,0000988	0,0058281	59,0090875
5	4,0000000	0,0000004	59,0000007
6	4,0000000	0,0000000	59,0000000

Vidíme, že $f(u_6) = 0$, proto jsme našli kořen rovnice $u_6 = c = 4$ s požadovanou přesností.

2.5 Müllerova metoda

V roce 1956 David Eugene Müller navrhl numerickou metodu, která je zejména vhodná k hledání kořenů polynomu. Jedná se o zobecnění metody sečen kdy pro dané aproximace x_k, x_{k-1} bodu c aproximujeme funkci f přímkou procházející body $[x_{k-1}; f(x_{k-1})]$, $[x_k; f(x_k)]$ a za další aproximaci bodu c vezmeme průsečík této přímky s osou x. Zdroje informací v této sekci jsou [5], [3].

Müllerova metoda užívá tří aproximací x_{k-2}, x_{k-1}, x_k. Křivku $y = f(x)$ aproximujeme parabolou určenou těmito body. Za další aproximaci x_{k+1} vezmeme ten průsečík paraboly s osou x, který je nejblíže k x_k. Touto metodou lze najít násobné i komplexní kořeny.

Nechť x_0, x_1, x_2 jsou počáteční aproximace. Sestrojme polynom

$$P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

procházející body $[x_0,f(x_0)]$, $[x_1,f(x_1)]$, $[x_2,f(x_2)]$. Položme $P(x_i) = f(x_i)$, kde $i = 0,1,2$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \\ f(x_1) &= a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \\ f(x_2) &= a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c. \end{aligned}$$

Řešme tuto soustavu tří rovnic s neznámými a,b,c. Protože $c = f(x_2)$, máme:

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \tag{2.11}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2). \tag{2.12}$$

Položme dále

$$h_0 = x_1 - x_0 \qquad h_1 = x_2 - x_1$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a dosaďme do (2.11) a (2.12). Po dosazení a úpravě dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} (h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a &= h_0\delta_0 + h_1\delta_1 \\ h_1 b - h_1^2 a &= h_1\delta_1, \end{aligned}$$

kterou řešíme pro a a b. Výsledek můžeme shrnout jako

$$\begin{aligned} a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \\ b &= ah_1 + \delta_1 \\ c &= f(x_2). \end{aligned}$$

Kořeny kvadratické rovnice $P(x) = 0$ je výhodné vyjádřit ve tvaru

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{2.13}$$

Blíže k tomuto vyjádření v [3] (str. 76).

Znaménko u odmocniny vybereme tak, aby bylo shodné se znaménkem b. To znamená, že jmenovatel zlomku bude v absolutní hodnotě největší a tedy výsledná hodnota x_3 bude nejbližší x_2. Potom máme

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + (\operatorname{sign} b)\sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{2.14}$$

Další postup opakujeme s aproximacemi x_1, x_2, x_3 atd. Rovnici $P(x) = 0$ řešíme v oboru komplexních čísel, neboť výraz $b^2 - 4ac$ může být záporný.

Dále navíc z rovnice (2.13) můžeme určit chybu. Protože levá strana rovnice představuje rozdíl mezi současnou aproximací x_3 a předchozí aproximací x_2, chybu můžeme vypočítat jako

$$\epsilon = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right|.$$

[3]

Příklad 2.6. *Müllerovou metodou najděte kořen rovnice*

$$x^3 - 13x - 12$$

v intervalu $\langle 3; 4{,}5 \rangle$*, jsou-li dány počáteční aproximace* $x_0 = 4{,}5$*,* $x_1 = 5{,}5$*,* $x_2 = 5$*.*

Řešení. Nejdříve určíme funkční hodnoty počátečních aproximací:

$$\begin{aligned} f(4{,}5) &= 20{,}625 \\ f(5{,}5) &= 82{,}875 \\ f(5) &= 48, \end{aligned}$$

díky kterým nalezneme

$$\begin{aligned} h_0 &= 5{,}5 - 4{,}5 = 1 \\ \delta_0 &= \frac{82{,}875 - 20{,}625}{5{,}5 - 4{,}5} = 62{,}25 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} h_1 &= 5 - 5{,}5 = -0{,}5 \\ \delta_1 &= \frac{48 - 82{,}875}{5 - 5{,}5} = 69{,}75. \end{aligned}$$

Nyní můžeme určit koeficienty a, b a c, tedy

$$\begin{aligned}
a &= \frac{69{,}75 - 62{,}25}{-0{,}5 + 1} = 15 \\
b &= 15(-0{,}5) + 69{,}75 = 62{,}25 \\
c &= 48.
\end{aligned}$$

Dále určíme odmocninu z diskriminantu jako

$$\sqrt{62.25^2 - 4 \cdot 15 \cdot 48} = 31{,}54461.$$

Protože je $b > 0$, znaménko u odmocniny bude kladné a další odhad hledaného kořenu je

$$x_3 = 5 + \frac{-2 \cdot 48}{62.25 + 31{,}54451} = 3{,}976487.$$

Počáteční aproximace x_0 je nyní nahrazena aproximací x_1, x_1 je nahrazena x_2 a x_2 je nahrazena x_3. Pro další postup tedy máme

$$\begin{aligned}
x_0 &= 5{,}5 \\
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 3{,}976487
\end{aligned}$$

a postup zopakujeme. Získané aproximace zapíšeme do tabulky:

r	x_r
1	3,976487
2	4,00105
3	4
4	4

Z této tabulky vidíme, že metoda rychle konverguje k hodnotě $x_r = 4$ a lze snadno ověřit, že $f(4) = 0$. Nalezli jsme tedy kořen $c = 4$ rovnice $f(x) = 0$. [3]

2.6 Metoda řetězových zlomků

Existuje mnoho dalších metod k získání přibližného řešení algebraické rovnice. Jednou z nich je metoda řetězových zlomků. Nejdříve však uvedeme základní pojmy a vlastnosti řetězových zlomků. Věty zde budou uvedené bez důkazů. Lze je však najít v hlavním zdroji informaci pro tuto kapitolu [7].

Definice 2.3. ***Řetězovým zlomkem**, konečným nebo nekonečným, nazýváme výraz*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}, \tag{2.15}$$

kde a_0 je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots$ jsou kladná celá čísla.

Poznámka 2.9.

- Čísla $a_0,a_1,a_2,\ldots$ se nazývají prvky řetězového zlomku.
- Je-li počet prvků konečný, píšeme řetězový zlomek (2.15) ve tvaru $[a_0;a_1;a_2,\ldots;a_n]$. Je-li prvků nekonečně mnoho, píšeme řetězový zlomek (2.15) ve tvaru $[a_0;a_1;a_2,\ldots]$.
- Každý konečný řetězový zlomek vyjadřuje racionální číslo, neboť je výsledkem konečného počtu racionálních operací nad jeho prvky, kterými jsou celá čísla.

Definice 2.4. ***Přibližným zlomkem řádu*** *k řetězového zlomku* $[a_0;a_1;a_2,\ldots]$ *nazýváme zlomek*

$$\frac{P_k}{Q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Poznámka 2.10. Nultým přibližným zlomkem nazýváme zlomek $\dfrac{P_0}{Q_0} = \dfrac{a_0}{1}$.

Vidíme potom, že

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}, \quad \text{atd.}$$

Čísla P_k a Q_k definujeme tak, že je položíme přímo rovno příslušným čitatelům, resp. jmenovatelům.

$$\begin{array}{llll} P_0 = a_0, & P_1 = a_0a_1+1, & P_2 = a_0a_1a_2+a_0+a_2, & \ldots \\ Q_0 = 1, & Q_1 = a_1, & Q_2 = a_1a_2+1, & \ldots \end{array}$$

Věta 2.11. *Pro každé* $k \geq 2$ *platí*

$$\begin{aligned} P_k &= a_kP_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= a_kQ_{k-1} + Q_{k-2}. \end{aligned}$$

Poznámka 2.11.

- Přibližný zlomek je tedy zcela jednoznačně definován pro konečné i nekonečné řetězové zlomky, protože konečný řetězový zlomek má konečný počet sblížených zlomků. Nekonečný řetězový zlomek jich má však někonečně mnoho.
- Pro $n-$členný řetězový zlomek $\alpha = [a_0,a_1,\ldots,a_n]$ je zřejmě $\alpha = \dfrac{P_n}{Q_n}$ a tento řetězový zlomek má celkem $n+1$ přibližných zlomků (řádů $0,1,\ldots,n$).

Poznámka 2.12. Věta 2.11 nám snadno umožňuje vypočítat hodnoty přibližných zlomků. Pro rychlý výpočet využijeme tuto tabulku:

i	0	1	2	$\cdots$	$k-1$	k
a_i	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{k-1}	a_k
P_i	$P_0 = a_0$	$P_1 = a_0a_1 + 1$	$P_2 = a_2P_1 + P_0$	$\cdots$	P_{k-1}	$a_kP_{k-1} + P_{k-2}$
Q_i	$Q_0 = 1$	$Q_1 = a_1$	$Q_2 = a_2Q_1 + Q_0$	$\cdots$	Q_{k-1}	$a_kQ_{k-1} + Q_{k-2}$

Věta 2.12. *Pro každé $k \geq 1$ je $P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} = (-1)^{k-1}$.*

Věta 2.13. *Čitatel a jmenovatel libovolného přibližného zlomku jsou čísla nesoudělná.*

Věta 2.14. *Jmenovatelé přibližných zlomků řetězového zlomku $\alpha = [a_0,a_1,a_2,\dots]$ (konečného nebo nekonečného) tvoří rostoucí posloupnost, tj.*

$$1 = Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < Q_3 < \cdots .$$

Věta 2.15. *Pro každé $k = 1,2,\dots$ platí:*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k-1}}. \tag{2.16}$$

Věta 2.16. *Pro každé $k = 2,3,\dots$ platí:*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{Q_kQ_{k-2}}. \tag{2.17}$$

Z rovností (2.16) a (2.17) lze odvodit ([7] - str. 203) následující větu:

Věta 2.17. *Přibližné zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost, kdežto přibližné zlomky lichého řádu tvoří klesající posloupnost.*
Libovolný přibližný zlomek lichého řádu je přitom větší než libovolný přibližný zlomek sudého řádu.

Definice 2.5. *Nekonečný řetězový zlomek $[a_0,a_1,a_2,\dots]$ se nazývá **konvergentní**, existuje-li limita posloupnosti přibližných zlomků, tj. existuje-li*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k}.$$

Definice 2.6. ***Hodnotou** nekonečného konvergentního řetězového zlomku $[a_0,a_1,a_2,\dots]$ rozumíme limitu posloupnosti jeho přibližných zlomků, tj. číslo α takové, že*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha.$$

Věta 2.18. *Libovolný nekonečný řetězový zlomek konverguje.*

Věta 2.19. *Ke každému reálnému číslu α existuje jediný řetězový zlomek, jehož hodnota je číslo α. Je-li číslo α racionální, je tento řetězový zlomek konečný. Je-li naopak číslo α iracionální, je tento řetězový zlomek nekonečný.*

Věta 2.20. *Pro libovolný přibližný zlomek $\dfrac{P_k}{Q_k}$ reálného čísla α platí*

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2}. \tag{2.18}$$

Nyní si ukážeme, jak lze řetězové zlomky využít při přibližném řešení algebraických rovnic.

Nechť je dána rovnice $f(x) = 0$. Nechť a_0 je takové celé číslo, že v intervalu $(a_0; a_0 + 1\rangle$ leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$. Označme tento kořen jako c. Položme $c = a_0 + \dfrac{1}{x_1}$ a sestrojme rovnici

$$x_1^n f\left(a_0 + \frac{1}{x_1}\right) = f_1(x_1) = 0.$$

Tato rovnice má nutně reálný kořen $x_1 \geq 1$. Současně má jediný kořen, který je větší nebo roven 1, jinak by totiž měla rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $(a_0; a_0 + 1\rangle$ více než jeden kořen.

Nechť a_1 je takové celé číslo, pro které platí

$$a_1 < x_1 \leq a_1 + 1.$$

Položme $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$ a sestrojme rovnici

$$x_2^n f_1\left(a_1 + \frac{1}{x_2}\right) = f_2(x_2) = 0.$$

Stejný postup opakujeme i s touto rovnicí. Pro přesnou hodnotu kořene c dostáváme řetězový zlomek $[a_0,a_1,a_2,\dots]$. Přibližné zlomky tohoto řetězového zlomku určují přibližné hodnoty hledaného kořene c.

Poznámka 2.13. Díky vzorci (2.18) lze snadno odhadnout, jak daleko jsme od přesné hodnoty kořene c.

Poznámka 2.14. Předpoklad, že v intervalu $(c_0; c_0 + 1\rangle$ leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$ není podstatný, protože pokud by v intervalu $(c_0; c_0 + 1\rangle$ ležely např. dva různé kořeny rovnice $f(x) = 0$, měla by rovnice $f_1(x_1) = 0$ dva reálné kořeny větší nebo rovné jedné.
Předpokládejme, že v intervalu $(c_i; c_i + 1\rangle$, $(i = 0,1,2,\dots,k)$ leží dva kořeny rovnice $f_i(x_i) = 0$. Pak oba kořeny mají pouze stejný začátek rozvoje řetězového zlomku. Oba kořeny jsou však různé, proto musí nastat případ, např. od indexu $k + 1$, že kořeny rovnice $f_k(x_k) = 0$, které jsou větší nebo rovné jedné, leží ve dvou různých intervalech s celočíselnými koncovými body.

Příklad 2.7. *Metodou řetězových zlomků najděte kořen rovnice*

$$f(x) = x^3 + 18x - 30 = 0$$

v intervalu $(1; 2)$ *s přesností alespoň na 5 desetinných míst.*

Řešení. Příklad i řešení je převzato z [7]. Označme $c = 1 + \dfrac{1}{x_1}$ a sestrojme rovnici

$$x_1^3 f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = f_1(x_1) = 0.$$

Po dosazení a úpravě máme rovnici

$$f_1(x_1) = 11x_1^3 - 21x_1^2 - 3x_1 - 1 = 0,$$

jejíž jediný reálný kořen větší než jedna leží v intervalu $(2;3)$. Položme $x_1 = 2 + \dfrac{1}{x_2}$ a opět získáme rovnici

$$f_2(x_2) = x_2^3 f_1\left(2 + \frac{1}{x_2}\right) = 3x_2^3 - 45x_2^2 - 45x_2 - 11 = 0,$$

jejíž jediný kořen větší než jedna leží v intervalu $(15;16)$. Potom je $x_3 = 15 + \dfrac{1}{x_3}$ a opět sestavíme rovnici

$$f_3(x_3) = x_3^3 f_2\left(15 + \frac{1}{x_3}\right) = 686x_3^3 - 630x_3^2 - 90x_3 - 3 = 0.$$

Jediný kořen rovnice $f_3(x_3) = 0$, který je větší než jedna, leží v intervalu $(1;2)$. Označme $x_3 = 1 + \dfrac{1}{x_4}$ a sestrojme rovnici

$$f_4(x_4) = x_4^3 f_3\left(1 + \frac{1}{x_4}\right) = 37x_4^3 - 708x_4^2 - 1428x_4 - 686 = 0.$$

Její jediný reálný kořen, který je větší než jedna, leží v intervalu $(21;22)$. Potom je $x_4 = 21 + \dfrac{1}{x_5}$. Celkem tedy máme:

$$c = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

Pomocí tabulky najdeme hodnoty prvních pěti přibližných zlomků:

i	0	1	2	3	4	$\cdots$
a_i	1	2	15	1	21	$\cdots$
P_i	1	3	46	49	1075	$\cdots$
Q_i	1	2	31	33	724	$\cdots$

Nyní pomocí vzorce (2.18) zjistíme, jaké chyby se dopouštíme, pokud jako kořen c rovnice $f(x) = 0$ použijeme číslo $\dfrac{1075}{724}$:

$$\left|c - \frac{1075}{724}\right| < \frac{1}{724^2} < 0{,}000002.$$

Našli jsme tedy kořen $c = \dfrac{1075}{724}$ s požadovanou přesností.

Kapitola 3

Sbírka řešených úloh

Příklad 3.1. *Najděte metodou regula falsi reálné kořeny rovnice*

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

s přesností alespoň 10^{-5}.

Řešení.

- Prvním krokem je ohraničení všech reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$. K tomu využijeme věty 2.3, 2.4, 2.5 a poznámku 2.1.

  1. Položme $A = \max(|a_1|,|a_2|,|a_3|,|a_4|) = \max(|0|,|2|,|-6|,|2|) = 6$. Potom podle věty 2.3 leží všechny reálné kořeny c v intervalu $\left\langle -6 - \frac{1}{1}; 6 + \frac{1}{1} \right\rangle$, tedy v intervalu $\langle -7; 7 \rangle$.
  2. Položme B rovno největší z absolutních hodnot záporných koeficientů rovnice $f(x) = 0$. Platí tedy $B = 6$. Protože prvním záporným koeficientem je člen $a_3 = -6$, položme $k = 3$. Potom podle věty 2.4 pro kladné reálné kořeny c rovnice $f(x) = 0$ platí:

     $$c < 1 + \sqrt[3]{\frac{6}{1}} < 3.$$

     Všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$ pak leží v intervalu $\langle -7; 3)$.
  3. Nyní se pokusíme pomocí věty 2.5 snížit horní hranici pro kladné reálné kořeny. Položme např. $a = 2$ a Hornerovým schematem ověřme, zda

     $$f(a) > 0, \quad f'(a) \geq 0, \quad f''(a) \geq 0, \quad f'''(a) \geq 0, \quad f^4(a) \geq 0.$$

2	1	0	2	−6	2
		2	4	12	12
	1	2	6	6	14

     Protože všechny koeficienty v posledním řádku Hornerova schematu jsou kladná reálná čísla a $a = 2$ je kladné reálné číslo, je jistě

     $$f'(a) > 0, \quad f''(a) > 0, \quad f'''(a) > 0, \quad f^{(4)}(a) > 0.$$

     a platí, že $c < 2$.

     Pokusíme se ještě snížit horní hranici kladných reálných kořenů a zvolíme $a = 1$.

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 2 & -6 & 2 \\
 & & 1 & 1 & 3 & -3 \\
\hline
 & 1 & 1 & 3 & -3 & \vert\ -1
\end{array}$$

Vidíme, že $f(a) < 0$ a podmínky věty 2.5 nejsou splněny. Všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$ leží v intervalu $\langle -7; 2)$

4. Nakonec snížíme dolní hranici pro záporné reálné kořeny rovnice. Za tímto účelem použijeme rovnici

$$g(x) = (-1)^n \cdot f(-x) = 0,$$

tedy $g(x) = x^4 + x^2 + 6x + 2 = 0$. Rovnice $g(x) = 0$ má poze nezáporné koeficienty, proto podle poznámky 2.1 jsou všechny reálné kořeny ohraničeny číslem $R = 0$. Je-li potom číslo R horním ohraničením kořenů rovnice $g(x) = 0$, je číslo $-R = 0$ dolním ohraničením kořenů rovnice $f(x) = 0$. Všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$ potom leží v intervalu $(0; 2)$ a ohraničení kořenů je dokončeno.

- Druhým krokem je separace reálných kořenů. V předchozím bodě jsme získali interval, ve kterém leží všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$. Nyní najdeme Sturmův řetězec polynomu $f(x)$.
Máme tedy $f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2$, $f'(x) = 4x^3 + 4x - 6$. Polynom $f(x)$ můžeme vynásobit číslem 4 a dostaneme

$$(4x^4 + 8x^2 - 24x + 8) : (4x^3 + 4x - 6) = x + \frac{7x^2 - 18x + 8}{4x^3 + 4x - 6}.$$

Zbytek po dělení je polynom $r_2(x) = 4x^2 - 18x + 8$. Potom

$$f_2(x) = -r_2(x) = -4x^2 + 18x - 8.$$

Pokračujme v Euklidově algoritmu:

$$(4x^3 + 4x - 6) : (-4x^2 + 18x - 8) = -x - \frac{9}{2} + \frac{77x - 42}{-4x^2 + 18x - 8}.$$

Zbytek po dělení je polynom $r_3(x) = 77x - 42$. Položme potom

$$f_3(x) = -r_3(x) = -77x + 42$$

a pokračujme dále.

$$(-4x^2 + 18x - 8) : (-77x + 42) = \frac{4}{77}x - \frac{174}{847} + \frac{\frac{76}{121}}{-77x + 42}.$$

Zbytkem je nyní nenulová konstanta $r_4(x) = \frac{76}{121}$. Potom

$$f_4(x) = -r_4(x) = -\frac{76}{121}.$$

Označme $f(x) = f_0(x)$, $f'(x) = f_1(x)$. Potom dostáváme Sturmovu posloupnost:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= x^4 + 2x^2 - 6x + 2 \\
f_1(x) &= 4x^3 + 4x - 6 \\
f_2(x) &= -4x^2 + 18x - 8 \\
f_3(x) &= -77x + 42 \\
f_4(x) &= -\frac{76}{121}
\end{aligned}
$$

Abychom zjistili počet znaménkových změn v Sturmově řetězci v koncových bodech intervalu $(0;2)$, ve kterém leží všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$, stačí určit znaménka hodnot jednotlivých členů Sturmova řetězce v bodech 0 a 2. Sestavíme tabulku

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$f_4(a)$	$Z(a)$
0	+	-	-	+	-	3
2	+	+	+	-	-	1

Jestliže $Z(a)$ je počet znaménkových změn v posloupnosti reálných čísel

$$f_0(a), f_1(a), \ldots, f_4(a),$$

pak podle Sturmovy věty 2.7 leží v intervalu $(0;2)$ právě $Z(0) - Z(2) = 3 - 1 = 2$ reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$. Tabulku zpřesníme dalším dosazením:

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$f_4(a)$	$Z(a)$
0	+	-	-	+	-	3
1	-	+	+	-	-	2
2	+	+	+	-	-	1

Protože $Z(0) - Z(1) = Z(1) - Z(2) = 1$, povedlo se nám úspěšně najít intervaly, ve kterých leží právě jeden reálný kořen. Jedná se tedy o intervaly $(0;1)$ a $(1;2)$ a nyní můžeme přejít k poslednímu kroku, kdy reálné kořeny aproximujeme.

- Nyní začněme hledat metodou regula falsi reálný kořen rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $(0;1)$ s přesností alespoň na 5 desetinných míst. Máme $f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2$, $f'(x) = 4x^3 + 4x - 6$, $f''(x) = 12x^2 + 4$. Protože $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ a $f''(x) > 0$ v intervalu $\langle 0;1\rangle$, zvolíme bod a jako pevný. Položme $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Potom podle věty 2.9 sestavíme tabulku:

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_k	$f(x_k)$	$\left\lvert\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k}\right\rvert$
0	0	1,000000	2	-1,0000000	0,666667	-0,913580	
1	0	0,666667	2	-0,9135802	0,457627	-0,283060	0,456790
2	0	0,457627	2	-0,2830597	0,400889	-0,058083	0,141530
3	0	0,400889	2	-0,0580829	0,389575	-0,010881	0,029041
4	0	0,389575	2	-0,0108808	0,387467	-0,002003	0,005440
5	0	0,387467	2	-0,0020034	0,387080	-0,000368	0,001002
6	0	0,387080	2	-0,0003677	0,387009	-0,000067	0,000184
7	0	0,387009	2	-0,0000674	0,386996	-0,000012	0,000034
8	0	0,386996	2	-0,0000124	0,386993	-0,000002	0,000006

Vidíme, že chyba $\left\lvert\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k}\right\rvert$ je pro $x_8 < 10^{-5}$, proto jsme našli první reálný kořen $x_8 = c_1 = 0{,}386993$ s požadovanou přesností.

Analogicky nyní hledejme kořen rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $(1; 2)$. Jako pevný bod zvolíme bod b, protože $f(b) > 0$ a $f''(x) > 0$ v intervalu $(1; 2)$ a sestavíme tabulku:

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_k	$f(x_k)$	$\left\lvert\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k}\right\rvert$
0	1,000000	2	-1,000000	14	1,066667	-0,829906	
1	1,066667	2	-0,829906	14	1,118898	-0,642189	0,046681
2	1,118898	2	-0,642189	14	1,157542	-0,470105	0,033385
3	1,157542	2	-0,470105	14	1,184911	-0,330180	0,023099
4	1,184911	2	-0,330180	14	1,203692	-0,225167	0,015602
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	1,240011	2	-0,000513	14	1,240039	-0,000330	0,000022
20	1,240039	2	-0,000330	14	1,240057	-0,000212	0,000014
21	1,240057	2	-0,000212	14	1,240068	-0,000136	0,000009

Pro $k = 21$ jsme nalezli kořen $x_{21} = c_2 = 1{,}240068$ s požadovanou přesností. Je nutné podotknout, že počet provedených kroků byl velmi vysoký. Pojďme si ukázat, zda je Newtonova metoda rychlejší.

Příklad 3.2. *Najděte Newtonovou metodou reálné kořeny rovnice*

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

s přesností alespoň 10^{-5}.

Řešení. V příkladu 3.1 jsme separovali intervaly, ve kterých leží kořeny rovnice $f(x) = 0$. První kořen leží v intervalu $(0; 1)$, druhý kořen leží v intervalu $(1; 2)$. Hledejme tedy Newtonovou metodou reálný kořen rovnice v intervalu $(0; 1)$. Víme, že

- $f'(x) = 4x^3 + 4x - 6$,
- $f''(x) = 12x^2 + 4$,
- $f(0) > 0$ a $f(1) < 0$,
- $f''(x) > 0$ v intervalu $\langle 0; 1\rangle$.

Nyní můžeme podle věty 2.10 začít tvořit posloupnost $u_1, \ldots, u_n$. Jako původní aproximaci volíme podle poznámky 2.5 $u_1 = 0$. Pak

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)} = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3}, \\ u_3 &= u_2 - \frac{f(u_2)}{f'(u_2)} = \frac{1}{3} - \frac{0{,}234568}{-0{,}518519} = 0{,}385246 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Údaje opět zapíšeme do tabulky:

k	u_k	$f(u_k)$	$f'(u_k)$	$\left\lvert\frac{u_k - u_{k-1}}{u_k}\right\rvert$
1	0	2	-6	
2	0,333333	0,234568	-4,518519	1,000000
3	0,385246	0,007380	-4,230312	0,134752
4	0,386991	0,000009	-4,220213	0,004508
5	0,386993	0,000000	-4,220201	0,000005
6	0,386993	0,000000	-4,220201	0,000000

Již pro $k = 5$ jsme našli kořen $u_5 = c_1 = 0{,}386993$ s požadovanou přesností. Analogicky budeme hledat kořen rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $(1; 2)$. Jako původní aproximaci volíme $u_1 = 2$.

k	u_k	$f(u_k)$	$f'(u_k)$	$\left\lvert\frac{u_k - u_{k-1}}{u_k}\right\rvert$
1	2	14	34	
2	1,588235	3,878534	16,378180	0,259259
3	1,351424	0,879695	9,278379	0,175231
4	1,256613	0,111956	6,963603	0,075450
5	1,240536	0,002945	6,598526	0,012960
6	1,240089	0,000002	6,588502	0,000360
7	1,240089	0,000000	6,588494	0,000000
8	1,240089	0,000000	6,588494	0,000000

Z tabulky vidíme, že jsme nalezli ještě lepší aproximaci kořene c_2 než metodou regula falsi, a to sice po pouze 7 krocích.

Příklad 3.3. *Najděte Müllerovou metodou reálné kořeny rovnice*

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

s přesností alespoň 10^{-5}.

Řešení. V příkladu 3.1 jsme separovali intervaly, ve kterých leží kořeny rovnice $f(x) = 0$. První kořen leží v intervalu $(0; 1)$, druhý kořen leží v intervalu $(1; 2)$. Nejdříve budeme hledat Müllerovou metodou reálný kořen v intervalu $(0; 1)$. Zvolme počáteční aproximace

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_1 &= 1, \\ x_2 &= 0{,}5 \end{aligned}$$

a určeme.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= 2,\\
f(x_1) &= -1,\\
f(x_2) &= -0{,}4375.
\end{aligned}
$$

Dále určíme

$$
\begin{aligned}
h_0 &= x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1\\
h_1 &= x_2 - x_1 = 0{,}5 - 1 = -0{,}5
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1-2}{1-0} = -3\\
\delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-0{,}4375 - 1}{0{,}5 - 1} = 2{,}875.
\end{aligned}
$$

V dalším vypočítáme

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{2{,}875 - (-3)}{-0{,}5 + 1} = 11{,}75\\
b &= ah_1 + \delta_1 = 11{,}75 \cdot (-0{,}5) + 2{,}875 = -3\\
c &= f(x_2) = -0{,}4375
\end{aligned}
$$

a konečně

$$
x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + (\operatorname{sign} b)\sqrt{b^2 - 4ac}} = 0{,}5 - \frac{2 \cdot (-0{,}4375)}{-3 - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{47}{4} \cdot (-0{,}4375)}},
$$

tedy $x_3 = 0{,}3962918$. Počáteční aproximaci x_0 nyní nahradíme aproximací x_1, x_1 nahradíme x_2 a x_2 nahradíme x_3. Pro další postup tedy máme

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 0{,}5\\
x_2 &= 0{,}3962918
\end{aligned}
$$

a postup opakujeme. Získané aproximace kořene zapíšeme do tabulky:

r	x_r
1	0,396292
2	0,387328
3	0,386993
4	0,386993

Vidíme, že již ve třetím kroku jsme získali velmi dobrou aproximaci, proto $c_1 = 0{,}386993$. V tomto konkrétním případě byla dokonce Müllerova metoda rychlejší než Newtonova metoda.

Nyní analogicky budeme hledat reálný kořen rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $(0; 1)$. Postupně získané aproximace zapíšeme do tabulky:

r	x_r
1	1,276908
2	1,231391
3	1,240156
4	1,240089

Opět jsme již ve čtvrtém kroce našli aproximaci kořene $c_2 = 1{,}240089$.

Příklad 3.4. *Najděte metodou řetězových zlomků reálné kořeny rovnice*

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

s přesností alespoň 10^{-5}.

Řešení. V příkladu 3.1 jsme separovali intervaly, ve kterých leží kořeny rovnice $f(x) = 0$. První kořen leží v intervalu $(0; 1)$, druhý kořen leží v intervalu $(1; 2)$. Nejdříve se budeme snažit najít aproximaci reálného kořene rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $(0; 1\rangle$. Označme

$$c_1 = \frac{1}{x_1}$$

a sestrojme rovnici $f_1(x_1) = 0$, kde

$$f_1(x_1) = x_1^4 f\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0.$$

Potom máme

$$x_1^4\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 - 6\frac{1}{x_1} + 2\right] = 2x_1^4 - 6x_1^3 + 2x_1^2 + 1 = 0.$$

Nyní budeme hledat interval, ve kterém leží jediný reálný kořen rovnice $f_1(x_1) = 0$ větší nebo roven jedné.

Všechny reálné kořeny leží v intervalu $(0; 3)$. Sturmův řetězec polynomu $f_1(x_1)$ má tvar:

$$\begin{aligned}
f_{1_0}(x_1) &= 2x_1^4 - 6x_1^3 + 2x_1^2 + 1\\
f_{1_1}(x_1) &= 8x_1^3 - 18x_1^2 + 4x_1\\
f_{1_2}(x_1) &= 19x_1^2 - 6x_1 - 8\\
f_{1_3}(x_1) &= -896x_1 + 2352\\
f_{1_4}(x_1) &= -\frac{6859}{512}
\end{aligned}$$

Sestavíme tabulku

a	$f_{1_0}(a)$	$f_{1_1}(a)$	$f_{1_2}(a)$	$f_{1_3}(a)$	$f_{1_4}(a)$	$Z(a)$
0	+	-	-	+	-	3
1	-	-	+	+	-	2
2	-	-	+	+	-	2
3	+	+	+	-	-	1

Protože $Z(2)-Z(3)=1$, leží jediný reálný kořen větší než jedna v intervalu $(2;3)$.

Položme nyní $x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$ a sestrojme rovnici

$$f_2(x_2) = 0, \quad \text{kde } f_2(x_2) = x_2^4 f_1\left(2 + \frac{1}{x_2}\right)$$

Potom máme rovnici

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= x_2^4\left[2\left(2+\frac{1}{x_2}\right)^4 - 6\left(2+\frac{1}{x_2}\right) + 2\left(2+\frac{1}{x_2}\right)^2 + 1\right] = \\ &= -7x_2^4 + 14x_2^2 + 10x_2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Analogicky nyní budeme hledat interval, ve kterém se nachází jediný reálný kořen rovnice $f_2(x_2) = 0$ větší než jedna. Všechny reálné kořeny leží v intervalu $(-1;2)$. Sturmův řetězec polynomu $f_2(x_2)$ má tvar:

$$\begin{aligned} f_{2_0}(x_2) &= -7x_2^4 + 14x_2^2 + 10x_2 + 2 \\ f_{2_1}(x_2) &= -28x_2^3 + 28x_2 + 10 \\ f_{2_2}(x_2) &= -14x_2^2 - 15x_2 - 4 \\ f_{2_3}(x_2) &= -27x_2 - 10 \\ f_{2_4}(x_2) &= -\frac{133}{729} \end{aligned}$$

Opět sestavíme tabulku:

a	$f_{2_0}(a)$	$f_{2_1}(a)$	$f_{2_2}(a)$	$f_{2_3}(a)$	$f_{2_4}(a)$	$Z(a)$
-1	-	+	-	+	+	3
0	+	+	-	-	+	2
1	+	+	-	-	+	2
2	-	-	-	-	+	1

Protože $Z(1)-Z(2)=1$, leží jediný reálný kořen rovnice $f_2(x_2)=0$ větší než jedna v intervalu $(1;2)$.

Potom tedy označme $x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$ a sestrojme rovnici

$$\begin{aligned} f_3(x_3) &= x_3^4 f_2\left(1+\frac{1}{x_3}\right) = \\ &= x_3^4\left[-7\left(1+\frac{1}{x_3}\right)^4 + 14\left(1+\frac{1}{x_3}\right)^2 + 10\left(1+\frac{1}{x_3}\right) + 2\right] = \\ &= 19x_3^4 + 10x_3^3 - 28x_3^2 - 28x_3 - 7 = 0, \end{aligned}$$

jejíž jediný reálný kořen větší než jedna leží v intervalu $(1;2)$.

Označme $x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}$ a opět sestrojme rovnici

$$f_4(x_4) = x_4^4 f_3\left(1+\frac{1}{x_4}\right) = 0.$$

Dostáváme

$$x_4^4\left[19\left(1+\frac{1}{x_4}\right)^4+10\left(1+\frac{1}{x_4}\right)^3-28\left(1+\frac{1}{x_4}\right)^2-28\left(1+\frac{1}{x_4}\right)^4-7\right]=0,$$

tedy

$$-34x_4^4+22x_4^3+116x_4^2+86x_4+19=0.$$

Analogicky získáme interval, ve kterém leží jediný reálný kořen rovnice $f_4(x_4)=0$ větší než jedna. Jedná se o interval $(2;3)$ a pokračujeme dále:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2+\frac{1}{x_5}\\ f_5(x_5) &= x_5^4 f_4\left(2+\frac{1}{x_5}\right)=\\ &= 287x_5^4-274x_5^3-568x_5^2-250x_5-34=0, \end{aligned}$$

označíme x_5 a dosadíme

$$\begin{aligned} x_5 &= 2+\frac{1}{x_6}\\ f_6(x_6) &= x_6^4 f_5\left(2+\frac{1}{x_6}\right)=\\ &= -406x_6^4+3374x_6^3+4676x_6^2+2022x_6+287=0. \end{aligned}$$

Pro x_6 platí:

$$x_6=9+\frac{1}{x_7}.$$

Potom

$$\begin{aligned} f_7(x_7) &= x_7^4 f_6\left(9+\frac{1}{x_7}\right)=\\ &= 193121x_7^4-277824x_7^3-101542x_7^2-11242x_7-406=0. \end{aligned}$$

Jediný kořen rovnice $f_7(x_7)=0$, který je větší než jedna, leží v intervalu $(1;2)$. Celkem tedy máme:

$$c_1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}.$$

Nyní najdeme prvních 8 přibližných zlomků:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_i	0	2	1	1	2	2	9	1	$\cdots$
P_i	0	1	1	2	5	12	113	125	$\cdots$
Q_i	1	2	3	5	13	31	292	323	$\cdots$

Z tabulky vidíme hodnoty přibližných zlomků

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{12}{31}, \frac{113}{292}, \frac{125}{323}.$$

Pokud vezmeme za přibližnou hodnotu kořene číslo $\frac{125}{323}$, podle vzorce (2.18) máme

$$\left|c_1 - \frac{125}{323}\right| < \frac{1}{323^2} = 0{,}00000959 < 10^{-5}.$$

Našli jsme tedy kořen $c_1 = \dfrac{125}{323}$ s požadovanou přesností.

Hledejme nyní druhý kořen rovnice

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

v intervalu $(1; 2)$. Označme $c_2 = 1 + \dfrac{1}{z_1}$ a sestrojme rovnici $g_1(z_1) = 0$, kde

$$g_1(z_1) = z_1^4 f\left(1 + \frac{1}{z_1}\right).$$

Dostaneme rovnici

$$g_1(z_1) = -z_1^4 + 2z_1^3 + 8z_1^2 + 4z_1 + 1 = 0,$$

jejíž všechny reálné kořeny leží v intervalu $(-2; 5)$. Hledejme nyní interval, ve kterém leží jediný reálný kořen rovnice $g_1(z_1) = 0$, který je větší nebo roven 1. Sturmův řetězec polynomu $g_1(z_1)$ má tvar

$$\begin{aligned}
g_{1_0}(z_1) &= -z_1^4 + 2z_1^3 + 8z_1^2 + 4z_1 + 1\\
g_{1_1}(z_1) &= -4z_1^3 + 6z_1^2 + 16z_1 + 4\\
g_{1_2}(z_1) &= -19z_1^2 - 20z_1 - 6\\
g_{1_3}(z_1) &= -2352z_1 - 280\\
g_{1_4}(z_1) &= \frac{6859}{7056}
\end{aligned}$$

a sestavíme tabulku

a	$g_{1_0}(a)$	$g_{1_1}(a)$	$g_{1_2}(a)$	$g_{1_3}(a)$	$g_{1_4}(a)$	$Z(a)$
-2	-	+	-	+	+	3
0	+	+	-	-	+	2
2	+	+	-	-	+	2
4	+	-	-	-	+	2
5	-	-	-	-	+	1

Protože $Z(4) - Z(5) = 1$, leží náš hledaný kořen v intervalu $(4; 5)$. Označme $z_1 = 4 + \dfrac{1}{z_2}$, sestrojme rovnici

$$g_2(z_2) = z_2^4 g_1\left(4 + \frac{1}{z_2}\right) = 0,$$

tedy

$$17z_2^4 - 92z_2^3 - 64z_2^2 - 14z_2 - 1.$$

Všechny reálné kořeny rovnice $g_2(z_2) = 0$ leží v intervalu $(-1; 7)$. Opět budeme hledat interval, ve kterém leží jediný reálný kořen této rovnice, který je větší nebo roven jedné. Sturmův řetězec polynomu $g_2(z_2)$ je:

$$\begin{aligned}
g_{2_0}(z_2) &= 17z_2^4 - 92z_2^3 - 64z_2^2 - 14z_2 - 1 \\
g_{2_1}(z_2) &= 68z_2^3 - 276z_2^2 - 128z_2 - 14 \\
g_{2_2}(z_2) &= 4262z_2^2 + 1829z_2 + 195 \\
g_{2_3}(z_2) &= 659379z_2 + 167909 \\
g_{2_4}(z_2) &= -\frac{86282059}{521945574}.
\end{aligned}$$

Vytvoříme tabulku:

a	$g_{2_0}(a)$	$g_{2_1}(a)$	$g_{2_2}(a)$	$g_{2_3}(a)$	$g_{2_4}(a)$	$Z(a)$
-1	+	-	+	-	-	3
0	-	-	+	+	-	2
4	-	-	+	+	-	2
6	-	+	+	+	-	2
7	+	+	+	+	-	1

Protože $Z(6) - Z(7) = 1$, leží jediný reálný kořen větší než jedna v intervalu $(6; 7)$. Dále pokračujeme analogicky. Označíme $z_2 = 6 + \frac{1}{z_3}$ a sestavíme rovnici

$$g_3(z_3) = z_3^4 g_2\left(6 + \frac{1}{z_3}\right) = 0,$$

tedy

$$-229z_3^4 + 3970z_3^3 + 1952z_3^2 + 316z_3 + 17 = 0.$$

Jediný reálný kořen rovnice $g_3(z_3) = 0$, který je větší než jedna, leží v intervalu $(17; 18)$. Proto dále označme $z_3 = 17 + \frac{1}{z_4}$. Dostaneme rovnici

$$g_4(z_4) = z_4^4 g_3\left(17 + \frac{1}{z_4}\right) = 0,$$

tj.

$$947818z_4^4 - 991634z_4^3 - 192664z_4^2 - 11620z_4 - 229 = 0.$$

Jediný kořen větší než jedna této rovnice leží v intervalu $(1; 2)$. Pro reálný kořen c_2 rovnice $f(x) = 0$ celkem máme

$$c_2 = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}.$$

Nyní najdeme prvních 5 přibližných zlomků:

i	0	1	2	3	4	$\cdots$
b_i	1	4	6	17	1	$\cdots$
P_i	1	5	31	532	563	$\cdots$
Q_i	1	4	25	429	454	$\cdots$

Z tabulky vidíme, že se jedná o zlomky

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{31}{25}, \frac{532}{429} \text{ a } \frac{563}{454}.$$

Ze vzorce (2.18) zjistíme, jak přesní jsme, pokud použijeme číslo poslední přibližný zlomek:

$$\left| c_2 - \frac{563}{454} \right| < \frac{1}{454^2} = 0{,}00000485 < 10^{-5}.$$

Potom máme kořen $c_2 = \dfrac{563}{454}$ s požadovanou přesností.

Příklad 3.5. *[7] Kvádr má hrany $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm. O jakou stejnou délku je třeba zvětšit všechny tři hrany tak, aby se objem kvádru zvětšil o 350 cm^3?*

Řešení. Objem zadaného kvádru je $V = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ cm^3. Pro nově vzniklý kvádr potom platí:

$$560 = (5 + x)(6 + x)(7 + x),$$

kde x je délka, o kterou zvětšíme všechny tři hrany kvádru. Po úpravě dostaneme rovnici

$$f(x) = x^3 + 18x + 107x - 350 = 0,$$

kterou budeme řešit Newtonovou metodou. Nejdříve ale musíme určit počet kladných reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ a případně intervaly, ve kterých leží. Označíme $B = 350$ největší ze záporných koeficientů. První záporný koeficient je $a_3 = -350$, označme potom $k = 3$. Potom podle věty 2.4 pro kladný reálný kořen c rovnice $f(x) = 0$ platí

$$c < 1 + \sqrt[3]{\frac{350}{1}} < 9.$$

Nyní podle věty 2.5 snížíme horní hranici všech kořenů. Zvolme $a = 7$ a ověřme, zda

$$f(a) > 0 \quad f'(a) \geq 0, \quad f''(a) \geq 0, \quad f'''(a) \geq 0.$$

Využijeme k tomu Hornerovo schema.

$$\begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 18 & 107 & -350 \\ & & 7 & 175 & 1974 \\ \hline & 1 & 25 & 282 & \vert\; 1624 \end{array}$$

Vidíme, že $f(a)$ je poměrně vysoké číslo a také, že podmínky věty 2.5 jsou splněny. Zvolme nyní například $a = 4$.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 18 & 107 & -350 \\ & & 4 & 88 & 780 \\ \hline & 1 & 22 & 195 & \vert\; 430 \end{array}$$

Pokusíme se hranici snížit ještě více volbou $a = 3$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & 18 & 107 & -350 \\
 & & 3 & 63 & 510 \\
\hline
 & 1 & 21 & 170 & \vline\ 160
\end{array}
$$

a dále volbou $a = 2$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 18 & 107 & -350 \\
 & & 2 & 40 & 294 \\
\hline
 & 1 & 20 & 174 & \vline\ -56
\end{array}
$$

Pro $a = 2$ podmínky věty 2.5 naplněny nejsou, proto pro všechny kladné reálné kořeny c platí:

$$c \in (0; 3).$$

Dalším krokem je určení počtu kořenů a jejich separace. Sturmův řetězec polynomu $f(x)$ má tvar:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= x^3 + 18x^2 + 107x - 350 \\
f_1(x) &= 3x^2 + 36x + 107 \\
f_2(x) &= 2x + 1692 \\
f_3(x) &= -2116799
\end{aligned}
$$

.

Sestavíme tabulku

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$Z(a)$
0	-	+	+	-	2
1	-	+	+	-	2
2	-	+	+	-	2
3	+	+	+	-	1

Protože $Z(2) - Z(3) = 1$, leží jediný kladný reálný kořen v intervalu $(2; 3)$. Nyní ho Newtonovou metodou aproximujeme. Víme, že:

- $f'(x) = 3x^2 + 36x + 107$
- $f''(x) = 6x + 36$
- $f''(x)$ je v intervalu $\langle 2; 3 \rangle > 0$.
- $f(3) > 0$, $f(2) < 0$,

proto jako počáteční aproximaci volíme $u_1 = 3$. Sestrojíme posloupnost věty 2.10, kde

$$u_2 = u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)} = 3 - \frac{160}{242} = 2{,}338843.$$

Dále údaje zapíšeme do tabulky:

k	u_k	$f(u_k)$	$f'(u_k)$	$\left\lvert \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \right\rvert$
1	3	160	242	
2	2,338843	11,513462	207,608906	0,220386
3	2,283386	0,076769	204,843427	0,023711
4	2,283011	0,000003	204,824801	0,000164
5	2,283011	0,000000	204,824801	0,000000

Již po pátem kroku jsme získali výsledek s přesností minimálně 6 desetinných míst. Odpověď tedy zní, že každou hranu kvádru bychom museli prodloužit o 2,283011 cm.

Příklad 3.6. *[3] Při snaze určit kyselost roztoku hydroxidu hořečnatého v kyselině chlorovodíkové jsme získali následující rovnici:*

$$f(x) = x^3 + 3{,}5x^2 - 40,$$

kde x je koncentrace vodíkového kationtu. Určete koncentraci vodíkového kationtu pro nasycený roztok (kyselost se rovná nule).

Řešení. Naším úkolem je tedy najít kladné reálné kořeny rovnice

$$f(x) = x^3 + 3{,}5x^2 - 40 = 0$$

a využijeme k tomu Müllerovu metodu. Nejdříve však musíme najít interval, ve kterém leží všechny kladné reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$. K determinaci horního ohraničení užijeme věty 2.4. Označme $B = 40$ největší ze všech záporných koeficientů rovnice $f(x) = 0$. Protože $a_3 = -40$ je první záporný koeficient, označíme $k = 3$. Potom pro kladné reálné kořeny c rovnice $f(x) = 0$ platí:

$$c < 1 + \sqrt[3]{\frac{40}{1}} < 5.$$

Pomocí věty 2.5 se pokusíme ještě snížit horní hranici intervalu, ve kterém se nachází všechny reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$. Zvolme např. $a = 4$ a Hornerovým schematem ověřme, zda

$$f(a) > 0 \quad f'(a) \geq 0, \quad f''(a) \geq 0, \quad f'''(a) \geq 0.$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & 3{,}5 & 0 & -40 \\ & & 4 & 29 & 116 \\ \hline & 1 & 7{,}5 & 29 & 76 \end{array}$$

Z Hornerova schematu je zřejmé, že tyto podmínky jsou splněny. Pokusme se dále snížit horní hranici dosazením za $a = 3$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 3 & 1 & 3{,}5 & 0 & -40 \\ & & 3 & 19{,}5 & 58{,}5 \\ \hline & 1 & 6{,}5 & 19{,}5 & 18{,}5 \end{array}$$

a dále za $a = 2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & 3{,}5 & 0 & -40 \\ & & 2 & 11 & 22 \\ \hline & 1 & 5{,}5 & 11 & \text{-18} \end{array}$$

Pro $a = 2$ již podmínky věty 2.5 splněny nejsou, proto všechny kladné reálné kořeny leží v intervalu $(0; 3)$. Separujme nyní jednotlivé kořeny rovnice $f(x) = 0$. Sturmův řetězec polynomu $f(x)$ má tvar:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 + 3{,}5x^2 - 40 \\ f_1(x) &= 3x^2 + 7x \\ f_2(x) &= 49x + 720 \\ f_3(x) &= -1308240 \end{aligned}$$

Dále sestavíme tabulku:

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$Z(a)$
0	-	+	+	-	2
1	-	+	+	-	2
2	-	+	+	-	2
3	+	+	+	-	1

Protože je $Z(2) - Z(3) = 1$, jediný kladný reálný kořen rovnice $f(x) = 0$ leži v intervalu $(2; 3)$. Nyní tento kořen Müllerovou metodou aproximujeme. Zvolme počáteční aproximace

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 2{,}5
\end{aligned}
$$

a určeme

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= -18 \\
f(x_1) &= 18{,}5 \\
f(x_2) &= -2{,}5
\end{aligned}
$$

Dále určíme

$$
\begin{aligned}
h_0 &= x_1 - x_0 = 3 - 2 = 1 \\
h_1 &= x_2 - x_1 = 2{,}5 - 3 = -0{,}5
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{18{,}5 - (-18{,}5)}{3 - 2} = 36{,}5 \\
\delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-2{,}5 - 18{,}5}{2{,}5 - 3} = 42.
\end{aligned}
$$

Dále vypočítáme

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{42 - 36{,}5}{-0{,}5 + 1} = 11 \\
b &= ah_1 + \delta_1 = 11 \cdot (-0{,}5) + 42 = 36{,}5 \\
c &= f(x_2) = -2{,}5 \\
&.
\end{aligned}
$$

Nakonec vypočítáme další aproximaci x_3:

$$
x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + (\operatorname{sign} b)\sqrt{b^2 - 4ac}} = 2{,}5 - \frac{2 \cdot (-2{,}5)}{36{,}5 + \sqrt{(36{,}5)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 36{,}5}}.
$$

Potom $x_3 = 2{,}567135$. Počáteční aproximaci x_0 nyní nahradíme aproximací x_1, x_1 nahradíme x_2, x_2 nahradíme x_3. Potom máme

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3 \\
x_1 &= 2{,}5 \\
x_2 &= 2{,}567135,
\end{aligned}
$$

postup opakujeme a získáme aproximaci $x_3 = 2{,}567571$. Aproximace opět přeznačíme a dostaneme

$$\begin{aligned} x_0 &= 2{,}5 \\ x_1 &= 2{,}567135 \\ x_2 &= 2{,}567571. \end{aligned}$$

Další aproximací by bylo číslo $x_3 = 2{,}567571$. Vidíme, že prvních 6 desetinných míst se již nemění, proto jsme prakticky ve druhém kroku získali skvělou aproximaci. Dále je nutné zmínit, že již první krok aproximoval kořen rovnice $f(x) = 0$ se správnými prvními třemi desetinnými místy. Výsledek této úlohy je tedy číslo $x = 2{,}567571$.

Příklad 3.7. *[3] Je dán návrh kulové nádrže pro uchování vody v malé vesnici v rozvojové zemi. Objem tekutiny, který nádrž dokáže pojmout, lze vypočítat jako*

$$V = \pi h^2 \frac{(3R - h)}{3}, \tag{3.1}$$

kde V je objem (v m^3), h je výška hladiny vody v nádrži (m) a R je poloměr nádrže (m). Jestliže je $R = 3$, do jaké výšky musí být nádrž naplněna, aby pojala 30 m^3?

Řešení. Po dosazení do vztahu (3.1) za $V = 30$ a $R = 3$, dostaneme

$$30 = \pi h^2 \frac{(9 - h)}{3}.$$

Tuto rovnici upravíme a celkem máme

$$f(h) = \pi h^3 - 9\pi h^2 + 90 = 0.$$

Rovnici $f(h) = 0$ budeme řešit Newtonovou metodou. Tato rovnice má tři reálné kořeny:

- první kořen leží v intervalu $(-2; -1)$,
- druhý kořen leží v intervalu $(2; 3)$
- a třetí kořen v intervalu $(8; 9)$.

Protože hledáme pouze kladný reálný kořen rovnice $f(h) = 0$, první kořen můžeme rovnou vyloučit. A protože $R = 3$ m, tedy průměr kulové nádrže je 6 m, vyloučíme i třetí kořen, který leží v intervalu $(8; 9)$. Nyní Newtonovou metodou aproximujeme reálný kořen rovnice $f(h) = 0$ ležící v intervalu $(2; 3)$. Máme:

$$\begin{aligned} f(h) &= \pi h^3 - 9\pi h^2 + 90 \\ f'(h) &= 3\pi h^2 - 18\pi h \\ f''(h) &= 6\pi h - 18. \end{aligned}$$

Protože je $f(2) > 0$ a $f''(2) > 0$, volíme jako počáteční aproximaci číslo $u_1 = 2$. Sestavíme tabulku:

	u_k	$f(u_k)$	$f'(u_k)$	$\left\lvert\frac{u_k - u_{k-1}}{u_k}\right\rvert$
1	2	2,0354057	-75,3982237	
2	2,0269954	-0,0068065	-75,9002068	0,0133179
3	2,0269057	-0,0000001	-75,8985620	0,0000442
4	2,0269057	0,0000000	-75,8985619	0,0000000

Z tabulky vidíme, že již třetí krok nám našel velmi dobrou aproximaci kořene rovnice $f(h) = 0$. Nádrž tedy musí být naplněna do 2,0269057 metrů.

Závěr

Vypracovaná bakalářská práce obsahuje v první kapitole ty nejdůležitější pojmy a věty, které jsou potřebné k naplnění cíle. Jsou uvedeny základní definice, vlastnosti o dělitelnosti polynomů i vymezení pojmu algebraická rovnice a úlohy řešit algebraickou rovnici.

Ve druhé části jsou vyloženy věty, které umožňují ohraničení a separaci reálných kořenů algebraické rovnice. Postup je názorně předveden na řešených příkladech. Princip každé metody přibližného řešení algebraické rovnice je vysvětlen a všechny potřebné vzorce odvozeny. Jejich využití je opět ilustrováno na řešených příkladech.

Ve třetí kapitole práce je sbírka úloh, která demonstruje aplikaci přibližných metod. Řešení všSbírka úloh také nabízí zajímavé porovnání rychlostí konvergence jednotlivých metod. Zatímco například metoda regula falsi potřebovala k určení kořenu s danou přesností v intervalu $(1; 2)$ poměrně vysoký počet kroků (21), Newtonovou metodou jsme našli aproximaci kořene již po 7 krocích.

Řešení většiny příkladů v práci jsou má, kde tomu tak není, je uveden zdroj. Při tvorbě práce pro mě bylo nejnáročnější se vypořádat s formální stránkou práce. Samotná tvorba však pro mě byla obrovským přínosem, neboť nyní kladu více důraz na přesnost a věcnost mého vyjadřování. Zároveň jsem však získal určitý nadhled a další zkušenosti. Dle mého názoru má totiž metoda řetězových zlomků spíše teoretický význam než význam praktický, neboť je potřeba mnoho dalších výpočtů. V poměru účinnosti a obtížnosti je podle mě nejlepší Newtonova metoda, kterou bych využíval nejvíce.

Literatura

[1] BLAŽEK, Jaroslav, Milan KOMAN a Blanka VOJTÁŠKOVÁ. Algebra a teoretická aritmetika II. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Učebnice pro vysoké školy.

[2] BURLISCH, R., STOER J.: Introduction to Numerical Analysis. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[3] CHAPRA, Steven C. a Raymond P. CANALE. Numerical Methods for Engineers. 7th edition. New York: McGraw-Hill, 2015. ISBN 978-981-4670-87-6

[4] DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič a Isaak Abramovič MARON. Základy numerické matematiky. Praha: SNTL, 1966, 721 s. Teoretická knižnice inženýra.

[5] HOROVÁ, Ivana. MASARYKOVA UNIVERZITA. PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA. Numerické metody. Brno: Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2202-7

[6] MAROŠ, Bohumil a Marie MAROŠOVÁ. Základy numerické matematiky. Brno: Vysoké učení technické, 1997. ISBN 80-214-0826-X

[7] SCHWARZ, Štefan. Základy náuky o riešení rovníc. Praha: Československá akademie věd, 1958

[8] ŠISLER, Miroslav, ANDRYS Josef. O řešení algebraických rovnic. Praha: Mladá fronta, 1966. Škola mladých matematiků.