VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELY DOPRAVNÍCH ÚLOH

MATHEMATICAL MODELS FOR TRANSPORTATION PROBLEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — JAN BRZOBOHATÝ

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Jan Brzobohatý**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**RNDr. Pavel Popela, Ph.D.**
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické modely dopravních úloh

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student se seznámí s problematikou matematických modelů dopravních úloh, včetně jejich významu pro logistické aplikace. Při zpracování tématu využije své znalosti matematické analýzy, lineární algebry, pravděpodobnosti a matematické statistiky. Zaměří se zejména na úlohy matematického programování s důrazem na úlohy o toku v sítích a jejich zobecnění a transformace, které budou přiblíženy na názorných příkladech. Budou studovány vlastnosti vybraných úloh a jejich modifikací, a dále budou upraveny vhodné řešící algoritmy. Zvolené optimalizační modely a metody budou efektivně implementovány pomocí vybraného softwarového nástroje a budou realizovány testovací výpočty. Předpokládá se účast konzultantů specialistů Dr. Ing. M. Pvůase a Dr. Ing. R. Šompláka z ÚPI pro oblast dopravních úloh řešených v projektech na FSI na VUT.

Cíle bakalářské práce:

Předpokládá se vývoj původních i modifikace existujících modelů a algoritmů a jejich aplikace v návaznosti na problémy řešené v rámci spolupráce ústavu matematiky FSI VUT v Brně se specialisty v oblasti logistiky z norské Molde University College (prof. Arild Hofff, prof. Kjetil Kare Haugen) a stochastického programování z KPMS MFF UK (doc. M. Kopa).

Osnova:

1. Prezentace osvojených znalostí o matematických modelech dopravních úloh.
2. Zobecnění a modifikace optimalizačních modelů vybraných dopravních problémů.
3. Studium teoretických vlastností modelů a výběr efektivních algoritmů řešení.
4. Softwarová implementace navržených modelů a algoritmů, realizace testovacích výpočtů a analýza výsledků.

Seznam doporučené literatury:

BAZARAA, Mokhtar S.,JARVIS, John J. and SHERALI, Hanif D. Linear programming and network flows. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2010. ISBN 978-0-470-46272-0.

BIRGE, John R. and LOUVEAUX, François. Introduction to Stochastic Programming. Springer Verlag, 1997. ISBN: 978-1-4614-0236-7.

GHIANI, Gianpaolo, LAPORTE, Gilbert and MUSMANNO, Roberto. Introduction to logistics systems planning and control. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2004. ISBN 0-470-84917-7.

KALL, Peter and Stein W. WALLACE. Stochastic Programming. New York: John Wiley & Sons, 1993. ISBN 978-0471951582.

NASH, Stephen and SOFER, Ariela. Linear and nonlinear programming. McGraw-Hill, 1995. ISBN 978-0-89871-661-0.

RUSZCZYNSKI, Andrzej et al. Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 10: Stochastic Programming. Amsterdam: Elsevier. pp. 1-682. 2003. ISBN 978-0-444-50854-6.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá pojmem stochastická dominance a jeho aplikací v optimalizaci dopravních úloh. Cílem práce je položit základy pro nadefinování pojmu, popsání jeho hlavních vlastností a vysvětlení tohoto pojmu na jednoduchých příkladech. Dalším cílem je aplikovat poznatky o stochastické dominanci na síťové úlohy rozšířené o prvek náhody ve formě náhodné ceny přepravy. U příkladů uvedených v této práci je také nalezené řešení a kód pro programovací jazyk GAMS.

Summary

This bachelor's thesis deals with stochastic dominance. The goal is to lay the foundations for defining stochastic dominance, to describe its properties and to explain this term on simple examples. Another goal is to apply this term to network problems with random transport price. Examples in this thesis also contain solutions and code to find these solutions written in GAMS language.

Klíčová slova

Stochastická dominance, síťové úlohy, optimalizace, účelová funkce, uzlově hranová incidenční matice, omezení, GAMS, General Algebraic Modeling System

Keywords

Stochastic dominance, network flow problems, optimization, objective function, node-edge incidence matrix, bounds, GAMS, General Algebraic Modeling System

BRZOBOHATÝ, J.*Matematické modely dopravních úloh.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 37 s. Vedoucí RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Matematické modely dopravních úloh“ vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a pramenů.

Jan Brzobohatý

Děkuji panu RNDr. Pavlu Popelovi Ph.D. za odborné vedení práce.

Jan Brzobohatý

Obsah

1. Úvod

V této práci se budu zabývat pojmem *stochastická dominance* a jeho aplikací v síťových úlohách. Jedná se o pojem používaný v ekonomii, například při porovnávání investic.

Kladu si za cíl sepsat teorii stochastické dominance a pojmů k tomu potřebných, tak, aby se daly jednoduše aplikovat i do jiných vědních oborů než jenom do ekonomie. Dále si kladu za cíl popsat některé základní síťové úlohy a rozšířit je o náhodné jevy, které budu řešit stochastickou dominancí. V této práci bude také pro každou síťovou úlohu kód pro nalezení řešení v jazyce GAMS.

V druhé kapitole zavedu pojmy z pravděpodobnosti potřebné k nadefinování pojmu stochastická dominance a dalším rozvahám o něm. Třetí kapitola se bude zabývat sestavením základních modelů síťových úloh včetně jednotlivých názorných příkladů a jejich řešením. Ve třetí kapitole se také zmíním o základní teorii síťových úloh. Čtvrtá kapitola bude stěžejní, protože v ní nadefinuji pojem stochastická dominance a popíši některé její vlastnosti. Součástí třetí kapitoly bude také porovnávání tras a popsání množiny tras „lepších“ než nějaká jiná trasa. V poslední páté kapitole sestavím modely uvedené ve třetí kapitole upravené tak, aby na ně bylo možné aplikovat teorii, kterou se tato práce zabývá. Součástí budou i příklady s nalezeným řešením.

2. Pravděpodobnost

V této kapitole nadefinuji některé pojmy z teorie pravděpodobnosti, které využijeme později, až se budeme zabývat stochastickou dominancí. Začněme základními pojmy.

Zásadní pro nás bude hlavně pravděpodobnostní funkce a hustota pravděpodobnosti. Základním prostorem Ω nazveme neprázdnou množinu všech výsledků pozorovaného procesu. Jevovým polem nazveme dvojici (Ω, Σ), kde Σ je podmnožina množiny všech podmnožin $\mathcal{P}(\Omega)$, splňující: $\big(\forall A \in \Sigma : \overline{A} \in \Sigma\big) \ \wedge \ (\forall A_i \in \Sigma \ \forall i = 1, 2, \dots : \bigcup_i A_i \in \Sigma)$. Náhodným jevem A rozumíme libovolný prvek jevového pole. Zobrazení $P : \Sigma \to \langle 0; 1\rangle$ nazveme pravděpodobností, jestliže platí $P(\Omega) = 1$ a zároveň $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ pro posloupnost po dvou disjunktních jevů. Trojici (Ω, Σ, P) budeme nazývat pravděpodobnostní prostor.[1, 2, 6]

Definice 2.1. [1, 3] *Nechť (Ω, Σ, P) je pravděpodobnostní prostor. Náhodnou veličinou nazveme zobrazení $\xi : \Omega \ \to \mathbb{R}$, splňující $\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x\} \in \Sigma, \forall x \in \mathbb{R}$.*

V této práci bude náhodná veličina nejčastěji představovat dobu přepravy, nebo cenu za přepravu. Rozložení pravděpodobnosti v závislosti na době nebo ceně bude popisovat distribuční funkce.

Definice 2.2. [1, 3] *Zobrazení $F : \mathbb{R} \to \langle 0; 1\rangle$ definované vztahem $F(x) = P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x)\}$ nazveme distribuční funkcí náhodné proměnné ξ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P).*

Pokud je distribuční funkce náhodné proměnné ξ po částech konstantní, nazveme náhodnou veličinu ξ diskrétní. Pokud je distribuční funkce spojitá, nazveme náhodnou veličinu ξ spojitou. [1]

Definice 2.3. [1, 3] *Nechť ξ je diskrétní náhodná veličina. Potom funkci $p : \mathbb{R} \to \langle 0; 1\rangle$ definovanou $p(x) = P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\})$ nazveme pravděpodobnostní funkcí.*

Definice 2.4. [1, 3] *Nechť ξ je spojitá náhodná veličina a $F : \mathbb{R} \to \langle 0; 1\rangle$ je její distribuční funkce. Hustotou pravděpodobnosti nazveme takovou nezápornou funkci $f(x)$ splňující $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.*

Tyto pojmy se nám budou hodit ve třetí a čtvrté kapitole, když budeme porovnávat náhodné veličiny právě pomocí jejich pravděpodobnostních funkcí a hustot pravděpodobností.

Pro pozorování vlastností navazujících tras se nám bude hodit také náhodný vektor a některé jeho vlastnosti, proto si je nyní zavedeme. Pro úplnost zavedeme i ty, které nevyužijeme, ale nejdou bez nich nadefinovat některé další pojmy.

Definice 2.5. [1] *Nechť (Ω, Σ, P) je pravděpodobnostní prostor. Potom zobrazení $\boldsymbol{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ splňující $\{\omega \in \Omega | \boldsymbol{\xi}(\omega) < \boldsymbol{x}\} \in \Sigma, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ nazveme náhodným vektorem. Náhodný vektor budeme rozepisovat $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1 \cdots \xi_n)^\top$.*

Definice 2.6. [1, 4] *Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je náhodný vektor. Sdruženou distribuční funkcí vektoru $\boldsymbol{\xi}$ nazveme funkci $F(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \langle 0; 1\rangle$ definovanou vztahem $F(\boldsymbol{x}) = P(\{\omega \in \Omega | \boldsymbol{\xi}(\omega) < \boldsymbol{x}\})$.*

Podobně jako u náhodné veličiny nazveme náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ diskrétní, jestliže je jeho distribuční funkce po částech konstantní. Pokud je distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$ spojitá ve všech jeho proměnných $x_1, x_2, \cdots, x_n$, řekneme, že je náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ spojitý.[1]

Definice 2.7. [1, 4] *Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je diskrétní náhodný vektor. Sdruženou pravděpodobnostní funkcí nazveme zobrazení $p : \mathbb{R}^n \to \langle 0; 1\rangle$ definované vztahem $p(\boldsymbol{x}) = P(\{\omega \in \Omega | \boldsymbol{\xi}(\omega) = \boldsymbol{x}\})$.*

Definice 2.8. [1, 4] *Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je spojitý náhodný vektor. Funkci $f : \mathbb{R}^n \to \langle 0; \infty)$, pro kterou platí $\int\limits_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} = F(\boldsymbol{x})$, nazveme sdruženou hustotou pravděpodobnosti.*

Integrál $\int\limits_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ uvedený v předchozí definici je n-rozměrný integrál

$$\int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \cdots, t_n)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

Sdružená pravděpodobnostní funkce i sdružená hustota pravděpodobnosti jsou zobrazení z $\mathbb{R}^n$. Můžeme popsat i distribuční funkci a pravděpodobnostní funkci, respektive hustotou pravděpodobnosti, jednotlivých složek náhodného vektoru.

Definice 2.9. [1, 4] *Mějme $\boldsymbol{\xi}$ náhodný vektor. Marginální distribuční funkcí nazveme funkci $F_{\xi_i}(x_i) = \lim\limits_{\substack{x_j \to \infty \\ \forall j \neq i}} F(\boldsymbol{x})$.*

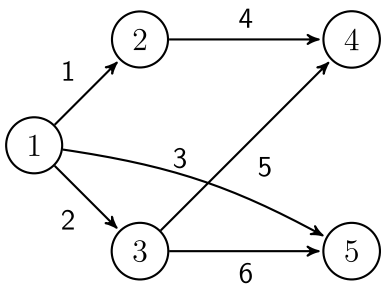
Definice 2.10. [1, 4] *Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je diskrétní náhodný vektor. Marginální pravděpodobnostní funkcí nazveme funkci $p_{\xi_i}(x_i) = \sum\limits_{\substack{x_j \\ \forall i \neq j}} p(\boldsymbol{x})$.*

Definice 2.11. [1, 4] *Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je spojitý náhodný vektor. Marginální hustotou pravděpodobnosti nazveme funkci $f_{\xi_i}(x_i) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \prod\limits_{\substack{j \\ j \neq i}} dx_j$.*

3. Síťové úlohy

V této kapitole se budeme zabývat síťovými úlohami a budeme se snažit minimalizovat cenu za přepravu. Budeme se sice zabývat hlavně přepravou zboží mezi továrnami, sklady a zákazníky, ale stejně tak bychom mohli pracovat s potrubím s plynem, toky peněz, přepravou lidí ve městě nebo letecky po celém světě.

Mějme graf s uzly s indexy j a hrany s indexy i spojující některé uzly. Uzly představují místa, mezi kterými přepravujeme, a hrany nám říkají, mezi kterými uzly je možná přeprava. Pro zpřehlednění budeme hrany vycházející z uzlu a do uzlu b označovat x_{ab}. Každé hraně (k, l) přiřadíme proměnnou x_{kl}, která popisuje přepravené množství po dané hraně.



Obrázek 3.1

Základní myšlenkou úlohy je minimalizace účelové funkce z, kterou lze popsat vztahem (3.1), kde c_i je jednotková cena za přepravu po hraně i.

$$z = \sum_i c_i \cdot x_i \tag{3.1}$$

V obecném problému bychom měli m vrcholů a n hran. Hrany můžeme zapsat do uzlově hranové incidenční matice grafu (3.2), která by pro úlohu zadanou obrázkem 3.1 vypadala následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & & & 1 & & \\ & -1 & & & 1 & 1 \\ & & & -1 & -1 & \\ & & -1 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Sloupce představují hrany, řádky uzly. V každém sloupci – hraně – je jedna kladná jednička a jedna záporná jednička. Hrana jde z uzlu s kladnou jedničkou do uzlu se zápornou jedničkou. Je zde také vidět, kolik hran vede z daného uzlu a kolik vede do něj. Matici (3.2) vynásobíme sloupcovým vektorem x_i a tento součin porovnáváme s vektorem b. Vektor b omezuje uzly. Pokud je $b = 0$, zboží tímto uzlem prochází, ale všechno zboží, které do něj vejde, jej zase opustí jinou hranou. V případě, že $b > 0$, v uzlu zboží vzniká, může se jednat například o továrnu. Poslední případ je $b < 0$, potom v uzlu zboží „zaniká“ a je potřeba je do něj dopravit.

Další základní omezení je omezení samotných rozhodovacích proměnných. V případě dopravy se hodí nezáporné hodnoty x_{ij}. Můžeme také omezit, jaké maximální množství se smí hranou přepravit.

$$A \cdot x \lesseqgtr b \tag{3.3}$$

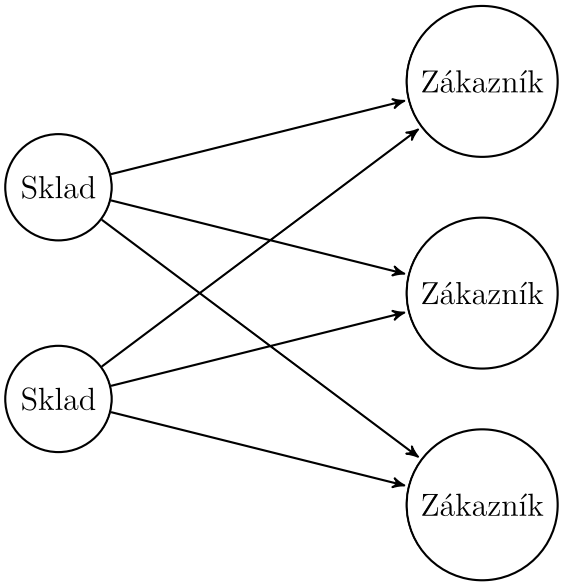
$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad \forall i \tag{3.4}$$

Soustavu rovnic a nerovnic (3.3) a (3.4) s účelovou funkcí (3.1) lze řešit simplexovou metodou.

Více informací o síťových úlohách a jejich řešení lze najít např. ve zdrojích, ze kterých jsem čerpal [7, 9, 11]. Dále jsem zde čerpal z přednášky Arilda Hoffa [14].

3.1. Úloha se sklady a zákazníky

Představme si situaci, ve které máme za úkol s co nejvyšším ziskem zásobovat zákazníky zbožím, které je ve skladech. Každý sklad má svou kapacitu, kterou nemůže překročit, každý zákazník potřebuje nějaké množství zboží, které mu musíme dodat, a mezi každým skladem a každým zákazníkem vede trasa s vlastní cenou za přepravu jednotkového množství. Tento problém ilustruje obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: Graf skladů a zákazníků.

Pro větší přehlednost zavedeme označení v tabulce 3.1. Sklady a zákazníky očíslujeme tak, že nejprve očíslujeme sklady a pak budeme číslovat zákazníky.

Kapacity skladů, poptávku a cenu za přepravu jedné bedny máme zadané tabulkou 3.2. Naším úkolem je zvolit, jaké množství zboží se převeze z každého skladu každému zákazníkovi, tedy hodnoty x_{ij} tak, aby každý zákazník z z množiny všech zákazníků $\mathbb{Z}$ dostal alespoň tolik, kolik poptává (3.5), aby se z každého skladu s z množiny všech skladů $\mathbb{S}$ posílalo nejvýše tolik, jaká je jeho kapacita (3.6), a zároveň abychom zaplatili co nejméně za přepravu, viz tabulku 3.3.

S	Počet skladů	
Z	Počet zákazníků	
$\mathbb{S}$	Množina skladů	$\mathbb{S} = \{1, 2, \cdots, S\}$
$\mathbb{Z}$	Množina zákazníků	$\mathbb{Z} = \{S+1, S+2, \cdots, S+Z\}$
$\mathbb{H}$	Množina cest mezi sklady a zákazníky	$\mathbb{H} = \{1, 2, \cdots, S \cdot Z\}$
K_i	Kapacita skladu i	$i \in \mathbb{S}$
P_j	Poptávka zákazníka j	$j \in \mathbb{Z}$
c_{ij}	Cena za přepravu bedny z i do j	$(i, j) \in \mathbb{H}$
x_{ij}	Přepravené množství z i do j	$(i, j) \in \mathbb{H}$

Tabulka 3.1: Symboly.

	Zákazník 3	Zákazník 4	Zákazník 5	Kapacita
Sklad 1	90	105	110	250
Sklad 2	110	95	90	200
Poptávka	150	75	175	

Tabulka 3.2: Kapacita, poptávka a cena za přepravu.

	Zákazník 3	Zákazník 4	Zákazník 5	Odesláno	Kapacita
Sklad 1	x_{13}	x_{14}	x_{15}	$\sum_z x_{1z}$	250
Sklad 2	x_{23}	x_{24}	x_{25}	$\sum_z x_{2z}$	200
Přijato	$\sum_s x_{s3}$	$\sum_s x_{s4}$	$\sum_s x_{s5}$		
Poptávka	150	75	175		

Tabulka 3.3: Hledané hodnoty a omezení.

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} x_{sz} \geq P_z \quad \forall z \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} x_{sz} \leq K_s \quad \forall s \in \mathbb{S} \tag{3.6}$$

Nyní už nám zbývá jen vytvořit účelovou funkci (3.7). Snažíme se minimalizovat cenu za přepravu. Za každou bednu přepravenou po jedné z tras zaplatíme cenu danou tabulkou 3.2.

$$\min_{x_{sz},\,(s,z) \in \mathbb{H}} \sum_{(s,z) \in \mathbb{H}} c_{sz} \cdot x_{sz} \tag{3.7}$$

Řešení lze najít například pomocí software GAMS. Nalezené řešení je v tabulce 3.4, hodnota účelové funkce je 39875.

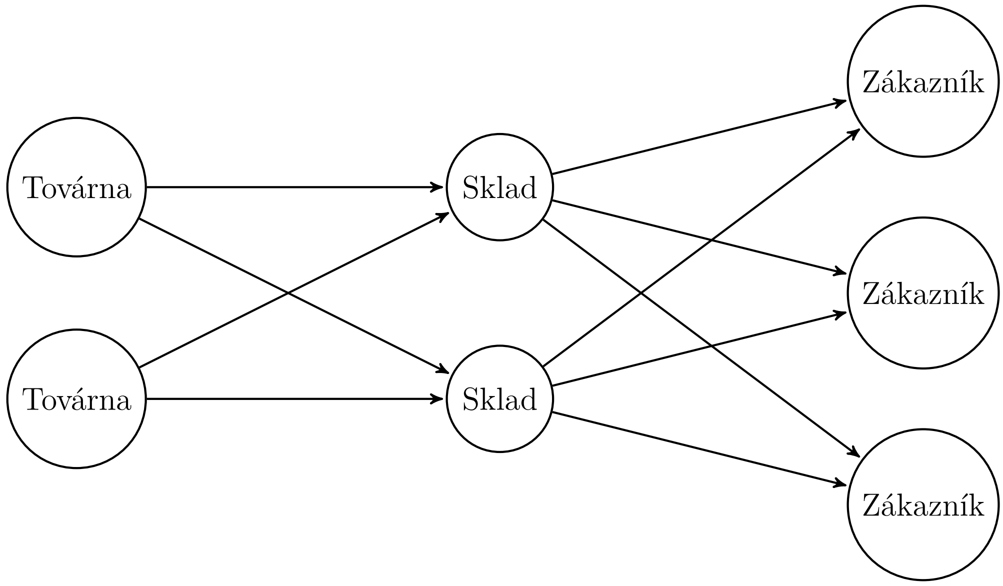
	Zákazník 3	Zákazník 4	Zákazník 5
Sklad 1	75	0	175
Sklad 2	75	75	0

Tabulka 3.4: Nalezené optimální řešení první úlohy.

```
Set
    s 'sklady'    / 1,2 /
    z 'zakaznici'/ 3,4,5 /;

Parameter
    k(s) 'kapacita'
           / 1      250
             2      200 /

    p(z) 'poptavka'
           / 3      150
             4      75
             5      175 /;

Table c(s,z) 'cena'
           3          4          5
    1      90         105        110
    2      110        75         175;

Variable
    x(s,z) 'pocet prepravenych beden'
    t      'celkova cena za prepravu';

Positive Variable x;

Equation
    cost      'ucelova funkce'
    supply(s) 'odvezene mnozstvi'
    demand(z) 'dovezene mnozstvi';

cost..       t =e= sum((s,z), c(s,z) * x(s,z));

supply(s).. sum(z, x(s,z)) =l= k(s);

demand(z).. sum(s, x(s,z)) =g= p(z);

Model transport / all /;

solve transport using lp minimizing t;
```

3.2. Přeprava z továren zákazníkům přes sklady

Nyní rozšíříme předchozí úlohu – přidáme zásobování skladů továrnami. Továrny mohou zásobovat sklady, ale každá továrna má danou kapacitu výroby. Zboží můžeme vozit z každé továrny do každého skladu, každá z těchto tras má vlastní cenu za přepravu jednotkového množství. Tyto trasy jsou vidět ta obrázku 3.3. Ze skladu nemůžeme odvézt víc, než kolik do něj přivezeme z továren, kapacitu skladu z minulé úlohy nyní chápeme jako jeho maximální kapacitu. Tyto hodnoty jsou zadané tabulkou 3.6. Ty hodnoty, které byly i v minulém příkladě, zůstávají stejné. Všechny potřebné symboly jsou v tabulce 3.5.



Obrázek 3.3: Graf továren, skladů a zákazníků.

S	Počet skladů	
Z	Počet zákazníků	
T	Počet továren	
$\mathbb{T}$	Množina továren	$\mathbb{T} = \{1, \cdots, T\}$
$\mathbb{S}$	Množina skladů	$\mathbb{S} = \{T+1, 2, \cdots, T+S\}$
$\mathbb{Z}$	Množina zákazníků	$\mathbb{Z} = \{T+S+1, S+2, \cdots, T+S+Z\}$
$\mathbb{H}$	Množina cest	$\mathbb{H} = \{(T \times S) \cup (S \times Z)\}$
K_i	Kapacita skladu i	$i \in \mathbb{S}$
P_j	Poptávka zákazníka j	$j \in \mathbb{Z}$
V_k	Kapacita výroby továrny k	$k \in \mathbb{T}$
c_{ij}	Cena za přepravu bedny z i do j	$(i, j) \in \mathbb{H}$
x_{ij}	Přepravené množství z i do j	$(i, j) \in \mathbb{H}$

Tabulka 3.5: Symboly.

Tak jako v minulé úloze musíme uspokojit poptávku zákazníků, platí tedy nerovnice (3.5). Podmínka (3.6) sice také musí platit, ale není postačující pro popsání modelu. Potřebujeme zajistit, aby do skladu nebylo přivezeno více zboží, než se do něj vejde (3.8), a navíc, aby z něj nebylo odvezeno víc, než kolik do něj bylo dovezeno (3.9).

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} x_{ts} \leq K_s \quad \forall s \in \mathbb{S} \tag{3.8}$$

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} x_{sz} \leq \sum_{t \in \mathbb{T}} x_{ts} \quad \forall s \in \mathbb{S} \tag{3.9}$$

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7	Kapacita
Továrna 1	100	90				285
Továrna 2	80	110				775
Sklad 3			90	105	110	250
Sklad 4			110	95	90	200
Poptávka			150	75	175	

Tabulka 3.6: Poptávka, kapacita a cena za přepravu.

Je vidět, že podmínka (3.6) přímo plyne z nerovnic (3.8) a (3.9). Dále nesmíme zapomenout, že každá továrna má svou kapacitu výroby, kterou nesmíme překročit (3.10).

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} x_{ts} \leq K_t \quad \forall t \in \mathbb{T} \tag{3.10}$$

Pro nejnižší náklady za přepravu potom minimalizujeme účelovou funkci (3.11) s podmínkami (3.5), (3.8), (3.9) a (3.10).

$$\min_{x_{sz},\,(s,z) \in \mathbb{H}} \sum_{(s,z) \in \mathbb{H}} c_{sz} \cdot x_{sz} \tag{3.11}$$

Hodnota účelové funkce v nalezeném optimálním řešení 5.8 je 74875.

	Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7	Odesláno	Kapacita
Továrna 1	x_{13}	x_{14}				$\sum_s x_{1s}$	285
Továrna 2	x_{23}	x_{24}				$\sum_s x_{2s}$	175
Sklad 3			x_{35}	x_{36}	x_{37}	$\sum_z x_{3z}$	250
Sklad 4			x_{45}	x_{46}	x_{47}	$\sum_z x_{4z}$	200
Přijato	$\sum_t x_{t3}$	$\sum_t x_{t4}$	$\sum_s x_{s5}$	$\sum_s x_{s6}$	$\sum_s x_{s7}$		
Poptávka			150	75	175		

Tabulka 3.7: Hledané hodnoty a omezení.

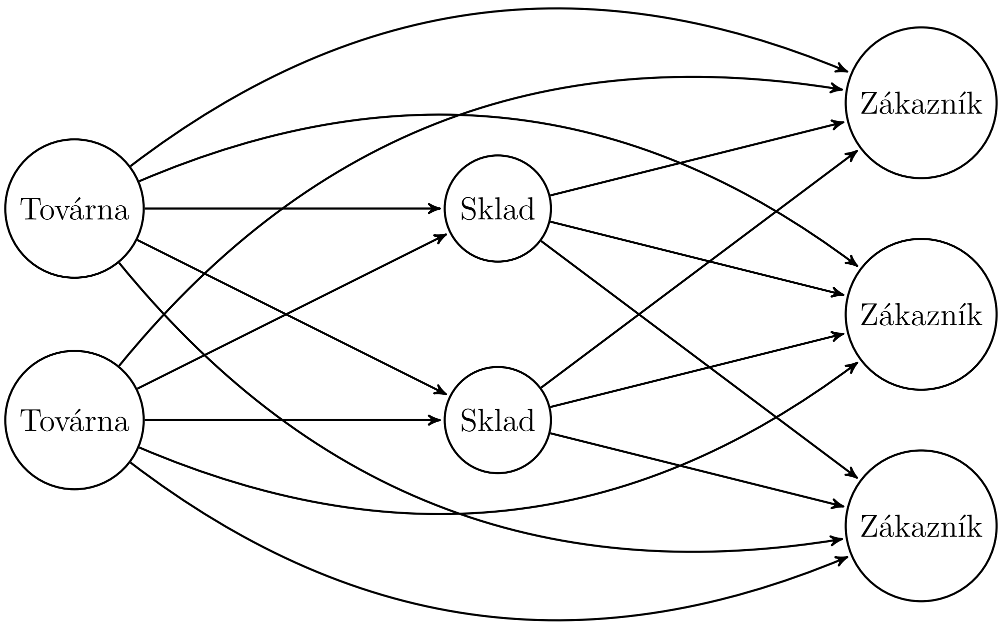
	Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7
Továrna 1	75	150			
Továrna 2	175	0			
Sklad 3			75	0	175
Sklad 4			75	75	0

Tabulka 3.8: Řešení nalezené pomocí software GAMS.

```
Set
    t 'tovarny'   / 1,2 /
    s 'sklady'    / 3,4 /
    z 'zakaznici'/ 5,6,7 /;

Parameter
    v(t) 'kapacita vyroby'
          / 1       285
            2       175 /
    k(s) 'kapacita'
          / 3       250
            4       200 /
    p(z) 'poptavka'
          / 5       150
            6       75
            7       175 /;

Table c1(t,s) 'cena tovarna-sklad'
              3        4
    1         100      90
    2         80       110;
Table c2(s,z) 'cena sklad-zakaznik'
              5        6        7
    3         90       105      110
    4         110      75       175;

Variable
    x1(t,s) 'pocet prepravenych beden tovarna-sklad'
    x2(s,z) 'pocet prepravenych beden sklad-zakaznik'
    celkem       'celkova cena za prepravu';

Positive Variable x1,x2;

Equation
    cost               'ucelova funkce'
    demand(z)          'dovezene mnozstvi'
    kapacita_s(s)      'kapacita skladu'
    kapacita_t(t)      'kapacita vyroby tovarny'
    bilance(s)         'bilance skladu';

cost..           celkem =e= (sum((t,s), c1(t,s) * x1(t,s))
                           +sum((s,z), c2(s,z) * x2(s,z)));
demand(z)..      sum(s, x2(s,z)) =g= p(z);
kapacita_s(s).. sum(t, x1(t,s)) =l= k(s);
kapacita_t(t).. sum(s, x1(t,s)) =l= v(t);
bilance(s)..     sum(z, x2(s,z)) =l= sum(t, x1(t,s));

Model transport / all /;
solve transport using lp minimizing celkem;
```

3.3. Přeprava z továren zákazníkům přes sklady a přeprava přímo

Znova rozšíříme naši úlohu, tentokrát přidáme možnost zásobovat zákazníky rovnou ze skladu tak, jak je zobrazeno v diagramu 3.4. Tabulka 3.9 se od tabulky 3.5 liší jen množinou cest, stačí tedy přidat jen hodnoty c_{tz} (tabulka 3.10) a přibydou navíc proměnné x_{tz} (tabulka 3.11).



Obrázek 3.4: Graf továren, skladů a zákazníků.

S	Počet skladů	
Z	Počet zákazníků	
T	Počet továren	
$\mathbb{T}$	Množina továren	$\mathbb{T} = \{1, \cdots, T\}$
$\mathbb{S}$	Množina skladů	$\mathbb{S} = \{T+1, 2, \cdots, T+S\}$
$\mathbb{Z}$	Množina zákazníků	$\mathbb{Z} = \{T+S+1, S+2, \cdots, T+S+Z\}$
$\mathbb{H}$	Množina cest	$\mathbb{H} = \{(T \times S) \cup (S \times Z) \cup (T \times Z)\}$
K_i	Kapacita skladu i	$i \in \mathbb{S}$
P_j	Poptávka zákazníka j	$j \in \mathbb{Z}$
V_k	Kapacita výroby továrny k	$k \in \mathbb{T}$
c_{ij}	Cena za přepravu bedny z i do j	$(i, j) \in \mathbb{H}$
x_{ij}	Přepravené množství z i do j	$(i, j) \in \mathbb{H}$

Tabulka 3.9: Symboly.

Podmínky (3.8) a (3.9) použijeme stejně jako v minulé úloze, ale podmínky (3.5) a (3.10) musíme upravit a nahradit podmínkami (3.13) a (3.12). Podmínka (3.12) říká že, z továrny nesmíme poslat skladům a zákazníkům víc, než kolik je její kapacita výroby.

Podmínka (3.13) říká, že každému zákazníkovi se musí ze všech továren a skladů poslat alespoň tolik, kolik poptává.

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} x_{ts} + \sum_{z \in \mathbb{Z}} x_{tz} \leq K_t \quad \forall t \in \mathbb{T} \tag{3.12}$$

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} x_{sz} + \sum_{t \in \mathbb{T}} x_{tz} \geq P_z \quad \forall z \in \mathbb{Z} \tag{3.13}$$

Pro nalezení nejlevnějšího rozdělení přepravy ještě doplníme účelovou funkci (3.14). Pro zjednodušení zápisu budu zapisovat hledané množství x a jednotkovou cenu c přepravy mezi dvěma body obecně s indexy ab, ať už se jedná o přepravu z továrny do skladu nebo jakoukoli jinou.

$$\min_{x_{ab},\,(a,b) \in \mathbb{H}} \sum_{(a,b) \in \mathbb{H}} c_{ab} \cdot x_{ab} \tag{3.14}$$

Nalezené řešení je v tabulce 3.12. Hodnota účelové funkce je 74125.

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7	Kapacita
Továrna 1	100	90	205	190	210	285
Továrna 2	80	110	190	200	195	175
Sklad 3			90	105	110	250
Sklad 4			110	95	90	200
Poptávka			150	75	175	

Tabulka 3.10: Poptávka, kapacita a cena za přepravu.

	Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7	Odesláno	Kapacita
Továrna 1	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	$\sum_{b \in \mathbb{S} \cup \mathbb{Z}} x_{1b}$	285
Továrna 2	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	$\sum_{b \in \mathbb{S} \cup \mathbb{Z}} x_{2b}$	175
Sklad 3			x_{35}	x_{36}	x_{37}	$\sum_{z} x_{3z}$	250
Sklad 4			x_{45}	x_{46}	x_{47}	$\sum_{z} x_{4z}$	200
Přijato	$\sum_{t} x_{t3}$	$\sum_{t} x_{t4}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b5}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b6}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b7}$		
Poptávka			150	75	175		

Tabulka 3.11: Hledané hodnoty a omezení.

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7
Továrna 1	0	75	0	0	150
Továrna 2	175	0	0	0	0
Sklad 3			150	0	25
Sklad 4			0	75	0

Tabulka 3.12: Řešení nalezené pomocí software GAMS.

```
Set
    t 'tovarny'   / 1,2 /
    s 'sklady'    / 3,4 /
    z 'zakaznici'/ 5,6,7 /;

Parameter
    v(t) 'kapacita vyroby'
          / 1      285
            2      175 /
    k(s) 'kapacita'
          / 3      250
            4      200 /
    p(z) 'poptavka'
          / 5      150
            6      75
            7      175 /;

Table c1(t,s) 'cena tovarna-sklad'
            3        4
    1       100      90
    2       80       110;
Table c2(s,z) 'cena sklad-zakaznik'
            5        6        7
    3       90       105      110
    4       110      75       175;
Table c3(t,z) 'cena tovarna-zakaznik'
            5        6        7
    1       205      190      210
    2       190      200      195;

Variable
    x1(t,s) 'pocet prepravenych beden tovarna-sklad'
    x2(s,z) 'pocet prepravenych beden sklad-zakaznik'
    x3(t,z) 'pocet prepravenych beden tovarna-zakaznik'
    celkem  'celkova cena za prepravu';
Positive Variable x1, x2, x3;

Equation
    cost             'ucelova funkce'
    demand(z)        'dovezene mnozstvi'
    kapacita_s(s)    'kapacita skladu'
    kapacita_t(t)    'kapacita vyroby tovarny'
    bilance(s)       'bilance skladu';
cost..           celkem =e= sum((t,s), c1(t,s) * x1(t,s))
                          + sum((s,z), c2(s,z) * x2(s,z))
                          + sum((t,z), c3(t,z) * x3(t,z));

demand(z)..      sum(s, x2(s,z)) + sum(t, x3(t,z)) =g= p(z);

kapacita_s(s).. sum(t ,x1(t,s)) =l= k(s);

kapacita_t(t).. sum(s, x1(t,s)) + sum(z, x3(t,z)) =l= v(t);

bilance(s)..     sum(z, x2(s,z)) =l= sum(t, x1(t,s));

Model transport / all /;
solve transport using lp minimizing celkem;
```

3.4. Přeprava více produktů z továren zákazníkům přes sklady a přímo

V této úloze přidáme druhý produkt. Továrny nyní budou muset svoji kapacitu rozdělit mezi dva různé produkty, které různě využívají kapacitu výroby, sklady se budou plnit různými produkty, které zabírají odlišně velkou část prostoru skladu, viz tabulku 3.15. Zákazníci poptávají dvě množství dvou produktů. Cena za přepravu pro oba produkty zůstane stejná, viz tabulku 5.9. Symboly jsou popsány v tabulce 3.13.

S	Počet skladů	
Z	Počet zákazníků	
T	Počet továren	
E	Počet výrobků	
$\mathbb{T}$	Množina továren	$\mathbb{T} = \{1, \cdots, T\}$
$\mathbb{S}$	Množina skladů	$\mathbb{S} = \{T+1, 2, \cdots, T+S\}$
$\mathbb{Z}$	Množina zákazníků	$\mathbb{Z} = \{T+S+1, S+2, \cdots, T+S+Z\}$
$\mathbb{E}$	Množina výrobků	$\mathbb{E} = \{1, \cdots, E\}$
$\mathbb{H}$	Množina cest	$\mathbb{H} = \{(T \times S \times E) \cup$ $\cup (S \times Z \times E) \cup (T \times Z \times E)\}$
R_e	Rozměr výrobku e	$e \in \mathbb{E}$
N_e	Náklady na výrobu výrobku e	$e \in \mathbb{E}$
K_i	Kapacita skladu i	$i \in \mathbb{S}$
$P_{j,k}$	Poptávka zákazníka j po produktu k	$(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{E}$
V_k	Kapacita výroby továrny k	$k \in \mathbb{T}$
c_{ij}	Cena za přepravu bedny z i do j	$(i,j) \in \mathbb{H}$
x_{ije}	Přepravené množství zboží e z i do j	$(i,j) \in \mathbb{H}$, $e \in \mathbb{E}$

Tabulka 3.13: Symboly.

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7	Kapacita
Továrna 1	100	90	205	190	210	285
Továrna 2	80	110	190	200	195	175
Sklad 3			90	105	110	250
Sklad 4			110	95	90	200
Poptávka 1			100	45	95	
Poptávka 2			75	55	80	

Tabulka 3.14: Poptávka, kapacita a cena za přepravu.

	Rozměr	Náklady na výrobu
Výrobek 1	1	0,8
Výrobek 2	1,5	1

Tabulka 3.15: Velikost výrobků a náklady.

Podívejme se na podmínky, které musí tento model splňovat. Žádná továrna nemůže produkovat víc, než kolik je její kapacita (3.15). Musí platit bilance dovezeného a od-

		Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7	Odesláno	Kapacita
Továrna 1	Výrobek 1	x_{131}	x_{141}	x_{151}	x_{161}	x_{171}	$\sum_{b \in \mathbb{S} \cup \mathbb{Z}} x_{1b}$	285
	Výrobek 2	x_{132}	x_{142}	x_{152}	x_{162}	x_{172}	$\sum_{b \in \mathbb{S} \cup \mathbb{Z}} x_{1b}$	285
Továrna 2	Výrobek 1	x_{231}	x_{241}	x_{251}	x_{261}	x_{271}	$\sum_{b \in \mathbb{S} \cup \mathbb{Z}} x_{2b}$	175
	Výrobek 2	x_{232}	x_{242}	x_{252}	x_{262}	x_{272}	$\sum_{b \in \mathbb{S} \cup \mathbb{Z}} x_{2b}$	175
Sklad 3	Výrobek 1			x_{351}	x_{361}	x_{371}	$\sum_{z} x_{3z}$	250
	Výrobek 2			x_{352}	x_{362}	x_{372}	$\sum_{z} x_{3z}$	250
Sklad 4	Výrobek 1			x_{451}	x_{461}	x_{471}	$\sum_{z} x_{4z}$	200
	Výrobek 2			x_{452}	x_{462}	x_{472}	$\sum_{z} x_{4z}$	200
Přijato	Výrobek 1	$\sum_{t} x_{t3}$	$\sum_{t} x_{t4}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b5}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b6}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b7}$		
	Výrobek 2	$\sum_{t} x_{t3}$	$\sum_{t} x_{t4}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b5}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b6}$	$\sum_{b \in \mathbb{T} \cup \mathbb{S}} x_{b7}$		
Poptávka	Výrobek 1			100	45	95		
	Výrobek 2			75	55	80		

Tabulka 3.16: Hledané hodnoty a omezení.

vezeného zboží v každém skladu (3.16). Dále nesmí být v žádném skladu víc zboží, než se do něj vejde (3.17). Nakonec stačí zajistit, aby každý zákazník dostal každého zboží alespoň tolik, kolik ho poptává (3.18).

$$\sum_{s \in \mathbb{S},\, e \in \mathbb{E}} x_{tse} \cdot N_e + \sum_{z \in \mathbb{Z},\, e \in \mathbb{E}} x_{tze} \cdot N_e \leq V_t \quad \forall t \in \mathbb{T} \tag{3.15}$$

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} x_{tse} \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}} x_{sze} \quad \forall s \in \mathbb{S},\, \forall e \in \mathbb{E} \tag{3.16}$$

$$\sum_{t \in \mathbb{T},\, e \in \mathbb{E}} x_{tse} \cdot R_e \leq K_s \quad \forall s \in \mathbb{S} \tag{3.17}$$

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} x_{tze} + \sum_{s \in \mathbb{S}} x_{sze} \geq P_z \quad \forall z \in \mathbb{Z},\, \forall e \in \mathbb{E} \tag{3.18}$$

$$\min_{x_{abe},\, (a,b) \in \mathbb{H},\, e \in \mathbb{E}} \sum_{(a,b) \in \mathbb{H},\, e \in \mathbb{E}} c_{ab} \cdot x_{abe} \tag{3.19}$$

Nalezené optimální řešení s hodnotou účelové funkce 82450 je v tabulce 3.17.

```
Set
    t 'tovarny'   / 1,2 /
    s 'sklady'    / 3,4 /
    z 'zakaznici'/ 5,6,7 /
    e 'vyrobky'   / v1,v2 /;
Parameter
    v(t) 'kapacita vyroby'
          / 1      285
            2      175 /
    k(s) 'kapacita'
          / 3      250
            4      200 /
     n(e) 'naklady na vyrobu'
          / v1     0.8
            v2     1 /
     r(e) 'rozmery'
          / v1     1
            v2     1.5 /;
Table p(z,e) 'poptavka'
          v1       v2
     5    100      75
     6    45       55
     7    95       80;
Table c1(t,s) 'cena tovarna-sklad'
              3        4
    1         100      90
    2         80       110;
Table c2(s,z) 'cena sklad-zakaznik'
              5        6        7
    3         90       105      110
    4         110      75       175;
Table c3(t,z) 'cena tovarna-zakaznik'
              5        6        7
    1         205      190      210
    2         190      200      195;
Variable
    x1(t,s,e) 'pocet prepravenych beden tovarna-sklad'
    x2(s,z,e) 'pocet prepravenych beden sklad-zakaznik'
    x3(t,z,e) 'pocet prepravenych beden tovarna-zakaznik'
    celkem   'celkova cena za prepravu';
Positive Variable x1, x2, x3;
Equation
    cost               'ucelova funkce'
    demand(z,e)        'dovezene mnozstvi'
    kapacita_s(s)      'kapacita skladu'
    kapacita_t(t)      'kapacita vyroby tovarny'
    bilance(s,e)       'bilance skladu';
cost ..           celkem =e= sum((t,s,e), c1(t,s) * x1(t,s,e))
                           + sum((s,z,e), c2(s,z) * x2(s,z,e))
                           + sum((t,z,e), c3(t,z) * x3(t,z,e));
demand(z,e) ..    sum(s, x2(s,z,e)) + sum(t, x3(t,z,e)) =g= p(z,e);
kapacita_s(s) .. sum((t,e) ,x1(t,s,e) * r(e)) =l= k(s);
kapacita_t(t) .. sum((s,e), x1(t,s,e) * n(e))
               + sum((z,e), x3(t,z,e) * n(e)) =l= v(t);
bilance(s,e) ..   sum(z, x2(s,z,e)) =l= sum(t, x1(t,s,e));
Model transport / all /;
solve transport using lp minimizing celkem;
```

		Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7
Továrna 1	Výrobek 1		45			57,5
	Výrobek 2	10	55			80
Továrna 2	Výrobek 1	137,5				
	Výrobek 2	65				
Sklad 3	Výrobek 1			100		37,5
	Výrobek 2			75		
Sklad 4	Výrobek 1				45	
	Výrobek 2				55	

Tabulka 3.17: Nalezené řešení.

4. Stochastická dominance

4.1. Zavedení pojmu stochastická dominance

Mějme možnost výběru ze dvou tras, po kterých trvá přeprava různě dlouhou dobu. Tyto možnosti však závisí na situaci, dejme tomu na hustotě provozu. Trasu A projedeme za mírného provozu za 10 minut, za hustého za 20 minut. Trasu B projedeme za mírného provozu také za 10 minut, ale za hustého provozu nám zabere jen 15 minut. Intuitivně je zřejmé, že trasa B je lepší. Jedním z aparátů pro porovnání takovýchto možností je *stochastická dominance.*[8, 13]

Stochastická dominance se využívá ke srovnávání možností. Abychom se vyhnuli nesrovnalostem s označováním, co je lepší, přiřadíme lepší možnosti vyšší hodnotu. Pokud bychom maximalizovali zisk, nic bychom dělat nemuseli. Protože se ale snažíme minimalizovat zpoždění, které je nežádané, budeme maximalizovat „neztracené časy“ -10, -15 a -20 minut.

Definice 4.1. *Nechť ξ, ζ jsou náhodné proměnné a $F(x)$, $G(x)$ jsou jejich distribuční funkce. Řekneme, že náhodná proměnná ξ má stochastickou dominanci prvního stupně nad náhodnou proměnnou ζ, jestliže*

$$F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$F(x) > G(x) \quad \textit{pro nějaké } x \in \mathbb{R}.$$

Dominanci prvního stupně budeme značit $\xi\, D_1\, \zeta$.

Nyní můžeme říct, že trasa B prvním stupněm dominuje trasu A.

Věta 4.2. *Relace „prvním stupněm dominuje“ je tranzitivní a asymetrická.*

Důkaz. $(\xi\, D_1\, \zeta \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \xi \geq \zeta) \wedge (\zeta\, D_1\, \tau \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \zeta \geq \tau) \Rightarrow \xi \geq \tau$,
$\exists x \in \mathbb{R} : \xi > \zeta \geq \tau \Rightarrow \xi > \tau$
Z těchto dvou implikací plyne, že $\xi\, D_1\, \tau$.
Asymetrie plyne z vlastností relace $>$. □

Tato definice platí jak pro diskrétní náhodnou proměnnou, tak pro spojitou náhodnou proměnnou.

Definice 4.3. *Nechť ξ, ζ jsou náhodné proměnné a $F(x)$, $G(x)$ jsou jejich distribuční funkce. Řekneme, že náhodná proměnná ξ má stochastickou dominanci druhého stupně nad náhodnou proměnnou ζ, jestliže*

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{x} G(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt > \int_{-\infty}^{x} G(t)\,dt \quad \textit{pro nějaké } x \in \mathbb{R}.$$

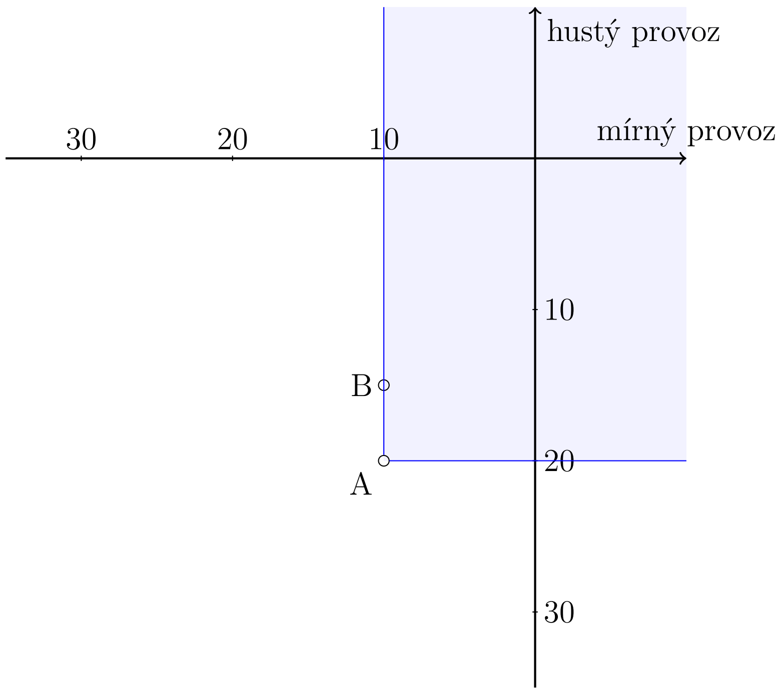
Dominanci druhého stupně budeme značit $\xi\, D_2\, \zeta$.

Věta 4.4. *Má-li ξ stochastickou dominanci prvního stupně nad ζ, pak má i stochastickou dominanci druhého stupně.*

Důkaz.
$$F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff F(x) - G(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Potom platí
$$\int_{-\infty}^{x} (F(t) - G(t))\, \mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
což je ekvivalentní s prvním podmínkou v definici.
$$F(x) > G(x) \quad \text{pro nějaké } x \in \mathbb{R} \iff F(x) - G(x) > 0 \quad \text{pro nějaké } x \in \mathbb{R}$$
a
$$F(x) - G(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Distribuční funkce je zprava spojitá, proto když vlastnost $F(x) > G(x)$ platí v jednom bodě, platí i v nějakém intervalu, který tento bod obsahuje. Zvolíme-li pevně bod x v tomto intervalu, pak integrál
$$\int_{-\infty}^{x} (F(t) - G(t))\, \mathrm{d}t$$
je určitě kladný.
$$\int_{-\infty}^{x} F(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} G(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} (F(t) - G(t))\, \mathrm{d}t > 0$$
pro zvolené $x \in \mathbb{R}$, které určitě existuje. □

4.2. Porovnávání tras

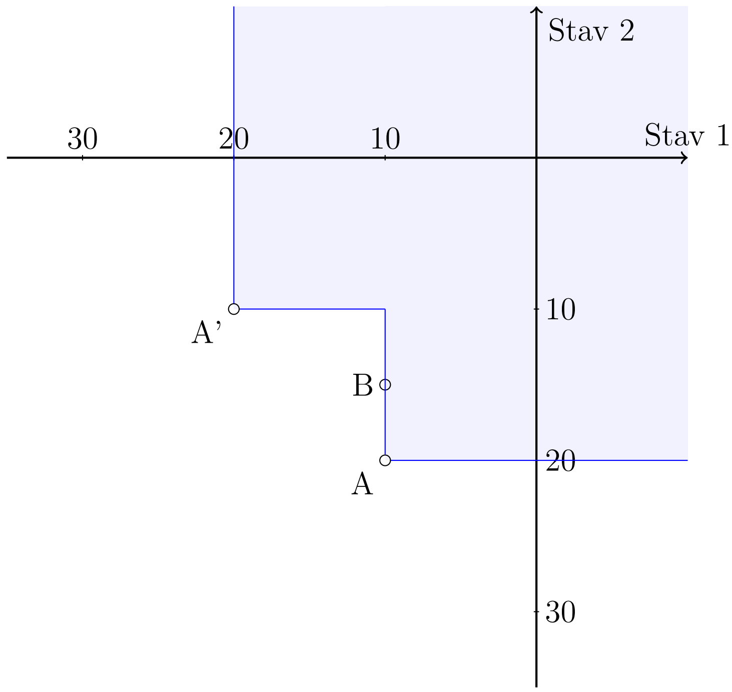
Pokud bychom znali jednu trasu a chtěli hledat nějakou lepší, hodilo by se nám znát, jak vypadá množina dominující známou trasu. Tuto množinu pro náš příklad s trasami A a B z této kapitoly zobrazuje obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Množina tras dominujících trasu A prvním stupněm.

Na vodorovné ose je čas při rychlejší variantě, na svislé ose je čas při delší variantě. Body v rovině leží podle možných časů přepravy jejich trasy. Čas rychlejší varianty udává jeho vodorovnou polohu, čas pomalejší varianty udává jeho svislou polohu. Bod A má při rychlejší variantě „neztracený čas“ 10 minut a při pomalejší variantě 20 minut. Proto má souřadnice $[10, 20]$. Modré jsou potom všechny body, které splňují definici stochastické dominance prvního stupně. V tomto případě jsou to takové trasy, které jsou v jedné situaci alespoň tak dobré jako trasa A, a v jedné situaci jsou ostře lepší. Takovýmto grafem však lze popsat pouze diskrétní náhodnou veličinu s dvěma elementárními jevy. Každá osa totiž popisuje jeden ze stavů, které mohou nastat. Pokud bychom chtěli přidat třetí stav, museli bychom přidat třetí osu.

K trase A, kterou trvá projet 10 nebo 20 minut existuje trasa A', která jde projet za 20 nebo 10 minut. Je vidět, že jde v podstatě o tu stejnou trasu, proto nahradíme stavy „mírný provoz“ a „hustý provoz“ stavy „stav 1“ a „stav 2“. Množina dominující takto rozšířenou trasu A je zobrazena v grafu 4.2.

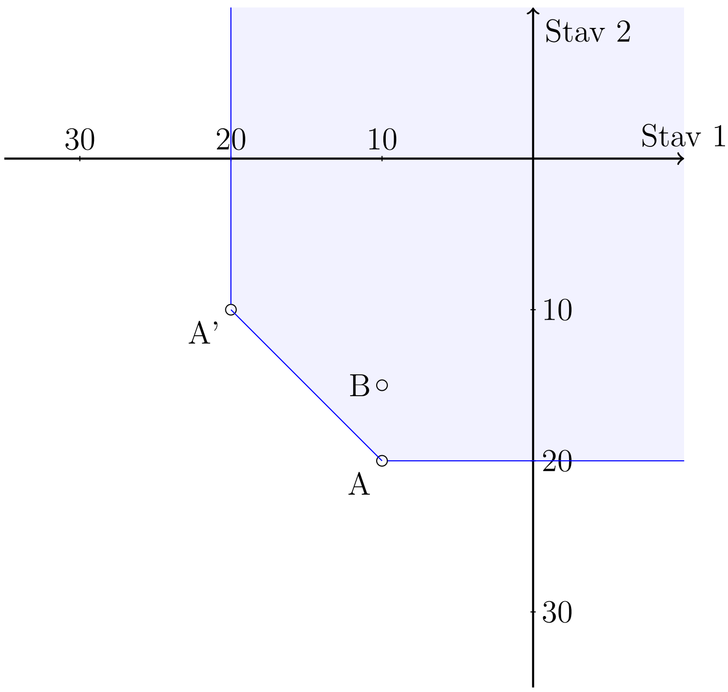


Obrázek 4.2: Množina tras dominujících trasu A prvním stupněm.

Ukažme si ještě, jak vypadají distribuční funkce tras A a B. Graf 4.4a zobrazuje distribuční funkce náhodných proměnných tras A a B. Trasa A má pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že bude trvat deset minut, v bodě $t = 10$ se tedy její hodnota zvýší o $\frac{1}{2}$. Stejně tak se zvýší o $\frac{1}{2}$ v bodě $t = 20$. Distribuční funkce trasy B se také zvýší o polovinu v čase 20 minut, protože je to také jedna z jejích variant, poprvé se ale zvýší její hodnota až v čase 15 minut. Je vidět, že distribuční funkce jsou si na intervalech $\langle -\infty; 15\rangle$ a $\langle 20; \infty\rangle$ rovny, a že na intervalu $\langle 15; 20\rangle$ je distribuční funkce B ostře větší než distribuční funkce A. To znamená, že trasa B dominuje trasu A prvním stupněm.

Graf 4.4b ukazuje, že na intervalu $\langle -\infty; 15\rangle$ jsou si integrály z distribučních funkcí rovny, a že na intervalu $(15; \infty\rangle$ je integrál distribuční funkce trasy B ostře větší než integrál distribuční funkce trasy A. To znamená, že trasa B dominuje trasu A druhým stupněm.

Nyní už nám jen zbývá rozmyslet, jak bude vypadat množina tras dominující trasu A druhým stupněm.

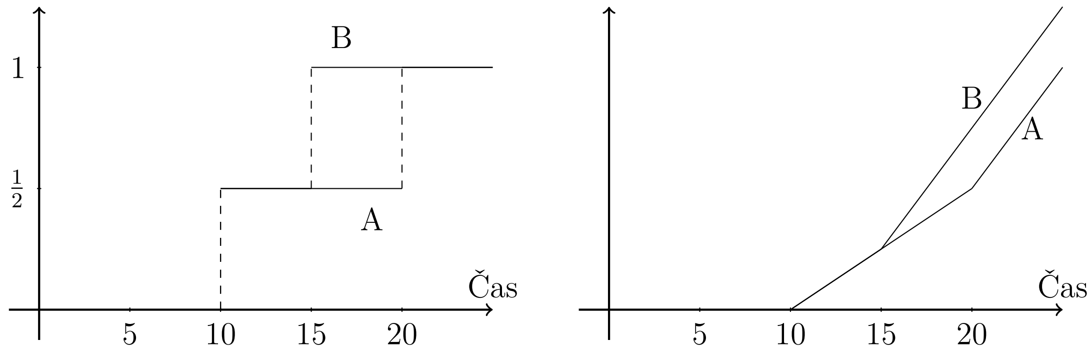


Obrázek 4.3: Množina tras dominujících trasu A druhým stupněm.

To je vidět na obrázku 4.3. Víme, že stochastická dominance prvního stupně implikuje stochastickou dominanci druhého stupně. Proto musí množina na obrázku obsahovat i množinu z obrázku 4.2. Na otevřené úsečce AA' jsou trasy, jejichž distribuční funkce poprvé skokově zvýší hodnotu až po čase 10 minut, integrály těchto distribučních funkcí jsou tedy nulové i po čase 10 minut, proto splňují druhou podmínku z definice 4.3. Úsečka AA' je symetrická podle osy kvadrantu, proto platí, že o kolik pomalejší je rychlá varianta, o tolik je rychlejší pomalá varianta. V distribuční funkci se to projeví tak, že poprvé se zvýší její hodnota nějaký čas po první rychlé variantě trasy A, a podruhé stejně dlouhý čas před pomalou variantou trasy A. Integrál distribuční funkce libovolné trasy ležící na úsečce AA' má tedy v čase pomalejší varianty trasy A (v tomto případě $t = 20$ minut) a po něm stejnou hodnotu, jako integrál distribuční funkce trasy A. Z toho plyne, že splňuje i první podmínku definice 4.3. Otevřená úsečka tedy také patří do množiny tras dominujících trasu A druhým stupněm. Body ležící v takto vzniklém trojúhelníku potom určitě leží v této množině, protože dominují prvním stupněm nějaký bod z této úsečky.

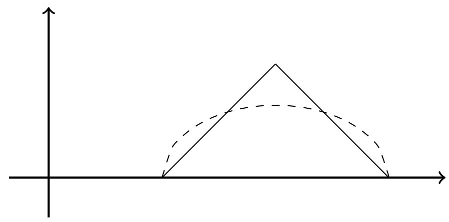
Trasy mohou mít i více časů na přepravu než dva, mohou jich mít nekonečně mnoho, a mohou mít dokonce spojité náhodné rozdělení. Porovnejme rozdělení z grafu 4.5. Jedno má tvar rovnoramenného trojúhelníku (plné), druhé půlky elipsy (čárkované). Z grafu 4.6a je patrné, že ani jedno nedominuje to druhé prvním stupněm. Z grafu 4.6b však plyne, že druhé rozdělení dominuje to první druhým stupněm.

Může také nastat situace, že některá z tras se skládá z dvou nebo více tras na sebe navazujících. V tomto případě danou trasu popisuje více hustot pravděpodobnosti tvořící náhodný vektor.

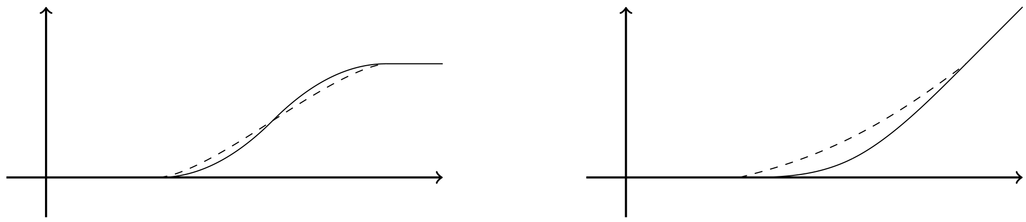


(a) Distribuční funkce.　　(b) Integrály z distribučních funkcí.

Obrázek 4.4: Porovnání tras A a B.

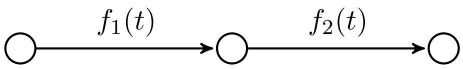


Obrázek 4.5: Rozdělení se spojitou hustotou pravděpodobnosti.



(a) Distribuční funkce.　　(b) Integrály z distribučních funkcí.

Obrázek 4.6: Porovnání tras se spojitou hustotou pravděpodobnosti.



Obrázek 4.7

Řešení tohoto problému odvodíme na jedné trase skládající se ze dvou dílčích tras. První trasa má hustotu pravděpodobnosti doby přepravy $f_1(x)$, druhá trasa $f_2(x)$ (obrázek 4.7). Tyto náhodné veličiny uvažujeme nezávislé. Hustota pravděpodobnosti pro pevný čas t^* se dá spočítat jako součet součinů hustot pravděpodobností $f_1(t_1) \cdot f_2(t_2)$ všech možných dvojic dob přepravy t_1 a t_2 takových, že pro jejich součet platí $t_1 + t_2 = t^*$. Když z tohoto vztahu vyjádříme t_2 a součet součinů vyjádříme integrálem, získáme $\int f_1(t_1) \cdot f_2(t^* - t_1) \mathrm{d}t_1$. Hustota pravděpodobnosti času přepravy po dvou navazujících trasách s hustotami $f_1(x)$ a $f_2(x)$ je konvoluce těchto dvou hustot.

Další informace lze najít např. v [8, 10, 12, 15].

5. Aplikace stochastické dominance na síťové úlohy

V této kapitole se budeme zabývat úlohami z kapitoly 3 za předpokladu, že každá cesta mezi dvěma uzly má dvě možné ceny, které jsou stejně pravděpodobné. Chceme nabídnou základní myšlenku, jak originálně zahrnout vybrané ideje stochastické dominance do síťových úloh. Tedy uvažujeme 2 skupiny cen, které nazveme scénáři s pravděpodobnostmi 0,5. Budeme k tomu používat model pro zjednodušený nutný a postačující test stochastické dominance prvního stupně [5], kterým budeme hledat, jak optimálně přepravovat zboží. Pro zjednodušení nás ale hodnota účelové funkce v optimálním řešení zajímat nebude. Soustředíme se totiž jen na hledání dominujícího řešení nikoliv na testování. Drobným rozdílem bude, že budeme oproti příkladům v kapitole 3 maximalizovat zápornou cenu, tak jak to bylo popsáno v úvodu minulé kapitoly. Účelová funkce bude mít tvar součtu součinů všech cen za přepravu po dané trase a přepravovaného množství po dané trase podle inspirace v [5] pro portfolia. Tyto trasy si rozdělíme do skupin sklad–zákazník, továrna–sklad, továrna–zákazník a v poslední úloze ještě to samé pro druhý produkt. Pro každou tuto skupinu budeme potřebovat permutační matici P (v kódu GAMSu bude označena písmeny y). Tyto matice budeme uvažovat v každém příkladě pro každou skupinu a budu počítat s tím, že splňují potřebné vlastnosti permutačních matic. Druhá skupina podmínek, potřebných pro funkci modelu, bude pro každou situaci u, která může ve všech skupinách nastat, vypadat následovně (5.1), kde $c^0_{u'}$ je hodnota účelové funkce nějakého řešení dopravního problému pro scénář u' vůči kterému hledáme dominující řešení maximalizující naši účelovou funkci. Tato hodnota $c^0_{u'}$ může být pro názornost při tvorbě v kódu GAMSu volena uměle například jako prvek z matice cen přepravy c.

$$\sum_{\mathbb{H}} c_{abu} \cdot x_{ab} \leq \sum_{u'} c^0_{u'} \cdot P_{uu'} \quad \forall u \tag{5.1}$$

5.1. Úloha zásobování zákazníků sklady s náhodnou cenou přepravy

Stejně jako v kapitole 3.1 budeme mít dva sklady, kterými budeme zásobovat tři zákazníky (viz obrázek 3.2). Budeme také používat stejné symboly (3.1), ke kterým přidáme ještě u. Tím budeme značit situace, které mohou na trasách nastat. V tomto příkladu, ve kterém vozíme zákazníkům zboží ze skladů, nastane na každé trase právě jedna ze dvou situací – dvou cen za přepravu, které mají obě stejnou pravděpodobnost. Pro u tedy bude platit $u \in \{1, 2\}$. Stále budeme požadovat splnění nerovnic (3.5) a (3.6), které zaručují uspokojení poptávky a nepřekročení kapacity skladu. Účelová funkce (5.2) bude velmi podobná jako ta v kapitole 3.1, jedná se o modifikaci účelové funkce dle [5].

$$\max_{x_{ab},\,(a,b)\in\mathbb{H}} \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{H},\\ u\in\{1,2\}}} c_{abu} \cdot x_{ab} \tag{5.2}$$

Tabulka hledaných hodnot a omezení 3.3 zůstane stejná, tabulku udávající kapacity skladů, poptávky zákazníků a cenu za přepravu 3.2 však musíme nahradit tabulkou 5.1.

Jedním důvodem je potřeba uvést obě ceny za přepravu, druhým důvodem je skutečnost, že musíme změnit znaménko ceny, protože se na ni v tomto případě díváme jako na „záporný zisk“, který budeme maximalizovat, viz začátek minulé kapitoly. Jak jsme naznačili, zvolíme nejprve $c_u^0 = c_{13}$, viz GAMS.

	Zákazník 3	Zákazník 4	Zákazník 5	Kapacita
Sklad 1	-90/-95	-105/-110	-110/-105	250
Sklad 2	-110/-105	-95/-90	-90/-95	200
Poptávka	150	75	175	

Tabulka 5.1: Kapacita, poptávka a cena za přepravu.

Řešení nalezené pomocí software GAMS je v tabulce 5.2

```
set u /1, 2/; alias(u,uu);
Set
    s 'sklady'    / 1,2 /
    z 'zakaznici'/ 3,4,5 /;
positive variable x(s,z), y(u,uu);
Parameter
    k(s) 'kapacita'
          / 1       250
            2       200 /
    p(z) 'poptavka'
          / 3       150
            4       75
            5       175 /;
table c(s,u,z) 'cena'
               3        4        5
1    .1        -90      -105     -110
1    .2        -95      -110     -105
2    .1        -110     -95      -90
2    .2        -105     -90      -95;
variable ucfce;
equation       pmr(u)        'soucet v radku matice P'
               pms(uu)       'soucet ve sloupci matice P'
               st(u)         'podminky pro T'
               cost          'ucelova funkce'
               demand(z)     'poptavka zakazniku'
               supply(s)     'kapacity skladu';
pmr(u)..       sum(uu, y(u,uu)) =E= 1;
pms(uu)..      sum(u,  y(u,uu)) =E= 1;
st(u)..        sum((s,z), c(s,u,z) * x(s,z)) =L=
               sum(uu, c("1",uu,"3") * y(u,uu));
cost..         ucfce =e= sum((s,u,z), c(s,u,z) * x(s,z));
demand(z).. sum(s,x(s,z)) =g= p(z);
supply(s).. sum(z,x(s,z)) =l= k(s);
model sd1 /all/;
solve sd1 using LP maximizing ucfce;
display x.L, y.L;
```

Z důvodu efektivnosti algoritmického řešení obecně jsme zprvu v GAMSu neuplatnili podmínku celočíselnosti na prvky permutační matice y (viz GAMS). Dle [5] tedy získané řešení dominuje zadané fiktivní řešení i dominancí druhého stupně. Navíc, protože prvky y jsou v řešení přesto celočíselné, řešení v tabulce 5.6 je navíc stochasticky dominující 1. stupně. Více v dodatku ve formě zip souboru.

	Zákazník 3	Zákazník 4	Zákazník 5
Sklad 1	150	50	0
Sklad 2	0	25	75

Tabulka 5.2: Nalezené optimální řešení.

Opusťme dočasně zjednodušenou ideu použití fiktivního řešení pro hledání dominujícího řešení. Uvažujme řešení úlohy z kapitoly 3.1 pro jiné ceny. Pro toto řešení můžeme spočítat hodnoty c_u^0 pro aktuální scénáře pomocí fixace proměnných v GAMSu (viz dodatek se soubory). Tyto hodnoty pak využijeme pro úpravu dosavadního GAMS kódu níže.

```
set u /1, 2/; alias(u,uu);
Set
   s 'sklady'    / 1,2 /
   z 'zakaznici'/ 3,4,5 /;
positive variable x(s,z), y(u,uu);
Parameter
   k(s) 'kapacita'
        / 1      250
          2      200 /
   p(z) 'poptavka'
        / 3      150
          4      75
          5      175 /
   c0(u) / 1   -40125,
           2   -39875 /    ;
table c(s,u,z) 'cena'
             3        4        5
1   .1       -90      -105     -110
1   .2       -95      -110     -105
2   .1       -110     -95      -90
2   .2       -105     -90      -95;
variable ucfce;
equation     pmr(u)        'soucet v radku matice P'
             pms(uu)       'soucet ve sloupci matice P'
             st(u)         'podminky pro T'
             cost          'ucelova funkce'
             demand(z)     'poptavka zakazniku'
             supply(s)     'kapacity skladu';
pmr(u)..     sum(uu, y(u,uu)) =E=1;
pms(uu)..    sum(u,  y(u,uu)) =E=1;
st(u)..      sum((s,z), c(s,u,z) * x(s,z)) =L=
             sum(uu, c0(uu) * y(u,uu));
cost..       ucfce =e=sum((s,u,z), c(s,u,z) * x(s,z));
demand(z).. sum(s,x(s,z)) =e= p(z);
supply(s).. sum(z,x(s,z)) =l= k(s);
model sd1 /all/;
solve sd1 using LP maximizing ucfce;
display x.L, y.L, ucfce.L, demand.L, supply.L, st.L;
```

	Zákazník 3	Zákazník 4	Zákazník 5
Sklad 1	100	25	125
Sklad 2	50	50	50

Tabulka 5.3: Nalezené optimální řešení pozměněné úlohy.

V tabulce vidíme řešení úlohy pro hledání dominující varianty, opět jsou prvky matice y celočíselné.

5.2. Zásobování zákazníků továrnami přes sklady s náhodnou cenou

Tento příklad vznikne z příkladu v kapitole 3.2 stejnými změnami, jakými vznikl minulý příklad z příkladu v kapitole 3.1. Symboly zůstanou stejné jako v úloze v kapitole 3.2, viz tabulku 3.5. K nim přibydou ještě další dva 5.4.

u	možné situace přepravy továrna–sklad	$u \in \{1, 2\}$
w	možné situace přepravy sklad–zákazník	$w \in \{1, 2\}$

Tabulka 5.4: Nové symboly.

Stejně jako v minulém příkladě využijeme omezení z třetí kapitoly, konkrétně (3.5), (3.8), (3.9) a (3.10). Účelovou funkci (5.3) získáme stejnou úpravou účelové funkce 3.11 jako v minulém příkladu.

$$\max_{x_{ab}\,(a,b)\in\mathbb{H}} \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{H},\\ u,w\in\{1,2\}}} (c_{tsu} \cdot x_{ts} + c_{szw} \cdot x_{sz}) \tag{5.3}$$

Součástí modelu jsou také permutační matice pro proměnné u a w a také 4 nerovnice (jedna pro každou dvojici u a w) potřebné pro správný výpočet stochastické dominance. Dále musíme opatřit jednotkovou cenu za přepravu záporným znaménkem a musíme zadat druhou variantu ceny. Poptávka zákazníků a kapacita továren a skladů se oproti úloze v kapitole 3.2 nezmění. Tyto hodnoty jsou v tabulce 5.5. Vypočítané dominující řešení je v tabulce 5.6.

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7	Kapacita
Továrna 1	-100/-95	-90/-95				285
Továrna 2	-90/-80	-105/-110				775
Sklad 3			-90/-95	-105/-110	-110/-105	250
Sklad 4			-110/-105	-95/-90	-90/-95	200
Poptávka			150	75	175	

Tabulka 5.5: Poptávka, kapacita a cena za přepravu.

Podobně jako v kapitole 5.1 by bylo možné zahrnout řešení kapitoly 3.2.

```
Set u /1, 2/, w/1,2/; alias(u,uu);alias(w,ww);
Set
    t 'tovarny'   / 1,2 /
    s 'sklady'    / 3,4 /
    z 'zakaznici'/ 5,6,7 /;
positive variable x1(t,s), x2(s,z), y(u,uu), yy(w,ww);
Parameter
    v(t) 'kapacita vyroby'
          / 1      285
            2      175 /
    k(s) 'kapacita'
          / 3      250
            4      200 /
    p(z) 'poptavka'
          / 5      150
            6      75
            7      175 /;
Table c1(t,u,s) 'cena tovarna-sklad'
              3        4
1    .1       -100     -90
1    .2       -95      -95
2    .1       -90      -105
2    .2       -80      -110;
table c2(s,w,z) 'cena sklad-zakaznik'
              5        6        7
3    .1       -90      -105     -110
3    .2       -95      -110     -105
4    .1       -110     -95      -90
4    .2       -105     -90      -95;
variable ucfce;
equation      pmr1(u)            'soucet v radku matice P'
              pms1(uu)           'soucet ve sloupci matice P'
              pmr2(w)
              pms2(ww)
              st(u,w)            'podminky pro T'
              cost               'ucelova funkce'
              demand(z)          'poptavka zakazniku'
              kapacita_s(s)      'kapacity skladu'
              kapacita_t(t)      'kapacita tovaren'
              bilance(s);
pmr1(u)..         sum(uu, y(u,uu)) =E= 1;
pms1(uu)..        sum(u,  y(u,uu)) =E= 1;
pmr2(w)..         sum(ww, yy(w,ww)) =E= 1;
pms2(ww)..        sum(w,  yy(w,ww)) =E= 1;
st(u,w)..         sum((t,s,z), c1(t,u,s) * x1(t,s) + c2(s,w,z) * x2(s,z))
                  =L= sum((uu,ww), c1("1",uu,"3") * y(u,uu)
                               + c2("3",ww,"5") * yy(w,ww));
cost..            ucfce =e= (sum((t,s,u,w,z), c1(t,u,s) * x1(t,s)
                                       + c2(s,w,z) * x2(s,z)));
demand(z)..       sum(s, x2(s,z)) =g= p(z);
kapacita_s(s)..   sum(t, x1(t,s)) =l= k(s);
kapacita_t(t)..   sum(s, x1(t,s)) =l= v(t);
bilance(s)..      sum(z, x2(s,z)) =l= sum(t, x1(t,s));
model sd2 /all/;
solve sd2 using LP maximizing ucfce;
display x1.L,x2.L;
```

	Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7
Továrna 1	25	200			
Továrna 2	175	0			
Sklad 3			150	50	0
Sklad 4			0	25	175

Tabulka 5.6: Řešení nalezené pomocí software GAMS.

5.3. Zásobování zákazníků továrnami a sklady s náhodnou cenou

Nyní přidáme druhou možnou cenu přepravy i do třetí úlohy. Protože zde máme tři různé druhy zásobování (továrna–sklad, sklad–zákazník a továrna–zákazník), budeme potřebovat tři pomocné proměnné u, w a f. Každá z tras bude mít dvě možné ceny, proto platí $u, w, f \in \{1, 2\}$.

Znovu využijeme podmínky (3.8), (3.9), (3.12) a (3.13). Účelovou funkci upravíme stejně jako ve dvou minulých příkladech (5.4).

$$\max_{x_{ab}\,(a,b)\in\mathbb{H}} \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{H},\\ u,w,f\in\{1,2\}}} (c_{tsu}\cdot x_{ts} + c_{szw}\cdot x_{sz} + c_{tzf}\cdot x_{tz}) \tag{5.4}$$

Je vidět, účelová funkce je součet financí zaplacených za celkovou přepravu veškerého zboží při všech možných kombinacích cen za přepravu. Analogicky jako v minulých příkladech upravíme také tabulku, kterou zadáváme kapacity, poptávky a ceny za přepravu 5.7. Nezapomene ani na tři permutační matice a na 8 nerovnic nutných pro stochastickou dominanci.

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7	Kapacita
Továrna 1	-100/-95	-90/-95	-235/-225	-215/-205	-210/-200	285
Továrna 2	-90/-80	-105/-110	-210/-235	-220/-205	-220/-200	175
Sklad 3			-90/-95	-105/-110	-110/-105	250
Sklad 4			-110/-105	-95/-90	-90/-95	200
Poptávka			150	75	175	

Tabulka 5.7: Poptávka, kapacita a cena za přepravu.

	Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7
Továrna 1	0	0	0	75	175
Továrna 2	150	0	0	0	0
Sklad 3			150	0	0
Sklad 4			0	0	0

Tabulka 5.8: Řešení nalezené pomocí software GAMS.

```
Set u /1, 2/, w/1,2/, f/1,2/; alias(u,uu);alias(w,ww);alias(f,ff);
Set
    t 'tovarny'   / 1,2 /
    s 'sklady'    / 3,4 /
    z 'zakaznici'/ 5,6,7 /;
positive variable x1(t,s),x2(s,z),x3(t,z), y1(u,uu),y2(w,ww),y3(f,ff);
Parameter
    v(t) 'kapacita vyroby'
          / 1       285
            2       175 /
    k(s) 'kapacita'
              / 3       250
            4       200 /
    p(z) 'poptavka'
          / 5       150
            6       75
            7       175 /;
Table c1(t,u,s) 'cena tovarna-sklad'
                3          4
1    .1         -100       -90
1    .2         -95        -95
2    .1         -90        -105
2    .2         -80        -110;
table c2(s,w,z) 'cena sklad-zakaznik'
                5          6          7
3    .1         -90        -105       -110
3    .2         -95        -110       -105
4    .1         -110       -95        -90
4    .2         -105       -90        -95;
table c3(t,f,z) 'cena tovarna-zakaznik'
                5          6          7
1    .1         -235       -215       -210
1    .2         -225       -205       -200
2    .1         -210       -220       -220
2    .2         -235       -205       -200;
variable ucfce;
equation        pmr1(u)             'soucet v radku matice P'
                pms1(uu)            'soucet ve sloupci matice P'
                pmr2(w)
                pms2(ww)
                pmr3(f)
                pms3(ff)
                st(u,w,f)           'podminky pro T'
                cost                'ucelova funkce'
                demand(z)           'poptavka zakazniku'
                kapacita_s(s)       'kapacity skladu'
                kapacita_t(t)       'kapacita tovaren'
                bilance(s);
pmr1(u)..       sum(uu, y1(u,uu)) =E= 1;
pms1(uu)..      sum(u,  y1(u,uu)) =E= 1;
pmr2(w)..       sum(ww, y2(w,ww)) =E= 1;
pms2(ww)..      sum(w,  y2(w,ww)) =E= 1;
pmr3(f)..       sum(ff, y3(f,ff)) =E= 1;
pms3(ff)..      sum(f,  y3(f,ff)) =E= 1;
```

```
st(u,w,f)..       sum((t,s,z), c1(t,u,s) * x1(t,s) + c2(s,w,z) * x2(s,z)
                           + c3(t,f,z) * x3(t,z)) =L=
                  sum((uu,ww,ff), c1("1",uu,"3") * y1(u,uu)
                                + c2("3",ww,"5") * y2(w,ww)
                                + c3("1",ff,"5") * y3(f,ff));
cost..             ucfce =e= (sum((t,s,u,w,z,f), c1(t,u,s) * x1(t,s)
                                           + c2(s,w,z) * x2(s,z)
                                           + c3(t,f,z) * x3(t,z)));
demand(z)..       sum(s, x2(s,z)) + sum(t, x3(t,z)) =g= p(z);
kapacita_s(s)..   sum(t, x1(t,s)) =l= k(s);
kapacita_t(t)..   sum(s, x1(t,s)) + sum(z, x3(t,z)) =l= v(t);
bilance(s)..      sum(z, x2(s,z)) =l= sum(t, x1(t,s));
model sd3 /all/;
solve sd3 using LP maximizing ucfce;
```

Tak jako v kapitole 5.1 by bylo možné zahrnout řešení kapitoly 3.3.

5.4. Zásobování dvěma produkty s náhodnou cenou za přepravu

I v této úloze použijeme stejné symboly jako v její jednodušší variantě bez více cen za přepravu a také k nim přidáme symboly popisující dané situace. Ty budou stejně jako v minulé úloze u, w a f pro první produkt, navíc k nim přidáme $u2$, $w2$ a $f2$ pro druhý produkt. Tak jako v ostatních příkladech stále platí $u, w, f, u2, w2, f2 \in \{1, 2\}$, protože stále máme dvě varianty cen.

Omezení pro továrny, sklady a zákazníky zůstávají stejná jako v kapitole 2.4, proto je můžeme využít i v tomto případě – (3.15)(3.16)(3.17)(3.18). Účelovou funkci upravíme pro potřeby této úlohy (5.5).

$$\max_{x_{ab},\,(a,b)\in\mathbb{H}} \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{H},\\ u,w,f,u2,w2,f2\in\{1,2\}}} (c_{tsu}\cdot x_{ts} + c_{szw}\cdot x_{sz} + c_{tzf}\cdot x_{tz} + c_{tsu2}\cdot x_{ts} + c_{szw2}\cdot x_{sz} + c_{tzf2}\cdot x_{tz}) \tag{5.5}$$

Protože jsou však ceny přepravy pro oba produkty stejné, můžeme účelovou funkci upravit (5.6). Změní se sice její hodnota v optimu, ale řešení ve smyslu „kolik se má přepravit každou trasou“ zůstane stejné.

$$\max_{x_{sz},\,(s,z)\in\mathbb{H}} \sum_{\substack{(s,z)\in\mathbb{H},\\ u,w,f\in\{1,2\}}} c_{tsu}\cdot x_{ts} + c_{szw}\cdot x_{sz} + c_{tzf}\cdot x_{tz} \tag{5.6}$$

	Sklad 3	Sklad 4	Zákazník 5	Zákazník 6	Zákazník 7	Kapacita
Továrna 1	-100/-95	-90/-95	-235/-225	-215/-205	-210/-200	285
Továrna 2	-90/-80	-105/-110	-210/-235	-220/-205	-220/-200	175
Sklad 3			-90/-95	-105/-110	-110/-105	250
Sklad 4			-110/-105	-95/-90	-90/-95	200
Poptávka 1			100	45	95	
Poptávka 2			75	55	80	

Tabulka 5.9: Poptávka, kapacita a cena za přepravu.

		Sklad 3	Sklad 4	Zák. 5	Zák. 6	Zák. 7
Továrna 1	Výrobek 1				45	95
	Výrobek 2				55	80
Továrna 2	Výrobek 1	100				
	Výrobek 2	75				
Sklad 3	Výrobek 1			100		
	Výrobek 2			75		
Sklad 4	Výrobek 1					
	Výrobek 2					

Tabulka 5.10: Nalezené řešení.

```
set u /1, 2/, w/1,2/, f/1,2/, u2 /1, 2/, w2/1,2/, f2/1,2/;
alias(u,uu);alias(w,ww);alias(f,ff);
alias(u2,uu2);alias(w2,ww2);alias(f2,ff2);
Set
    t 'tovarny'  / 1,2 /
    s 'sklady'   / 3,4 /
    z 'zakaznici'/ 5,6,7 /
    e 'vyrobky' /v1, v2/;
positive variable x1(t,s),x2(s,z),x3(t,z),x4(t,s),x5(s,z),x6(t,z),
y1(u,uu),y2(w,ww),y3(f,ff), y12(u2,uu2),y22(w2,ww2),y32(f2,ff2);
Parameter
    v(t) 'kapacita vyroby'
          / 1      285
            2      175 /
    k(s) 'kapacita'
          / 3      250
            4      200 /
     n(e) 'naklady na vyrobu'
          / v1     0.8
            v2     1 /
     r(e) 'rozmery'
          / v1     1
            v2     1.5 /;
Table p(z,e) 'poptavka'
          v1       v2
     5    100      75
     6    45       55
     7    95       80;
```

```
Table c1(t,u,s) 'cena tovarna-sklad'
               3         4
1    .1        -100      -90
1    .2        -95       -95
2    .1        -90       -105
2    .2        -80       -110;
table c2(s,w,z) 'cena sklad-zakaznik'
               5         6         7
3    .1        -90       -105      -110
3    .2        -95       -110      -105
4    .1        -110      -95       -90
4    .2        -105      -90       -95;
table c3(t,f,z) 'cena tovarna-zakaznik'
               5         6         7
1    .1        -235      -215      -210
1    .2        -225      -205      -200
2    .1        -210      -220      -220
2    .2        -235      -205      -200;
variable ucfce;
equation       pmr1(u)                   'soucet v radku matice P'
               pms1(uu)                  'soucet ve sloupci matice P'
               pmr2(w)
               pms2(ww)
               pmr3(f)
               pms3(ff)
               pmr4(u2)
               pms4(uu2)
               pmr5(w2)
               pms5(ww2)
               pmr6(f2)
               pms6(ff2)
               st(u,w,f,u2,w2,f2)        'podminky pro T'
               cost                      'ucelova funkce'
               demand1(z)                'poptavka zakazniku'
               demand2(z)                'poptavka zakazniku'
               kapacita_s(s)             'kapacity skladu'
               kapacita_t(t)             'kapacita tovaren'
               bilance1(s)               'bilance skladu'
               bilance2(s)               'bilance skladu';
pmr1(u)..               sum(uu,  y1(u,uu)) =E= 1;
pms1(uu)..              sum(u,   y1(u,uu)) =E= 1;
pmr2(w)..               sum(ww,  y2(w,ww)) =E= 1;
pms2(ww)..              sum(w,   y2(w,ww)) =E= 1;
pmr3(f)..               sum(ff,  y3(f,ff)) =E= 1;
pms3(ff)..              sum(f,   y3(f,ff)) =E= 1;
pmr4(u2)..              sum(uu2,  y12(u2,uu2)) =E= 1;
pms4(uu2)..             sum(u2,   y12(u2,uu2)) =E= 1;
pmr5(w2)..              sum(ww2,  y22(w2,ww2)) =E= 1;
pms5(ww2)..             sum(w2,   y22(w2,ww2)) =E= 1;
pmr6(f2)..              sum(ff2,  y32(f2,ff2)) =E= 1;
pms6(ff2)..             sum(f2,   y32(f2,ff2)) =E= 1;
```

```
st(u,w,f,u2,w2,f2)..sum((t,s,z), c1(t,u,s) * (x1(t,s) + x4(t,s))
                                 + c2(s,w,z) * (x2(s,z)+x5(s,z))
                                 + c3(t,f,z) * (x3(t,z) + x6(t,z))) =L=
    sum((uu,ww,ff,uu2,ww2,ff2), c1("1",uu,"3") * (y1(u,uu) + y12(u2,uu2))
                                + c2("3",ww,"5") * (y2(w,ww) + y22(w2,ww2))
                                + c3("1",ff,"5") * (y3(f,ff) + y32(f2,ff2)));
cost..   ucfce =e= sum((t,s,z,u,w,f), c1(t,u,s) * (x1(t,s) + x4(t,s))
                                     + c2(s,w,z) * (x2(s,z) + x5(s,z))
                                     + c3(t,f,z) * (x3(t,z) + x6(t,z)));
demand1(z)..         sum(s, x2(s,z)) + sum(t, x3(t,z)) =g= p(z,"v1");
demand2(z)..         sum(s, x5(s,z)) + sum(t, x6(t,z)) =g= p(z,"v2");
kapacita_s(s)..      sum(t ,x1(t,s) * r("v1") + x4(t,s) * r("v2")) =l= k(s);
kapacita_t(t)..      sum(s, x1(t,s) * n("v1") + x4(t,s) * n("v2"))
                   + sum(z, x3(t,z) * n("v1") + x6(t,z) * n("v2")) =l= v(t);
bilance1(s)..        sum(z, x2(s,z)) =l= sum(t, x1(t,s));
bilance2(s)..        sum(z, x5(s,z)) =l= sum(t, x4(t,s));
model sd4 /all/;
solve sd4 using LP maximizing ucfce;
display x1.L,x2.L,x3.L,x4.L,x5.L,x6.L;
```

Tak jako v kapitole 5.1 bychom mohli zahrnout řešení kapitoly 3.4.

6. Závěr

V práci byla nadefinována stochastická dominance z pohledu dopravní a logistické problematiky. Druhá kapitole poskytuje teoretický základ pro nadefinování stochastické dominance a práci s ní. Ve třetí kapitole byly popsány základní síťové úlohy včetně sestavení modelů a programů v software GAMS. Tyto poznatky byly v poslední kapitole propojeny a práce popsala výše zmíněné síťové úlohy s náhodnou veličinou ve formě náhodné jednotkové ceny za přepravu. Tyto modely byly také zpracovány v software GAMS.

Na naznačené postupy v oblasti aplikace stochastické dominance na síťové úlohy je v budoucnosti možné navázat jejich kombinováním s dalšími principy modelování v oblasti stochastické optimalizace., viz např práce [16].

Předpokládá se využití výsledků práce v projektech "Výpočtové simulace pro efektivní nízkoemisní energetiku" reg. č.: CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_026/0008392 financovaného z OP VVV, Prioritní osy 1: Posilování kapacit pro kvalitní výzkum a 470 Sustainable Process Integration Laboratory SPIL, funded as project No. CZ.02.1.01/0.0/0.0/15 003/0000456, by the Czech Republic Operational Programme Research and Development, Education, Priority 1: Strengthening capacity for quality research, a dále No. CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_026/0008413 "Strategic Partnership for Environmental Technologies and Energy Production.

Literatura

[1] ZVÁRA, Karel a Josef ŠTĚPÁN. Pravděpodobnost a matematická statistika. Praha: MATFYZPRESS, 1997. ISBN 80-85863-24-3.

[2] ŽÁK, Libor. Pravděpodobnost a její vlastnosti [online]. In: . 5. listopadu 2006, s. 1–6 [cit. 2020-04-14]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=477.

[3] HRDLIČKOVÁ, Zuzana. Náhodná veličina a její vlastnosti [online]. In: . 9. listopadu 2006, s. 1–8 [cit. 2020-06-07]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/-download.aspx?id_file=502

[4] HRDLIČKOVÁ, Zuzana. Náhodný vektor a jeho charakteristiky [online]. In: . 6. prosince 2006, s. 1-4 [cit. 2020-06-15]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/-download.aspx?id_file=626

[5] KUOSMANEN, Timo. Efficient Diversification According to Stochastic Dominance Criteria. MANAGEMENT SCIENCE. 2004, 50(10), 1391-1396. DOI: 10.1287. ISSN 0025-1909.

[6] ANDĚL, Jiří. Základy matematické statistiky. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-162-0.

[7] NASH, Stephen and SOFER, Ariela. Linear and nonlinear programming. McGraw--Hill, 1995. ISBN 978-0-89871-661-0.

[8] LEVY, Haim. Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainity. 2nd edition. Springer, 2006. ISBN 978-0387-29302-8.

[9] BAZARAA, Mokhtar S.,JARVIS, John J. and SHERALI, Hanif D. Linear programming and network flows. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2010. ISBN 978-0-470-46272-0.

[10] BIRGE, John R. and LOUVEAUX, François. Introduction to Stochastic Programming. Springer Verlag, 1997. ISBN: 978-1-4614-0236-7.

[11] GHIANI, Gianpaolo, LAPORTE, Gilbert and MUSMANNO, Roberto. Introduction to logistics systems planning and control. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2004. ISBN 0-470-84917-7.

[12] KALL, Peter and Stein W. WALLACE. Stochastic Programming. New York: John Wiley & Sons, 1993. ISBN 978-0471951582.

[13] RUSZCZYNSKI, Andrzej et al. Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 10: Stochastic Programming. Amsterdam: Elsevier. pp. 1-682. 2003. ISBN 978-0-444-50854-6.

[14] HOFF, Arild, Přednáška o logistice a dopravních úlohách [přednáška]. Brno: Vysoké účení technické v Brně, 2020.

[15] DUPAČOVÁ, J,; KOPA, M. Robustness of optimal portfolios under risk and stochastic dominance constraints. European Journal of Operational Research [online]. Elsevier B.V, 2014, 234(2), 434-441 [cit. 2020-06-23]. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.06.018. ISSN 0377-2217.

[16] HRABEC, D.; POPELA, P.; NOVOTNÝ, J.; HAUGEN, K.; OLSTAD, A. The Stochastic Network Design Problem with Pricing. In 18th International Conference of Soft Computing, MENDEL 2012 (id 19255). Mendel Journal series. 2012. Brno: VUT, 2012. p. 416-421. ISBN: 978-80-214-4540- 6. ISSN: 1803-3814.