



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

POSOUZENÍ RIZIKA LOMU U BĚŽECKÉ LYŽE SENDVIČOVÉ KONSTRUKCE VYZTUŽENÉ SKELNÝMI VLÁKNY

ASSESSMENT OF FRACTURE RISK FOR A LANGLAUF SKI MADE AS A GLASS FIBRE REINFORCED SANDWICH

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Daniel Láštic

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2016



Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Daniel Láštík**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.**
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Posouzení rizika lomu u běžecké lyže sendvičové konstrukce vyztužené skelnými vlákny

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sendvičové konstrukce se s výhodou využívají pro součásti namáhané ohybem. Pro nejvíce namáhané povrchové vrstvy lze efektivně využít vláknových kompozitů. Úkolem je provést napěťovou analýzu a zhodnocení rizika lomu u běžecké lyže vícevrstvé sendvičové konstrukce, jejíž jádro je kryto nosnými povrchovými vrstvami vyztuženými skelnými vlákny.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Nastudovat základy teorie sendvičových konstrukcí a vláknových kompozitů potřebné pro posouzení rizika lomu u ohýbaného prutu.
- 2) Řešit přímou úlohu pružnosti pro nejnepříznivější provozní stav zvolené konstrukce běžecké lyže.
- 3) Pokusit se o posouzení rizika statického lomu ve vyhodnocovaném provozním stavu.

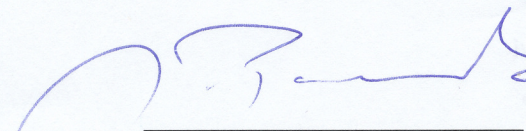
Seznam literatury:

- Janiček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J.: Mechanika těles, Pružnost a pevnost I, skriptum VUT Brno, CERM, Brno 2004.
- Gere, J.M., Timoshenko, S.P: Mechanics of materials, Springer, 2002.
- Burša, J., Janiček, P.: Evaluation of moduli of elasticity for thin layers. Engineering Mechanics, Vol. 10, 2003, No. 2, 149-158
- Agarwal, Broutman: Vláknové kompozity. SNTL, 1986.

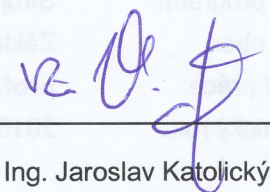
Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16.

V Brně, dne 25. 11. 2015





prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katojický, Ph.D.
děkan

ABSTRAKT

V prvej časti bakalárskej práce sú uvedené základné teoretické poznatky o využití sendvičových konštrukcií, ktoré pozostávajú z materiálov rozdielnych vlastností v jadre a na povrchu konštrukcie. Stručne sú popísané vlastnosti kompozitov (obvyklej nosnej zložky sendvičových konštrukcií) s dôrazom na vláknové kompozity a lamináty. Spomína sa takisto špeciálna vlastnosť kompozitov – ortotropia. Druhá časť práce sa sústreďuje na popis získania materiálových charakteristík materiálov z danej konkrétnej lyže pomocou experimentu a jeho následného vyhodnotenia, na výpočet napätí a posúdenie rizika lomu v bežeckej lyži sendvičovej konštrukcie za najnepriaznivejších prevádzkových podmienok. Pre výpočet sú použité analytické vzťahy pružnosti a pevnosti, ktoré sú v tejto časti odvodené. Úloha je riešená aj pomocou metódy konečných prvkov (MKP) s využitím softwaru ANSYS.

ABSTRACT

The first part of bachelor's thesis is devoted to basic theoretical knowledge about usage of sandwich theory of beams, which are made of different materials in the core and faces. This part includes brief description of composites (common carrying component of sandwich structures) with emphasis put on the fibre composites and laminates. A special characteristic of composites – orthotropy is mentioned. The second part is focused on description of obtaining of elastic constants of materials used in the real cross-country ski by experiment, on stress calculation and fracture risk assessment in cross-country ski made as sandwich structure for the most adverse operational state. The solution is executed with the help of analytical formulas of mechanics of materials derived in this part. The problem is also solved using finite element method (FEM) employing ANSYS software.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Ortotropia, vláknové kompozity, bežecká lyža, ťahová skúška, metóda konečných prvkov, sendvičová konštrukcia, laminát, sklené vlákna, elastické materiálové konštanty.

KEY WORDS

Orthotropy, fibre composites, cross-country ski, tension test, finite element method, sandwich construction, laminate, glass fibres, elastic material constants.

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

LÁŠTIC, D. *Posouzení rizika lomu u běžecké lyže sendvičové konstrukce vyztužené skelnými vlákny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 42 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som bakalársku prácu na tému *Posouzení rizika lomu u běžecské lyže sendvičové konstrukce vyztužené skelnými vlákny* vypracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a prameňov uvedených na zozname, ktorý tvorí prílohu tejto práce.

27. mája 2016

.....
Daniel Láštic

POĎAKOVANIE

Ďakujem týmto prof. Ing. Jiřímu Buršovi, PhD. za trpezlivosť a cenné pripomienky a rady pri vypracovaní bakalárskej práce, doc. Ing. Tomášovi Návratovi, PhD. za vykonanie experimentu – ťahovej skúšky dodaných vzoriek a následné poskytnutie dát a fotodokumentácie, a rodine a priateľom za podporu pri štúdiu.

OBSAH

ÚVOD	9
1 TEÓRIA KOMPOZITNÝCH MATERIÁLOV	10
1.1 CHARAKTERISTIKA	10
1.2 KLASIFIKÁCIA.....	11
1.3 VLÁKNOVÉ KOMPOZITY	12
1.3.1 <i>Jednosmerné kompozity</i>	13
1.3.2 <i>Ortotropné vlastnosti kompozitov</i>	13
1.3.3 <i>Lamináty</i>	15
2 SENDVIČOVÉ KONŠTRUKCIE	17
2.1 MODEL BEŽECKEJ LYŽE	18
2.2 ODVODENIE ANALYTICKÝCH VZŤAHOV	20
3 EXPERIMENTÁLNE ZÍSKANIE ELASTICKÝCH KONŠTÁNT	23
4 ANALYTICKÉ RIEŠENIE	28
4.1 OBMEDZENIE PLATNOSTI	31
4.2 VÝPOČET PRIEHYBU V STREDE LYŽE	32
5 RIEŠENIE METÓDOU KONEČNÝCH PRVKOV	33
6 VYHODNOTENIE BEZPEČNOSTI	37
ZÁVER	39
ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV	40
ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV	42

ÚVOD

V posledných rokoch stúpajú nároky na konštrukcie používané v strojárskom, automobilovom, leteckom priemysle a stavebníctve. Čoraz viac sú v daných oblastiach vyžadované stále ľahšie štruktúry pri zachovaní prípadne dokonca zlepšovaní ich mechanických vlastností. Keď prichádza požiadavka na konštrukciu v podobe vysokého pomeru mechanických vlastností ku hmotnosti (predovšetkým pevnosti a tuhosti pri ohybe), najlepší kompromis predstavujú sendvičové konštrukcie. Vďaka kombinácii ich vynikajúcich vlastností ako pevnosť, tuhosť a malá hmotnosť sú prirodzenou voľbou dizajnérov pri navrhovaní.

Sendvičové materiály pozostávajú z dvoch častí. Prvá, jadro vyznačujúce sa svojou nízkou mernou hmotnosťou pozostávajúce z kovových prípadne nekovových materiálov, voštinových štruktúr, polymérnych pien, prípadne balzového dreva. Na jadro sú napojené z oboch strán pevné a tuhé povrchové vrstvy väčšinou v podobe vláknových kompozitov alebo laminátov. Obe časti spolu držia spojivom alebo živicom použitou v materiáli povrchovej vrstvy. [1]

Použitie sendvičových konštrukcií siaha do obdobia 2. svetovej vojny, kedy kvôli nedostatku materiálov v Anglicku boli použité na postavenie lietadla Mosquito sendviče s jadrom z balzového dreva a dyhovej povrchovej vrstvy. Po vojne došlo k ďalšiemu výskumu hlavne v oblasti letectva pričom vývoj sa sústredil hlavne na použitie voštinových materiálov v jadre. Tie boli postupne nahradované plastmi vďaka ich izolačným vlastnostiam. Postupom času sa sendvič stal bežným prvkom v konštrukciách. [2]

V povrchových vrstvách sa s výhodou využívajú už spomínané vláknové kompozity pozostávajúce zo sklenených prípadne uhlíkových vlákien zapustených v epoxidovej či polyesterovej živici. Výhoda vláknových kompozitov spočíva v kombinácii vlastností vystužujúceho materiálu a matrice a ich pomerne ľahkou výrobou. Dôležitými charakteristikami pre vlastnosti výsledného kompozitu sú tvar, koncentrácia a orientácia vystužujúceho materiálu.

Sendvičové konštrukcie sú dnes využívané v širokej škále odborov či už viac alebo menej dôležitých ako sú napríklad výroba športového príslušenstva. Autor tejto práce sa sústreďí na jeden takýto konkrétny príklad, ktorým je využitie sendviča v konštrukcii bežeckej lyže. Cieľom bolo využiť všetky dostupné teoretické zdroje a aplikovať získané znalosti na deformačne-napät'ovú analýzu lyže. Následným porovnaním analytického výpočtu s výpočtom metódou konečných prvkov zostaviť záver a vyhodnotiť riziko lomu.

1 TEÓRIA KOMPOZITNÝCH MATERIÁLOV

Kompozitné materiály sú v súčasnosti bežne používanými materiálmi. Ich pôvodné využitie vo vojenstve hlavne z obdobia 2. svetovej vojny sa rýchlo rozšírilo na komerčné aplikácie vďaka ich vynikajúcim vlastnostiam ako pevnosť a tuhosť v ohybe a nízka merná hmotnosť. [3]

Použitie kompozitov má bohatú históriu. V určitej forme ich používali už starí Egypťania v podobe preglejky vytvorenej prekladaním viacerých tenkých vrstiev dreva aby získali vlastnosti na vyššej úrovni. Izraeliti využívali steblá slamy na posilnenie hlinených tehál. Ďalším príkladom sú stredoveká výzbroj a výstroj zložená z viacerých vrstiev odlišných kovov. Až podnes kedy sú vystužované polymérne matrice sklenenými či uhlíkovými vláknami využívané v leteckom, kozmickom a automobilovom priemysle. [4]

1.1 Charakteristika

Ako naznačuje už slovo *kompozit*¹ v slovnom spojení *kompozitný materiál*, znamená to zloženie z dvoch alebo viacerých materiálov aby vznikol celkom nový. Dôležitou poznámkou je, že zloženie musí byť z makroskopického hľadiska, t. j. viditeľné voľným okom, pretože mnoho materiálov vzniká zložením z viacerých z mikroskopického hľadiska. Príkladom je pridávanie legúr do kovov za účelom zlepšenia mechanických vlastností. Takýto materiál má takisto viac zložiek ale z makroskopického hľadiska je homogénny. [4]

Z hľadiska spojitosti je kompozit tvorený dvoma fázami. Prvá je spojitá fáza, zvyčajne poddajnejšia a nazýva sa *matrica*. Druhou nespojitá fáza (môže ich byť aj viac) , ktorá je pevná a tuhá a je ponorená do spojitej fáze, nazývaná *vystuženie*. [3]

Výhoda kompozitných materiálov spočíva v kombinácii najlepších vlastností ich zložiek prípadne dokonca vlastností ktoré nevykazuje ani jedna. Zvyčajne sa jedná o nasledujúce vlastnosti [4]:

- tuhosť
- odolnosť voči korózii
- odolnosť voči opotrebeniu
- únavová životnosť
- pevnosť
- hmotnosť
- tepelná izolácia
- tepelná vodivosť

Pri určovaní vlastností kompozitu ako celku nestačí poznať vlastnosti a materiály jednotlivých zložiek, keďže silne závisia od ďalších faktorov, ktorými sú hlavne [3]:

- *koncentrácia* – považovaná ako jeden z najdôležitejších a najľahšie kontrolovateľných parametrov ovplyvňujúcich vlastnosti kompozitu. Udáva sa objemovým alebo hmotnostným podielom určitej zložky.

¹ *compositus* (lat.) – zložiť, dať dokopy [16]

- *orientácia vystuženia* – má vplyv na závislosť vlastností kompozitu na smere. Ak sú rozmery vystuženia rovnaké vo všetkých smeroch, systém sa správa izotropne. V ďalších prípadoch dochádza k anizotropii prípadne ortotropii (viď podkapitola 1.4).
- *geometria častíc* – zahŕňa v sebe tvar, veľkosť a distribúciu veľkostí. U väčšiny nespojitých fáz sa uvažuje tvar gule alebo valca. Veľkosť a distribúcia veľkostí ovplyvňuje textúru materiálu a vzájomné pôsobenie medzi maticou a vystužením.
- *koncentračná distribúcia* – popisuje rovnomernosť rozptýlenia častíc v kompozite. Tie môžu byť navzájom prepojené v prípade vyššej koncentrácie častíc alebo sa nemusia vôbec dotýkať ak sú v dostatočných odstupoch. Prvý prípad má vplyv na elektrické vlastnosti kompozitu.

1.2 Klasifikácia

Podľa Jonesa [4] existujú štyri základné skupiny kompozitných materiálov:

- 1) *Vláknové kompozitné materiály*
- 2) *Laminované/vrstvené kompozitné materiály*
- 3) *Partikulové (časticové) kompozitné materiály*
- 4) Kombinácia predchádzajúcich

Agarwal [3] uvádza podrobnejšie rozdelenie (viď. obrázok 1.1) pričom *Laminované kompozitné materiály* udáva ako podkategóriu *Vláknových kompozitov*. Autor tohto textu sa prikláňa k tomuto rozdeleniu vzhľadom na to, že lamináty sa vo väčšine prípadov dajú charakterizovať ako mnohvrstvé vláknové kompozity.



Obrázok 1.1: Klasifikácia kompozitných materiálov [3]

Charakteristike a vlastnostiam vláknových a následne jednosmerových kompozitov sa venuje nasledujúca kapitola.

Partikulové kompozity sú tvorené časticami rôznych veľkostí a tvaru náhodne rozloženými v matrici. V porovnaní s vláknami, nie sú častice schopné zlepšovať lomovú odolnosť matrice ani výrazne zvyšovať ťahovú pevnosť. Medzi ich najvýznamnejšie výhody okrem iných patrí zvýšenie tuhosti, odolnosti voči oteru a opotrebeniu, zlepšenie obrobitelnosti a redukcia trenia. V niektorých prípadoch môžu byť použité k zníženiu nákladov. Môžu pozostávať z nekovových častíc v nekovovej matrici (betón), nekovových častíc v kovovej matrici (karbid kremíka v hliníku), kovových častíc v nekovovej matrici (častice hliníka v polyuretánovej gume používané v raketových pohonných látkach) alebo kovových častíc v kovovej matrici (olovo v zliatinách medi na zvýšenie obrobitelnosti). [5]

1.3 Vlákňové kompozity

Vlákňové kompozity pozostávajú z vlákien uložených v matrici. Dôvod použitia vlákien v materiáloch je, že ich pevnosť a tuhosť je omnoho vyššia ako má rovnaký materiál v kompaktnej forme. Rozdielne vlastnosti kompaktného a vlákna súvisia s kvalitnejšou štruktúrou vlákna, v ktorom sú kryštály zoradené pozdĺž jeho osi a takisto s vrodennými vadami a nedokonalosťami v materiáli. Množstvo dislokácií v kompakte je vyššie ako vo vlákne. [3]

Vlákná sú charakteristické okrem veľkého pomeru dĺžky k priemeru hlavne vysokými mernými pevnosťami a tuhosťami. Pre porovnanie jednotlivých vlákien a kovových materiálov je zostavená tabuľka 1.1, v ktorej sú materiály vzostupne zoradené podľa mernej tuhosti. Avšak priame porovnávanie kovových materiálov s vláknami nie je možné, pretože aby mohli byť vlákna použité musia byť vložené do matrice. [4]

Tabuľka 1.1: Vlastnosti vlákien a kovových materiálov [4]

Materiál	Modul pružnosti v ťahu E [GPa]	Medza pevnosti v ťahu σ_m [GPa]	Hustota ρ [g.cm ⁻³]	Merný modul E/ρ [m ² .s ⁻¹]	Merná pevnosť σ_m/ρ [m ² .s ⁻¹]
Kovové materiály					
Titán	115	0,95	4,61	25	0,21
Hliník	72	0,62	2,63	27	0,24
Oceľ	207	0,5	7,66	27	0,07
Vlákná					
E-sklo	72	3,4	2,50	29	1,36
S-sklo	86	4,8	2,44	35	1,97
Uhlík	190	1,7	1,38	140	1,23
Berýlium	300	1,7	1,82	160	0,93
Bór	400	3,4	2,52	160	1,37
Grafit	250	1,7	1,38	180	1,23

1.3.1 Jednosmerné kompozity

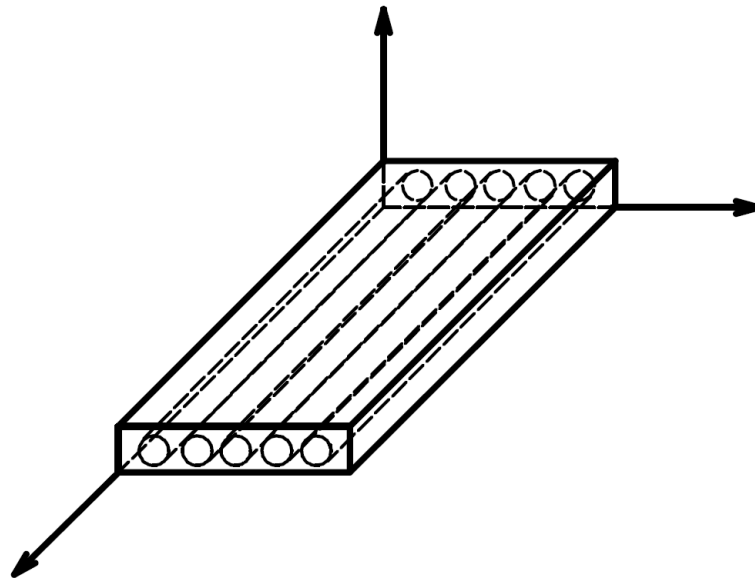
Jednosmerné kompozity pozostávajú z rovnobežných vlákien uložených do matrice. Schematický príklad takého kompozitu je zobrazený na obrázku 1.2., na ktorom je vidieť vrstvu kompozitu, ktorá sa nazýva *kompozitná vrstva* alebo *lamina*. Jednotlivé laminy sa môžu skladať na seba za účelom vytvorenia laminátu (viď podkapitola 1.3.3). [5]

Vlastnosti takejto jednosmernej vystuženej vrstvy vykazujú ortotropný charakter, o ktorom je pojednávané v nasledujúcej podkapitole.

Vrstva z obrázku 1.2 je zvláštna tým, že po celej hrúbke obsahuje iba jedno vlákno. To je v praxi málo časté². Najčastejšie sa vyskytujú vrstvy s jemnými vláknami v ktorých sú vlákna rozložené náhodne a môžu sa aj navzájom dotýkať, charakteristický príklad je vystuženie sklenenými a polymérnymi vláknami. [3]

Pri pevnostných výpočtoch sa porovnávajú skutočné napätia s medznými napätiami (pevnosťou). Pre ortotropný materiál ako jednosmerný kompozit je charakteristických päť hodnôt pevnosti [3]:

- 1) pozdĺžna pevnosť v ťahu
- 2) pozdĺžna pevnosť v tlaku
- 3) priečna pevnosť v ťahu
- 4) priečna pevnosť v tlaku
- 5) pevnosť v šmyku



Obrázok 1.2: Schéma jednosmerového vláknového kompozitu

1.3.2 Ortotropné vlastnosti kompozitov

Jednosmerné vláknové kompozity sa s výhodou využívajú v aplikáciách kedy normálové napätie v jednom smere výrazne prevyšuje napätia v ostatných smeroch. Orientáciou vlákien do tohto smeru sa získajú vyššie pevnostné vlastnosti

² hrubé vlákna ako tvorí napr. bór

v tomto smere. Týmto sa však dosiahne, že materiál sa bude správať anizotropne.

Stav napätosti v obecnom telese je popísaný deviatimi zložkami napätia σ_{ij} (kde $i, j = 1, 2, 3$) a stav pretvorenia deviatimi zložkami pretvorenia ε_{ij} (pre malé pretvorenia z nich je len šesť nezávislých). Vzťah medzi týmito zložkami je vyjadrený *Hookovým zákonom*, ktorý po využití symetrie tenzorov napätia a pretvorenia má tvar:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.1)$$

kde S_{ij} predstavuje zložky *matice poddajnosti*, ktorá je symetrická. Preto stav pretvorenia (alebo napätosti) môže byť popísaný šiestimi zložkami pretvorenia (alebo napätia) a vyjadrený rovnicou (1.1) s 21 nezávislými konštantami matice poddajnosti. [5]

Špeciálnym prípadom anizotropného materiálu je materiál ortotropný ako je väčšina vláknových kompozitov. Od obecného anizotropného sa odlišuje prítomnosťou tzv. hlavných smerov ortotropie³. Pri výpočtoch sa súradnicový systém volí v týchto smeroch a jeho osi sa nazývajú *materiálové osi*⁴. Vzťahy medzi napätiami a pretvoreniami majú obecný tvar ako v anizotropnom materiáli ale počet nezávislých elastických konštant sa zredukuje na deväť vďaka vzájomnej závislosti určitých zložiek matice poddajnosti. [6]

Maticové vyjadrenie Hookovho zákona pre ortotropný materiál má nasledovný tvar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

kde E_1, E_2, E_3 – moduly pružnosti v ťahu v smeroch 1,2,3,

μ_{ij} – Poissonov pomer určujúci priečnu deformáciu (v smere j) spôsobenú pozdĺžnou deformáciou (v smere i)

G_{23}, G_{31}, G_{12} – moduly pružnosti v šmyku v rovinách 2–3, 3–1, 1–2

³ tri vzájomne kolmé smery, v ktorých sa uvedené závislosti neprejavujú

⁴ v prípade jednosmerových vláknových kompozitov smer vlákien a smery naň kolmé

Z rovnice (1.2) vyplývajú nasledovné dôležité vzťahy medzi napätím a pretvorením pre ortotropný materiál [5] (platné iba v hlavnom súradnicovom systéme):

1. Medzi normálovými napätiami $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ a uhlovými pretvoreniami $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ neexistuje žiadny vzťah, t. j. normálové napätia v hlavných materiálových smeroch spôsobujú iba dĺžkové pretvorenia.
2. Medzi šmykovými napätiami $\tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}$ a dĺžkovými pretvoreniami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ neexistuje žiadny vzťah, t. j. šmykové napätia v hlavných materiálových smeroch spôsobujú iba uhlové pretvorenia.
3. Medzi šmykovými napätiami a uhlovými pretvoreniami v rozdielnych rovinách neexistuje žiadny vzťah, t. j. šmykové napätia v hlavných rovinách spôsobujú uhlové pretvorenia iba v týchto rovinách.

Špeciálnym prípadom ortotropného materiálu je priečne izotropný materiál, ktorého jedna hlavná rovina je rovinou izotropie⁵. Za priečne izotropné je považovaných mnoho jednosmerových kompozitov, ktoré majú vlákna v hexagonálnom usporiadaní pričom rovina 2-3 (kolmá na smer vlákien) je rovinou izotropie. Vzťahy pre takýto materiál sa ešte zjednodušia vďaka identite materiálových konštant s indexmi 2 a 3. To znamená, že priečne izotropný materiál je charakterizovaný iba piatimi nezávislými elastickými konštantami. [5]

Súhrn počtu nezávislých elastických konštant v závislosti na miere anizotropie materiálu je uvedený v tabuľke 1.2.

Tabuľka 1.2: Počty nezávislých elastických parametrov [6]

Miera anizotropie materiálu	Rozmer úlohy					
	3-D		2-D		1-D	
	obec.s.s.	špec.s.s.	obec.s.s.	špec.s.s.	špec.s.s.	špec.s.s.
anizotropný	21	21	6	6	1	1
ortotropný	21	9	6	4	1	1
priečne izotropný	10	5	6	4	1	1
izotropný	2	2	2	2	1	1

1.3.3 Lamináty

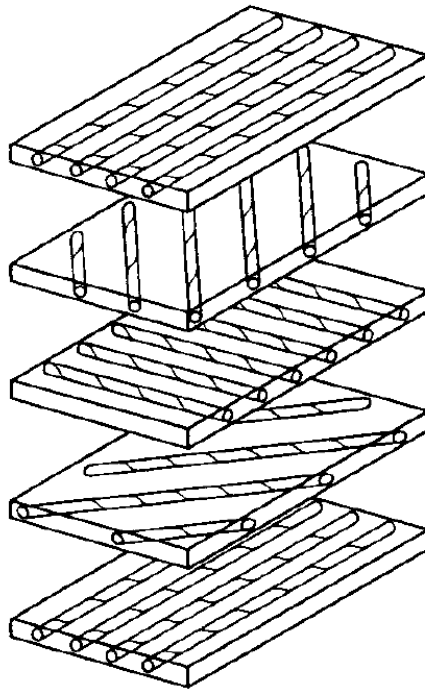
Jednosmerné kompozity majú vynikajúce vlastnosti v pozdĺžnom smere teda, v smere vlákien zatiaľ čo vlastnosti v priečnom smere sú dané vlastnosťami matrice. Tieto vlastnosti sú však nedostatočné v prípade viacošej napätosti. Riešením je (okrem kompozitu s tkaninou s dvoma dominantnými smermi vlákien) vytvorenie tzv. *laminátu*, tvoreného viacerými jednosmernými vrstvami (laminami) ako na obrázku 1.3, pričom hlavné smery jednotlivých vrstiev sú orientované tak aby vzniknutý celok mal požadované vlastnosti v každom smere. [3]

Vrstvy laminátu sú zvyčajne spolu spojené rovnakým materiálom ako má matrica jednotlivých vrstiev. Laminát ako celok sa má správať ako nevrstvový

⁵ rovina, v ktorej mechanické vlastnosti sú rovnaké vo všetkých smeroch

materiál, t. j. predpokladá sa, že spoje medzi laminami sú nekonečne tenké, šmykovo nedeformovateľné a dokonalé. [3]

Kompozitný laminát môže takisto pozostávať z vrstiev s odlišnými materiálmi a potom sa nazýva *medzivrstvový hybridný kompozit (interply hybrid composite)*. V niektorých prípadoch môže byť výhodné dokonca použiť rozdielne typy vlákien v rámci jednej vrstvy. Takýto kompozit sa nazýva *vnútrovrstvový hybridný kompozit (intraply hybrid composite)*. [5]

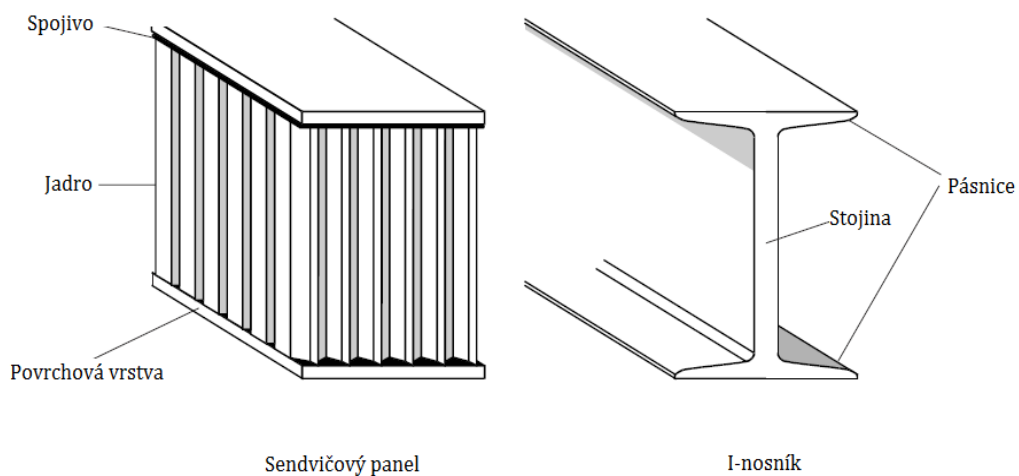


Obrázok 1.3: Schéma rozloženého laminátu [4]

2 SENDVIČOVÉ KONŠTRUKCIE

V súčasnej dobe stále rastie dopyt po čoraz ľahších štruktúrach s lepšími mechanickými vlastnosťami. Práve sendvičové konštrukcie poskytujú najlepší kompromis medzi hmotnosťou a tuhosťou a pevnosťou v ohybe.

Predstava o sendvičovej konštrukcii sa dá získať z obrázku 2.1 na ktorom je porovnaná s analogickým prípadom nosníku v tvare I. Sendvič pozostáva z dvoch častí. Z povrchových vrstiev väčšinou pozostávajúcich z rovnakého materiálu a majúcich rovnakú hrúbku, ktoré prenášajú normálové napätia, jedna ťahové a druhá tlakové (obrázok 2.2), ako je to u pásnic v I-nosníku. Stojina je analógiou jadra sendviču, ktoré odoláva šmykovým napätiam a drží vzdialenosť po-



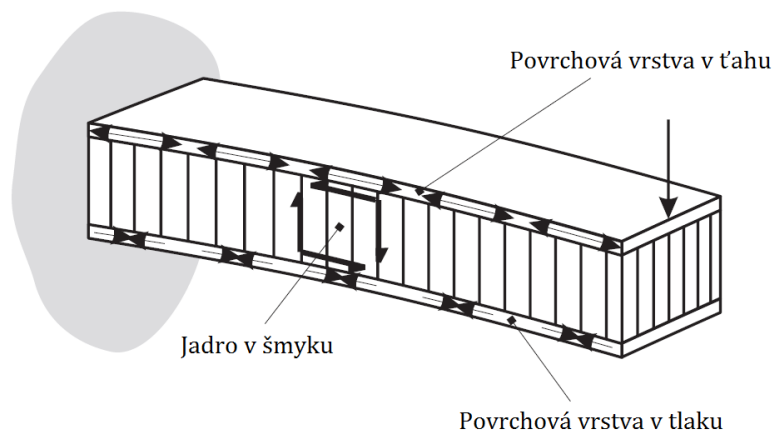
Obrázok 2.1: Sendvičová konštrukcia v porovnaní s I-nosníkom [17]

vrchových vrstiev. Na jadro sú kladené viaceré požiadavky. Musí byť dostatočne tuhé v smere kolmom na povrchové vrstvy aby ostali vo vzdialenosti nezávislej na zaťažení. Musí byť dostatočne tuhé v šmyku aby nedošlo k skĺznutiu povrchových vrstiev pri ohybe panela. Musí byť dostatočne tuhé aby ostali povrchové vrstvy takmer ploché a nedošlo k miestnej strate stability (zvlnenie). Pre spojivo musí platiť, že nesmie byť príliš poddajné aby nedošlo k výraznému vzájomnému pohybu jadra a povrchových vrstiev. [2]

Jadro môže byť tvorené rôznymi materiálmi a mať rôzny tvar, ale obecné existujú štyri druhy jadier: a) penové alebo tuhé peny, b) voštinové (honeycomb) jadro, c) stojinové jadro a d) vlnité alebo priehradové jadro. [7]

Posúdenie rizika medzného stavu:

Pri posudzovaní rizika medzného stavu pevnosti u sendvičov je nutné v prípade normálových napätí posudzovať každú vrstvu, t. j. nosnú povrchovú vrstvu a zároveň aj jadro, ktoré síce prenáša malé normálové napätia ale má o niekoľko rádov nižšiu pevnosť. V prípade šmykových napätí sa posudzuje jadro vzhľadom na to, že maximálne šmykové napätie je dosiahnuté v ose priečného prierezu (priebehy spomínaných napätí sú zobrazené v kapitole 4).



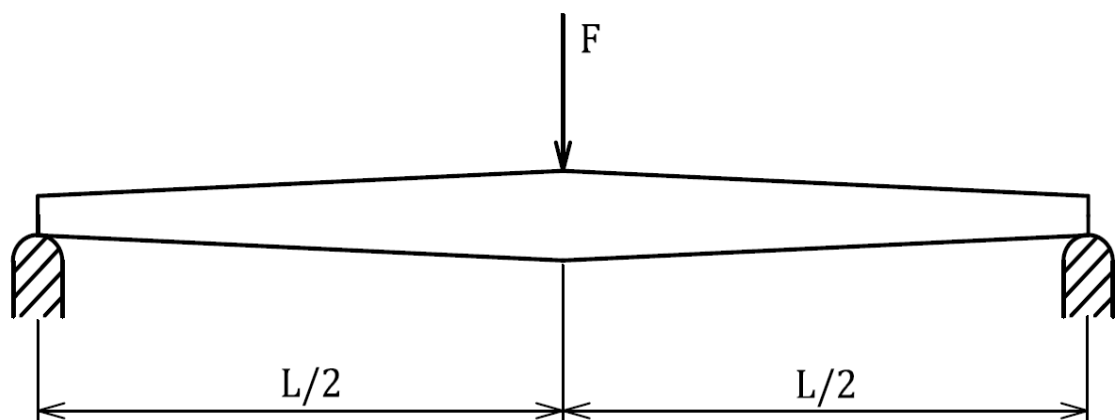
Obrázok 2.2: Napätia prenášané v sendvičovej štruktúre [17]

2.1 Model bežeckej lyže

Autor sa v tejto práci zaoberá konkrétnym využitím sendvičovej konštrukcie v praxi. Nasledovná podkapitola pojednáva práve o zostavení jeho modelu.

Za objekt, ktorý bude nasledovne analyzovaný bola vybratá bežecká lyža značky Artis Polar 692 od výrobcu Sporten z Nového Města na Moravě.

Úloha bude riešená ako priama úloha prostej pružnosti a pevnosti s vopred zadanými vstupnými parametrami a cieľom bude deformačne-napätňová analýza pre najnepriaznivejší prevádzkový stav. Bežecká lyža je modelovaná ako priamy prút s lineárnou zmenou hrúbky pozdĺž strednice a konštantnou šírkou o dĺžke L . Zakrivenia lyže na koncoch nie sú brané v úvahu kvôli predpokladanému malému významu a udržaniu relatívnej jednoduchosti úlohy. Podpory sú uložené symetricky na koncoch prútu a vonkajšie silové zaťaženie v podobe lyžiara stojaceho v strede lyže má formu osamelej sily pôsobiacej kolmo na strednicu v strede prútu. Schéma je zobrazená na obrázku 2.3

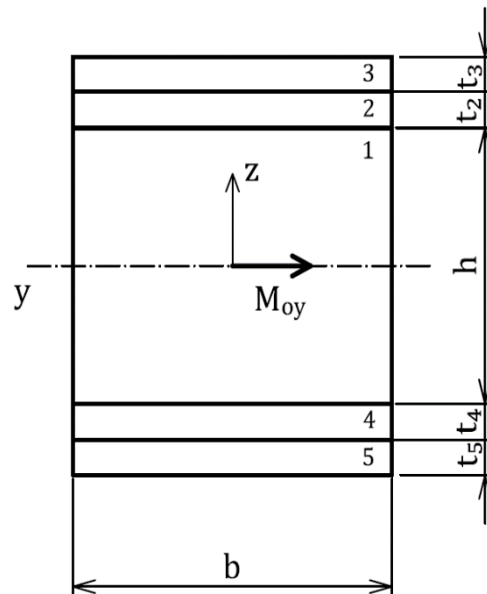


Obrázok 2.3: Model bežeckej lyže

Pre získanie priečného prierezu bola lyža rozrezaná (obrázok 2.4), následne bolo vyšetrené jej zloženie a vytvorený schematický náčrt (obrázok 2.5). Jadro lyže (zn. 1) tvorí integrálna extrudovaná polyuretánová pena. Jej vypenené jadro je na okrajoch ukončené tenkou vrstvou tvrdenej polyuretánovej kôry (2). Povrchová vrstva (3) je tvorená nosným vláknovým kompozitom GFRP⁶ a estetickou vrstvou u horného okraja lyže a skĺznicou v prípade dolného okraja. Táto vrstva bude pri výpočtoch zanedbávaná keďže sa predpokladá, že nefunguje ako nosný prvok, iba ako estetický resp. technologický v prípade skĺznicy a tento predpoklad bude potvrdený v kapitole 4. Po bokoch lyže je takisto tenká vrstva polyuretánovej kôry, ale výpočet zahrňujúci túto vrstvu bude prevedený samostatne kvôli porovnaniu príspevku vrstvy k napätosti.



Obrázok 2.4: Prierez lyže



Obrázok 2.5: Schematický prierez lyže

Ďalším zjednodušením je, že priečny prierez sa modeluje ako symetrický, t. j. jednotlivé vrstvy majú rovnaké hrúbky na hornej aj spodnej strane, čo sa prejaví v tom, že neutrálna os⁷ bude totožná s osou symetrie.

Pre riešenie nasledujúcej úlohy musia platiť prúťové predpoklady uvádzané v [8]:

- strednica zostáva po zaťažení spojitou a hladkou krivkou
- priečne prierezy zostávajú v priebehu zaťažovania rovinné, otáčajú sa okolo osi ležiacej v tejto rovine a deformujú sa (v prípade ohybu)
- posúvajú sa bez deformácie (v prípade šmyku)
- napätosť v prúte je určená normálovým a šmykovým napätím v priečnom priereze
- priečne prierezy zostávajú kolmé k zdeformovanej strednici
- zaťaženie pôsobí na strednicu

⁶ Glass-fibre reinforced polymer – epoxidová živica vystužená sklenými vláknami

⁷ Geometrické miesto bodov priečného prierezu kde je normálové napätie a pomerné pretvorenie nulové

Ďalším predpokladom pre použitie prostej pružnosti je prizmatickosť prútu, t. j. priečny prierez je po strednici konštantný. V prípade tejto práce dochádza k premennosti priečného prierezu avšak táto premennosť je veľmi malá a v [8] sa uvádza, že v prípade obdĺžnikového prierezu platí zníženie presnosti výpočtu o 1 % s každým stupňom rozovretia prierezu.

2.2 Odvodenie analytických vzťahov

V tejto kapitole budú odvodené analytické vzťahy pre výpočet napätí a priehybu. Odvodenie bolo vypracované podľa [9] a [10]. Pre výpočet veľkostí napätí v priereze sa vychádza z veľkostí pomerných pretvorení. Za predpokladu uvedeného v predchádzajúcej podkapitole, že priečne prierezy zostávajú rovinné aj po zaťažení, je pomerné pretvorenie ε vo vzdialenosti z' od osi y vyjadrené vzťahom:

$$\varepsilon(z') = cz' \quad (2.1)$$

kde konštanta c je úmerná tangente uhlu natočenia priečného prierezu.

Napätia v jednotlivých vrstvách značené indexom i podľa obrázka sa následne vypočítajú z Hookovho zákona:

$$\sigma_i(z') = E_i cz' \quad (2.2)$$

Hodnota konštanty c sa vypočíta z momentovej rovnice statickej rovnováhy, pre ktorú musí platiť:

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\psi_i} \sigma_i z' dS = M_{oy} \quad (2.3)$$

Dosadením vzťahu (2.3) dostaneme:

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\psi_i} E_i cz'^2 dS = M_{oy}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^5 E_i c \int_{\psi_i} z'^2 dS = M_{oy} \quad (2.5)$$

Hodnoty integrálov v tomto vzťahu predstavujú kvadratické momenty jednotlivých vrstiev k osi y značené J_{yi} :

$$c \sum_{i=1}^5 E_i J_{yi} = M_{oy} \quad (2.6)$$

Z rovnice (2.6) získame vzťah pre konštantu c , ktorá sa použije k výpočtu pomerných pretvorení a následne napätí:

$$c = \frac{M_{oy}}{\sum_{i=1}^5 E_i J_{yi}} \quad (2.7)$$

Kvadratické momenty jednotlivých vrstiev sa vypočítajú podľa nasledovných vzťahov využívajúcich Steinerovu vetu:

$$J_{y1} = \frac{1}{12} b h^3 \quad (2.8)$$

$$J_{y2} = \frac{1}{12} b t_2^3 + b t_2 \left(\frac{h}{2} + \frac{t_2}{2} \right) \quad (2.9)$$

$$J_{y3} = \frac{1}{12} b t_3^3 + b t_3 \left(\frac{h}{2} + t_2 + \frac{t_3}{2} \right) \quad (2.10)$$

$$J_{y4} = J_{y2} \quad (2.11)$$

$$J_{y5} = J_{y3} \quad (2.12)$$

Pre odvodenie vzťahu pre výpočet priehybu v strede lyže použijeme Castiglianovu vetu, podľa ktorej sa priehyb vo vybranom mieste vypočíta deriváciou energie napätosti podľa sily v tomto bode pôsobiacej. Energia napätosti bude mať tvar:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{M_{oy}^2}{\sum_{i=5}^5 E_i J_{yi}} dx \quad (2.13)$$

Deriváciou podľa sily F dostaneme priehyb strednice v strede lyže:

$$w_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{\sum_{i=5}^5 E_i J_{yi}} \frac{\partial M_{oy}}{\partial F} dx \quad (2.14)$$

kde

$$\frac{\partial M_{oy}}{\partial F} = \frac{x}{2} \quad (2.15)$$

Dosadením do rovnice dostaneme

$$w_F = \int_{\gamma} \frac{F x^2}{4 \sum_{i=5}^5 E_i J_{yi}} dx \quad (2.16)$$

Kvôli zmene hrúbky vrstvy polyuretánovej peny pozdĺž strednice sa budú meniť v závislosti na súradnici x aj kvadratické momenty J_{yi} . Zmena hrúbky tejto vrstvy v závislosti na súradnici x sa vyjadrí:

$$h(x) = 2 \left(\frac{H_{max} - H_{min}}{L} x + \frac{H_{min}}{2} \right) - 2t_2 - 2t_3 \quad (2.17)$$

Výsledný prieťah je daný vzťahom:

$$w_F = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{F x^2}{E_1 \frac{1}{12} b h^3 + 2E_2 \left[\frac{1}{12} b t_2^3 + b t_2 \left(\frac{h}{2} + \frac{t_2}{2} \right) \right] + 2E_3 \left[\frac{1}{12} b t_3^3 + b t_3 \left(\frac{h}{2} + t_2 + \frac{t_3}{2} \right) \right]} dx \quad (2.18)$$

Vzhľadom na zložitosť integrálu nie je ďalej riešený analyticky a v ďalšej kapitole bude počítaný pre konkrétne hodnoty numericky.

Pre výpočet šmykového napätia sa používa Žuravského⁸ vzťah, ktorý má pre homogénny materiál tvar [11]:

$$\tau = \frac{T U_y}{J_y b} \quad (2.19)$$

Pre sendvičovú konštrukciu sa musí upraviť aby v ňom boli zahrnuté rozdielne moduly pružnosti v ťahu jednotlivých vrstiev. Tým vznikne komplexnejší vzorec vyjadrujúci šmykové napätie v danej vrstve [2]:

$$\tau_i = \frac{T \sum_i^3 U_{yi} E_i}{D b} \quad (2.20)$$

kde D predstavuje ohybovú tuhosť sendviča:

$$D = \sum_{i=1}^5 E_i J_{yi} \quad (2.21)$$

a suma v čitateli sa vypočíta pre každú vrstvu nasledovne:

$$z \in \left(0; \frac{h}{2} \right) : \sum_i^3 U_{yi} E = E_1 \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) + E_2 b t_2 \left(\frac{h}{2} + t_2 - \frac{t_2}{2} \right) + E_3 b t_3 \left(\frac{H}{2} - \frac{t_3}{2} \right) \quad (2.22)$$

$$z \in \left(\frac{h}{2}; \frac{h}{2} + t_2 \right) \quad \sum_i^3 U_{yi} E = E_2 \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} + t_2 \right)^2 - z^2 \right] + E_3 b t_3 \left(\frac{H}{2} - \frac{t_3}{2} \right) \quad (2.23)$$

$$z \in \left(\frac{h}{2} + t_2; H \right) \quad \sum_i^3 U_{yi} E = E_3 \frac{b}{2} \left[\frac{H^2}{4} - z^2 \right] \quad (2.24)$$

Výpočet stačí urobiť iba pre jednu polovicu prierezu, pretože prieťah šmykových napätí pre symetrický prierez je taktiež symetrický. [8]

⁸ D.J. Žuravski, 1821-1891 bol ruský mostný a železničný inžinier, ktorý objavil dnes často používanú približnú teóriu šmykových napätí v nosníkoch. [11]

3 EXPERIMENTÁLNE ZÍSKANIE ELASTICKÝCH KONŠTÁNT

Pre riešenie priameho problému v pružnosti a pevnosti je potrebné poznať hodnoty elastických konštánt, modulu pružnosti v ťahu E a Poissonovho pomeru μ , charakterizujúce každý materiál. Pre analytický výpočet extrémnych napätí v tejto práci bude postačovať iba modul pružnosti v ťahu avšak pre výpočet pomocou MKP je nutné zadať všetky nezávislé elastické konštanty. Ich približné hodnoty zistené z odbornej literatúry sú uvedené v kapitole 5. Táto kapitola popisuje získavanie modulu pružnosti pre materiály lyže pomocou experimentu.

Získanie modulu pružnosti sa vykonáva prostredníctvom statickej skúšky v ťahu. Princíp skúšky spočíva v upnutí skúšobnej vzorky vopred definovaných rozmerov do čelustí skúšobného stroja a následnom statickom⁹ zaťažení vzorky až do jej roztrhnutia. Počas skúšky sa zaznamenáva veľkosť ťahovej sily F a veľkosť predĺženia vzorky ΔL v smere žaťažovania. Veľkosť predĺženia je meraná pomocou britových extenzometrov, ktoré sú na počiatku zaťažovania v určitej vzdialenosti L , ku ktorej sa v prepočte pretvorenia vzťahuje predĺženie. [11]

Po skončení skúšky sa namerané dáta musia prepočítať aby bolo možné zostrojiť zmluvný ťahový diagram. Veľkosť ťahovej sily sa prepočíta na zmluvné napätia pomocou vzťahu:

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (3.1)$$



Obrázok 3.1: Statická skúška v ťahu kompozitu s povrchovou vrstvou

⁹ rýchlosť zaťaženia musí byť dostatočne malá

kde S_0 , predstavuje pôvodný prierez skúšobnej vzorky. Z predĺženia ΔL namera-ného extenzometrom sa vypočíta pomerné pretvorenie ε :

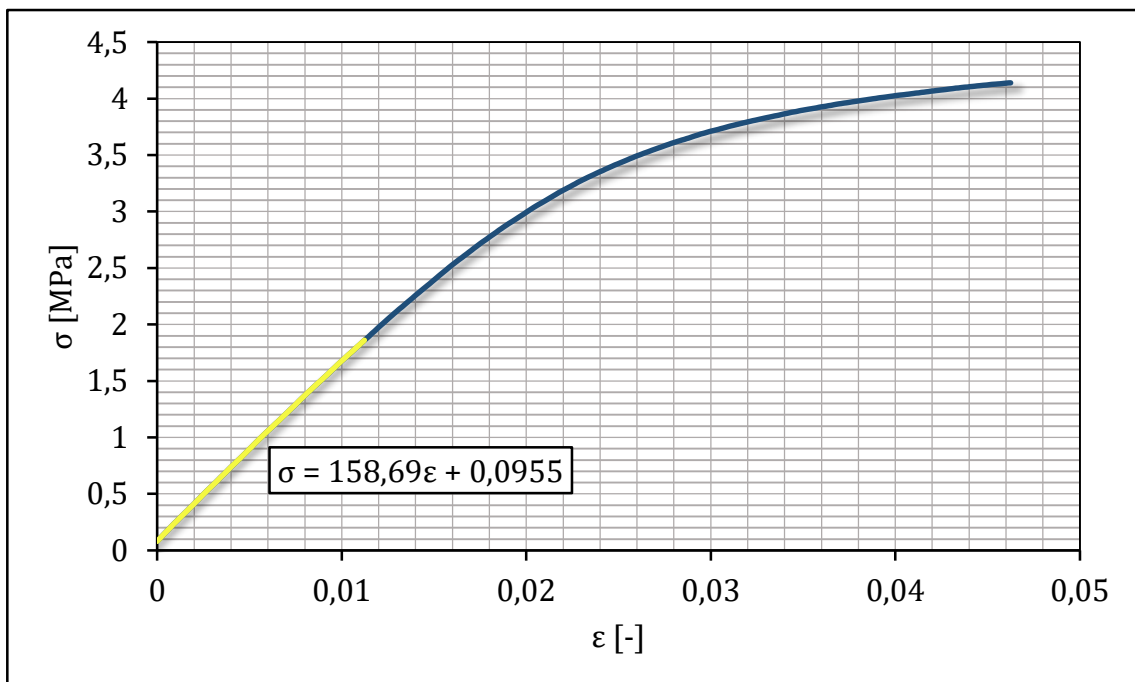
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.2)$$

Následne sa zostrojí zmluvný ťahový diagram vyjadrujúci závislosť zmluvného napätia σ na pomernom pretvorení ε , z ktorého sa zistia potrebné materiálové charakteristiky. Oblasť pružných deformácií charakteristická lineárnym správaním sa použije pre zistenie modulu pružnosti v ťahu. V tejto oblasti sa dáta preložia priamkou a smernica tejto priamky predstavuje modul pružnosti v ťahu E .

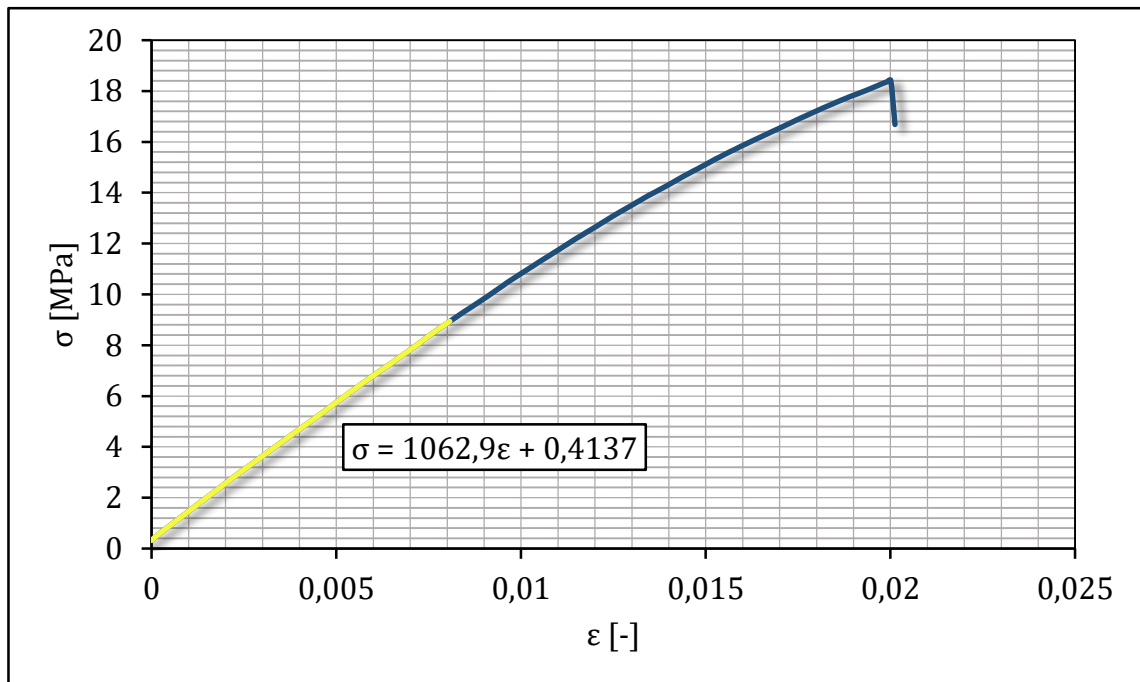
Najvyššie zmluvné napätie dosiahnuté v diagrame predstavuje zmluvnú medzu pevnosti spôsobenú dosiahnutím najvyššieho silového zaťaženia, ktoré bola daná vzorka schopná zniesť.

V prípade tejto práce autor postupoval nasledovným spôsobom. Konkrétna vzorka lyže bola rozrezaná na niekoľko častí. Z nich boli následne svojpomocne vytvorené vzorky, so snahou aby čo najviac zodpovedali požiadavkám na správne vyhodnotenie skúšky v ťahu, v takomto počte: po jednej vzorke polyuretánovej peny a polyuretánovej kôry, dve vzorky vlákňového kompozitu a dve vzorky kompozitu bez oddelenia vrchnej estetickej vrstvy. Následne boli podrobené statickej skúške v ťahu.

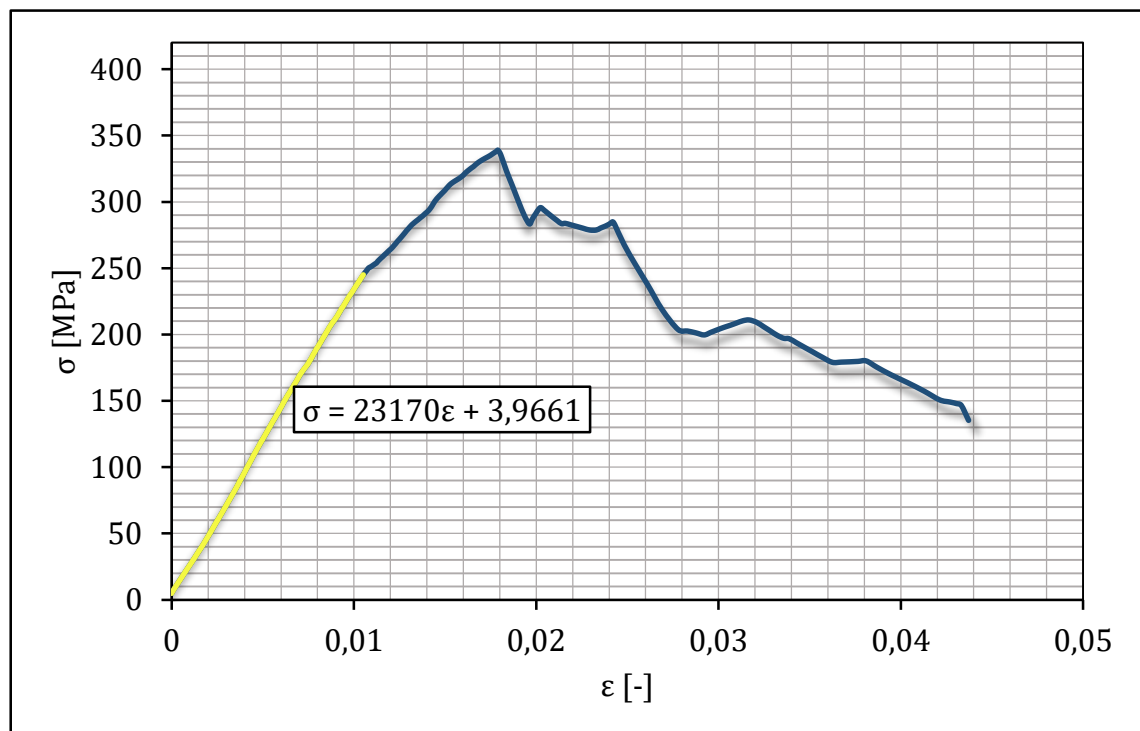
Pozn.: Výroba skúšobných vzoriek prebiehala za improvizovaných podmienok bez použitia profesionálnych nástrojov, výrobných postupov a okrem toho z už používaného modelu bežeckej lyže., takže v žiadnom prípade nemôžu odpovedať kvalite potrebnej pre skúšku podľa normy. Autor okrem toho berie na vedomie, že skúška v ťahu sa bežne vykonáva pre niekoľko vzoriek z jedného materiálu. Preto hodnoty získané z tejto skúšky nemôžu byť považované za sme-



Obrázok 3.2: Zmluvný ťahový diagram PU peny



Obrázok 3.3: Zmluvný ťahový diagram PU kôry



Obrázok 3.4: Zmluvný ťahový diagram kompozitu bez vrchnej vrstvy

rodajné ale poskytnú určitú predstavu o skutočných hodnotách. Pre potreby výpočtu v nasledujúcej práci však budú postačovať. Ešte je vhodné poznamenať, že cieľom tohto experimentu a následne aj tejto kapitoly nebolo získať skutočné materiálové charakteristiky ale načrtnúť spôsob ich získania a získať aspoň približné hodnoty.

Na obrázkoch 3.2–3.5 sú zobrazené zmluvné ťahové diagramy pre jednotlivé vzorky.

Polyuretánová pena z jadra má nasledujúce vlastnosti:

$$E_1 = 158 \text{ MPa} \quad \sigma_{m1} = 4,13 \text{ MPa}$$

Polyuretánová kôra¹⁰:

$$E_2 = 1063 \text{ MPa} \quad \sigma_{m2} = 18,4 \text{ MPa}$$

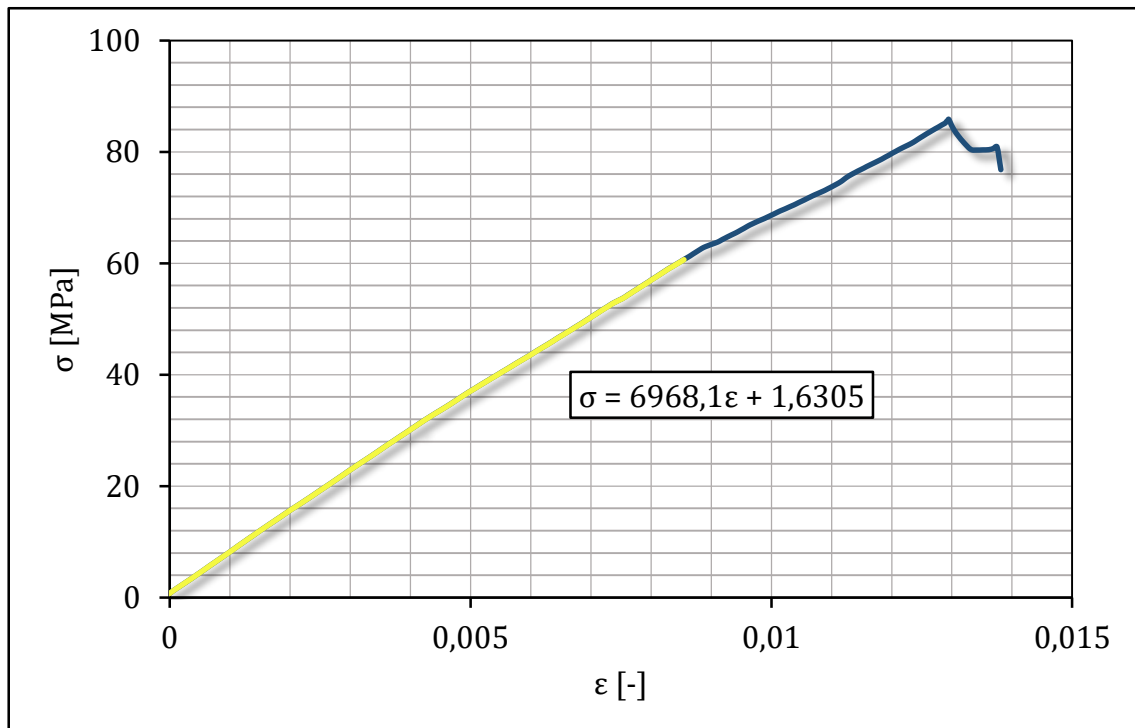
Vláknový kompozit bez vrchnej vrstvy:

$$E_3 = 23170 \text{ MPa} \quad \sigma_{m3} = 330 \text{ MPa}$$

Vláknový kompozit s vrchnou estetickou vrstvou:

V prípade tejto vzorky nie je možné brať v úvahu hodnoty pevnosti a modulu pružnosti, pretože je zložená z dvoch rozdielnych materiálov. Je ale možné dopočítať príspevok vrchnej vrstvy s využitím výsledku z predchádzajúceho diagramu vláknového kompozitu a to porovnaním zmluvných napätí pri rovnakej hodnote pomerného pretvorenia.

Za hodnotu pomerného pretvorenia bola zobrazená hodnota $\varepsilon = 0,01$. Pri tejto hodnote dosahuje zmluvné napätie v kompozite hodnotu $\sigma_1 = 235 \text{ MPa}$ a napätie v kompozite s estetickou vrstvou $\sigma_2 = 66,5 \text{ MPa}$. Za predpokladu, že



Obrázok 3.5: Zmluvný ťahový diagram kompozitu s vrchnou estetickou vrstvou

¹⁰ Hodnoty zmluvnej medze pevnosti sú podhodnotené, pretože vplyvom nepresnosti pri výrobe vzoriek došlo k vytvoreniu vrubu v časti uchytenia vzorky do čelustí a v tomto mieste došlo k porušeniu pri zaťažovaní

šírka estetickej vrstvy aj kompozitu bola na vzorke rovnaká, hrúbka kompozitu 0,5 mm a celková hrúbka vzorky 1,4 mm, je možné dopočítať:

Sila potrebná na 1% deformáciu vzorky kompozitu počítaná na 1 mm šírky:

$$F = 235 \cdot 0,5 = 117,5 \text{ N/mm}$$

Sila potrebná na 1% deformáciu kombinovanej vzorky počítaná na 1 mm šírky :

$$F = 66,5 \cdot 1,4 = 93,1 \text{ N/mm}$$

Na predchádzajúcich výsledkoch je vidieť, že sila potrebná na dosiahnutie zvolenej deformácie zloženej vzorky je menšia ako tá na deformáciu samotného kompozitu, čo by ale znamenalo záporný príspevok samotnej estetickej vrstvy. Tento nerealistický výsledok je spôsobený menšou hrúbkou kompozitu v zloženej vzorke ako je predpokladané vo výpočte a preto bez presnejších údajov o hrúbke vrstiev nie je možné získať príspevok vrchnej vrstvy. Iba sa potvrdzuje, že bude málo významný.

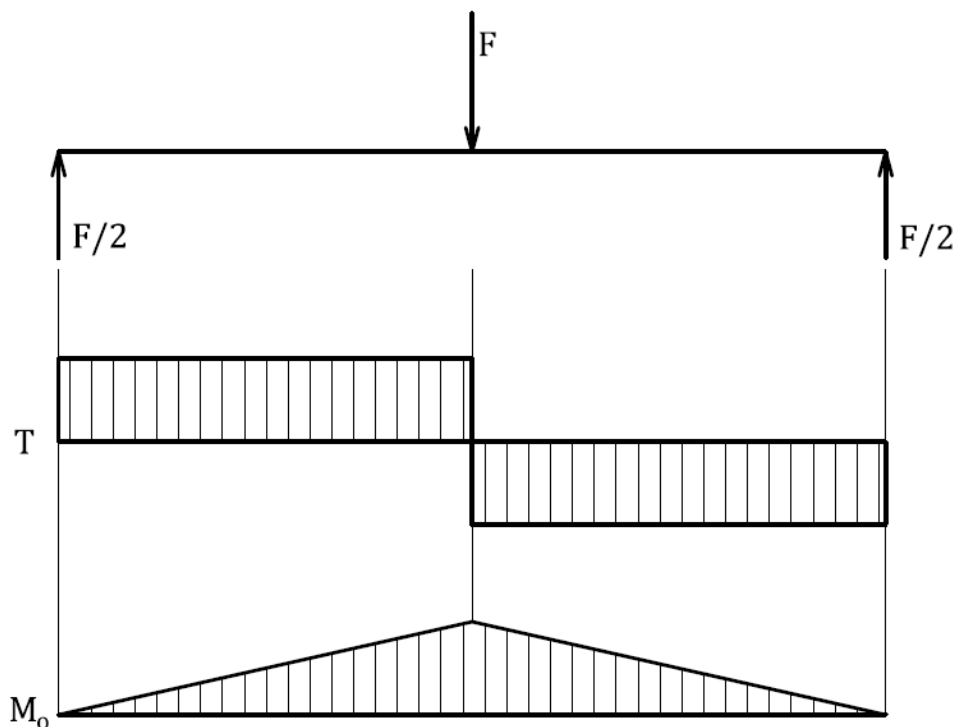
4 ANALYTICKÉ RIEŠENIE

V nasledujúcej kapitole budú počítané priebehy napätí v priereze najnebezpečnejšieho miesta lyže. Výpočty priebehov boli vykonané prostredníctvom softwaru MATLAB.

Ako vstupné parametre boli použité materiálové charakteristiky zistené v predchádzajúcej kapitole a nasledujúce rozmery lyže:

$L = 1900 \text{ mm}$	-dĺžka lyže
$H_{max} = 27 \text{ mm}$	-najvyššia hodnota hrúbky
$H_{min} = 5 \text{ mm}$	-najmenšia hodnota hrúbky
$t_2 = t_4 = 1,2 \text{ mm}$	-hrúbka polyuretánovej kôry
$t_3 = t_5 = 0,8 \text{ mm}$	-hrúbka kompozitu
$b = 47 \text{ mm}$	-šírka lyže
$g = 9,81 \text{ ms}^{-1}$	-tiažové zrýchlenie
$m = 100 \text{ kg}$	-hmotnosť záťaže

Pre zistenie najnebezpečnejšieho miesta je najskôr nutné vykresliť si výsledné vnútorné účinky: posúvajúcu silu a ohybový moment:



Obrázok 4.1: Výsledné vnútorné účinky v prúte

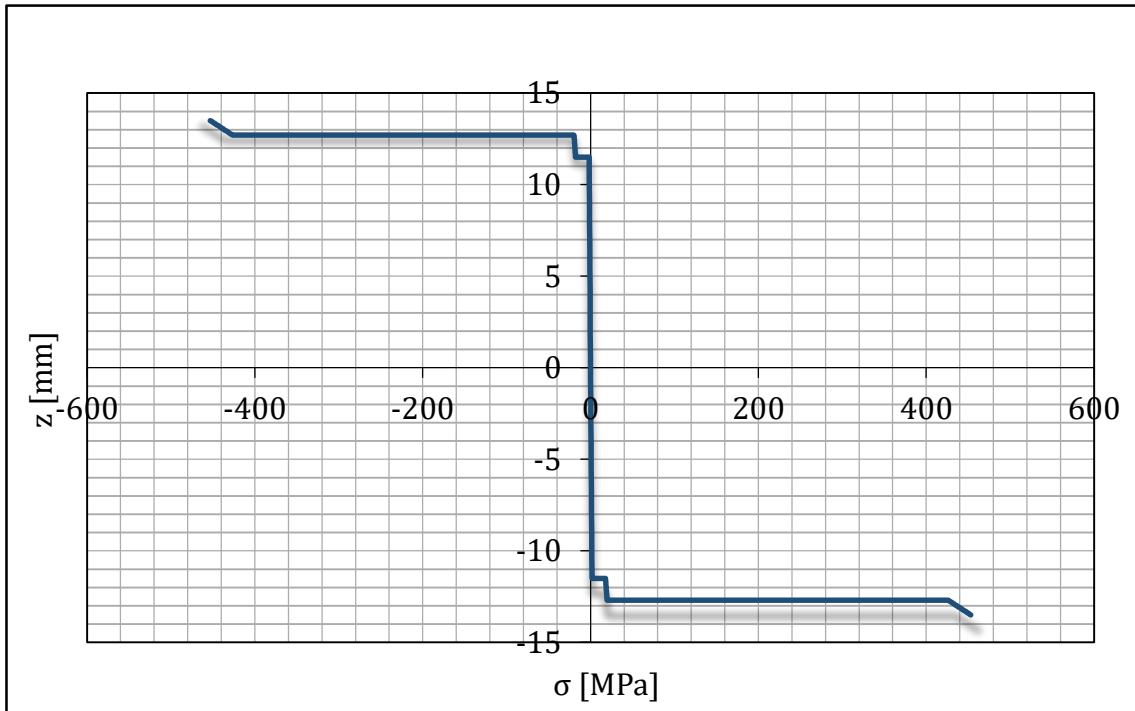
Z hľadiska normálového napätia bude najnebezpečnejší prierez v mieste najvyššieho ohybového momentu, čo je podľa obrázka v strede lyže. Veľkosť momentu v tomto mieste je daná vzťahom:

$$M_{omax} = \frac{FL}{4} \quad (4.1)$$

kde sila F predstavuje tiažovú silu záťaže

$$F = mg \quad (4.2)$$

S pomocou vzťahov z kapitoly 2.2 bol vypočítaný a vykreslený priebeh normálového napätia po priereze v strede lyže (obrázok 4.2).



Obrázok 4.2: Priebeh normálových napätí po priereze v strede lyže

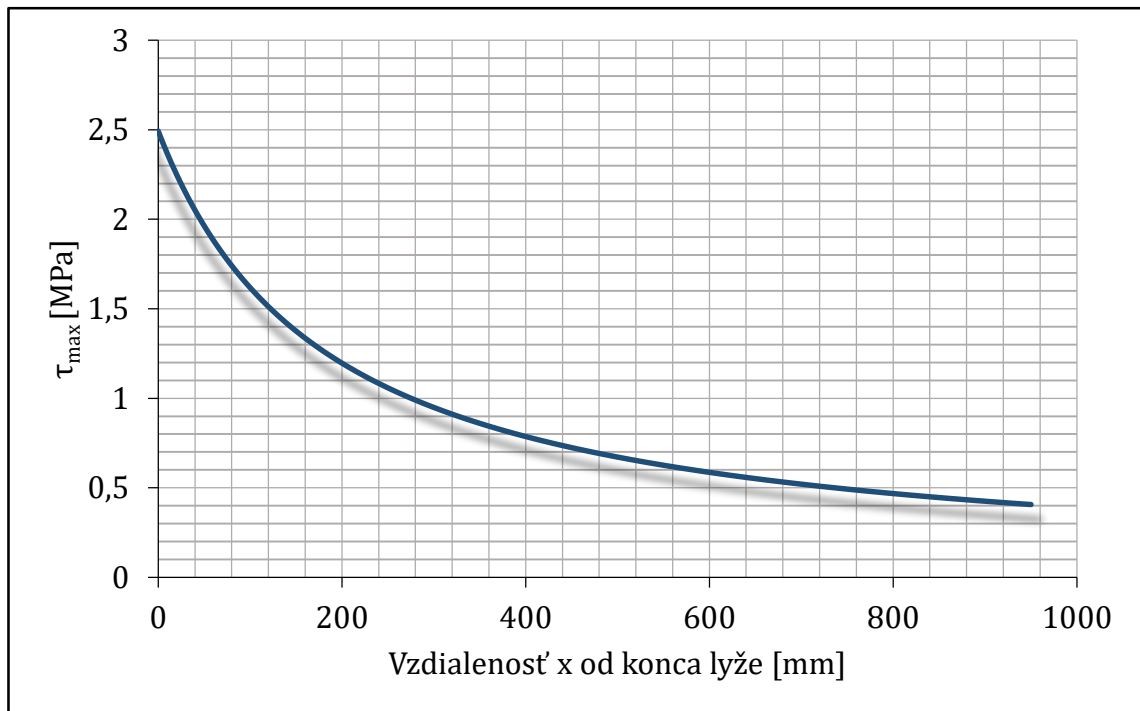
Ako je vidieť na obrázku 4.2, najvyššie napätia sú v povrchových vrstvách vláknového kompozitu, pričom spodné vlákna sú namáhané na ťah a horné na tlak. Jadro tvorené polyuretánovou kôrou podľa predpokladov neprenáša v porovnaní s vláknovým kompozitom veľké napätie. Najvyššie ťahové napätia dosiahnuté v každej vrstve:

$$\sigma_{t1} = 2,61 \text{ MPa}$$

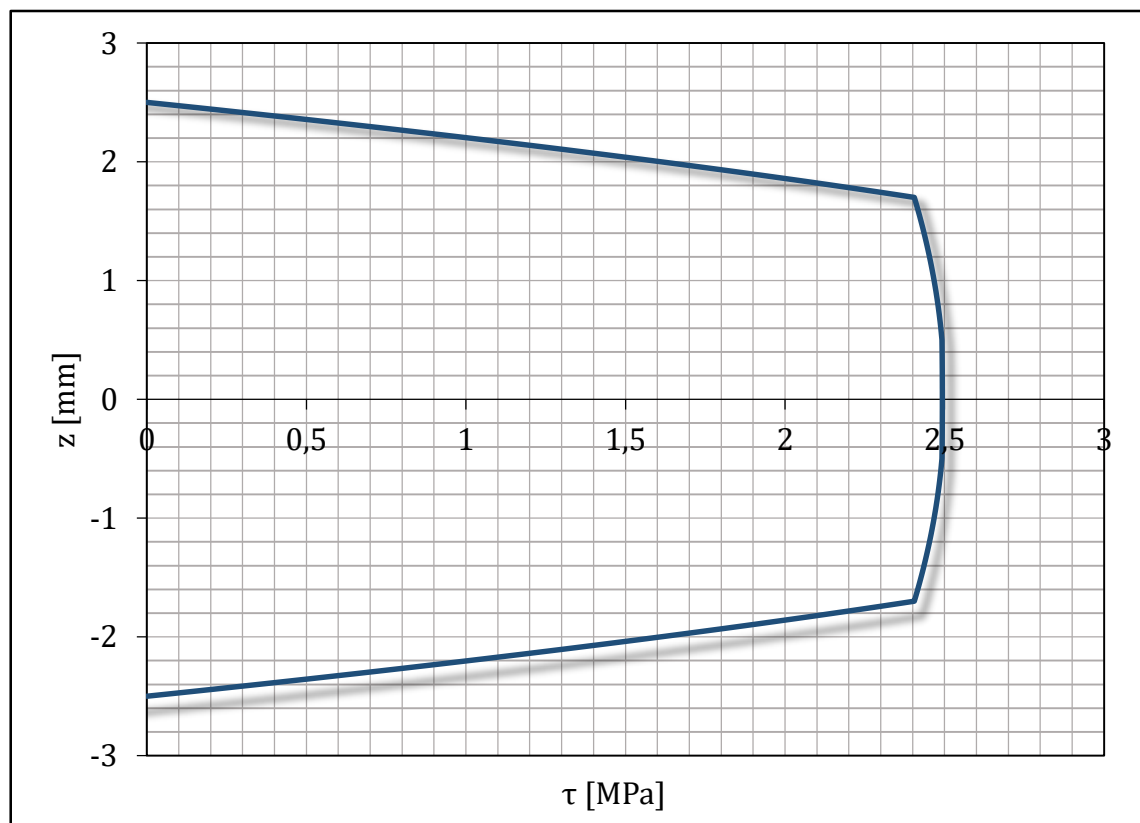
$$\sigma_{t2} = 19,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t3} = 449,6 \text{ MPa}$$

Z hľadiska šmykového napätia je najnebezpečnejšie miesto na koncoch lyže, pretože posúvajúca sila má konštantnú veľkosť ale najmenšia hrúbka je na konci lyže pričom vo vzťahu pre šmykové napätia vystupuje lineárny moment v čitateli a kvadratický moment v menovateli (rovnica 2.20), čo znamená, že so zmenšujúcou sa hrúbkou rastie šmykové napätie. Šmykové napätia boli vypočítané podľa vzťahov v kapitole 2.2. Ich priebeh po priereze na konci lyže a priebeh maximálnych hodnôt po strednici lyže od jej konca po stred sú na obrázkoch 4.3-4.4.



Obrázok 4.3: Priebeh maximálneho šmykového napätia pozdĺž strednice lyže



Obrázok 4.4: Priebeh šmykových napätí po priereze na konci lyže

Najvyššie dosiahnuté napätie:

$$\tau_{max} = 2,49 \text{ MPa}$$

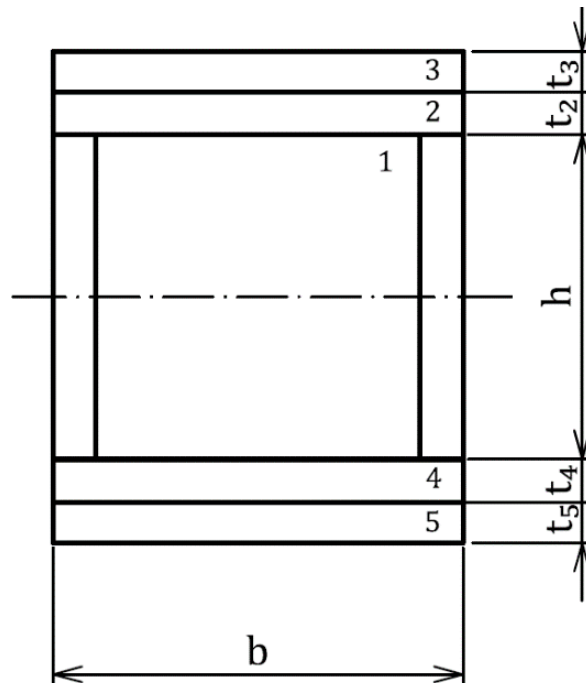
4.1 Obmedzenie platnosti

V tejto podkapitole bude pojednávané o obmedzeniach použitých vzťahov a o zahrnutí tenkej vrstvy polyuretánovej kôry po oboch bokoch jadra (schéma je zobrazená na obrázku 4.5), ktorej hrúbka je rovnaká ako vrstva nad jadrom.

Pre výpočet normálových napätí je potrebné urobiť miernu zmenu vo vzťahu pre ohybovú tuhosť kde sa zmenší kvadratický moment jadra a pribudne kvadratický moment bočných vrstiev. Zmeny v ohybovej tuhosti sú zrejmé z nasledujúcich vzťahov pre členy jadra polyuretánovej kôry v tomto poradí:

$$D_1 = E_1 \frac{1}{12} (b - 2t_2)h^3 \quad (4.3)$$

$$D_2 = E_2 \left[\frac{1}{12} b(h + 2t_2)^3 - \frac{1}{12} (b - 2t_2)h^3 \right] \quad (4.4)$$



Obrázok 4.5: Schéma prierezu lyže s bočnými vrstvami PU kôry

Maximálne normálové napätie so zahrnutím bočníc bude potom nasledovné:

$$\sigma_{max} = 446,3 \text{ MPa}$$

V prípade šmykových napätí nie je možné použiť jednoduchú úpravu ako v prípade normálových napätí. Žuravského vzťah pre výpočet šmykových napätí po priereze predpokladá konštantný priebeh napätia po šírke prierezu. Daný predpoklad bude po zahrnutí bočníc porušený, a teda nebude možné pri výpočte vychádzať zo Žuravského vzťahu.

S ohľadom na predchádzajúci výsledok maximálneho normálového napätia vychádzajúci zo skutočnosti, že pridané bočnice majú väčšiu tuhosť ako jadro

a teda prenesú viac napätia, je možné predpokladať, že podobný výsledok nastane pri šmykových napätiach. Z toho plynie, že výsledky maximálnych napätí bez uvažovania bočníc budú nadhodnotené.

Šmykové napätia boli počítané zo vzťahov, ktoré sú platné pre prizmatický prút. Za tejto podmienky bola potvrdená zhoda výsledkov s výsledkami získanými pomocou MKP. Pri zahrnutí neprizmatickosti prútu do výpočtu pomocou MKP sa však ukázalo, že neprizmatickosť významne ovplyvňuje veľkosť šmykových napätí a to takým spôsobom, že autor nebol schopný získať relevantné hodnoty týchto napätí z výpočtu MKP. Zatiaľ čo vplyv šmykových napätí u mierne neprizmatického homogénneho prútu je zanedbateľný (ich veľkosť je výrazne menšia oproti normálovým), u prútu sendvičovej konštrukcie ich nie je možné zanedbať kvôli nízkej pevnosti jadra v šmyku. Na základe spomínaných obmedzení nie je možné zhodnotiť bezpečnosť voči porušeniu šmykovým napätím.

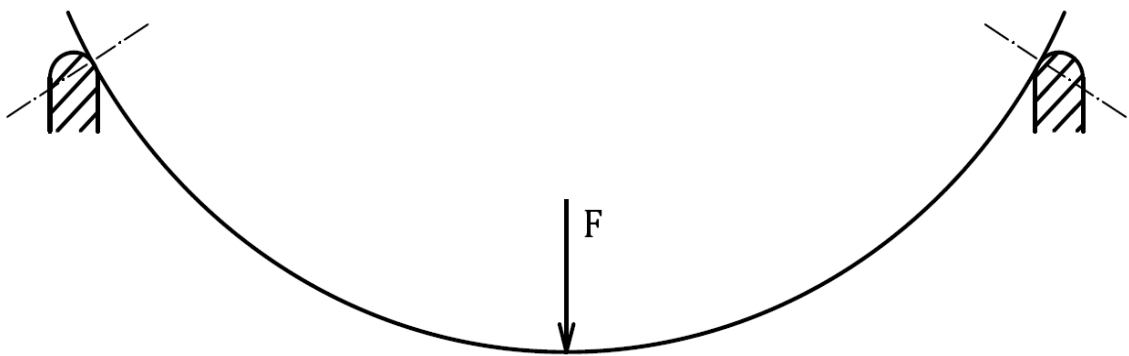
4.2 Výpočet priehybu v strede lyže

Ďalším obmedzením platnosti vypočítaných napätí je splnenie podmienok linearity úlohy, medzi ktoré patria malé deformácie (geometrická linearita) a nezávislosť väzbových reakcií na deformácii (väzbová linearita).

V kapitole 2 bol odvodený analytický vzťah (2.18) pre výpočet priehybu lyže v jej strede. Vzhľadom na náročnosť nebol integrál vo vzťahu riešený analyticky ale numericky s využitím softwaru MATLAB, ktorý umožňuje numerickú integráciu s funkciou *integral*.

Výsledok je nasledovný:

$$w = 861,5 \text{ mm}$$



Obrázok 4.6: Schéma zdeformovanej lyže

S ohľadnutím na výsledok je očividné, že deformácie nie je možné považovať za malé (sú ďaleko za medzami linearity) a teda úlohu riešiť s pomocou vzťahov lineárnej pružnosti a pevnosti. Vzhľadom na nízku tuhosť riešenej konštrukcie a veľké zaťaženie je možné predpokladať tvar zdeformovanej strednice schematicky zakreslený na obrázku 4.6. V takomto prípade dochádza k zmene vzdialenosti podpor (väzbová nelinearita) a tým aj zmene smeru reakčných síl vo väzbách a pre analytické riešenie je nutné teleso uvoľniť v zdeformovanom tvare. Vzhľadom na obťažnosť tohto prístupu nie je použitý v tejto práci a v ďalšom sú na riešenie použité nástroje metódy konečných prvkov. Uvažujúc všetky predchádzajúce závery autor dochádza ku konštatovaniu, že výsledky analytického riešenia nie je možné použiť k výpočtu skutočných koeficientov bezpečnosti.

5 RIEŠENIE METÓDOU KONEČNÝCH PRVKOV

V tejto kapitole bude nastolený problém riešený pomocou metódy konečných prvkov s využitím softwaru ANSYS Workbench. V každom odseku je popísaný postup vytvárania danej časti modelovania:

1. Engineering Data

V danom probléme sa počíta s tromi rôznymi materiálmi využitými v konštrukcii bežeckej lyže, preto je najskôr nutné zadefinovať vlastnosti týchto materiálov v časti Engineering Data.

Materiály jadra (polyuretánová pena) a priliehajúcej vrstvy (polyuretánová kôra) sú pre jednoduchosť brané ako lineárne elastické a teda pre ich určenie sú potrebné dve nezávislé elastické konštanty. Ako hodnoty Youngovho modulu pružnosti sú použité hodnoty určené experimentom (viď kapitola 3). Pri tomto experimente sa nesníмали priečne deformácie a teda nebolo možné získať hodnotu Poissonovho pomeru, preto je nutné vyhľadať jeho obvyklé (približné) hodnoty z odbornej literatúry. Vzhľadom k prevažne jednoosej napätosti v nosnej kompozitovej vrstve tu nie je táto neurčitosť významná, môže však byť významná pre určenie šmykového modulu pružnosti.

Po vykonaní rešerše za použitia dostupných zdrojov [12], [13], [14], [15] bolo zistené, že obvyklá hodnota Poissonovho pomeru pre PU penu je rovná 0,3 pri malých deformáciách (pretvoreniach – do približne 25%) s prudkým poklesom smerom k nule so zvyšujúcou sa deformáciou. S ohľadom na malé pretvorenia v tejto práci (do 2%) bola zvolená hodnota Poissonovho pomeru pre materiál jadra aj kôry:

$$\mu = 0,3$$

Ako bolo už spomenuté, vláknové kompozity majú ortotropné vlastnosti. Preto je potrebné na ich jednoznačný popis zadať deväť nezávislých elastických konštant: Youngov modul pružnosti v troch navzájom kolmých osiach, Poissonov pomer a modul pružnosti v šmyku v troch navzájom kolmých rovinách. Podobne ako v prípade ostatných vzoriek, aj u vzoriek vláknových kompozitov boli získané iba Youngove moduly pružnosti. Preto je nutné doplniť ostatných osem konštant s využitím odbornej literatúry. Vo všetkých použitých zdrojoch [5], [3], [4] sa okrem Youngovho modulu pružnosti v pozdĺžnom smere uvádzajú iba štyri ďalšie konštanty. S využitím uvádzanej literatúry boli zvolené ich nasledovné hodnoty:

$$E_2 = 5\,200\text{ MPa}$$

$$\mu_{12} = 0,27$$

$$\mu_{21} = 0,06$$

$$G_{12} = 3\,400\text{ MPa}$$

Jednosmerný vláknový kompozit má v rovine kolmej na smer vláken (rovina izotropie) rovnaké vlastnosti vo všetkých smeroch. S využitím tohto predpokladu sú doplnené ďalšie chýbajúce konštanty:

$$E_3 = 5\,200\text{ MPa}$$

$$G_{13} = 3\,400\text{ MPa}$$

Pre Poissonov pomer v rovine izotropie bola zvolená jeho obvyklá hodnota a modul pružnosti v tejto rovine sa dopočíta zo známeho vzťahu pre modul pružnosti izotropného materiálu:

$$\mu_{23} = 0,3$$
$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \mu_{23})} = 2\,000 \text{ MPa}$$

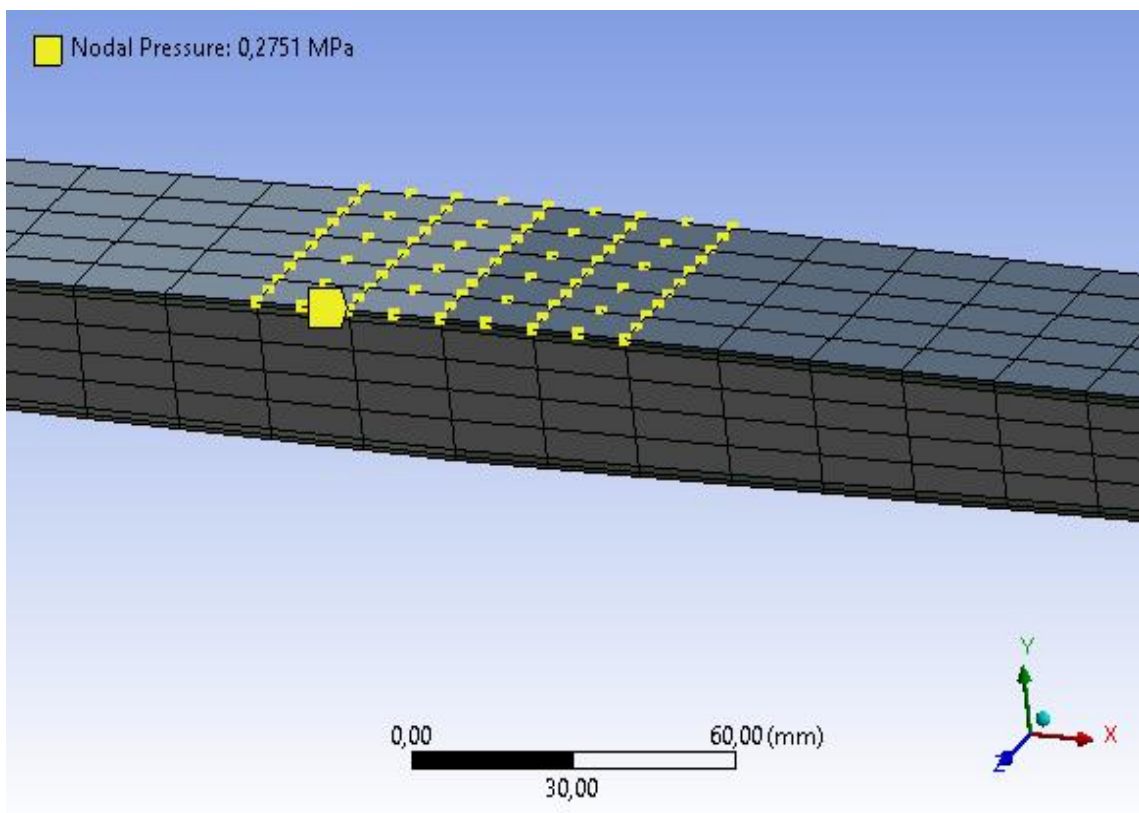
2. Geometria

Analytický výpočet napätí bol vykonaný so zanedbaním premennosti priečného prierezu lyže. Pri vytváraní geometrie pre MKP už toto zanedbanie neprebehlo aby bolo možné porovnať odlišnosť výsledkov.

V danom modeli nebudú využité kontakty, keďže sa predpokladá dokonalé, nedeformovateľné spojenie medzi jednotlivými materiálmi. Preto vytvorenie geometrie spočívalo vo vytvorení jednotlivých vrstiev konštrukcie a priradenie materiálu pre každú vrstvu. Následne bol z týchto častí vytvorený jeden celok s funkciou *Form New Part*.

3. Model

Pri sieťovaní bola využitá funkcia Sweep Method, ktorá vytvorí sieť na zdrojovej ploche (Source) a následne ju pretiahne na cieľovú plochu (Target), takto vznikne pravidelná sieť. V tomto prípade boli za potrebné plochy zobraté protiahlé pozdĺžne bočné plochy pričom bol zvolený počet delení päť.



Obrázok 5.1: Sieť a vonkajšie zaťaženie v okolí stredu lyže

S využitím funkcie Edge Sizing bol nastavený počet elementov pozdĺž lyže na päťdesiat a počet elementov po hrúbke jadra na štyri. V ostatných vrstvách bol ponechaný jeden element po hrúbke.

Na sieťovanie boli použité priestorové kvadratické (Element Midside Nodes – Kept) prvky – SOLID186, ktoré majú dvadsať uzlov a v každom uzle tri stupne voľnosti.

S vyššie popísanými nastaveniami bola vytvorená sieť s hustotou 4000 prvkov a 20247 uzlov.

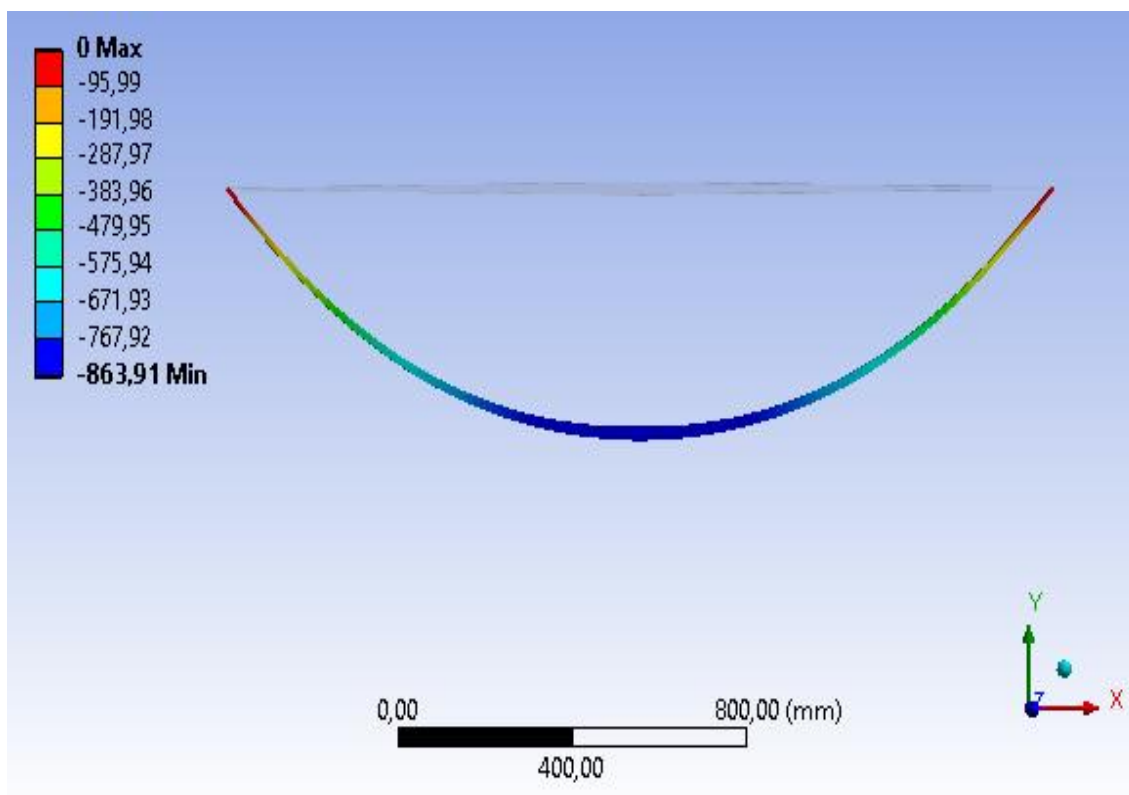
Okrajové podmienky pozostávajú zo zamedzenia pohybu spodných hrán na koncoch lyže v smere kolmom na tieto hrany (smer y). Vonkajšie zaťaženie má podobu tlaku v uzlových bodoch (Nodal Pressure) na ploche okolo stredu lyže. Predstavu o sieti a vonkajšom zaťažení je možné získať z obrázku 5.1.

4. Riešenie

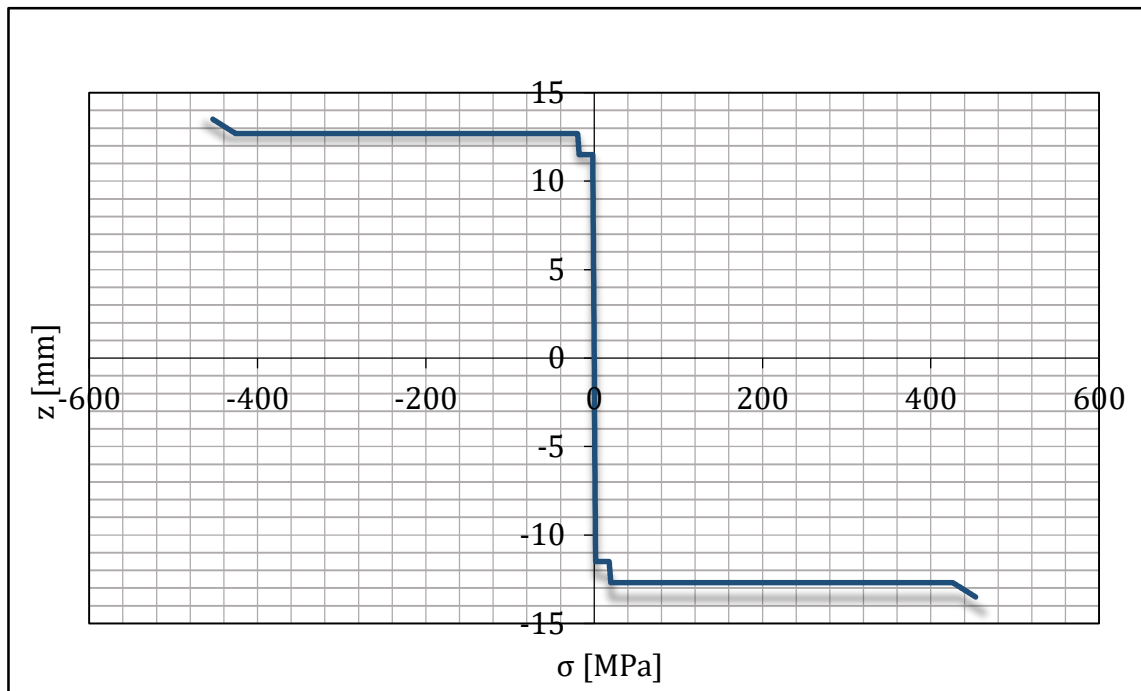
Na nasledujúcich obrázkoch (5.2-5.3) je zobrazený prieťah lyže a priebehy normálových napätí po priečnom priereze v strede lyže (v skutočnosti bol priebeh vykreslený v mieste 17 mm vzdialenom od stredu lyže, kvôli ovplyvneniu výsledkov spôsobenému vrubom vzniknutým pri vytváraní geometrie lyže podľa obrázka 2.3).

Výsledok maximálneho prieťahu:

$$w_{max} = 863,9 \text{ mm}$$



Obrázok 5.2: Prieťah lyže



Obrázok 5.3: Priebeh normálových napätí po priereze v strede lyže

Maximálne ťahové napätia v jednotlivých vrstvách:

$$\sigma_{t1max} = 2,53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t2max} = 19,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t3max} = 449,4 \text{ MPa}$$

Porovnaním výsledkov získaných metódou konečných prvkov s výsledkami získanými analytickým riešením sa zistia veľmi malé rozdiely, ktoré sú v rámci numerickej chyby. Malé rozdiely potvrdzujú správnosť odvodených analytických vzťahov ale ako bolo už spomínané, tieto hodnoty nie je možné použiť k výpočtu skutočných koeficientov bezpečnosti.

Preto je nutné pri riešení MKP použiť nelineárny riešič, t. j. zapnúť zahrnutie veľkého priehybu (Large Deflection), ktorého správne nastavenie pre získanie relevantných výsledkov je pomerne obťažné a v tejto práci preto nebude použitý.

6 VYHODNOTENIE BEZPEČNOSTI

Aj napriek všetkým zjednodušeniam a zanedbaniam, ktoré bolo nutné pre výpočet urobiť, je možné pokúsiť sa o vyhodnotenie bezpečnosti bežeckej lyže voči statickému lomu. Ako už bolo popísané, úloha bola riešená pre najnepriaznivejší prevádzkový stav, ktorý predstavuje uloženie lyže na podporách na okrajoch lyže so zaťažením v podobe osamelej priečnej sily pôsobiacej v strede lyže predstavujúcej lyžiara stojaceho na jednej nohe (pri výpočte pomocou MKP zaťaženie modelované ako tlak na malú plochu okolo stredu lyže, ktorý je reálnejší).

Z obrázku 4.1, na ktorom sú vykreslené výsledné vnútorné účinky takto zaťaženého jednoducho podopretého prútu, je možno spozorovať dve hlavné nebezpečné miesta, v ktorých je podstatné vyhodnotenie bezpečnosti:

1. Okraje lyže, v ktorých je nulový ohybový moment ale nenulová posúvajúca sila, čo môže byť nebezpečné z hľadiska šmykových napätí kvôli veľmi malej hrúbke materiálu v týchto miestach (v tomto mieste nie je možné vyhodnotiť bezpečnosť kvôli absencii využiteľných výsledkov, vid' kapitola 4.1)

2. Stred lyže, v ktorom ohybový moment dosahuje maximum a teda spôsobuje maximálne normálové napätia¹¹.

V strede lyže sú najväčšie normálové napätia, ktoré sú prenášané hlavne vrchnými nosnými vrstvami zo skleneného vláknového kompozitu. V týchto vrstvách takisto dosahujú napätia maximálnych hodnôt (obrázok 4.2), pričom najnebezpečnejšie sú ťahové napätia v spodnej vrstve, ktoré môžu spôsobiť pretrhanie vlákien a tým znemožniť ich nosnú funkciu. Posudzovať bezpečnosť je však nutné aj pri ostatných dvoch vrstvách, v ktorých síce napätia dosahujú niekoľkokrát menších hodnôt ale zároveň majú niekoľkokrát menšie hodnoty pevnosti.

S využitím hodnôt pevnosti jednotlivých materiálov z kapitoly 4 a hodnôt maximálnych normálových napätí v jednotlivých vrstvách (boli použité hodnoty vypočítané pomocou MKP) sa dopočíta:

$$k_{\sigma 1} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{t1max}} = \frac{4,13}{2,53} = 1,63$$

$$k_{\sigma 2} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{t2max}} = \frac{18,4}{19,3} = 0,95$$

$$k_{\sigma 3} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{t3max}} = \frac{330}{449,4} = 0,73$$

kde $k_{\sigma i}$ ($i = 1,2,3$) je koeficient bezpečnosti voči porušeniu danej vrstvy ťahovým napätím.

Na výpočet koeficientov bezpečnosti boli použité hodnoty napätí vypočítané za predpokladov lineárnej pružnosti. Ako je uvedené v kapitole 4.2, táto úloha nie je lineárna. Za predpokladu tvaru zdeformovanej lyže (obrázok 4.6) dochádza k posunutiu väzieb bližšie k stredu lyže a tým k zmenšeniu ramena reakčných síl k stredu lyže (súčasne však dochádza k nárastu veľkosti reakčných síl kvôli

¹¹ V tomto mieste takisto pôsobí posúvajúca sila, ktorú je možné zanedbať z dôvodu veľmi nízkych šmykových napätí spôsobených touto silou v porovnaní s veľkosťou normálových napätí spôsobených ohybovým momentom

vzniku zložky reakčnej sily v smere x). To znamená, že maximálny ohybový moment bude menší (v prípade, že hodnoty zložiek reakčných síl v smere x sú nízke) ako sa predpokladal pri lineárnom výpočte a tým pádom budú menšie aj normálové napätia v jednotlivých vrstvách. Navyše skutočné medze pevnosti môžu byť vyššie ako boli zamerané na neštandardných vzorkách. Vzhľadom na túto skutočnosť sú vypočítané koeficienty bezpečnosti nižšie ako skutočné. V prípade jadra, ktoré má vypočítanú bezpečnosť vyššiu ako jedna je možné usúdiť, že k porušeniu ťahovým napätím nedôjde. Pri ostatných dvoch vrstvách nie je možné urobiť záver keďže ich vypočítaná bezpečnosť je menšia ako jedna a nie je známe o koľko je skutočné napätie menšie ako vypočítané.

Výsledky je možné označiť za kvalitatívne správne v tom zmysle, že dávajú minimálnu bezpečnosť pre povrchovú kompozitovú vrstvu, ktorá je hlavným nosným prvkom lyže a je možné jej porušenie pri prekročení medzného zaťaženia. Takto by mala byť sendvičová konštrukcia navrhovaná.

ZÁVER

V predkladanej práci sa autor zaoberá využitím sendvičových konštrukcií s povrchovými vrstvami z vláknových kompozitov v bežeckej lyži. Pre zvolenú bežeckú lyžu je riešená priama úloha pružnosti pre najnepriaznivejší prevádzkový stav s cieľom pokúsiť sa o posúdenie rizika statického lomu. Lyža je modelovaná ako priamy neprizmatický prút s konštantnou šírkou a lineárnym zväčšovaním hrúbky od koncov ku stredu.

Sendvičové konštrukcie sa používajú pre súčasti namáhané ohybom pričom pre najviac namáhané povrchové vrstvy je výhodné využiť vláknové kompozity. Pre riešenie zadanej úlohy bolo nutné najprv vyšetriť zloženie lyže. Po jej rozrezaní bola zistená prítomnosť štyroch rôznych materiálov v jednotlivých vrstvách. Z rozrezanej časti lyže boli vytvorené vzorky pre vykonanie statickej skúšky v ťahu potrebnej pre získanie materiálových charakteristík daných materiálov. Vzhľadom na neprofesionálnu výrobu vzoriek neboli pri experimente zistené skutočné materiálové charakteristiky (predovšetkým hodnoty pevnosti) ale iba ich približné hodnoty, ktoré však pre potreby výpočtu v tejto práci stačili.

Po získaní materiálových charakteristík bolo nutné odvodiť analytické vzťahy pre výpočet napätí. Napätia sú počítané v dvoch nebezpečných miestach a to stred lyže kde sú dominantné normálové napätia a konce lyže, v ktorých sú nulové normálové napätia a nezanedbateľné šmykové napätia (dosahujú síce nízkych hodnôt ale ich maximálna hodnota sa nachádza v mieste materiálu s minimálnou pevnosťou). Všetky vzťahy v tejto práci boli odvodené za predpokladov lineárnej pružnosti. Výsledky získané použitím týchto vzťahov poukazujú na to, že za daných podmienok pre ktoré bola úloha riešená, ju nie je možné považovať za lineárnu. Linearita je porušená v prípade väzieb, ktoré sa v dôsledku vysokého vonkajšieho zaťaženia a nízkej tuhosti lyže (a z toho vyplývajúceho veľkého priehybu) posúvajú smerom k stredu lyže. To spôsobuje zmenu smeru reakčných síl a tým aj hodnôt napätí.

Pre získanie skutočných hodnôt napätí je potrebné využiť numerické metódy, konkrétne metódu konečných prvkov. V prípade tejto práce bol použitý softwar ANSYS, ktorý umožňuje nelineárnu analýzu, avšak vzhľadom na slabé skúsenosti autora s týmto nástrojom nebola vykonaná. Riešenie prebehlo iba s využitím lineárnej analýzy, ktorá síce potvrdila správnosť odvodených vzťahov pre normálové napätia a priehyb ale ako v prípade analytického riešenia jej výsledky nezodpovedajú skutočnosti. Riešenie MKP navyše ukázalo, že mierna neprizmatickosť prútu výrazne ovplyvňuje priebeh šmykových napätí do takej úrovne, že nebolo možné získať relevantné hodnoty týchto napätí.

Získané výsledky nebolo možné použiť na úplné vyhodnotenie bezpečnosti, ale iba na výpočet koeficientov bezpečnosti voči porušeniu ťahovým napätím, ktoré nie sú skutočné. Na základe predpokladu nižších normálových napätí v dôsledku posunu väzieb bližšie k stredu (v prípade nízkej hodnoty zložiek reakčných síl v smere x) autor konštatuje, že vypočítané koeficienty bezpečnosti sú nadhodnotené.

Je zrejmé, že uvádzané posúdenie bezpečnosti pre zvolenú konštrukciu bežeckej lyže nie je dostačujúce. Pre úplnosť riešenia sú však nutné rozsiahlejšie vedomosti a hlavne schopnosti využívať nástroje MKP.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

- [1] VALENZA, A.; FIORE, V.; CALABRESE, L. Three-Point Flexural Behaviour of GFRP Sandwich Composites: A Failure Map. *Advanced Composite Materials*, 2010, vol. 19, no. 1, p. 79-90. ISSN 1568-5519.
- [2] ALLEN, Howard. *Analysis and design of structural sandwich panels*. New York: Pergamon Press, 1969. 283 s. ISBN 00-802-1870-X.
- [3] AGARWAL, Bhagwan; BROUTMAN Lawrence. *Vláknové kompozity: celostátní vysokoškolská příručka pro vysoké školy technické*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987. 294 s.
- [4] JONES, Robert. *Mechanics of Composite Materials*. USA: Taylor & Francis, 1999. 519 s. ISBN 1-56032-712-X.
- [5] DANIEL, Isaac; ISHAI Ori. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. New York: Oxford University Press, 1994. 395 s. ISBN 01-950-9738-6.
- [6] BURŠA, Jiří; JANÍČEK, Přemysl; DEUTSCHER Jan. Výpočtové modelování neizotropních vlastností materiálů. *Inženýrská Mechanika*, 1997, roč. 4, č. 3, s. 155-167. ISSN 1210-2717.
- [7] VINSON, Jack R. *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*. USA: Technomic Publishing Company, 1999. ISBN 1-56676-699-0.
- [8] JANÍČEK, Přemysl; ONDRÁČEK, Emanuel; BURŠA Jiří. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [9] BURŠA, Jiří; JANÍČEK Přemysl. A new method of how to determine elastic constants in tension and compression by four-point bending. *Engineering Mechanics*, 2003, vol. 10, no. 1, p. 69-79. ISSN 1210-2717.
- [10] BURŠA, Jiří; JANÍČEK Přemysl. Evaluation of moduli of elasticity for thin layers. *Engineering Mechanics*, 2003, vol. 10, no. 1, p. 149-158. ISSN 1210-2717.
- [11] GERE, James; TIMOSHENKO, Stephen. *Mechanics of Materials*. 3rd ed. London: Chapman and Hall, 1991. 807 s. ISBN 0-412-36880-3.
- [12] WIDDLE, R.D.; BAJAJ A.K.; DAVIES P. Measurement of the Poisson's ratio of flexible polyurethane foam and its influence on a uniaxial compression model. *International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 46, no. 1, p. 31-49. ISSN 00207225.
- [13] BEZAZI, Abderrezak; SCARPA, Fabrizio. Mechanical behaviour of conventional and negative Poisson's ratio thermoplastic polyurethane foams under compressive cyclic loading. *International Journal of Fatigue*, 2007, vol. 29, no. 5, p. 922-930. ISSN 01421123.
- [14] GREAVES, G.; GREER, A.; LAKES, R et. al. Poisson's ratio and modern materials. *Nature Materials*, 2011, vol. 10, no. 11, p. 823-837. ISSN 14761122.

- [15] PASTORINO, P.; SCARPA, F; PATSIAS, S et. al. Strain rate dependence of stiffness and Poisson's ratio of auxetic open cell PU foams. *Physica status solidi (b)*, 2007, vol. 244 no. 3, p. 955-965. ISSN 03701972.
- [16] HARPER, Douglas. *Online Etymology Dictionary* [online]. 2001 [cit. 27.5.2016]. Dostupné z: <http://www.etymonline.com/>
- [17] HEXCEL COMPOSITES. *HexWeb Honeycomb Sandwich Design Technology* [online]. Duxford, 2000 [cit. 27.5.2016]. Publication No. AGU 075b.

ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV

Symbol	Jednotka	Význam
b	[m]	šírka
D	[Pam ⁴]	ohybová tuhosť
E	[Pa]	modul pružnosti v ťahu
F	[N]	sila
g	[ms ⁻¹]	tiažové zrýchlenie
G	[Pa]	modul pružnosti v šmyku
h	[m]	hrúbka jadra
H _{max}	[m]	najväčšia hodnota hrúbky jadra
H _{min}	[m]	najmenšia hodnota hrúbky jadra
J	[m ⁴]	kvadratický moment prierezu
k	[-]	koeficient bezpečnosti
ΔL	[m]	predĺženie
L	[m]	dĺžka
m	[kg]	hmotnosť
M _o	[Nm]	ohybový moment
S _o	[m ²]	pôvodný prierez
t	[m]	hrúbka
T	[N]	posúvajúca sila
U	[m ²]	lineárny moment prierezu
x, y, z	[m, m, m]	kartézsky súradnicový systém
γ	[-]	uhlové pretvorenie
ε	[-]	dĺžkové pretvorenie
μ	[-]	Poissonov pomer
ρ	[kgm ⁻³]	hustota
σ	[Pa]	normálové napätie
σ _m	[Pa]	medza pevnosti v ťahu
τ	[Pa]	šmykové napätie

Skratka	Význam
FEM	finite element method (MKP)
GFRP	glass-fibre reinforced polymer – epoxidová živica vystužená sklenenými vláknami
MKP	metóda konečných prvkov
PU	polyuretán

Indexy

Symbol	Význam
0	pôvodný
1,2,3	hlavné smery, prípadne číslo vrstvy v konštrukcii lyže
max	maximálny
min	minimálny
o	ohybový
t	ťahový
σ	vzťahujúci sa k normálovému napätiu