UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Formalizace spojky implikace v klasické a neklasické logice

Vedoucí diplomové práce:
Prof. RNDr. Ivan Chajda, DrSc.
Rok odevzdání: 2009

Vypracoval:
Michal Šedík
M-F, V. ročník

Obsah

Prohlášení

Prohlašuji, že předloženou diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s využitím konzultací vedoucího diplomové práce, odborné literatury a internetu.

V Olomouci, 16.6.2009 Michal Šedík

Poděkování

Velmi rád bych chtěl na tomto místě poděkovat vedoucímu diplomové práce panu Prof. RNDr. Ivanu Chajdovi, DrSc. za všechny rady, připomínky, trpělivost, ochotu a veškerou pomoc, kterou mi při psaní diplomové práce věnoval.

Dále bych chtěl poděkovat svým dvěma kamarádům Miroslavu Kovaříkovi a Jakubu Tláskalovi, kteří mi pomohli s nastavením typografického programu LaTeX, ve kterém je diplomová práce napsána.

Úvod

Klasická výroková logika je v dnešní podobě algebraicky axiomatizována jako Booleova algebra. Tuto algebru zavedl v 19. století irský matematik a logik George Boole (1815-1864), který se intenzivně zabýval formalizací Aristotelovské logiky, která byla používána už z doby antiky. Bez formalizace však byla příliš těžkopádným nástrojem a nebylo by ji možné používat v soudobých aplikacích, což jsou zejména:

- programování ve výpočetní technice,

- automatizační technika (robotika a mechatronika),

- návrhy tvz. logických obvodů (v elektrotechnice),

- design čipů pro počítačové procesory.

Formalizace pomocí Booleových algeber ovšem umožňuje také detailní zkoumání jednotlivých logických spojek. Je zřejmé, že nejproduktivnější výrokovou spojkou v klasické logice je spojka implikace. Pokud se omezíme jen na tuto spojku (která je termovou operací v Booleově algebře, neboť $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$), dostáváme tvz. implikační redukt. Jeho formalizaci ve formě implikační algebry provedl J.C. Abbott v roce 1967.

Je pozoruhodné, že pokud uvažujeme jen spojku implikace, tj. jen implikační algebru, tj. grupoid s jedinou binární operací, lze tuto algebru dále zobecňovat i pro jiné logiky, např. pro logiku kvantové mechaniky. První pokus v tomto směru opět uskutečnil v roce 1976 výše zmíněný J.C. Abbott. Získal tzv. ortoimplikační algebru splňující podmínku kompatibility. Analogickou úlohu řešili I. Chajda, R. Halaš, H. Länger, ovšem bez podmínky kompatibility. Jelikož logika kvantové mechaniky neobsahuje zákon vyloučeného třetího, odpovídající formalizace pomocí teorie svazů vede na svaz, který není jednoznačně komplementární, a tedy ani distributivní.

Tuto svazovou reprezentaci provedli americký matematik Garrett Birkhoff (1911-1996) a John von Neumann (1903-1957), matematik maďarského původu, pomocí tzv. ortomodulárních svazů. Je však otázkou, zda je ortomodularita skutečně nutnou podmínkou, avšak svaz musí být v každém případě tzv. ortosvaz. Lze pak opět formalizovat spojku implikace v tzv. ortologice, což je logika odvozená z ortosvazu tak, jak je klasická logika odvozená z Booleovy algebry.

Cílem této diplomové práce je nejprve prezentovat Abbottovy dosažené výsledky o implikační algebře klasické logiky, a poté prezentovat příslušné implikační algebry v ortologice, založené jak na ortomodulárních svazech, tak na ortosvazech, a srovnat dosažené výsledky a axiomatické systémy.

Kapitola 1

1. Implikační algebra

Definice 1 *Implikační algebra je grupoid* $(I; \circ)$, *splňující identity:*

(I1) $(x \circ y) \circ x = x$ (kontrakce),

(I2) $(x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x$ (kvazikomutativita),

(I3) $x \circ (y \circ z) = y \circ (x \circ z)$ (záměna).

Tedy implikační algebra je definována identitami, jako algebra typu (2), kde operaci $\circ$ označujeme jednoduše $x \circ y$, a která může být interpretována buď $x \Rightarrow y$ nebo $y - x$ v závislosti na modelu, který máme na mysli.

Je jednoduché ověřit, že každá Booleova algebra $(B; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ určuje (duální) implikační algebry $(B; \Rightarrow)$ a $(B; -)$, kde

$$x \Rightarrow y = x' \vee y \quad \text{a} \quad y - x = x' \wedge y.$$

Stejně tak výroková logika vytváří implikační algebru vzhledem ke spojce **implikace**, a tak jeden z těchto modelů může být používaný k vytvoření teorie implikačních algeber.

Jako další příklad, který ovšem není Booleovou algebrou, můžeme uvést **volnou implikační algebru** se dvěma generátory. Tato algebra je popsána v tabulce 1 a ve Větách 1 a 2.

Začneme dvěma tvrzeními.

Lemma 1 *Pro každé* $x, y \in I$ *platí*

$$x \circ (x \circ y) = x \circ y.$$

Důkaz: Užitím (I1) dvakrát obdržíme

$$x \circ (x \circ y) = ((x \circ y) \circ x) \circ (x \circ y) = x \circ y.$$

□

Lemma 2 *Pro každé $x, y \in I$ platí*

$$x \circ x = (x \circ y) \circ (x \circ y).$$

Důkaz: Dle (I1), (I2) a Lemma 1 dostaneme

$$x \circ x = ((x \circ y) \circ x) \circ x = (x \circ (x \circ y)) \circ (x \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y)$$

$\square$

Věta 1 *Každá implikační algebra $(I; \circ)$ obsahuje konstantu 1, a pro každé $x \in I$ platí*

1) $x \circ x = 1$,

2) $1 \circ x = x$,

3) $x \circ 1 = 1$.

Důkaz: ad 1) Dle Lemma 2 a (I2) platí

$$x \circ x = (x \circ y) \circ (x \circ y) = ((x \circ y) \circ y) \circ ((x \circ y) \circ y) =$$

$$= ((y \circ x) \circ x) \circ ((y \circ x) \circ x) = (y \circ x) \circ (y \circ x) = y \circ y.$$

Odtud, výsledek $x \circ x$ je nezávislý na x, tj. $x \circ x$ je konstanta v I, kterou značíme 1.

ad 2)

$$1 \circ x = (x \circ x) \circ x = x.$$

ad 3)

$$x \circ 1 = x \circ (x \circ x) = 1.$$

$\square$

Věta 2 *V každé implikační algebře, platí následující identity:*

1) $x \circ (y \circ x) = 1$,

2) $x \circ ((x \circ y) \circ y) = 1$,

3) $(x \circ y) \circ (y \circ x) = y \circ x$,

4) $((x \circ y) \circ y) \circ x = y \circ x$,

5) $((x \circ y) \circ y) \circ y = x \circ y$.

Důkaz: 1) $x \circ (y \circ x) = y \circ (x \circ x) = y \circ 1 = 1$,

2) $x \circ ((x \circ y) \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y) = x \circ x = 1$,

3) $(x \circ y) \circ (y \circ x) = y \circ ((x \circ y) \circ x) = y \circ x$,

4) $((x \circ y) \circ y) \circ x = ((y \circ x) \circ x) \circ x = (x \circ (y \circ x)) \circ (y \circ x) = 1 \circ (y \circ x) = y \circ x$,

5) $((x \circ y) \circ y) \circ y = (y \circ (x \circ y)) \circ (x \circ y) = 1 \circ (x \circ y) = x \circ y.$ $\square$

Užitím Lemmat 1 a 2 a Vět 1 a 2, můžeme vypočítat **volnou implikační algebru** se dvěma generátory jednoduše tím, že vypočítáme výsledky obsahující prvky x a y. Výsledná algebra je složená ze šesti prvků $x, y, 1, x \circ y, y \circ x, (x \circ y) \circ y$, a její operace je určena v tabulce 1.

$\circ$	1	x	y	$x \circ y$	$y \circ x$	$(x \circ y) \circ y$
1	1	x	y	$x \circ y$	$y \circ x$	$(x \circ y) \circ y$
x	1	1	$x \circ y$	$x \circ y$	1	1
y	1	$y \circ x$	1	1	$y \circ x$	1
$x \circ y$	1	x	$(x \circ y) \circ y$	1	$y \circ x$	$(x \circ y) \circ y$
$y \circ x$	1	$(x \circ y) \circ y$	y	$x \circ y$	1	$(x \circ y) \circ y$
$(x \circ y) \circ y$	1	$y \circ x$	$x \circ y$	$x \circ y$	$y \circ x$	1

Tab. 1

Tabulku 1 můžeme použít k důkazu následujícího důsledku:

Důsledek 1 *Pro každé $x, y \in I$ platí*

a) $x \circ y = y \circ x \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ *(antikomutativita)*,

b) $x \circ y = x \Rightarrow x = 1$,

c) $x \circ y = y \Leftrightarrow y \circ x = x$.

Důkaz: a) Když $x \circ y = y \circ x$, potom

$$x = (x \circ y) \circ x = (y \circ x) \circ x = (x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ y = y.$$

b) Když $x \circ y = x$, potom

$$x = (x \circ y) \circ x = x \circ x = 1.$$

c) Když $x \circ y = y$, potom

$$y \circ x = (x \circ y) \circ x = x.$$

$\square$

Věta 3 *Každá implikační algebra $(I; \circ)$ určuje částečně uspořádanou množinu $(I; \leq, 1)$ s největším prvkem 1, kde uspořádání je určeno předpisem*

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \circ y = 1.$$

Důkaz: a) Dle Věty 1 je $\leq$ reflexivní.

b) Když $x \leq y$ a $y \leq x$, potom $x \circ y = 1 = y \circ x$, pak použitím (I2) dostaneme

$$x = 1 \circ x = (y \circ x) \circ x = (x \circ y) \circ y = 1 \circ y = y,$$

tzn., že $\leq$ je antisymetrická.

c) Když $x \leq y$ a $y \leq z$, potom $x \circ y = y \circ z = 1$, odkud

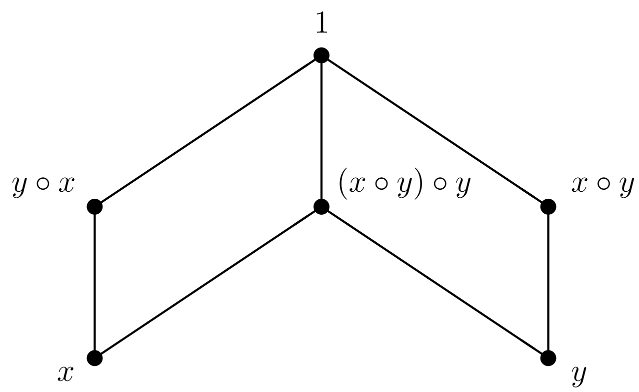
$$x \circ z = x \circ (1 \circ z) = x \circ ((y \circ z) \circ z) = x \circ ((z \circ y) \circ y) =$$

$$= (z \circ y) \circ (x \circ y) = (z \circ y) \circ 1 = 1,$$

tedy $x \leq z$, nebo-li $\leq$ je tranzitivní.

d) $x \circ 1 = 1 \Rightarrow x \leq 1$, také 1 je největší prvek. □

Příklad 1 Na obrázku 1 je Hasseovým diagramem určena volná implikační algebra se dvěma generátory, operace na této algebře je znázorněna v tabulce 1.



Obr. 1

Lemma 3 *Pro každé $x, y \in I$ je $x \leq y$ právě když existuje $a \in I$ tak, že $y = a \circ x$.*

Důkaz: i) $x \leq y \Rightarrow x \circ y = 1$, odtud $y = 1 \circ y = (x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x = a \circ x$, kde $a = y \circ x$.

ii) Obráceně, když $y = a \circ x$, pak

$$x \circ y = x \circ (a \circ x) = a \circ (x \circ x) = a \circ 1 = 1,$$

tedy $x \leq y$. □

Věta 4 *Každá implikační algebra $(I; \circ)$ určuje spojový polosvaz $(I; \vee)$, kde*

$$x \vee y = (x \circ y) \circ y.$$

Důkaz: i) Dle (I3), $x \circ ((x \circ y) \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y) = 1$ implikuje $x \leq (x \circ y) \circ y$, a tedy také $y \leq (y \circ x) \circ x = (x \circ y) \circ y$.

ii) Nechť $x, y \leq z$, pak $x \circ z = 1$, a dle Lemma 3 existuje a takové, že $z = a \circ y$. Odtud

$$((x \circ y) \circ y) \circ z = ((x \circ y) \circ y) \circ (a \circ y) = a \circ (((x \circ y) \circ y) \circ y) =$$

$$= a \circ (x \circ y) = x \circ (a \circ y) = x \circ z = 1$$

Tedy $(x \circ y) \circ y \leq z$, takže $(x \circ y) \circ y$ je nejmenší horní závora prvků x, y, tj. je jejich supremum $x \vee y$. $\square$

Lemma 4 *$x \leq y$ implikuje*

1) $z \circ x \leq z \circ y$ *(zleva izotonní)*,

2) $y \circ z \leq x \circ z$ *(zprava antitonní)*.

Důkaz: ad 1) $x \leq y \Rightarrow y = a \circ x$ pro nějaké x.
Odtud
$$z \circ y = z \circ (a \circ x) = a \circ (z \circ x),$$
takže dle Lemma 3 platí $z \circ x \leq z \circ y$.
ad 2) $x \leq y \Rightarrow x \circ y = 1$.
Odtud
$$(y \circ z) \circ (x \circ z) = x \circ ((y \circ z) \circ z) = x \circ ((z \circ y) \circ y) =$$
$$= (z \circ y) \circ (x \circ y) = (z \circ y) \circ 1 = 1.$$
Proto $y \circ z \leq x \circ z$. $\square$

Lemma 5 *Když $p \leq x, y$, pak $x \circ y = x \circ p \vee y$.*

Důkaz: i) $p \leq y \Rightarrow x \circ p \leq x \circ y$. Ale $y \leq x \circ y$, takže $x \circ p \vee y \leq x \circ y$.

ii) Nechť $z = x \circ p \vee y$. Pak $y \leq z$, takže $z = y \vee z = (y \circ z) \circ z = (z \circ y) \circ y$.
Dále
$$x \vee x \circ p = (x \circ (x \circ p)) \circ (x \circ p) = (x \circ p) \circ (x \circ p) = 1,$$
tedy
$$(x \circ z) \circ z = x \vee z = x \vee x \circ p \vee y = 1.$$
Proto
$$(x \circ y) \circ z = (x \circ y) \circ (1 \circ z) = (x \circ y) \circ (((x \circ z) \circ z) \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z) =$$
$$= (x \circ y) \circ ((x \circ ((z \circ y) \circ y)) = (x \circ y) \circ ((z \circ y) \circ (x \circ y)) =$$
$$= (z \circ y) \circ ((x \circ y) \circ (x \circ y)) = (z \circ y) \circ 1 = 1.$$
Tedy $x \circ y \leq z = x \circ p \vee y$. Odtud $x \circ y = x \circ p \vee y$. $\square$

Věta 5 *Nechť p je dolní závora prvků x a y, pak prvek*

$$x \wedge y = (x \circ (y \circ p)) \circ p$$

je největší dolní závora.

Důkaz: i) Dle Lemma 5, $x \circ (y \circ p) = x \circ p \vee y \circ p$. Ale $x \circ p \leq x \circ p \vee y \circ p$ implikuje

$$(x \circ (y \circ p)) \circ p = (x \circ p \vee y \circ p) \circ p \leq (x \circ p) \circ p = x \vee p = x.$$

Tedy $(x \circ (y \circ p)) \circ p$ je dolní závora pro prvek x. Ale $(x \circ (y \circ p)) \circ p = (y \circ (x \circ p)) \circ p$, takže je také dolní závora pro prvek y.

ii) Nechť q je další dolní závora prvků x a y. Potom dle Lemma 4, $x \circ p, y \circ p \leq q \circ p$, tedy $x \circ p \vee y \circ p \leq q \circ p$. Znovu aplikujeme Lemma 4, máme

$$q \leq q \vee p = (q \circ p) \circ p \leq (q \circ p \vee y \circ p) \circ p = (x \circ (y \circ p)) \circ p.$$

Tedy $(x \circ (y \circ p)) \circ p$ je největší dolní závora prvků x a y.
Poznamenejme, že jsme také dokázali, že $x \wedge y = (x \circ (y \circ p)) \circ p$ je nezávislé na výběru prvku p.
Dále jsme ukázali, že každý hlavní filtr $[p)$ je svaz, tj. je uzavřený vzhledem k oběma svazovým operacím, tj. průseku a spojení. $\square$

Nyní ukážeme, že svaz $[p)$ z důkazu Věty 5 je jednoznačně komplementární:

Věta 6 *Jesliže $p \in I$ a $x \in [p)$ potom prvek $x'_p = x \circ p$ je jediný komplement prvku x ve svazu $[p)$.*

Důkaz: i) Nechť $x \in [p)$. Pak

$$x \vee x \circ p = (x \circ ((x \circ p)) \circ (x \circ p) = ((x \circ p) \circ x) \circ x = x \circ x = 1.$$

ii) Jelikož $p \leq x, x \circ p$; tj. p je dolní závora pro prvky x a $x \circ p$, plyne odtud, že $x \wedge x \circ p$ existuje, a platí

$$x \wedge x \circ p = (x \circ ((x \circ p) \circ p)) \circ p = (x \circ ((p \circ x) \circ x)) \circ p =$$

$$= ((p \circ x) \circ (x \circ x)) \circ p = ((p \circ x) \circ 1)) \circ p = 1 \circ p = p.$$

Tedy $x \circ p$ komplement prvku x v $[p)$.
iii) Dokažme, že $x \circ p$ je jediný komplement, nechť $a \in [p)$ splňuje $x \vee a = 1$ a $x \wedge a = p$. Pak $p \leq x$ implikuje

$$x \circ p \leq x \circ a = ((x \circ a) \circ a) \circ a = (x \vee a) \circ a = 1 \circ a = a.$$

Ale $a \circ p \leq x \circ (a \circ p) \Rightarrow (x \circ (a \circ p)) \leq (a \circ p) \circ a = a \vee p = a$.
Podobně, $(x \circ (a \circ p)) \circ p = (a \circ (x \circ p)) \circ p \leq x$. Tedy $(x \circ (a \circ p)) \circ p \leq x \wedge a = p$.
Ale $p \leq (x \circ (a \circ p)) \circ p$, takže $(x \circ (a \circ p)) \circ p = p$.
Tedy

$$x \circ p = x \circ ((x \circ (a \circ p)) \circ p) = (x \circ (a \circ p)) \circ (x \circ p) =$$

$$= (a \circ (x \circ p)) \circ (x \circ p) = a \wedge x \circ p = a.$$

Tedy $[p)$ je jednoznačně komplementární svaz. $\square$

Můžeme tedy psát x'_p pro $x \circ p$. Dále,v Lemma 5 můžeme psát $x \circ y = x'_p \vee y$.

Také výraz $x \wedge y = (x \circ (y \circ p)) \circ p = (x \circ p \vee y \circ p) \circ p$ můžeme zapsat ve tvaru $x \wedge y = (x'_p \vee y'_p)'_p$, který je De Morganovým zákonem pro vyjádření průseku pomocí operací spojení a komplementace v hlavním filtru $[p)$.

Nyní zbývá dokázat, že svaz $[p)$ je distributivní, což ukážeme v následující větě:

Věta 7 *Každá implikační algebra $(I;\circ)$ určuje spojový polosvaz $(I;\vee)$ ve kterém je každý hlavní filtr $[p)$ Booleova algebra.*

Důkaz: Zbývá ukázat, že když $x, y, z \in [p)$ pro libovolné $p \in I$, pak $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, protože ve svazu jeden disributivní zákon implikuje druhý distibutivní zákon.
Proto položme $q = x \wedge y$ a $r = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, potom $x \wedge y \leq r$, což plyne z Lemma 4, kde $x \circ (x \wedge y) \leq x \circ r$.

Protože $q \leq x, y$, můžeme psát $x \wedge y = (x \circ (y \circ q)) \circ q$. Tedy

$$x \circ (x \wedge y) = x \circ ((x \circ (y \circ q)) \circ q) = (x \circ (y \circ q)) \circ (x \circ q) =$$

$$= (y \circ (x \circ q)) \circ (x \circ q) = y \vee x \circ q = x \circ y.$$

Tedy $y \leq x \circ y = x \circ (x \wedge y) \leq x \circ r$. Podobně $z \leq x \circ r$, také $y \vee z \leq x \circ r$, tj. $(y \vee z) \circ (x \circ r) = 1$. Odtud $r = 1 \circ r = ((y \vee z) \circ (x \circ r)) \circ r = x \wedge (y \vee z)$, tj. $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$. $\square$

Další věta ukáže, že také naopak, každý spojový polosvaz, ve kterém je každý hlavní filtr Booleova algebra, určuje implikační algebru, tedy věta 8 je obrácená k větě 7.

Věta 8 *Každý spojový polosvaz $(I;\vee)$, ve kterém je každý hlavní filtr Booleova algebra, určuje implikační algebru vzhledem k operaci*

$$x \circ y = (x \vee y)'_y.$$

Důkaz: Za prvé poznamenejme, že $x \circ y$ je vždy definováno jednoznačně, protože:

i) $(I;\vee)$ je spojový polosvaz,
ii) $x \vee y$ je prvek v $[y)$,
iii) každý prvek z $[y)$ má jediný koplement v $[y)$.

Dále poznamenejme, že $(I;\vee)$ má největší prvek. Když p je prvek z I, potom Booleova algebra $[p)$ má největší prvek $1 \circ p$. Když x je jiný prvek z I, pak $p \leq x \vee p \in [p)$ takže $x \leq x \vee p \leq 1_p$, tj. $1_p = 1$ je největší prvek v I.
Nyní můžeme ukázat, že takto definovaný prvek $x \circ y$ splňuje identity (I1) - (I3):

(I1): $(x \circ y) \circ x = (x \circ y \vee x)'_x = 1'_x = x.$

(I2): $(x \circ y) \circ y = (x \circ y \vee y)'_y = (x \circ y)'_y = x \vee y = y \vee x = (y \circ x) \circ x,$
což vyplývá z komutativity operace $\vee$.

(I3):

$$x \circ (y \circ z) = (x \vee y \circ z)'_{y \circ z} = (x \vee y \circ z)'_z \vee y \circ z = (x \vee z \vee y \circ z)'_z \vee y \circ z =$$

$$= ((x \vee z)'_z \wedge (y \circ z)'_z) \vee y \circ z = ((x \circ z) \wedge (y \circ z)'_z) \vee y \circ z =$$

$$= ((x \circ z \vee y \circ z)) \wedge ((y \circ z)'_z \vee y \circ z) = x \circ z \vee y \circ z,$$

kde všechny výpočty jsou provedeny v Booleově algebře $[z)$. Ale poslední výraz je symetrický pro prvky x a y, a tedy $x \circ (y \circ z) = y \circ (x \circ z)$. $\square$

Skutečnost, že Věta 8 je obrácená k Větě 7, plyne z toho, že když jsme označili operaci ve Větě 8 jako $x \circ y$, potom $x \circ y = (x \vee y)'_y = ((x \circ y) \circ y)'_y = ((x \circ y) \circ y) \circ y = x \circ y$. Obráceně, $(x \circ y) \circ y = ((x \vee y)'_y \vee y)'_y = (x \vee y) \wedge y'_y = x \vee y$.

Jako důsledek Věty 7 obdržíme charakterizaci těch implikačních algeber, které jsou asociované s Booleovou algebrou.

Tuto skutečnost popisuje následující věta, kterou uvedeme bez důkazu:

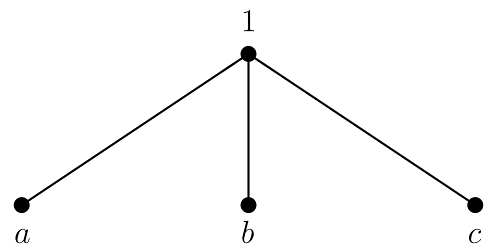
Věta 9 *Každá Booleova algebra je asociovaná s některou implikační algebrou, splňující identitu:*

(I4) $\quad \exists\, 0 \quad$ *takový, že* $\quad 0 \circ x = 1 \quad \forall x \in I.$

Poznámka: Tedy Booleovu algebru můžeme uvažovat jako algebru typu (2,0), tj. jako systém s jednou binární operací (implikace), a nulární operací, nebo konstantou 0, splňující identity (I1) - (I4).

Proto teorii Booleových algeber můžeme získat jako speciální případ teorie implikačních algeber.

Příklad 2 Uvažujme uspořádanou množinu $\mathcal{A}$ danou Hasseovým diagramem na obrázku 2.



Obr. 2

$$a \circ b = b, \quad a \circ c = c, \quad pro \quad a \neq b, c,$$

$$1 \circ b = b, \quad a \circ 1 = 1, \quad a \circ a = 1.$$

Snadno se ověří, že tento grupoid $\mathcal{A} = (\{a, b, c, 1\}; \circ)$ je implikační algebra taková, že přidáním nejmenšího prvku 0 nedostaneme Booleovu algebru.

Následující větu uvedeme bez důkazu (který plyne z Věty 7).

Věta 10 1) *když* $x \wedge y$ *a* $x \wedge z$ *existují, pak* $x \wedge (y \vee z)$ *existuje a*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

2) *když* $y \wedge z$ *existuje, pak* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

3) *pro* x, y, z *platí* $x \circ (y \vee z) = x \circ y \vee x \circ z$,

4) *když* $y \wedge z$ *existuje, pak* $x \circ y \vee x \circ z$ *existuje a* $x \circ (y \wedge z) = x \circ y \wedge x \circ z$,

5) $x \circ z \wedge y \circ z$ *existuje a* $(x \vee y) \circ z = x \circ z \wedge y \circ z$,

6) $x \wedge y$ *existuje, pak* $(x \wedge y) \circ z = x \circ z \vee y \circ z$. □

Důsledek 2 *Pro každé* $x, y, z \in I$ *platí*

$$((x \circ y) \circ z) \circ z = x \circ ((y \circ z) \circ z).$$

Důkaz:

$$((x \circ y) \circ z) \circ z = x \circ y \vee z = x \circ y \vee y \vee z = x \circ (y \vee z) = x \circ ((y \circ z) \circ z).$$

□

Kapitola 2

2. Axiomy implikace v ortologice

Klasická výroková logika má svůj algebraický protějšek v Booleově algebře. Klony funkcí vytvořené pomocí logické spojky implikace nejsou klony všech booleovských funkcí. Algebraický protějšek ve zmíněném případu nazýváme implikační algebra, kterou zavedl J.C. Abbott [1], tj. grupoid splňující identity (I1),(I2) a (I3).

Poznamenejme v krátkosti, že $x \circ y$ je formální vyjádření pro **x implikuje y** (symbol $x \Rightarrow y$ není obvykle používaný pro možnou záměnu s implikací v metajazyce). Abbott dokázal, že každá implikační algebra obsahuje algeraickou konstantu 1 (1 značí logickou hodnotu PRAVDA) takovou, že $x \circ x = 1$ je identita na $\mathcal{A}$.

Zavedeme-li binární operaci $\leq$ pomocí pravidla

$$x \leq y \text{ právě tehdy když } \ x \circ x = 1$$

uspořádaná množina $(A; \leq)$ je spojovým polosvazem s největším prvkem 1, kde

$$x \vee y = (x \circ y) \circ y,$$

a pro každé $p \in A$ je hlavní filtr $[p)$ Booleovou algebrou, kde $x^p = x \circ p$ je komplement prvku $x \in [p)$, samozřejmě platí

$$x \wedge_p y = ((x \circ p) \vee (y \circ p)) \circ p$$

užitím De Morganova zákona.

V logice kvantové mechaniky nelze použít klasickou logiku, protože neobsahuje **pravidlo vyloučeného třetího**. Proto za její algebraický protějšek považujeme **ortomodulární svaz**. Axiomy v této logice stanovil J.C. Abbott [2] vzhledem k podmínce nazývané **podmínka kompatibility**.

Přepoklad ortomodularity nemusí platit ve všech případech, a proto zobecníme tento pojem pro obecnou logiku pouze odvozením z ortosvazu.

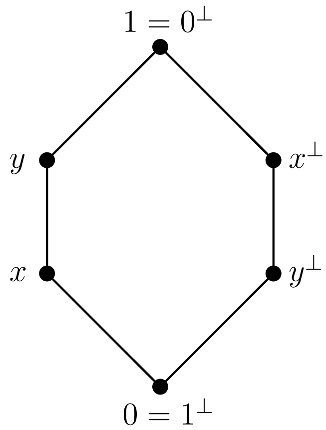
Ortosvazem nazýváme algebru $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, ^{\perp}, 0, 1)$ takouvou, že $(L; \vee, \wedge, 0, 1)$ je ohraničený svaz a operaci $^{\perp}$ nazýváme **ortokomplementaci**, tj. unární operace na L splňující:

i) $x \vee x^{\perp} = 1$ a $x \wedge x^{\perp} = 0$ ($x^{\perp}$ je komplement x),

ii) $x \leq y \Rightarrow y^{\perp} \leq x^{\perp}$ (antitonie),

iii) $x^{\perp\perp} = x$ (involuce).

Na obrázku 3 je znázorněn typický příklad ortosvazu, který není ortomodulární. Ortosvaz je ortomodulární tehdy a jen tehdy, pokud neobsahuje podsvaz znázorněný na obr. 3.



Obr. 3

Při popisu spojky implikace neobdržíme celý klon funkcí korespondujícího svazu, ale pouze odvozený spojový polosvaz, stejně jako v případě Booleových algeber.

Proto definujeme následující pojem:

Definice 2 *Spojový polosvaz* $\mathcal{S} = (S; \vee, 1)$ *s největším prvkem* 1 *nazýváme* **ortopolosvaz**, *je-li pro každý* $p \in S$ *hlavní filtr* $[p)$ *ortosvaz* ($\wedge_p$ *značí operaci průseku v* $[p)$).

Nyní jsme připraveni zobecnit Abbottovu implikační algebru pro náš případ.

Definice 3 *Grupoid* $\mathcal{A} = (A; \circ)$ *nazýváme* **pre-implikační algebra**, *jestliže splňuje identity* (I1) *a* (I2). *Pre-implikační algebru nazýváme* **ortoalgebra**, *splňuje-li axiom*

(**A**) $$(((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = 1.$$

Lemma 6 *Nechť* $\mathcal{A} = (A; \circ)$ *je pre-implikační algebra. Pak splňuje identitu*

(I) $$x \circ x = y \circ y,$$

tj. existuje konstanta 1 *taková, že* $x \circ x = 1$ *pro každý prvek* $x \in A$, *a* $\mathcal{A}$ *splňuje identity*

(II) $$1 \circ x = x, \; x \circ 1 = 1 \quad a \quad x \circ (x \circ y) = x \circ y\ .$$

Důkaz: Užitím (I1) dvakrát, obržíme

$$x \circ (x \circ y) = ((x \circ y) \circ x) \circ (x \circ y) = x \circ y$$

tedy, užitím (I1), (I2) a Lemma 1 odvodíme

$$x \circ x = ((x \circ y) \circ x) \circ x = (x \circ (x \circ y)) \circ (x \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y).$$

Proto

$$\begin{aligned} x \circ x &= (x \circ y) \circ (x \circ y) = ((x \circ y) \circ y) \circ ((x \circ y) \circ y) = \\ &= ((y \circ x) \circ x) \circ ((y \circ x) \circ x) = (y \circ x) \circ (y \circ x) = y \circ y, \end{aligned}$$

tím jsme dokázali (I). Označme $x \circ x = 1$. Dle (I1) obdržíme

$$1 \circ x = ((x \circ x) \circ x) = x \qquad a \qquad x \circ 1 = x \circ (x \circ x) = x \circ x = 1,$$

tedy, také (II) je splněna. $\square$

Lemma 7 *Buď $\mathcal{A} = (A; \circ)$ pre-implikační algebra. Definujme binární relaci $\leq$ na A podmínkou*

(R) $\qquad x \leq y \quad$ *právě tehdy když* $\quad x \circ y = 1.$

Pak binární relace $\leq$ je reflexivní a antisymetrická. Když $\mathcal{A}$ je ortoalgebra, pak $\leq$ je uspořádání na A a 1 je největší prvek.

Důkaz: Reflexivita je $\leq$ je zřejmá dle Lemma 6. Přepokládejme $x \leq y$ a $y \leq x$. Pak dle (R), $x \circ y = 1$ a $y \circ x = 1$. Užitím (I2) odvodíme

$$x = (1 \circ x) = (y \circ x) \circ x = (x \circ y) \circ y) = 1 \circ y = y$$

antisymetrii.

Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ je ortoalgebra. Nechť $x \leq y$ a $y \leq z$. Pak $x \circ y = 1$ a $y \circ x = 1$, a pomocí (A),

$$1 = (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = ((1 \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) =$$

$$= (y \circ z) \circ (x \circ z) = 1 \circ (x \circ z) = (x \circ z)$$

tedy, dle (R), $x \leq z$, což dokazuje tranzitivitu relace $\leq$. Proto $\leq$ je uspořádání na A. Dle (II), je $x \leq 1$ pro každý prvek $x \in A$. $\square$

Nyní, binární relaci definovanou pomocí (R) nazýváme **indukované uspořádání** na ortoalgebře $\mathcal{A} = (A; \circ)$.

Lemma 8 *Nechť* $\mathcal{A} = (A; \circ)$ *je ortoalgebra a* $\leq$ *je indukované uspořádání.*

Pak

a) $x \leq y$ *implikuje* $y \circ z \leq x \circ z$ *pro každé* $x, y, z \in A$,

b) $x \leq (x \circ y) \circ y$ *a* $y \leq (x \circ y) \circ y$,

c) *když* $x, y \leq z$ *pak* $z \leq (x \circ y) \circ y$.

Důkaz: a) Předpokládejme $x \leq y$. Pak $x \circ y = 1$; tj. $(x \circ y) \circ y = 1 \circ y = y$. Užitím identity (A), odvodíme

$$1 = (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = (y \circ z) \circ (x \circ z)$$

dostáváme $y \circ z \leq x \circ z$.

b) Aplikací a) snadno obdržíme $y \leq 1 \Rightarrow x = 1 \circ x \leq y \circ x$, tj. $\mathcal{A}$ splňuje identitu

(III) $x \circ (y \circ x) = 1$.

Nyní, dle (III) a (I2) odvodíme

$$x \circ ((x \circ y) \circ y) = x \circ ((y \circ x) \circ x) = 1$$

odkud $x \leq (x \circ y) \circ y$. Výměnou x a y pak obdržíme $y \leq (x \circ y) \circ y$.

c) Nechť $x, y \leq z$. Pak, dle (a), $z \circ y \leq x \circ y$ a proto

$$(x \circ y) \circ y \leq (z \circ y) \circ y = (y \circ z) \circ z = 1 \circ z = z.$$

$\square$

Věta 11 *Nechť* $\mathcal{A} = (A; \circ)$ *je ortoalgebra a* $\leq$ *je indukované uspořádání. Pak* $\mathcal{A}$ *je spojový polosvaz s největším prvkem* 1, *kde*

$$x \vee y := (x \circ y) \circ y.$$

Pro každé $p \in A$ *je hlavní filtr* $[p)$ *ortosvaz, kde pro* $x \in [p)$ *jeho komplementem v* $[p)$ *je* $x^p = x \circ p$.

Důkaz: Dle (b) a (c) Lemma 8, vyplývá, že $(x \circ y) \circ y$ je supremum x, y vzhledem k relaci $\leq$, tj. $x \vee y = (x \circ y) \circ y$ a $(A; \leq)$ je spojový polosvaz.
Samozřejmě 1 je největší prvek v $(A; \leq)$. Dle (a) Lemma 8, zobrazení $x \longmapsto x^p = x \circ p$ je antitonní v $[p)$. Dále

$$x^{pp} = (x \circ p) \circ p = x \vee p = x$$

pro každý prvek $x \in [p)$, tedy je to involuce.

Proto můžeme užitím De Morganova zákona ukázat, že

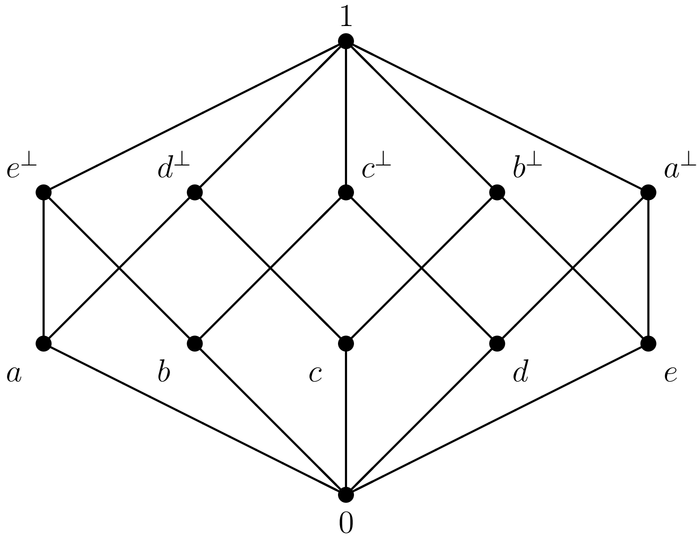
$$x \wedge_p y = (x^p \vee y^p)^p$$

je infimem prvků x, y v $[p)$. Proto $([p); \vee, \wedge_p)$ je ohraničený svaz.
Celkem

$$x \vee x^p = x \vee (x \circ p) = (x \circ (x \circ p)) \circ (x \circ p) = ((x \circ p) \circ x) \circ x = x \circ x = 1,$$

tedy x^p je ortokomplement prvku x v hlavním filtru [p). $\square$

Příklad 3 Hasseovým diagamem na obrázku 4 je znázorněn příklad $\vee$-polosvazu, ve kterém každý hlavní filtr je ortosvaz.



Obr. 4

Můžeme dokázat větu obrácenou k Větě 11. Kvůli tomu potřebujeme definovat implikaci na spojovém polosvazu, kde každý jeho hlavní filtr je ortosvaz.

V klasické logice víme, že $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$. V Booleově algebře, můžeme $\neg x \vee y$ přepsat jako $(x \vee y)^y$ v našem označení.

Proto implikaci v ortopolosvazu definujeme analogicky:

Věta 12 *Nechť* $\mathcal{S} = (S; \vee, 1)$ *je ortopolosvaz. Označme* x^p *ortokomplement* x *v* $[p)$. *Definujme binární operaci na* S *následovně*

$$x \circ y = (x \vee y)^y.$$

Pak $\circ$ *je binární operace definovaná na* S *a* $\mathcal{S} = (S; \circ)$ *je ortoalgebra.*

Důkaz: Protože $x \vee y \in [y)$ pro všechna $x, y \in S$, operace $\circ$ je definována všude na S. Potřebujeme pouze ověřit identity (I1),(I2) a (A).
Snadno odvodíme

$$(x \circ y) \circ x = ((x \vee y)^y \vee x)^x = ((x \vee y)^y \vee (x \vee y))^x = 1^x = x$$

protože $(x \vee y)^y \geq y$ a $(x \vee y)^y$ je ortokomplement $(x \vee y)$ v $[y)$.
Dále
$$(x \circ y) \circ y = ((x \vee y)^y \vee y)^y = (x \vee y)^{yy} = x \vee y,$$
tedy ortokomplementace je involuce.
Analogicky $(y \circ x) \circ x = y \vee x = x \vee y$, a tedy podmínka (I2) je evidentní.
Konečně
$$(((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = ((x \vee y) \circ z) \circ (x \circ z) =$$
$$= ((x \vee y \vee z)^z \vee (x \vee z)^z)^{(x \vee z)^z} = ((x \vee z)^z)^{(x \vee z)^z} = 1$$
v důsledku antitonie ortokomplementace. $\square$

Závěr této kapitoly bude věnován některým důležitým vlastnostem kongruencí na ortoalgebrách.

Věta 13 *Ortoalgebry mají distibutivní svazy kongruencí.*

Důkaz: Uvažujme ternární termy $t_0(x, y, z) = x$, $t_1(x, y, z) = (y \circ (z \circ x)) \circ x$, $t_2(x, y, z) = (x \circ y) \circ z$, $t_3(x, y, z) = z$. Pak $t_0(x, y, x) = x$, $t_1(x, y, x) = (y \circ 1) \circ x = 1 \circ x = x$, $t_2(x, y, x) = (x \circ y) \circ x = x$ dle(I1), $t_3(x, y, x) = x$.

Pro i sudé obdržíme
$$t_0(x, x, y) = x = 1 \circ x = (x \circ (y \circ x)) \circ x = t_1(x, x, y),$$
dle identity (III) důkazu Lemma 8,
$$t_2(x, x, y) = (x \circ x) \circ y = 1 \circ y = y = t_3(x, x, y).$$

Pro i liché obdržíme
$$t_1(x, y, y) = (y \circ (y \circ x)) \circ x = (y \circ x) \circ x = (x \circ y) \circ y = t_2(x, y, y).$$
Tedy t_0, t_1, t_2, t_3 jsou Jónssonovy termy dokazující distributivitu svazu kongruencí variety ortoalgeber. $\square$

Nechť Θ je kongruence na ortoalgebře $\mathcal{A} = (A; \circ)$. Třídu $[1]_\Theta$ budeme nazývat **jádro kongruence** Θ. Algebru nazýváme **slabě regulární**, když každá $\Theta \in \mathcal{C}on\mathcal{A}$ je určena svým jádrem, tj. $\Theta, \Phi \in \mathcal{C}on\mathcal{A}$ a $[1]_\Theta = [1]_\Phi$ implikuje $\Theta = \Phi$.

Věta 14 *Varieta všech ortoalgeber je slabě regulární.*

Důkaz: Dle Csákányho věty, varieta $\mathcal{V}$ s konstantou 1 je slabě regulární právě tehdy, když existují binární termy $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ takové, že
$$t_1(x, y) = \ldots = t_n(x, y) = 1$$
právě tehdy, když $x = y$.

Položme $n = 2$ a $t_1(x, y) = x \circ y$; $t_2(x, y) = y \circ x$. Zřejmě $t_1(x, x) = t_2(x, x) = x \circ x = 1$. Obráceně, když $t_1(x, y) = t_2(x, y) = 1$ potom, dle Lemma 7, $x \leq y$ a $y \leq x$ odkud $x = y$.

Tedy, varieta ortoalgeber je slabě regulární. $\square$

Protože každá kongruence $\Theta \in \mathcal{C}on\mathcal{A}$ je určena svým jádrem $[1]_\Theta$, je přirozenou otázkou popsat jádra kongruencí ortoalgeber.

Podmnožinu D ortoalgebry $\mathcal{A} = (A; \circ)$ nazýváme **deduktivní systém**, když $1 \in D$ a $a \in D$ a $a \circ b \in D$ implikuje $b \in D$.

Všimněme si, že to je tvar Modus Ponens na ortoalgebře $\mathcal{A}$ u deduktivního sytému D.

Poslední větu, Větu 15, této kapitoly uvedeme bez důkazu.

Věta 15 *Podmnožima D ortoalgebry $\mathcal{A} = (\mathcal{A}; \circ)$ je jádro kongruence právě tehdy, když D je deduktivní systém. Když D je deduktivní systém, pak D je jádro kongruence*

$$\Theta_D = \{\langle x, y\rangle \in A^2; \quad x \circ y \in D \quad a \quad y \circ x \in D\}.$$

$\square$

Kapitola 3

3. Ortoimplikační algebry

3.1. Ortologika

Ortologika je tvořena množinou P a binární operací $p \Rightarrow q$ splňující axiomy:
(A1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
(A2) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.

Odvozovací pravidla jsou:
(R1) když p a $p \Rightarrow q$, pak q (Modus Ponens),
(R2) když $p \Rightarrow q$, pak $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
(R3) když $p \Rightarrow q$, pak $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$,
(R4) když $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$, pak $(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q.)$

Následují jednoduché důsledky axiomů a odvozovacích pravidel jsou:
(T1) $p \Rightarrow p$,
(R5) když $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow r$, pak $p \Rightarrow r$,
(R6) když $p \Rightarrow q$, pak $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
(T2) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Užitím (T1) a (R5), lze zavést relaci
$$p \leq q \quad \text{právě tehdy, když} \quad p \Rightarrow q,$$
která je kvaziuspořádání na P. Proto relace
$$p \equiv q \quad \text{právě tehdy, když} \quad p \Rightarrow q \text{ a } q \Rightarrow p$$
je ekvivalence na P. Navíc faktorová struktura $(\hat{P}; \leq)$, kde $(\hat{P} = P/\equiv)$ je částečně uspořádaná množina, uspořádání je definováno
$$\hat{p} \leq \hat{q} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \widehat{p \Rightarrow q}.$$
Pravidla implikace (R4) a (R6) zaručují substituční podmínku relace $\equiv$ vzhledem k operaci $\Rightarrow$ tak, že oprerace

$$\hat{p} \leq \hat{q} = \widehat{p \Rightarrow q}$$

je korektně definovanou operací na faktorové množině $\hat{P}$.

Užitím (A1), (T2), (A2), (R2) a (R3) se snadno dokáže, že tato operace splňuje následující rovnosti:

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p = p$,

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q = (q \Rightarrow p) \Rightarrow p$,

3. $p \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow r) = p \Rightarrow r$.

3.2. Ortoimplikační algebry

Na základě výše uvedených vlastností 1., 2. a 3. můžeme definovat algebraickou strukturu $(A; \circ)$ s jednou binární operací $\circ$, splňující tyto identity:

(OI1) $(x \circ y) \circ x = x$,

(OI2) $(x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x$,

(OI3) $x \circ ((y \circ x) \circ z) = x \circ z$.

Takové struktury nazýváme **ortoimplikační algebry**. Teorii ortoimplikačních algeber můžeme považovat za přímé zobecnění teorie implikačních algeber.
Implikační algebra může být definována identitami (OI1), (OI2) a autodistributivním zákonem

(I3) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$.

Následující Lemma je přímým důsledkem axiomů:

Lemma 9 *Nechť $\mathcal{A} = (A; \circ)$ je ortoimplikační algebra. Pak $\mathcal{A}$ obsahuje konstantu 1, a splňuje tyto podmínky:*

1) $x \circ x = 1$,

2) $1 \circ x = x$,

3) $x \circ 1 = 1$,

4) $x \circ y = y \circ x$ *právě když* $x = y$,

5) $x \circ (y \circ x) = 1$,

6) $x \circ y = 1$ *právě když* $x \circ (y \circ z) = x \circ z$,

7) $x \circ y = 1$ *právě když* $(y \circ z) \circ (x \circ z) = 1$.

Důkaz: 1) - 4) Vyplývá z (OI1) a (OI2) přesně jako v implikační algebře.

5) $x \circ (y \circ x) = x \circ ((y \circ x) \circ (y \circ x)) = x \circ y = 1.$

6) nechť $x \circ y = 1$ pak

$$x \circ (y \circ z) = x \circ ((1 \circ y) \circ z = x \circ (((x \circ y) \circ y) \circ z) =$$

$$= x \circ (((y \circ x) \circ x) \circ z) = x \circ z.$$

7) nechť $x \circ y = 1$ pak

$$(y \circ z) \circ (x \circ z) = (y \circ z) \circ (x \circ (y \circ z)) = 1.$$

$\square$

Výsledky první části této kapitoly ukazují, že Lindenbaumova-Tarského faktorová algebra asociovaná s ortologikou je ortoimplikační algebra.

Tento výsledek je analogický výsledku v případě implikace Lindenbaumovy-Tarského faktorové algebry asociované s výrokovou logikou (bez logického výroku NEPRAVDA), což je implikační algebra.

Význam ortologik a ortoimplikačních algeber je ten, že tvoří redukt ortomodulárních svazů, právě jako implikační algebry tvoří redukt Booleových algeber.

Připomeňme, že **ortomodulární svaz** je algebra $\mathcal{A} = (A; \vee, \wedge, 0, 1,^{\perp})$, která je svazem s nejmenším prvkem 0, největším prvkem 1 a operací ortokomplementace $^{\perp}$, splňující tyto identity:

(OM1) $x \vee x^{\perp} = 1$ a $x \wedge x^{\perp} = 0,$

(OM2) $x^{\perp\perp} = x,$

(OM3) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad y^{\perp} \leq x^{\perp},$

(OM4) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad y = x \vee (x^{\perp} \wedge y).$

Následující věta plyne přímo z Lemma 9.

Věta 16 *Každá ortoimplikační algebra $\mathcal{A} = (A; \circ)$ určuje asociovanou částečně uspořádanou množinu $(A; \leq, 1)$ s největším prvkem 1, splňující podmínku*

$$x \leq y \quad \textit{právě tehdy když} \quad x \circ y = 1.$$

Dále $x \leq y$ *právě když* $y \circ z \leq x \circ z$ *pro každé* $z \in A$. $\square$

Tuto částečně uspořádanou množinu $(A; \leq, 1)$ nazveme **množina asociovaná** s ortoimplikační algebrou $\mathcal{A} = (A; \circ)$.

Věta 17 *Nechť $\mathcal{A} = (A; \circ)$ je ortoimplikační algebra. Pak asociovaná množina $\mathcal{A} = (A; \leq, 1)$ je spojový polosvaz s největším prvkem 1, kde*

$$x \vee y = (x \circ y) \circ y.$$

Důkaz: Protože

$$x \circ ((x \circ y) \circ y) = x \circ ((y \circ x) \circ x) = 1 \quad a \quad y \circ ((x \circ y) \circ y) = 1,$$

je prvek $(x \circ y) \circ y$ horní závora pro prvky x, y.
Nechť $x, y \leq z$. Pak dle Věty 16 platí $z \circ y \leq x \circ y$,
a tedy

$$(x \circ y) \circ y \leq (z \circ y) \circ y = (y \circ z) \circ z = 1 \circ z = 1.$$

Tedy $(x \circ y) \circ y$ je nejmenší horní závora pro prvky x, y, tj. $(x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x$. $\square$

Následující tvrzení budeme používat v důkazech:

Lemma 10 *Nechť $a \leq x \leq y$, pak $y = (y \circ a) \circ x$.*

Důkaz: Dle Věty 16, $x \leq y$ právě když $y \circ a \leq x \circ a$.
Proto

$$y = y \vee a = (y \circ a) \circ a = (y \circ a) \circ ((x \circ a) \circ a) =$$
$$= (y \circ a) \circ (x \vee a) = (y \circ a) \circ x$$

. $\square$

Věta 18 *Nechť $a \in A$ je pevně zvolený prvek, a $F_a = \{x \in A;\ a \leq x\}$ je hlavní filtr generovaný prvkem a, pak $\mathcal{F} = (F_a; \vee, \wedge, a, 1, x_a^{\perp})$ je ortomodulární svaz, kde*

1) $x_a^{\perp} = x \circ a$,

2) $x \wedge y = (x \circ a \vee y \circ a) \circ a$ *pro prvky* $x, y \in F_a$.

Důkaz: (OM1): $x_a^{\perp} \vee x = ((x \circ a) \circ x) \circ x = x \circ x = 1$. Takže $x_a^{\perp} \wedge x =$
$= ((x \circ a) \circ a) \vee x \circ a) = 1 \circ a = a$. Proto je $x_a^{\perp}$ relativní komplement prvku x v F_a.

(OM2): $x_a^{\perp\perp} = (x \circ a) \circ a = x \vee a = x$.

(OM3): $x \leq y$ právě když $y_a^{\perp} = y \circ a \leq x \circ a = x_a^{\perp}$.

(OM4): nechť $a \leq x \leq y$. Pak $y = (y \circ a) \circ x$, dle Lemma 10. Stejně tak, $a \leq x \leq y$ právě když $y \circ x = ((y \circ x) \circ a) \circ x$.
Proto

$$x \vee (x_a^{\perp} \wedge y) = x \vee (x \circ a \vee y) = x \vee (x \vee y \circ a) \circ a =$$

$$= x \vee ((((y \circ a) \circ x) \circ x) \circ a) = x \vee (y \circ x) \circ a =$$
$$= (((y \circ x) \circ a) \circ x) \circ x = (y \circ x) \circ x = y \vee x = y.$$

□

Na základě Věty 18 definujeme **ortomodulární polosvaz** jako polosvaz s největším prvkem 1, ve kterém každý hlavní filtr je ortomodulární svaz a který splňuje **podmínku kompatibility**:

(CC) $a \leq x \leq y$ právě když $y_x^{\perp} = y_a^{\perp} \vee x$.

Věta 18 ukazuje, že každá ortoimplikační algebra určuje asociovaný ortomodulární polosvaz splňující podmínku kompatibility.

Obráceně dostáváme:

Věta 19 *Každý ortomodulární polosvaz určuje ortoimplikační algebru , kde binární operace je dána přepisem*

$$x \circ y = (x \vee y)_y^{\perp}.$$

Důkaz: (OI1): Protože $x \circ y = (x \vee y)_y^{\perp}$, máme $y \leq x \circ y$ a $x \vee x \circ y = x \vee y \vee x \circ y = 1$. Proto $(x \circ y) \circ x = (x \vee x \circ y)_x^{\perp} = x$.

(OI2): $(x \circ y) \circ y = (x \circ y \vee y)_y^{\perp} = ((x \vee y)_y^{\perp} \vee y)_y^{\perp} = (x \vee y) \wedge y_y^{\perp} = x \vee y = (y \circ x) \circ x$.

(OI3): Nechť $u = (y \circ x) \circ z$. Pak $z \leq u$.
Proto

$$x \circ ((y \circ x) \circ z) = x \circ u = (x \vee u)_u^{\perp} = (x \vee z \vee u)_u^{\perp} = (x \vee z \vee u)_u^{\perp} \vee u =$$
$$= ((x \vee z)_z^{\perp} \wedge u_z^{\perp}) \vee u = (x \vee z)_y^{\perp} = x \circ z,$$

užitím podmínky kompatibility a ortomodulárního zákona. □

Skutečnost, že spojitost mezi ortoimplikačními algebrami a ortomodulárními polosvazy je vzájemně jednoznačná korespondence, vyplývá z následujícího:

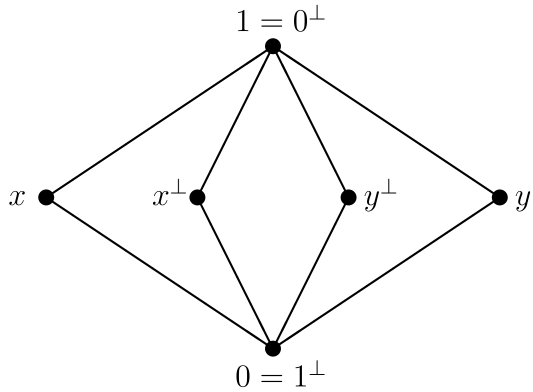
1. $(x \vee y)_y^{\perp} = (x \vee y) \circ y = ((x \circ y) \circ y) \circ y = x \circ y$,
2. $x \vee y = ((x \vee y)_y^{\perp} \vee y)_y^{\perp} = ((x \circ y) \circ y)$,
3. $x \circ a = (x \vee a)_a^{\perp} = x_a^{\perp}$ pro $x \in F_a$.

Teorii ortomodulárních svazů získáme z teorie ortoimplikačních algeber pomocí další konstanty 0, splňující podmínku:

(OI4) $0 \circ x = 1$.

Ortokomplementace je pak operace komplementace vzhledem k prvku 0, tj. $x^{\perp} = x \circ 0$.

Příklad 4 Na obrázku 5 je Hasseovým diagramem znázorněna ortoimplikační algebra.



Obr. 5

Kapitola 4

4. Jednodušší axiomy pro ortomodulární implikační algebru (bez podmínky kompatibility)

J.C.Abbott zavedl implikační algebru jako grupoid splňující identity (I1), (I2) a (I3). Tyto axiomy vyjadřují důležité vlastnosti implikace v Booleových algebrách. Dále ukázal že existuje vzájemná korespondence mezi těmito grupoidy a spojovými polosvazy, kde každý hlavní filtr je Booleova algebra.

Chajda, Halaš a Länger zobecnili tyto výsledky z teorie Booleových algeber pro ortomodulární svazy, bez předpokladu podmínky kompatibility mezi komplementy v hlavních filtrech, jak je to ukázáno v práci [6].

4.1. Původní axiomatický systém

Ortomodulární implikační algebra je definovaná jako algebra $\mathcal{A} = (A; \circ, 1)$ typu $(2, 0)$, splňující axiomy:

(O1) $\quad x \circ x = 1,$

(O2) $\quad x \circ (y \circ x) = 1,$

(O3) $\quad (x \circ y) \circ x = x,$

(O4) $\quad (x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x,$

(O5) $\quad (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = 1,$

(O6) $\quad ((((((((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z) \circ z) \circ x) \circ x) \circ z) \circ z) \circ x = (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z.$

Tyto identity nejsou nezavislé, např. (O2) vyplývá z (O1), (O3) a (O5):

$$x \circ (y \circ x) = ((x \circ x) \circ x) \circ (y \circ x) = (1 \circ x) \circ (y \circ x) = ((1 \circ 1) \circ x) \circ (y \circ x) =$$

$$= ((((1 \circ y) \circ 1) \circ 1) \circ x) \circ (y \circ x) = (((((y \circ y) \circ y) \circ 1) \circ 1) \circ x) \circ (y \circ x) =$$
$$= (((y \circ 1) \circ 1) \circ x) \circ (y \circ x) = 1.$$

To, že $x \circ x = y \circ y$ vyplývá z (O3) a (O5):
máme
$$x \circ (x \circ y) = ((z \circ y) \circ x) \circ (x \circ y) = x \circ y,$$

a proto

$$x \circ x = ((x \circ y) \circ x) \circ x = (x \circ (x \circ y)) \circ (x \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y)$$

z čehož dostaneme

$$x \circ x = (x \circ y) \circ (x \circ y) = ((x \circ y) \circ y) \circ ((x \circ y) \circ y) =$$

$$= ((y \circ x) \circ x) \circ ((y \circ x) \circ x) = (y \circ x) \circ (y \circ x) = y \circ y.$$

Tedy $x \circ x$ je konstanta, která se označuje symbolem 1, a proto ortoimplikační algebra může být chápána jako grupoid splňující následující axiomy:

(O1') $\quad x \circ (y \circ x) = x \circ x,$

(O2') $\quad (x \circ y) \circ x = x,$

(O3') $\quad (x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x,$

(O4') $\quad (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = x \circ x,$

(O5') $\quad (((((((((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z) \circ z) \circ x) \circ x) \circ z) \circ z) \circ x = (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z.$

Jak bylo výše uvedeno, $x \circ x = y \circ y$ vzplývá z (O2´) a (O3´). Také axiomy (O1´) - (O5´) jsou závislé, např. (O1´) vzplývá z (O2´) - (O4´):

$$x \circ (y \circ x) = ((x \circ x) \circ x) \circ (y \circ x) = (((y \circ y) \circ (y \circ y)) \circ x) \circ (y \circ x) =$$

$$= (((((y \circ y) \circ y) \circ (y \circ y)) \circ (y \circ y)) \circ x) \circ (y \circ x) =$$
$$= (((y \circ (y \circ y)) \circ (y \circ y)) \circ x) \circ (y \circ x) =$$
$$= y \circ y = x \circ x.$$

4.2. Nový axiomatický systém

Nyní uvedeme čtyři jednoduché axiomy charakterizující ortomodulární implikační algebry.

Věta 20 *Axiomatický sytém* (O1′) - (O5′) *je ekvivalentní následující množině axiomů:*

(O1″) $(x \circ y) \circ x = x,$

(O2″) $(x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x,$

(O3″) $(((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = x \circ x,$

(O4″) $(((((((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ x) \circ x) \circ z) \circ x) \circ x = (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z.$

Důkaz: Když axiomy (O1') - (O5') platí, pak $x \circ x = y \circ y$ vyplývá z výše uvedeného a obdržíme

$$((x \circ y) \circ y) \circ y = (y \circ (x \circ y)) \circ (x \circ y) = (y \circ y) \circ (x \circ y)$$

$$= ((x \circ y) \circ (x \circ y)) \circ (x \circ y) = x \circ y,$$

a dále

$$((((((((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z) \circ z) \circ x) \circ x) \circ z) \circ z) \circ x =$$
$$= (((((((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ x) \circ x) \circ z) \circ z) =$$
$$= (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ z.$$

□

4.3. Nezávislost nových axiomů

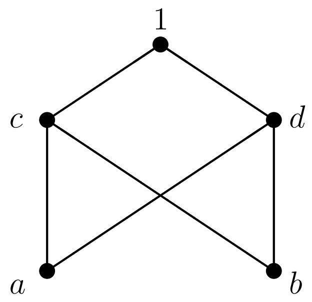
Nyní ukážeme, že axiomy (O1") - (O4") jsou nezávislé.

Věta 21 *Axiomy* (O1″) - (O4″) *jsou nezávislé.*

Důkaz: Grupoid $(\{1, 2\}; \circ)$, kde $x \circ y = 1$, pro $x, y \in \{1, 2\}$ splňuje axiomy (O2") - (O4"), ale nesplňuje axiom (O1").

Grupoid $(\{1, 2\}; \circ)$, kde $x \circ y = x$, pro $x, y \in \{1, 2\}$ splňuje axiomy (O1"), (O3") a (O4"), ale nesplňuje axiom (O2").

Nechť $(P; \leq)$ je uspořádaná množina znázorněná Hasseovým diagramem na obr. 6,



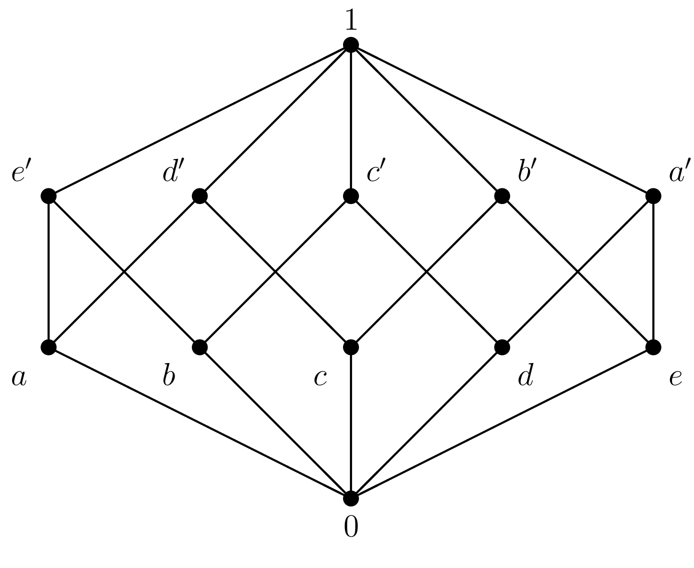
Obr. 6

pro $x, y \in P$, $x + y$ označuje supremum prvků x a y, pokud existuje, nebo 1 v obráceném případě. Pak grupoid $(P; \circ)$, kde pro $x, y \in P$, xy značí komplement $x + y$ v Booleově algebře $[y, 1]$, nesplňuje (O3"), protože

$$(((a \circ c) \circ c) \circ b) \circ (a \circ b) = ((1 \circ c) \circ b) \circ b = (c \circ b) \circ b = d \circ b = c \neq 1 = a \circ a$$

Grupoid $(P; \circ)$ splňuje (O1"), (O2") a (O4"), což můžeme snadno ověřit, neboť všechny hlavní filtry uspořádané množiny $(P; \leq)$ jsou Booleovy algebry.
To znamená, že jen netriviální případy pro ověření axiomů jsou jen ty, kde se oba prvky a a b vyskytují současně.

Konečně, nechť $(L; \vee, \wedge, ', 1)$ značí ortosvaz daný Hasseovým diagramem na obr. 7.



Obr. 7

Pak grupoid $(L; \circ)$, kde pro prvky $x, y \in L$, xy označuje komplement prvku $x \wedge y$ v ortosvazu $[y, 1]$, splňuje (O1") - (O3") a nesplňuje (O4"), protože

$$(((((((a \circ e') \circ e') \circ 0) \circ a) \circ a) \circ 0) \circ a) \circ a = ((((((1 \circ e') \circ 0) \circ a) \circ a) \circ a) \circ 0) \circ a =$$

$$= (((((e' \circ 0) \circ a) \circ a) \circ 0) \circ a) \circ a = ((((e \circ a) \circ a) \circ 0) \circ a) \circ a =$$

$$= (((a \circ a) \circ 0) \circ a) \circ a = ((1 \circ 0) \circ a) \circ a = (0 \circ a) \circ a = (0 \circ a) =$$

$$= a \neq e' = e \circ 0 = (e' \circ 0) \circ 0 = ((1 \circ e') \circ 0) \circ 0 =$$

$$= (((a \circ e') \circ e') \circ 0 \circ 0.$$

Grupoid $(L; \circ)$ splňuje (O1") - (O3"), což můžeme ověřit užitím toho, že všechny hlavní filtry uspořádané množiny $(L; \leq)$ jsou ortosvazy. $\square$

Závěr

V předchozích kapitolách byly popsány axiomatické systémy implikačních algeber jak pro klasickou logiku, tak pro logiku kvantové mechaniky (splňující další požadavky). Bylo prokázáno, že všechny tyto algebry lze popsat jednoduchými množinami identit, tedy z pohledu univerzální algebry tvoří všechny tyto třídy algeber variety. Pro jednotlivé implikační algebry se ukazuje, že jejich axiomatické systémy jsou velmi podobné a liší se jen v některých identitách (kontraktivitě, kompatibilitě).

Větší podobnost byla nalezena ve struktuře těchto implikačních algeber. Každá z nich obsahuje algebraickou konstantu 1, danou identitou

$$x \circ x = y \circ y,$$

a na každé lze zavést uspořádání předpisem

$$x \leq y \quad \text{právě když} \quad x \circ y = 1.$$

Vzhledem k tomuto uspořádání jsou všechny zmíněné implikační algebry spojovými polosvazy (kde $x \vee y = (x \circ y) \circ y$), kde každý hlavní filtr $[p, 1]$ je svazem. Pro implikační algebru klasické logiky je tento svaz přímo Booleovou algebrou. Pro logiku kvantové mechaniky jsou tyto svazy ortosvazy, za dalších podmínek pak ortomodulárními svazy, které buď jsou nebo nejsou mezi sebou vázány (v překrývajících se intervalech) v závislosti na platnosti podmínky kompatibility.

Je zřejmé, že tento popis struktury vede k obecnější metodě popisu zobecněných implikačních algeber, kde lze vycházet ze spojového polosvazu s nejvetším prvkem 1, kde každý hlavní filtr je svaz určitého typu, podle logiky, jejíž implikační redukt je zkoumán.

Literatura

[1] J.C. Abbott: *Semi-boolean algebra*, Matematički Vesnik **4** (1967), 177 - 183.

[2] J.C. Abbott: *Ortoimplication algebras*, Studia logica **35** (1976), 173 - 177.

[3] L. Beran: *Grupy a svazy*, SNTL Praha, (1974).

[4] I. Chajda: *Algebra III* , 2. vydání, VUP Olomouc (1998).

[5] I. Chajda: *The axioms for implication in orthologic.*

[6] I. Chajda, R. Halaš, H. Länger: *Simple axioms for orthomodular implication algebras*, International Journal of Theoretical Physics **43**, (2004), 911 - 914.

[7] J. Rachůnek: *Svazy*, VUP Olomouc (2003).

[8] J. Rybička: *LaTeX pro začátečníky*, 3. vydání, Konvoj & CSTUG, Brno (2003).

[9] www.wikipedia.org, (http://cs.wikipedia.org/wiki/Portál:Matematika)