



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY**

INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

**STABILIZACE CHAOSU: METODY A APLIKACE**

THE CONTROL OF CHAOS: METHODS AND APPLICATIONS

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Bc. Tomáš Hůlka

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.

BRNO 2017



# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav automatizace a informatiky
Student:	<b>Bc. Tomáš Hůlka</b>
Studijní program:	Strojní inženýrství
Studijní obor:	Aplikovaná informatika a řízení
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Stabilizace chaosu: metody a aplikace**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Práce bude stručně pojednávat o tzv. deterministickém chaosu, uvede jeho často studované formy i aparát popisu a analýzy těchto systémů (bifurkační diagramy, Ljapunovská stabilita). Práce se dále zaměří na metody stabilizace deterministického chaosu. K optimalizaci parametrů stabilizujících sekvencí může být využito jak metod umělé inteligence, tak klasických metod matematického programování.

### **Cíle diplomové práce:**

- Motivační úvod (deterministický chaos).
- Stručná rešerše běžně studovaných modelů chaotických systémů, jejich popis a význam.
- Popis metod a principu stabilizace chaosu (OGY, TDAS, ETDAS, aj.).
- Stabilizace zvoleného modelového chaotického systému (simulace).
- Stabilizace zvoleného reálného chaotického systému (simulace, např. dvojitě kyvadlo).
- Diskuze k dosaženým výsledkům.

### **Seznam doporučené literatury:**

PYRAGAS, K. Control of Chaos via extended delay feedback, Physics Letters A.(1995): Elsevier Science, vol. 206, pp. 323-330.

SCHOLL, E., SCHUSTER, H.G. (2008): Handbook of Chaos Control (second edition), Wiley-VCH, Germany, ISBN: 978-3-572-40605-0.

KRATOCHVÍL, C., HERIBAN, P. Dynamické systémy a chaos, VUT v Brně (2010).

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato práce se zabývá deterministickým chaosem a vybranými možnostmi jeho stabilizace. Práce stručně přibližuje problematiku deterministického chaosu a uvádí běžně používané nástroje analýzy dynamických systémů vykazujících chaotické chování. Dále je uveden výčet nejčastěji studovaných chaotických systémů, následovaný popisem metod stabilizace chaosu a optimalizace těchto metod. Praktická část práce se věnuje stabilizaci dvou modelových systémů a jednoho reálného systému pomocí popsáných metod.

## **ABSTRACT**

This thesis focuses on deterministic chaos and selected methods of chaos control. It briefly describes the matter of deterministic chaos and presents commonly used tools of analysis of dynamical systems exhibiting chaotic behavior. A list of frequently studied chaotic systems is presented and followed by a description of methods of chaos control and the optimization of these methods. The practical part is dedicated to the stabilization of two model systems and one real system with described methods.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Deterministický chaos, bifurkační diagram, atraktor, stabilizace chaosu, TDAS, ETDAS, metoda Nelder–Mead, genetický algoritmus

## **KEYWORDS**

Deterministic chaos, bifurcation diagram, attractor, chaos control, TDAS, ETDAS, Nelder–Mead method, genetic algorithm



## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

HŮLKA, T. *Stabilizace chaosu: metody a aplikace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 69 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.





## **PODĚKOVÁNÍ**

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Radomilu Matouškovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky. Dále bych rád poděkoval mé rodině a blízkým. Bezesporu největší dík patří mé mamince Jiřině za podporu během celého studia.



## **ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením doc. Ing. Radomila Matouška, Ph.D. a s použitím literatury uvedené v seznamu literatury.

V Brně dne 26. 5. 2017

.....

Bc. Tomáš Hůlka



# OBSAH

	<b>ÚVOD.....</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>DYNAMICKÉ SYSTÉMY A CHAOS .....</b>	<b>17</b>
1.1	Deterministický chaos .....	17
1.2	Atraktory dynamických systémů .....	18
1.3	Bifurkační diagramy .....	19
1.4	Ustálené stavy nelineárních systémů .....	20
1.5	Ljapunovova metoda vyšetření stability .....	21
1.6	Ljapunovovy exponenty .....	23
1.7	Fraktály .....	24
<b>2</b>	<b>BĚŽNĚ STUDOVANÉ CHAOTICKÉ SYSTÉMY.....</b>	<b>27</b>
2.1	Logistická mapa.....	27
2.2	Hénonova mapa .....	30
2.3	Loziho mapa .....	31
2.4	Lorenzův systém .....	33
2.5	Rösslerův systém .....	34
2.6	Duffingova mapa .....	36
<b>3</b>	<b>METODY STABILIZACE .....</b>	<b>39</b>
3.1	Metoda zpožděné zpětné vazby .....	39
3.2	Rozšířená metoda zpožděné zpětné vazby .....	41
<b>4</b>	<b>METODY OPTIMALIZACE.....</b>	<b>43</b>
4.1	Účelová funkce a její modifikace .....	43
4.2	Metoda Nelder–Mead .....	44
4.3	Genetický algoritmus.....	45
<b>5</b>	<b>STABILIZACE CHAOTICKÝCH SYSTÉMŮ.....</b>	<b>47</b>
5.1	Stabilizace logistické mapy .....	47
5.1.1	Nastavení stabilizačních metod .....	49
5.1.2	Výsledné průběhy .....	50
5.2	Stabilizace Hénonovy mapy .....	52
5.2.1	Nastavení stabilizačních metod .....	53
5.2.2	Výsledné průběhy .....	54
5.3	Stabilizace Duffingovy mapy .....	56
5.3.1	Nastavení stabilizačních metod .....	56
5.3.2	Výsledné průběhy .....	57
5.4	Přehled nejlepších dosažených hodnot účelové funkce.....	58
<b>6</b>	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>59</b>
<b>7</b>	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>61</b>
<b>8</b>	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>65</b>



## ÚVOD

Πάντα ῥεῖ (*panta rhei*) – vše plyne. Více než 2500 let starý výrok antického filozofa Hérakleita poukazuje na to, že svět kolem nás není statický. Právě naopak jde o systém, který se neustále mění, vyvíjí a pohybuje. Snaha popsat tento pohyb a pokusit se předpovědět jeho budoucí chování, člověka přitahovala odedávna. Příkladem mohou být např. snahy astronomů popsat, jak se po obloze pohybují viditelné hvězdy a planety. S popisem dynamických systémů v jejichž chování se dal vysledovat určitý řád či jistá pravidelnost problém nebyl. Opačně na tom byla klasifikace systémů jejichž chování bylo nepravidelné, někdy až matoucí. Zdálo se, že chování některých systémů je ovlivněno čirou náhodou. Tento druh chování byl označen řeckým slovem Χάος – chaos. Systémy, které vykazovaly chaotické chování nebyly dlouhou dobu vůbec studovány, jelikož množství výpočtů provedené člověkem zdaleka nestačilo k odhalení „skrytých“ zákonitostí, takže označení tohoto chování za dílo náhody bylo pochopitelné. Názna změny v tomto trendu lze pozorovat již v průběhu 19. století, kdy P. Laplace přišel s myšlenkou absolutního determinismu, ale skutečný zlom nastal až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Jedním z průkopníků moderní vědy o chaosu byl E. Lorenz, který se zabýval studiem zjednodušeného modelu počasí. Studoval závislost chování systému na jednom z parametrů a zjistil, že pro jisté hodnoty sledovaného parametru se systém začíná chovat podivně (chaoticky). Povšiml si také velmi vysoké citlivosti na počáteční podmínky. Dva velmi blízké počáteční body nejdříve opisují stejné trajektorie, načež se náhle rozdělí a začnou se pohybovat naprosto odlišně. Tento jev vstoupil do povědomí široké veřejnosti pod poetickým názvem „efekt motýlích křídel“ a rozšířil se i do oblastí, které mají s teorií chaosu společného velmi málo.

Tato práce se zabývá deterministickým chaosem a jeho stabilizací. První kapitola je věnována základnímu úvodu k deterministickému chaosu, aparátu popisu a vybraným metodám analýzy dynamických systémů vykazujících chaotické chování. Následuje kapitola, která se zaměřuje na popis často studovaných a dobře známých chaotických systémů. Dále se práce věnuje vybraným metodám stabilizace chaosu (TDAS a ETDAS), včetně optimální parametrizace těchto stabilizačních metod pomocí optimalizačních algoritmů, konkrétně metody Nelder–Mead, případně genetického algoritmu. Praktická část práce je obsahem páté kapitoly, kde jsou testovány metody stabilizace a jejich optimalizace pro periody orbitů 1, 2 a 4 na dvou modelových (logistické a Hénonově mapě) a jednom reálném systému (Duffingově mapě).



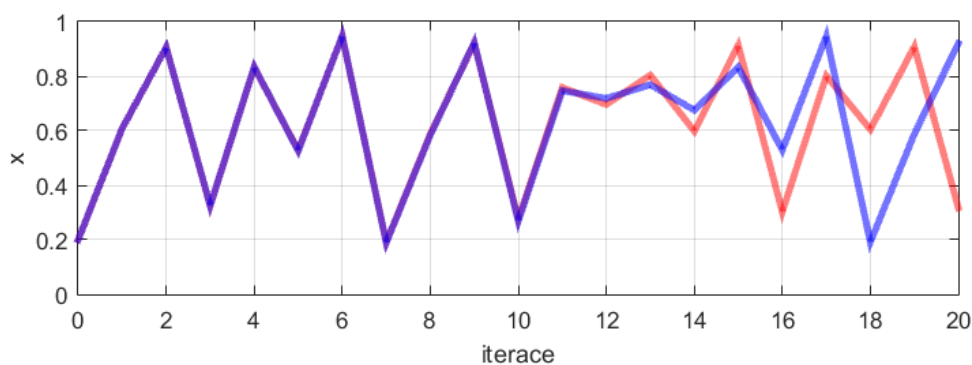


# 1 DYNAMICKÉ SYSTÉMY A CHAOS

Chaos a řád obvykle existují v těsné blízkosti. Často stačí nepatrně pozměnit jeden z řídicích parametrů a periodický průběh se zvrtné v chaos a naopak. Aby však mohl chaos v dynamickém systému vzniknout, je zapotřebí aby byl tento systém nelineární. Dynamickým systémem rozumíme deterministický model popisující dynamické chování soustavy pomocí závislosti stavových proměnných na čase a řídicích parametrech. Příkladem může být již zmíněný Lorenzův systém modelující chování počasí. K posouzení vlastností nelineárních dynamických systémů existuje určité množství nástrojů, z nichž budou ty nejdůležitější dále popsány.

## 1.1 Deterministický chaos

Chaos je často považován za projev náhody. Nepředvídatelné trajektorie chaotických systémů evokují představu, že se tento typ dynamických systémů neřídí žádnými pravidly. Opak je však pravdou. Systémy vykazující chaotické chování se řídí jednoduchými nelineárními pravidly, které vůbec nezahrnují vliv náhody, šumu nebo pravděpodobnosti. Tento typ chování charakterizuje pojem *deterministický chaos*. Nepředvídatelnost chování je způsobena extrémní citlivostí na sebemenší změnu počátečních podmínek nebo řídicích parametrů. Tato citlivost způsobí, že se dvě zdánlivě identické trajektorie po nějaké době náhle rozdělí a jejich další vývoj je naprosto odlišný. Každé reálné měření má pouze konečnou přesnost. Rozdíl naměřené a reálné hodnoty je tedy zatížen určitou chybou. Tato chyba, byť nesmírně malá, se však později projeví a díky ní se chaotický systém bude vyvíjet jinak, než bylo předpovězeno pomocí naměřené hodnoty. Ukázka dvou chaotických průběhů jejichž počáteční body se liší jen velmi nepatrně se nachází na Obr. 1.1.



Obr. 1.1: Chaotické průběhy pro počáteční bod 0,2 (červeně) a bod 0,2001 (modře)

Z obrázku je patrné, že během prvních desíti iterací modrý a červený průběh prakticky splývají v jeden fialový. Okolo jedenácté iterace se objevují první počátky rozdílu a podobnost mezi oběma průběhy se velmi rychle vytrácí.

První zmínky o deterministickém chaosu pocházejí z práce [1] B. Van der Pola z roku 1927, ve které se zabýval studiem elektrických obvodů s vakuovými trubicemi. Van der Pol objevil stabilní oscilace, které nazval „relaxačními oscilacemi“<sup>1</sup>. Když se frekvence budícího signálu dostatečně přiblíží frekvenci těchto oscilací, výsledná periodická odezva posune svou frekvenci směrem k budícímu signálu. Obrazně řečeno se obvod nechá „unést“ budícím signálem. Tvar výsledné odezvy může být obecně velmi složitý. Často je tvořen složením mnoha harmonických a subharmonických frekvencí. Van der Pol tento signál popsal jako nepravidelný šum. Tento „šum“ byl jedním z prvních experimentálních důkazů deterministického chaosu.

## 1.2 Atraktory dynamických systémů

*Atraktor* představuje množinu hodnot, ke kterým dynamický systém s postupem času směřuje<sup>2</sup> pro určitou množinu počátečních stavů. Pro diskrétní čas jde o množinu bodů, pro spojitý čas je atraktor tvořen fázovou křivkou. Pokud je atraktor tvořen neuzavřenou hranicí, systém se bude chovat chaoticky. Existuje několik různých druhů atraktorů a to jmenovitě [2]:

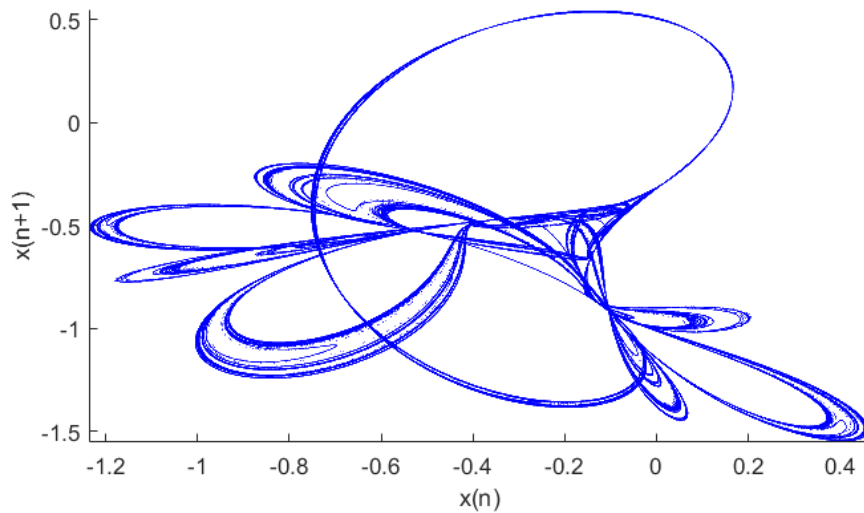
- atraktor v podobě pevných bodů
- atraktor v podobě (kvazi)periodických bodů
- atraktor chaotický
- atraktor podivný.

Nabývá-li atraktor podoby pevných bodů, jde o případ, kdy se systém postupně ustaluje a nakonec se ve stabilním stavu zastaví. Příkladem může být model kyvadla uvažující vliv tření. Pokud budou atraktorem periodické, resp. kvaziperiodické body, systém se ustálí ve stavu, kdy postupně prochází mezi několika různými stavy. Příkladem může být náš Měsíc, který se po předchozím nestálém průběhu ustálil v periodickém orbitu okolo Země. Chaotický atraktor, jak již název napovídá, nemá „konečný stav“, který by bylo možné předpovědět. Opět je potřeba zdůraznit, že to není způsobeno vlivem náhody, ale extrémní citlivostí na počáteční podmínky. Jako příklad si lze představit dokonale hladkou kouli na špičce jehlanu. Přestože je tento systém v rovnováze, sebemenší zásah rovnováhu naruší a koule spadne. Na kterou stranu jehlanu však nejsme schopni dopředu určit. Důležitou vlastností všech chaotických atraktorů je jejich fraktální struktura. Posledním typem atraktoru je atraktor podivný. Tento typ atraktoru vzniká v systémech se třemi a více diferenciálními rovnicemi. Jeho chování je podobné chaotickému atraktoru, ale liší se v tom, že vykazuje jistou míru pravidelnosti. Příklad podoby chaotického atraktoru se nachází na Obr. 1.2.

---

<sup>1</sup> Tyto oscilace jsou v dnešní době známy jako limitní cykly.

<sup>2</sup> Tento stav je pro dynamický systém přitažlivý = atraktivní – odtud název atraktor.

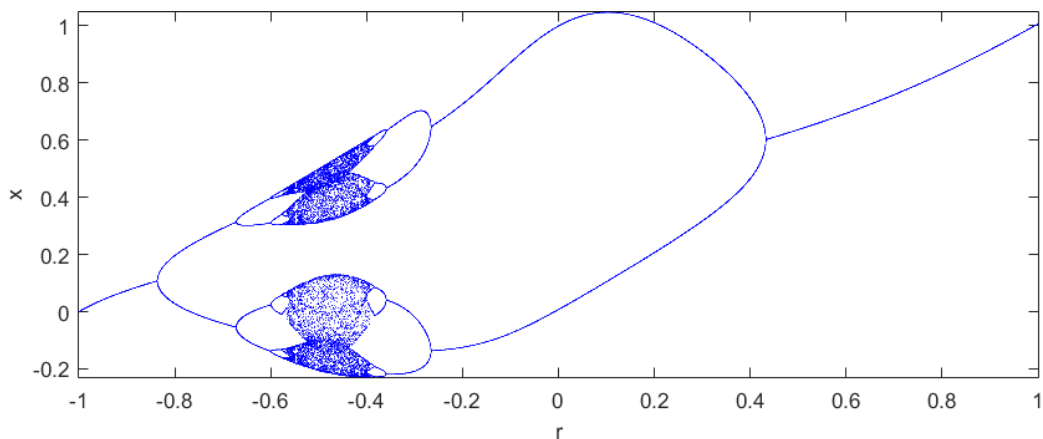


Obr. 1.2: Tinkerbell atraktor

### 1.3 Bifurkační diagramy

Pojmem *bifurkace* označujeme jev, při kterém dochází k velkým kvalitativním změnám vnitřního stavu dynamického systému v případě, že se vstupní parametry změní jen nepatrně. U většiny systémů obvykle k bifurkacím nedochází. Systémy se zpravidla s postupnou změnou řídicích parametrů mění pouze nepatrně, někdy dokonce jen lineárně. Existují však systémy, u kterých se po překročení kritické hodnoty řídicího parametru na vstupu objeví prudké změny vnitřního stavu. Dochází ke zdvojování period, objevují se nestability a systém může přejít až do chaotického stavu. Grafickou závislostí limitních stavů systému na řídicích parametrech je *bifurkační diagram*. Nejpopulárnějším často uváděným bifurkačním diagramem je diagram logistické rovnice, která popisuje vývoj populace. Logistická rovnice a její bifurkační diagram jsou detailně popsány v kap. 2.1. Příklad bifurkačního diagramu se nachází na Obr. 1.3. Je to bifurkační diagram Gaussovy mapy, která má dva řídicí parametry. Jde o řez trojrozměrným diagramem pro konstantní hodnotu řídicího parametru  $\alpha = 4,9$ . Gaussova mapa je dána předpisem (1.1).

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^2} + \beta \quad (1.1)$$



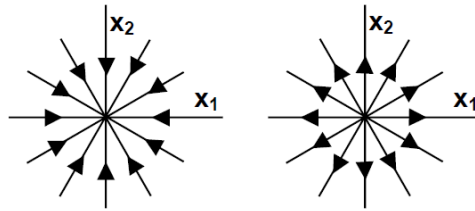
Obr. 1.3: Bifurkační diagram Gaussovy mapy

## 1.4 Ustálené stavy nelineárních systémů

V rovnovážných stavech systému jsou derivace stavových veličin nulové [3].

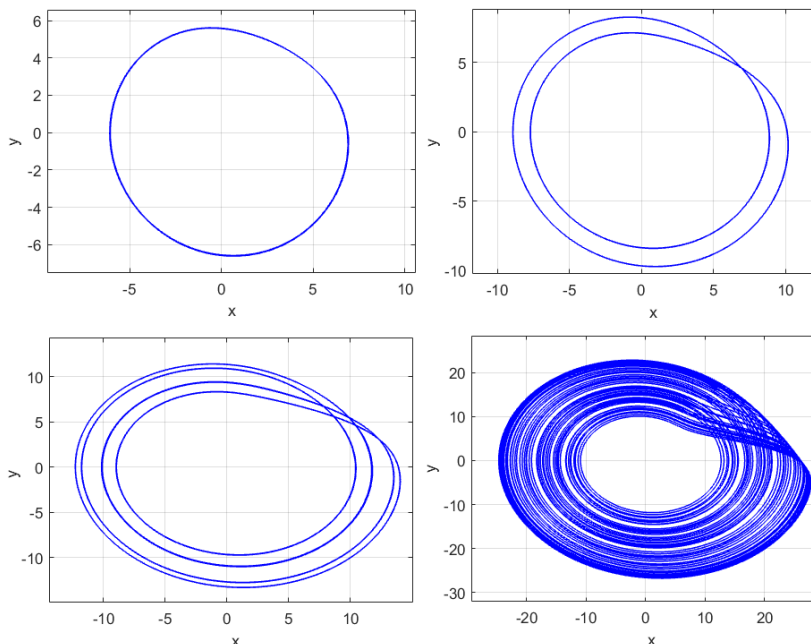
$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0; \quad x'_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad x'_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0; \quad \dots \quad (1.2)$$

Nelineární systémy mají takové množství rovnovážných stavů, kolik je řešení soustavy rovnic (1.2). Obecně těchto řešení může být konečně mnoho, nekonečně mnoho nebo také nemusí existovat žádné. Těmto ustáleným stavům odpovídají body stavové roviny, ve kterých směrnice stavové trajektorie nejsou definovány. Prvním typem ustálených stavů jsou *singulární body*. Příklad singulárního bodu typu uzel se nachází na Obr. 1.4.



Obr. 1.4: Singulární bod typu stabilní uzel (vlevo) a nestabilní uzel (vpravo) [3]

Pokud stavové trajektorie směřují do singulárního bodu, jde o bod stabilní. Naopak, pokud stavové trajektorie vycházejí ze singulárního bodu směrem ven, jedná se o bod nestabilní. Druhým typem ustálených stavů jsou *mezní cykly*, které ve stavové rovině nabývají podoby uzavřených trajektorií. Na Obr. 1.5 se nachází vybrané mezní cykly Rösslerova systému v ustáleném stavu. Charakteristickou vlastností, která je na tomto obrázku zřetelně vidět, je skokové zdvojení periody mezního cyklu v závislosti na změně řídicího parametru  $c$ . Křížení křivek je pouze zdánlivé, neboť jsou prostorové.



Obr. 1.5: Mezní cykly Rösslerova systému pro  $c = 4$  (perioda 1),  $c = 6$  (perioda 2),  $c = 8.5$  (perioda 4) a  $c = 18$  (chaos)

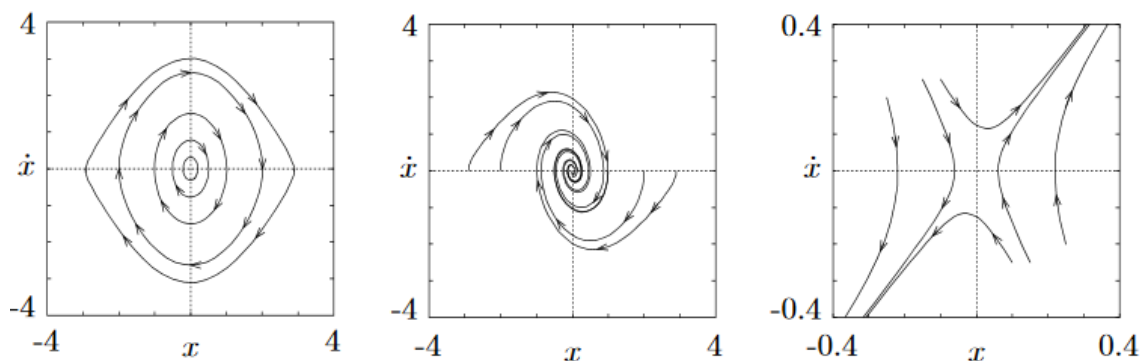
Stabilita mezních cyklů závisí na směru okolních trajektorií. Směřují-li všechny trajektorie z blízkého okolí k tomuto cyklu, jde o cyklus stabilní. Analogicky, vzdalují-li se blízké trajektorie od cyklu z obou stran, jde o nestabilní cyklus. K polostabilnímu cyklu se trajektorie blíží zvenku a zevnitř oddalují, u polonestabilního cyklu je tomu naopak. Singulární body i mezní cykly tedy mohou být stabilní nebo nestabilní. Obecnou představu stability formuloval matematik Ljapunov [4]. Podle Ljapunova je rovnovážný stav stabilní, pokud stavová trajektorie, která začíná v nějakém okolí  $\delta$  od rovnovážného bodu nikdy nepřesáhne hranice okolí  $\varepsilon$  [5].

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Pokud stavová trajektorie začíná v okolí  $\delta$  a s postupem času jde vzdálenost od rovnovážného bodu limitně k nule, jedná se o stav asymptoticky stabilní.

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (1.4)$$

Pokud neplatí podmínky (1.3) ani (1.4), znamená to, že je tento stav nestabilní. Grafické znázornění stabilního, asymptoticky stabilního a nestabilního stavu se nachází na Obr. 1.6.



Obr. 1.6: Stavové trajektorie v blízkém okolí singulárních bodů typu střed (vlevo), ohnisko (uprostřed) a sedlo (vpravo) [5]

## 1.5 Ljapunovova metoda vyšetření stability

Na rozdíl od lineárních systémů není vyšetřování stability nelineárních systémů triviální záležitostí. Jsou využívány různé přístupy, mezi které patří i Ljapunovova metoda. Princip této metody spočívá v nalezení Ljapunovovy funkce ke konkrétnímu systému. Pokud nalezneme vhodnou funkci, můžeme okamžitě posoudit, zda bude systém stabilní či nestabilní. Pokud však zvolíme funkci nesprávnou, nebude možné stabilitu posoudit. Největší problém této metody spočívá právě v nalezení správné Ljapunovovy funkce, především kvůli faktu, že pro tuto činnost neexistuje univerzálně správný postup. Tato metoda je použitelná pro systémy jakéhokoliv řádu. Předpokládejme tedy obecný nelineární systém  $n$ -tého řádu popsany soustavou rovnic prvního řádu (1.5).

$$\begin{aligned}
 x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

V případě, že by nějaká z rovnic měla řád vyšší než 1, je potřeba ji převést na soustavu rovnic prvního řádu pomocí jednoduché substituce. Dále předpokládejme, že má tento systém singulární bod v počátku souřadnicové soustavy. Pokud by tomu tak nebylo, je potřeba ho, za použití vhodných transformací, do počátku posunout. Ljapunovova metoda předpokládá nalezení vhodné spojité (Ljapunovovy) funkce

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1.6}$$

proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pro které platí, že jsou zároveň proměnnými daného nelineárního systému. Dále musí tato funkce mít spojité první parciální derivace a musí být pozitivně definitní<sup>3</sup>. Zkoumáním definitnosti funkce  $V$  a její derivace  $\frac{dV}{dt}$  můžeme posoudit stabilitu systému (1.5) v rovnovážném stavu.

Derivaci funkce  $V$  získáme jednoduše jako derivaci složené funkce (1.7).

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dV}{dx_n} \frac{dx_n}{dt} \tag{1.7}$$

Za derivace  $\frac{dx_i}{dt}$  můžeme dosadit pravé strany rovnic  $f_i$  z (1.5), jelikož platí  $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$ .

Derivace funkce  $V$  pak přejde do tvaru (1.8), kde všechno potřebné již známe.

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} f_1 + \frac{dV}{dx_2} f_2 + \dots + \frac{dV}{dx_n} f_n \tag{1.8}$$

Pokud je derivace Ljapunovovy funkce  $V'$  negativně definitní, je rovnovážný stav asymptoticky stabilní. Pokud je  $V'$  negativně semidefinitní<sup>4</sup>, pak je rovnovážný stav pouze stabilní. V případě, že je  $V'$  pozitivně definitní či pozitivně semidefinitní, bude rovnovážný stav nestabilní. Jakmile však bude  $V'$  indefinitní, nezískali jsme žádnou informaci o stabilitě v důsledku zvolení nevhodné Ljapunovovy funkce. Jak bylo již zmíněno, metoda neřeší, jak určit funkci  $V$ . Tuto komplikaci lze obejít různými způsoby, např. podle [3] využitím ztabelovaných funkcí. Pro obecný systém druhého řádu (1.9) lze použít funkci (1.10).

$$ay'' + b(my^r + ny^s)[e(y')^q + f(y')^k] + cy^t = 0 \tag{1.9}$$

$$V = 2 \frac{c}{a} \frac{1}{t+1} x_1^{t+1} + x_2^2 \tag{1.10}$$

<sup>3</sup> Pozitivně definitní funkce má v počátku nulovou hodnotu a mimo počátek pouze kladné hodnoty. Analogicky můžeme popsat negativně definitní funkci – mimo počátek má pouze záporné hodnoty.

<sup>4</sup> Pozitivně semidefinitní funkce nabývají pouze nezáporných hodnot. Analogicky negativně semidefinitní funkce nabývají pouze nekladných hodnot.

## 1.6 Ljapunovovy exponenty

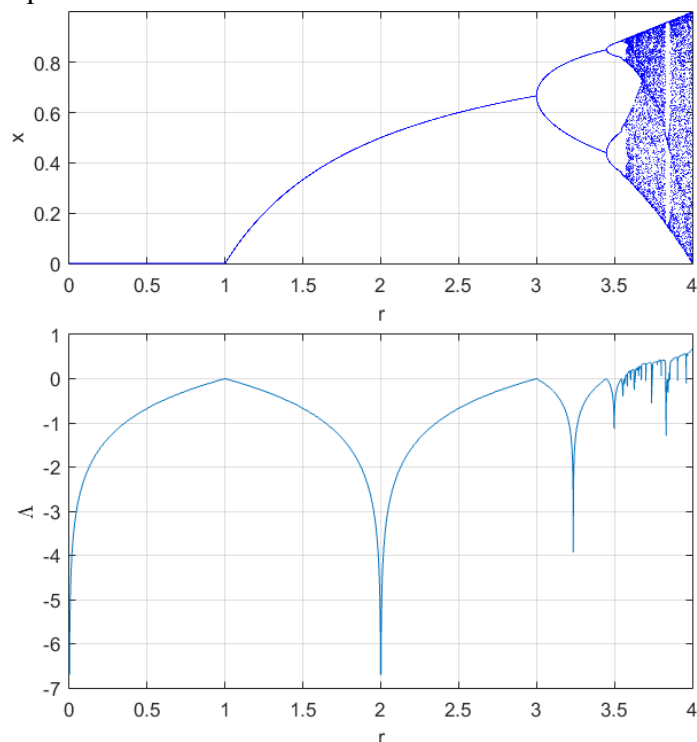
Nachází-li se dynamický systém v nestabilním stavu, lze dokázat, že se jeho dvě blízké trajektorie vzdalují rychleji než polynomiálně [2]. Mějme dvě blízké trajektorie, na kterých vybereme dva velmi blízké body. Změnu vzdálenosti  $r$  mezi těmito dvěma body lze aproximovat vztahem (1.11).

$$r(t) = r_0 e^{\Lambda t} \quad (1.11)$$

Parametr  $\Lambda$  představuje lokální Ljapunovův exponent. V případě vícerozměrného stavového prostoru má každá stavová veličina svůj vlastní Ljapunovův exponent, pro který platí vztah (1.12).

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{r_i(t)}{r_i(0)} \quad (1.12)$$

Jsou-li známy všechny hodnoty  $\Lambda_i$ , je možné ohodnotit stabilitu chování dynamického systému. Pokud jsou všechny Ljapunovovy exponenty nekladné, dynamický systém bude stabilní. Je-li alespoň jeden z exponentů kladný, systém se bude chovat chaoticky. Pokud je kladných exponentů více, systém se bude chovat hyperchaoticky [6]. I když je výpočet Ljapunovových exponentů obtížnou záležitostí, s jejich pomocí můžeme jednoznačně určit chaotické chování systému. Porovnání bifurkačního diagramu a odpovídajících Ljapunovových exponentů se nachází na Obr. 1.7.

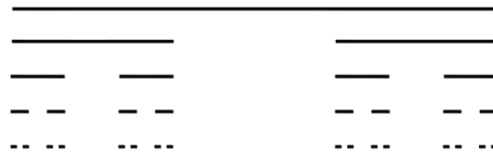


Obr. 1.7: Srovnání Ljapunovova exponentu a bifurkačního diagramu

Na obrázku je zřetelně vidět, že hodnota Ljapunovova exponentu postupně roste a ve chvíli, kdy dochází k bifurkacím, je rovna nule (lokální maxima). Hodnota exponentu pak postupně klesá, dokud nedosáhne minima a proces se opakuje. První kladné hodnoty dosáhne pro  $r \approx 3,57$  což odpovídá přechodu k chaosu.

## 1.7 Fraktály

Jak bylo již zmíněno v kap. 1.2, všechny chaotické atraktory mají fraktální strukturu. Fraktál lze definovat jako nekonečně členitý útvar, který je soběpodobný<sup>5</sup>. Přestože se tvary fraktálů mohou zdát složité, většinou jsou generovány velmi jednoduchými pravidly. Jedním z nejprimitivnějších fraktálů je Cantorova množina. Tento fraktál vzniká postupným odebíráním prostředních třetin úseček a prvních 5 iterací se nachází na Obr. 1.8. Soběpodobnost lze demonstrovat pomocí zakrytí horní úsečky. Dvě zbylé Cantorovy množiny jsou pouze zmenšenou variantou původní množiny.



Obr. 1.8: Cantorova množina

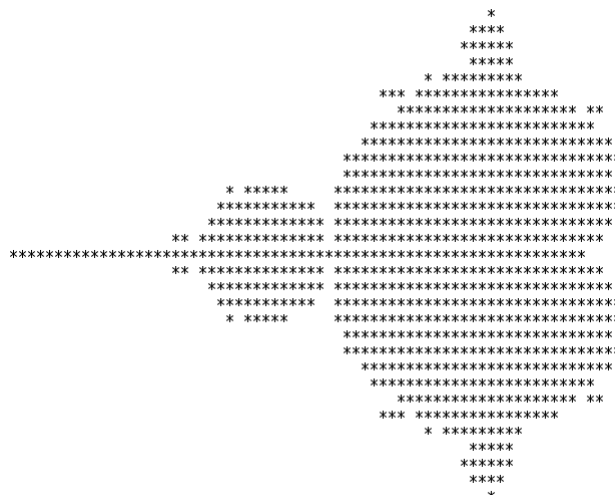
Jedním z nejznámějších fraktálů je Mandelbrotova množina, kterou představil B. Mandelbrot v [7]. Ta je tvořena pomocí předpisu (1.13).

$$z_{n+1} = z_n + c \tag{1.13}$$

Mandelbrotova množina je pak množinou všech komplexních čísel  $c$ , pro která platí, že posloupnost  $z_0, z_1, z_2 \dots$  je omezená. To znamená, že pro všechny prvky posloupnosti platí  $|z_n| \leq b$ . Bylo dokázáno, že posloupnost generovaná předpisem (1.13) nediverguje pro  $b \leq 2$ . To lze vyjádřit pomocí podmínky (1.14).

$$c \in M \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |z_{n+1}| \leq 2 \tag{1.14}$$

Vůbec první podoba Mandelbrotovy množiny nacházející se na obr. 1.9 byla vykreslena na počítači již v roce 1982.

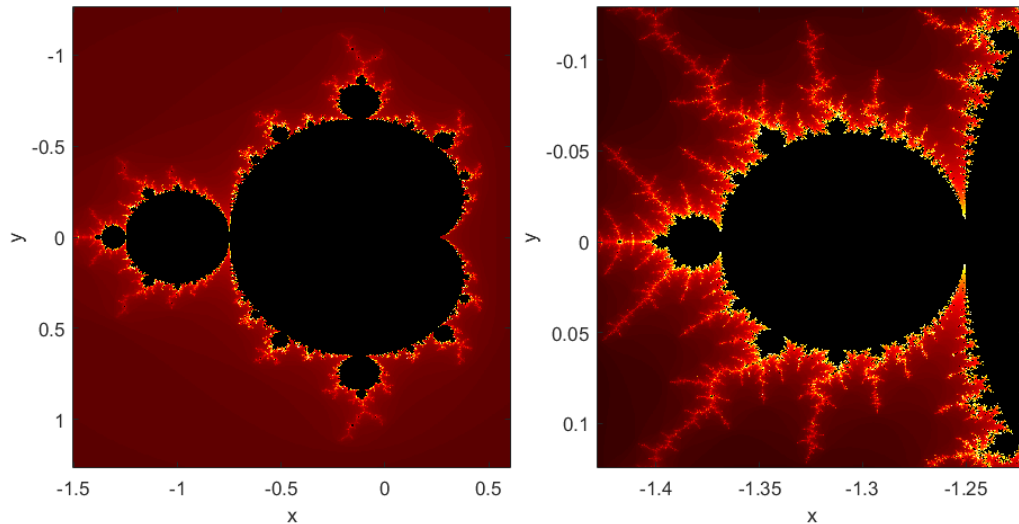


obr. 1.9: První počítačem vykreslená podoba Mandelbrotovy množiny [8]

<sup>5</sup> Soběpodobné útvary tvořeny částmi, které jsou úplně (nebo alespoň přibližně) podobné celku. To znamená, že po správném přiblížení lze pozorovat opět původní (nepřiblížený) tvar.

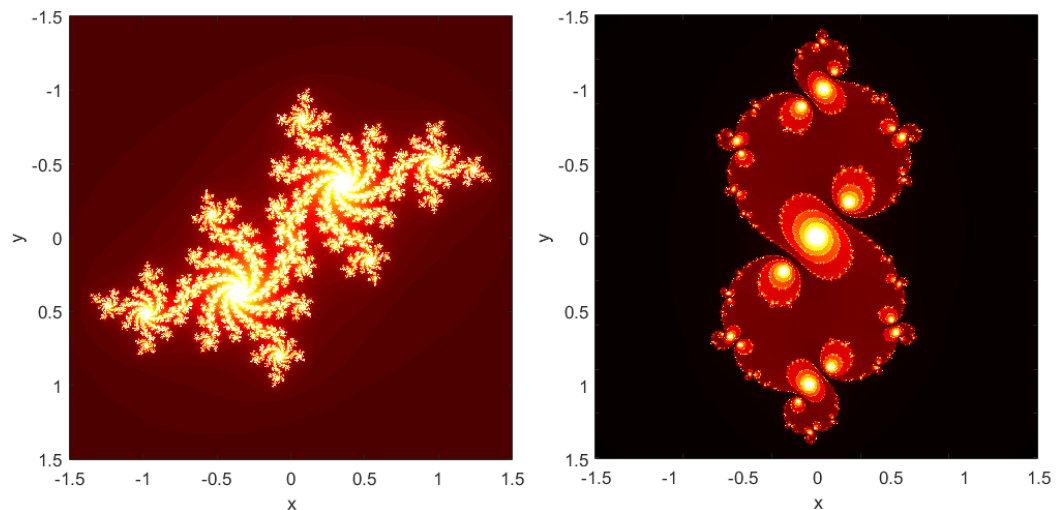


Zajímavé je také blízké okolí Mandelbrotovy množiny. Zjistíme-li počet iterací, po kterém bod překročí maximální dovolenou vzdálenost, můžeme těmto bodům přiřadit konkrétní barvu (podle „rychlosti“ divergence). Mandelbrotova množina s obarveným okolím pak tvoří krásný fraktální obrazec. Příklad obarvení se nachází na Obr. 1.10. Opět si můžeme povšimnout, že detail je prakticky totožný s levou částí množiny.



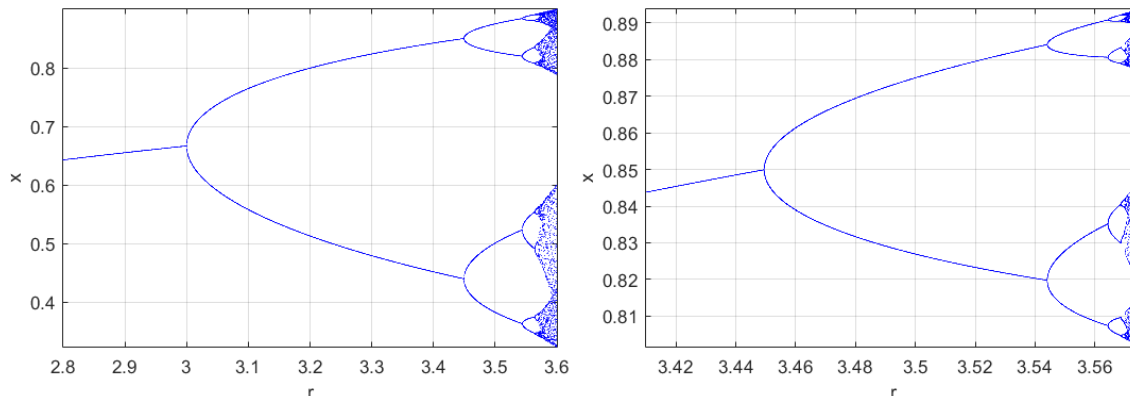
Obr. 1.10: Mandelbrotova množina kompletní (vlevo) a detail (vpravo)

Mandelbrotově množině jsou velmi podobné Juliovy množiny. K jejich generování je použit stejný předpis (1.13). Rozdíl spočívá v tom, že je tentokrát komplexní parametr  $c$  konstantní a mění se souřadnice bodu v komplexní rovině  $z_n$ . Ukázka dvou Juliovy množin se nachází na Obr. 1.11.



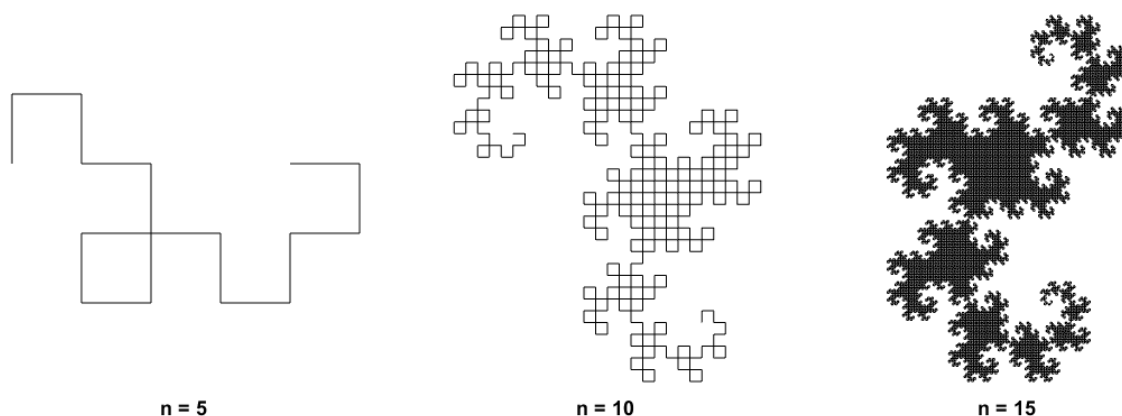
Obr. 1.11: Juliovy množiny pro různé hodnoty parametru  $c$

Fraktální strukturu můžeme pozorovat také v bifurkačních diagramech. Příklad takovéto struktury se nachází na Obr. 1.12. Vlevo můžeme vidět klasický bifurkační diagram, vpravo se nachází přibližný pravý horní roh diagramu. Rozdíly mezi oběma obrázky jsou minimální. Přiblížením jsme dostali podobnou strukturu, která se opět i u detailu v pravém horním rohu opakuje.



*Obr. 1.12: Bifurkační diagram logistické mapy (vlevo) a detail pravého horního rohu (vpravo)*

Posledním příkladem fraktálu je soběpodobná křivka, kterou představil M. Gardner ve svém článku z roku [8]. Pojmenována byla podle mýtického stvoření, které vzdáleně připomíná. Pomocí sledu velmi jednoduchých operací lze dosáhnout pozoruhodně komplexní struktury. Výchozím (prvním) stavem je úsečka. Postup tvorby této křivky lze ilustrovat také např. na tenkém proužku papíru. Na proužku vyznačíme střed a podle něj pravou stranu překlopíme na levou (pokud bychom proužek papíru rozložili, dostali bychom tvar písmene V). Na přeloženém pruhu opět vyznačíme střed a přeložíme podle něj pravou stranu na levou. Takto postupně překládáme pruh na poloviny. Složený pruh pak po určitém počtu přeložení rozložíme tak, aby všechny sklady svíraly 90°. Tvar výsledné křivky se nachází na Obr. 1.13.



*Obr. 1.13: Dračí křivka pro různé počty přeložení*

Výsledná křivka se nikde nekříží a tvoří čtverce, které se dotýkají pouze svými rohy. Na obrázku si můžeme povšimnout, že s rostoucím počtem přeložení roste „ostrost“ výsledného tvaru. Místo úsečky lze použít různé další tvary jako např.: tvar písmene S nebo W, případně různé obloučky.

## 2 BĚŽNĚ STUDOVANÉ CHAOTICKÉ SYSTÉMY

V dnešní době existuje velké množství studovaných chaotických systémů. Některé z nich jsou přímými modely reálných dějů a soustav (např. Duffingův oscilátor), jiné jsou spíše matematickou „hříčkou“, která je ideální ke zkoumání vlastností deterministického chaosu (např. Rösslerův systém). Chaotické systémy jsou běžně zkoumány jak ve spojitě, tak i v diskrétní oblasti.

### 2.1 Logistická mapa

Logistická mapa je jedním z nejpobulárnějších běžně studovaných chaotických systémů. Přestože jde o systém velmi jednoduchý, je schopen velmi komplexního až chaotického chování. První variantu, v podobě spojitě diferenciální rovnice (2.1), publikoval P. Verhulst již v roce 1838 ve své práci [9] z roku 1838.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{rP(K - P)}{K} \quad (2.1)$$

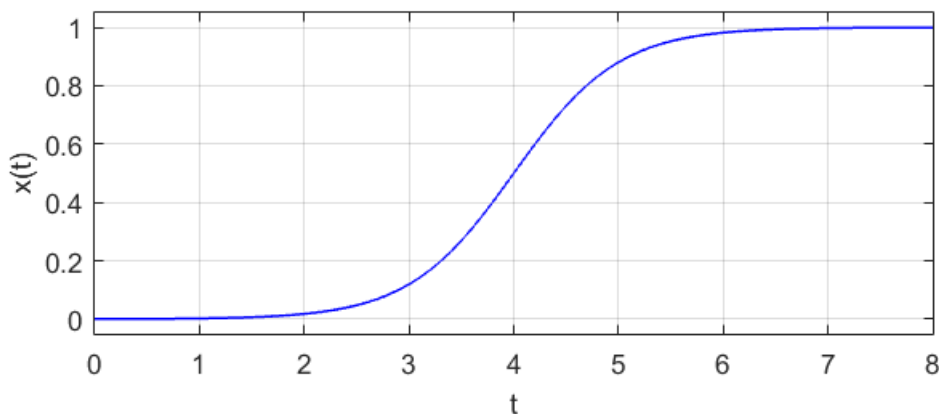
$P$  představuje populaci,  $r$  míru růstu populace a  $K$  nosnou kapacitu prostředí (nejvyšší dlouhodobě udržitelnou hodnotu  $P$ ). Vydělíme-li obě strany rovnice  $K$  a zavedeme substituci  $x = \frac{P}{K}$ , přejde diferenciální rovnice do tvaru (2.2).

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x) \quad (2.2)$$

Ze substituce je patrné, že  $x$  představuje podíl aktuální populace vůči maximální možné, tudíž bude nabývat hodnot z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Rovnice (2.2) je známá pod označením logistická a jejím řešením je funkce (2.3).

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-rt}} \quad (2.3)$$

Funkce (2.3) je rozšířenou variantou (logistické) sigmoidy, která má charakteristický esovitý tvar. Její průběh se nachází na Obr. 2.1.

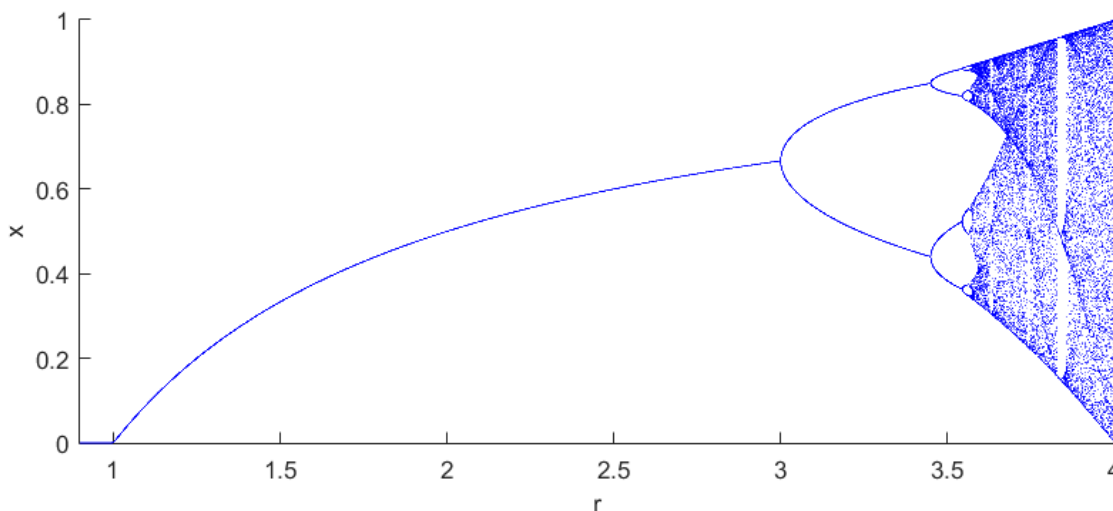


Obr. 2.1: Průběh logistické sigmoidy

Diskrétní varianta logistické rovnice (2.2) bývá označována jako *logistická mapa*. O její popularitu se zasloužil biolog R. May, který ji využil jako demografický model ve své práci [10] z roku 1976.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.4)$$

Chování logistické mapy závisí výhradně na míře růstu populace  $r$ . Pokud je míra růstu příliš nízká, populaci hrozí vyhynutí. Pokud bude naopak míra růstu příliš vysoká, může dojít k přemnožení a následnému vymírání v důsledku nedostatku potravy. Tuto závislost je možné ilustrovat pomocí bifurkačního diagramu na Obr. 2.2, který zobrazuje, na jaké hodnotě se populace ustálí v závislosti na velikosti parametru  $r$ .



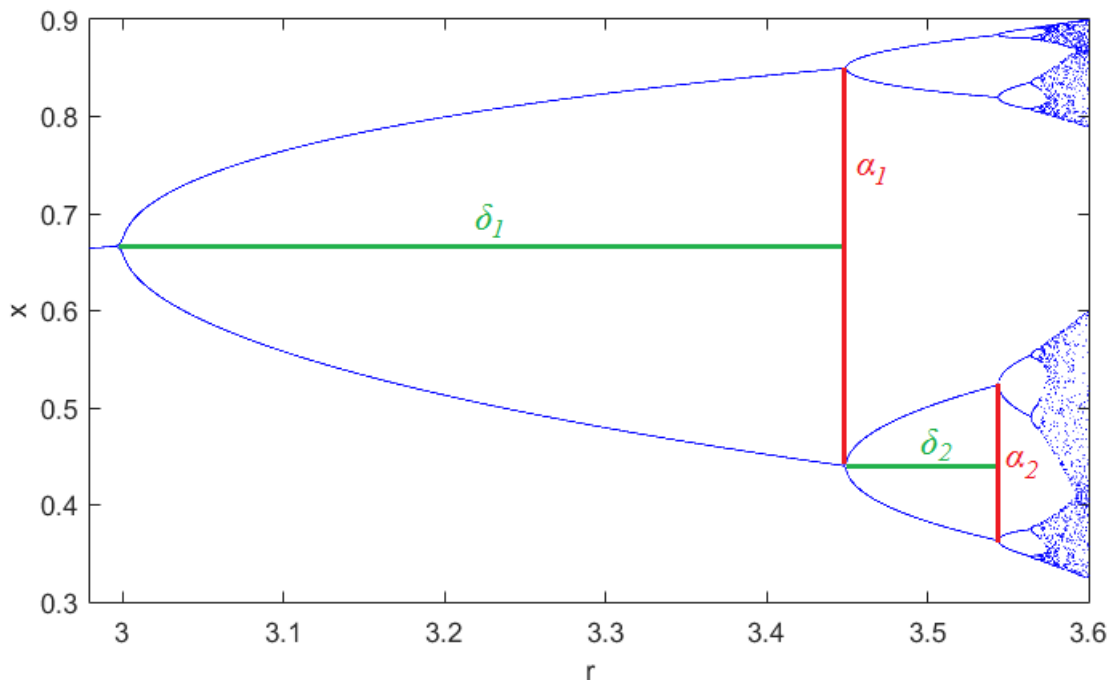
Obr. 2.2: Bifurkační diagram logistické mapy

Z diagramu je patrné, že pro hodnoty  $r < 1$  jde populace  $x$  vždy k 0 (vymření). Pro  $1 < r < 3$  se velikost populace ustálí na příslušné hodnotě z intervalu  $(0; 0,666)$ . Okolo hodnoty  $r \approx 3$  dojde k bifurkaci (rozvětvení). Po překročení této hodnoty se populace již nedokáže ustálit v důsledku příliš velké míry růstu. Ve chvíli, kdy nabyde hodnota populace nižší ze dvou hodnot (např. pro  $r = 3,3$  je  $x_1 = 0,48$ ), nic jí nebrání v růstu a v další iteraci přejde na vyšší hodnotu (pro  $r = 3,3$  je  $x_2 = 0,82$ ). Tato hodnota je však příliš vysoká, a proto dojde k úhynu části populace (např. kvůli nedostatku potravy). Velikost populace se tedy v dalším kroku sníží na hodnotu  $x_1$  a celý proces se opakuje. Z tohoto důvodu velikost populace  $x$  pro  $3 < r < 3,45$  periodicky osciluje mezi dvěma hodnotami. V blízkosti hodnoty  $r \approx 3,45$  opět dochází k bifurkaci na obou větvích a po překročení této hodnoty systém osciluje mezi čtyřmi různými velikostmi populace. Průběh se s rostoucím  $r$  postupně větví a počet hodnot, mezi kterými populace osciluje, příslušně zdvojuje. Se zdvojováním period dochází k postupnému zkracování bifurkačních intervalů. Tento proces u logistické mapy vrcholí při hodnotě  $r \approx 3,5699$  kdy se délky intervalů limitně blíží nule. Po překročení hranice  $r = 3,57$  se systém začíná chovat chaoticky.

Studiem zdvojení periodických bodů logistické mapy se zabýval M. Feigenbaum, který jako první poukázal na to, že vzdálenosti bifurkací se zkracují v konstantním poměru [11]. Tento poměr lze vyjádřit pomocí limity (2.5), kde  $r_n$  představuje hodnotu řídicího parametru  $r$  pro  $n$ -té zdvojení.

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}} \quad (2.5)$$

Pro případ  $n = 3$  můžeme poměr vzdáleností ilustrovat pomocí Obr. 2.3.



Obr. 2.3: Detail bifurkačního diagramu s vyznačenými vzdálenostmi, které se používají k výpočtu Feigenbaumových konstant

Kdybychom použili k výpočtu dvě označené délky  $\delta_1, \delta_2$ , dostali bychom hrubý odhad  $\hat{\delta} \cong 4,2337$ . Přesná hodnota  $\delta = 4,6692016$  dostala jméno Feigenbaumova konstanta  $\delta$  a představuje limitní poměr délek dvou sousedních bifurkačních intervalů. Její velmi důležitou vlastností je také to, že není nijak závislá na zkoumaném systému. Bylo dokázáno ([12], [13]), že je platná pro všechny jednorozměrné mapy.

Podobně jako délky bifurkačních intervalů jsou na tom i šířky rozvětvení. V Obr. 2.3 jsou označeny první dvě šířky  $\alpha_1, \alpha_2$ . Poměr šířek vyjadřuje limita (2.6).

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}} \quad (2.6)$$

Pro  $n$  jdoucí k nekonečnu nabývá  $\alpha$  hodnoty 2,5029078. Tato hodnota byla označena jako Feigenbaumova konstanta  $\alpha$ . Stejně jako konstanta  $\delta$  není nijak závislá na zkoumaném systému. Díky těmto dvěma konstantám můžeme získat představu o chování daného systému. S jejich pomocí se dá odhadnout přechod mezi periodickým a chaotickým chováním. Předpokládá se [14], že obě konstanty patří mezi transcendentální čísla.

## 2.2 Hénonova mapa

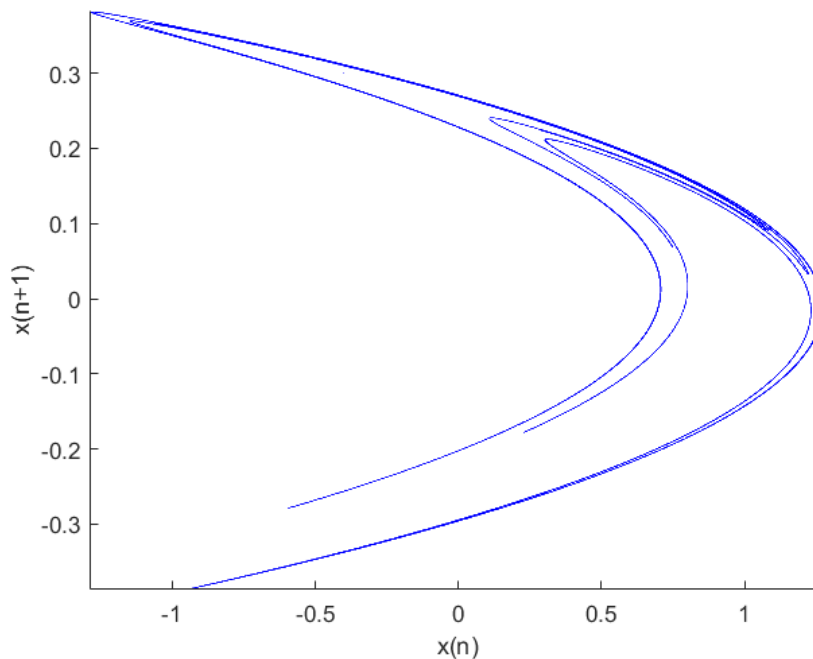
Hénonova mapa je dalším z populárních běžně studovaných chaotických systémů. Oproti logistické mapě jde o systém dvourozměrný. Tato mapa byla pojmenována po svém autorovi, matematiku M. Hénonovi, který ji popsal [15] jako zjednodušený model Poincarého mapy Lorenzova systému<sup>6</sup>. Hénonova mapa je nejčastěji tvořena soustavou dvou rovnic (2.7).

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}\quad (2.7)$$

Kde  $a$ ,  $b$  představují řídicí parametry, které ovlivňují chování systému. Nejčastěji používané hodnoty, pro které Hénonova mapa vykazuje chaotické chování, jsou  $a = 1,4$  a  $b = 0,3$ . Existují modifikace Hénonovy mapy, které lze označit jako přibližně „podobné“. Liší se tím, že zvětšují oblast konvergence mapy k atraktoru. Příkladem takovéto modifikace je mapa (2.8) [16].

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\quad (2.8)$$

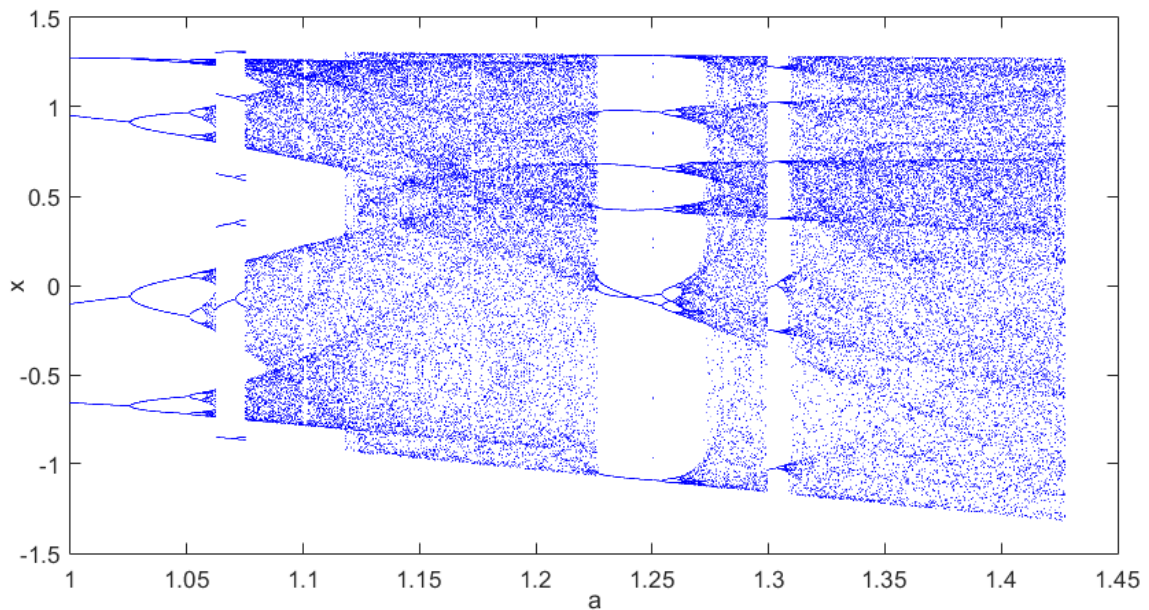
Atraktor „klasické“ Hénonovy mapy se nachází na Obr. 2.4.



Obr. 2.4: Atraktor Hénonovy mapy

Tento atraktor Hénonovy mapy (pro  $a = 1,4$  a  $b = 0,3$ ) spadá do kategorie atraktorů podivných (má fraktální strukturu). Na Obr. 2.5 se nachází část řezu trojrozměrným bifurkačním diagramem Hénonovy mapy pro  $b = 0,3$ .

<sup>6</sup> Lorenzův systém je popsán v kap. 2.4



Obr. 2.5: Detail bifurkačního diagramu Hénonovy mapy

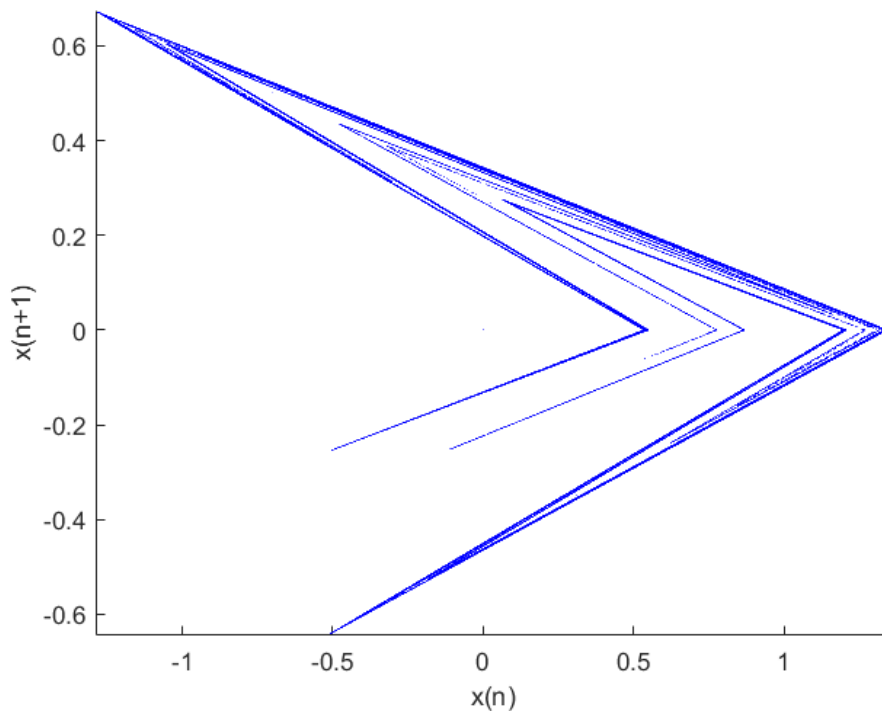
Na obrázku si můžeme povšimnout, že pro  $a \approx 1,025$  dochází ke třetí bifurkaci (k první došlo pro  $a \approx 0,75$  a k druhé pro  $a \approx 0,91$ ). Od hodnoty  $a \approx 1,06$  se systém začíná chovat chaoticky. Výjimkou jsou intervaly, kde dochází k náhlému ustálení, po kterém následuje další postupné zdvojování period – např.:  $(1,063; 1,075)$  či interval  $(1,227; 1,254)$ .

### 2.3 Loziho mapa

V roce 1978 představil R. Lozi svou práci [17], ve které se zabýval dvourozměrnou mapou, která se podobá známé Hénonově mapě. Jeho mapa je popsána soustavou dvou rovnic (2.9). Podobnost s předpisem Hénonovy mapy je zřejmá. Kvadratický člen Hénonovy mapy  $x_n^2$  byl nahrazen členem v absolutní hodnotě  $|x_n|$ .

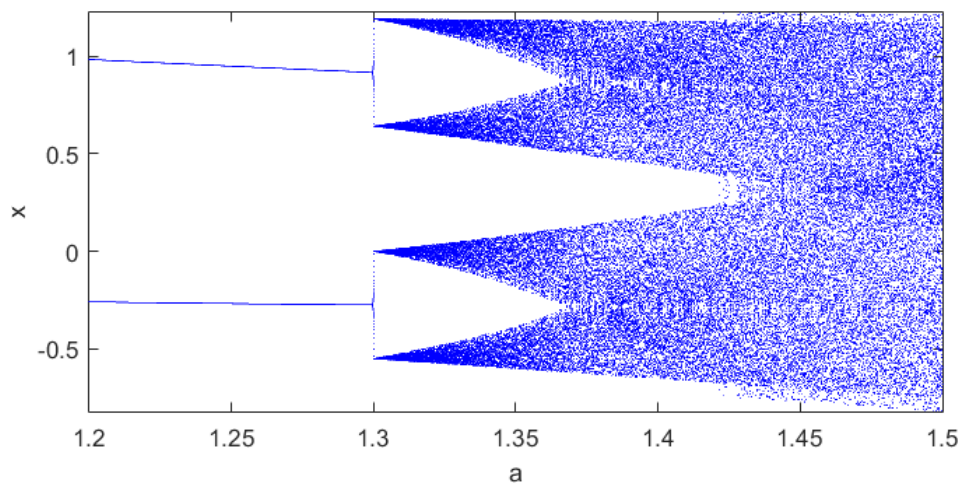
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a|x_n| + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kde  $a$ ,  $b$  představují řídicí parametry, na kterých závisí chování celého systému. Loziho mapa vykazuje chaotické chování pro hodnoty  $a = 1,7$  a  $b = 0,5$ . Atraktor Loziho mapy se nachází na Obr. 2.6.



Obr. 2.6: Atraktor Loziho mapy

Opět si můžeme povšimnout jisté podobnosti s atraktorem Hénonovy mapy. Hladké křivky parabolických tvarů byly nahrazeny ostrými liniemi. Na Obr. 2.7 se nachází detail bifurkačního diagramu Loziho mapy.



Obr. 2.7: Detail bifurkačního diagramu Loziho mapy

Tento bifurkační diagram se od dříve uvedených značně liší. Díky přítomnosti absolutní hodnoty v předpisu mapy nedochází po bifurkacích k oddalování větví postupně (např. na Obr. 2.2), ale skokově.



## 2.4 Lorenzův systém

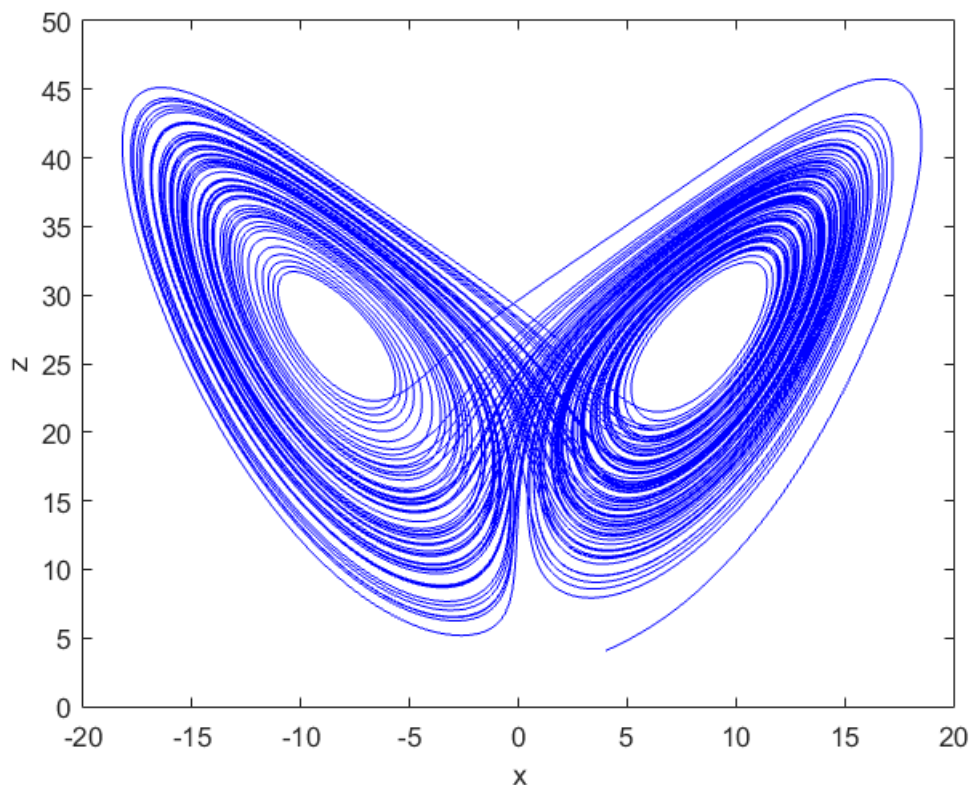
Lorenzův systém je nelineárním trojrozměrným dynamickým systémem, který odvodil E. Lorenz [18] v roce 1963. Jde o zjednodušený systém rovnic popisujících více-rozměrné proudění tekutin s teplotním rozdílem. Lorenz sledoval závislost průběhu proudění na velikosti Rayleighova čísla (jeden z parametrů) a zjistil, že systém je velmi citlivý na počáteční podmínky a pro určité hodnoty se začíná chovat nezvykle (chaoticky). Pro zjednodušení si zavedl systém tří diferenciálních rovnic (2.10) .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{2.10}$$

Proměnná  $x$  je úměrná intenzitě konvektivity,  $y$  je úměrná teplotnímu rozdílu mezi proudy a  $z$  je úměrná změně ve vertikálním teplotním profilu. Parametr  $\sigma$  představuje Prandtlovo číslo,  $\rho$  odpovídá poměrné hodnotě zmíněného Rayleighova čísla vůči jeho kritické hodnotě a  $\beta$  je geometrický faktor. Všechny tři parametry  $\sigma, \rho, \beta$  jsou zpravidla nezáporné. Pro  $\rho < 1$  má systém jeden stabilní bod, který se nachází v počátku. Tento stav odpovídá systému bez konvekce (šíření tepla prouděním). V bodě  $\rho = 1$  dochází k bifurkaci a za touto hodnotou má systém dva stabilní body:  $[\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1]$  a  $[-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1]$ . Tyto dva body odpovídají rovnoměrné konvekci v systému a jsou stabilní pokud platí podmínka (2.11) [19].

$$\rho < \sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta + 1}\tag{2.11}$$

Pro  $\rho > 24,74$  se mění chování stabilních bodů z přitažlivého na odpudivé, což má významný vliv na chování systému. Trajektorie už do stabilních bodů nesměřují, ale pouze oba body obíhají. Řídící parametry nejčastěji nabývají hodnot  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ , pro které systém vykazuje chaotické chování. Charakteristický podivný atraktor Lorenzova systému je vyobrazen na Obr. 2.8.



Obr. 2.8: Atraktor Lorenzova systému pro počáteční bod  $[4, 4, 4]$

Objevily se pochybnosti, zda tento atraktor doopravdy odpovídá dynamice Lorenzových diferenciálních rovnic a matematický se toto tvrzení dlouhou dobu nedařilo dokázat. V roce 1998 byl tento problém dokonce zařazen mezi 18 největších nevyřešených problémů matematiky<sup>7</sup>, které sestavil S. Smale [20]. S řešením přišel matematik W. Tucker [21] v roce 2002.

Kromě toho, že model reprezentuje proudění v atmosféře, používá se i v mnoha dalších oborech. Lorenzovy rovnice využívají např.: zjednodušené modely chemických reakcí [22], elektrických obvodů [23], laserů [24], DC motorů [25], dynamika [26] a dokonce některé varianty osmózy [27].

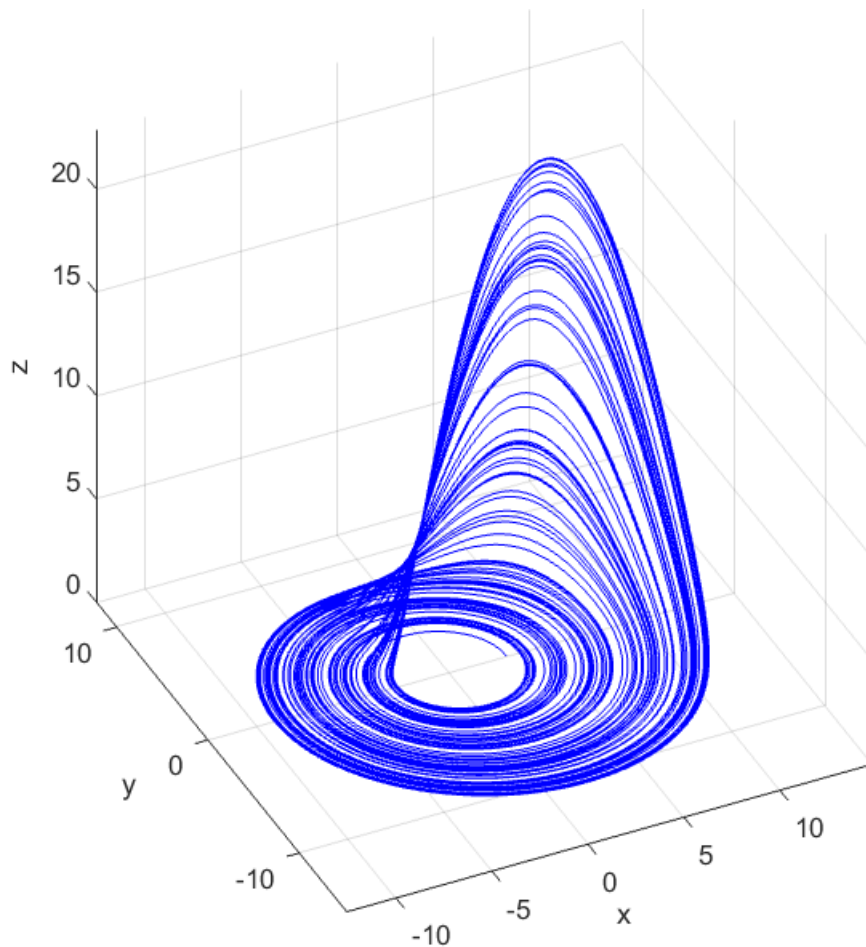
## 2.5 Rösslerův systém

Práci E. Lorenze se zabýval O. Rössler, který přišel s myšlenkou ještě více Lorenzův systém zjednodušit. V roce 1976 navrhl [28] vlastní systém (2.12), který se svým chováním tomu Lorenzovu velmi podobá.

<sup>7</sup> Mezi dodnes nevyřešené problémy patří např.: Riemannova hypotéza, řešení Navier–Stokesových rovnic nebo P=? NP problém.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{2.12}$$

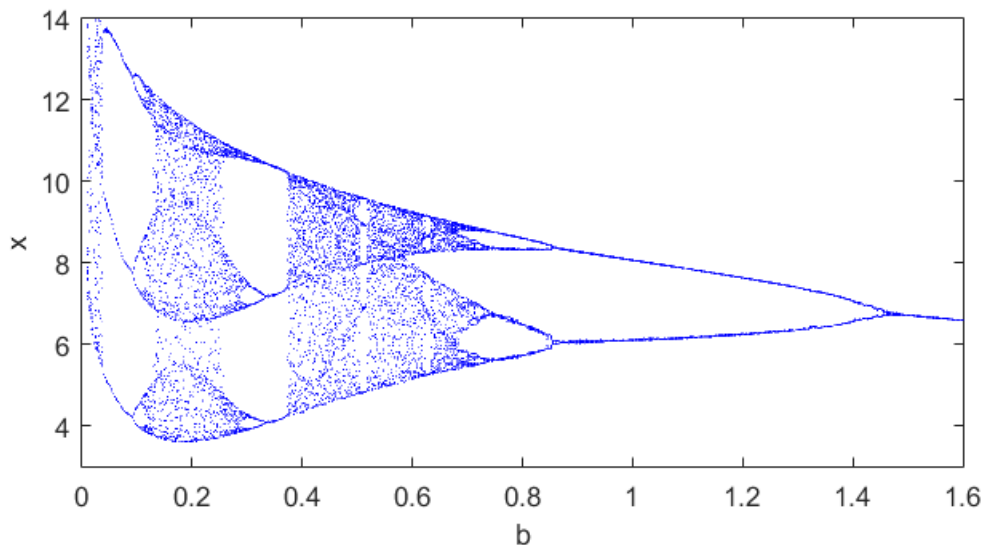
Parametry  $a, b, c$  mají vliv na chování systému. Přestože byl tento systém navržen pouze s použitím teorie, našel i praktické využití při modelování rovnováhy chemických reakcí [29]. Atraktor Rösslerova systému pro  $a = 0,2; b = 0,2; c = 5,7$ , se nachází na Obr. 2.9.



Obr. 2.9: Atraktor Rösslerova systému pro počáteční bod  $[3, 0, 0]$

Podobnost s Lorenzovým atraktorem je zřejmá. Hlavní rozdíl spočívá v počtu bodů které systémy obíhají. U Lorenzova atraktoru lze zřetelně vidět oběh okolo dvou různých stabilních bodů, Rösslerův systém obíhá pouze jeden.

Chování trojrozměrných systému se odhaduje velmi obtížně. Bifurkační diagram, vyjadřující závislost stavové proměnné (např.  $x$ ) na řídicích parametrech  $a, b, c$  je čtyřrozměrný. Určitou představu nám mohou dát řezy tímto diagramem. Na Obr. 2.10 se nachází řez pro konstantní  $a = 0,2; c = 5,7$  a proměnlivou hodnotu  $b$ .



Obr. 2.10: Bifurkační diagram Rösslerova systému s proměnlivým parametrem  $b$

Bifurkační diagram Rösslerova systému má oproti předchozím systémům dvě odlišnosti. Zaprvé je zrcadlově převrácený podél vertikální osy. To znamená, že k postupným bifurkacím nebude docházet podél osy  $b$ , ale proti směru této osy. Druhým rozdílem je chování systému pro  $b$  jdoucí k nule. Na obrázku můžeme vidět náznak postupného přechodu k vyšším hodnotám (přibližně od hodnoty 0,1 a menší). Pro  $b$  jdoucí limitně k nule jde hodnota  $x$  do nekonečna.

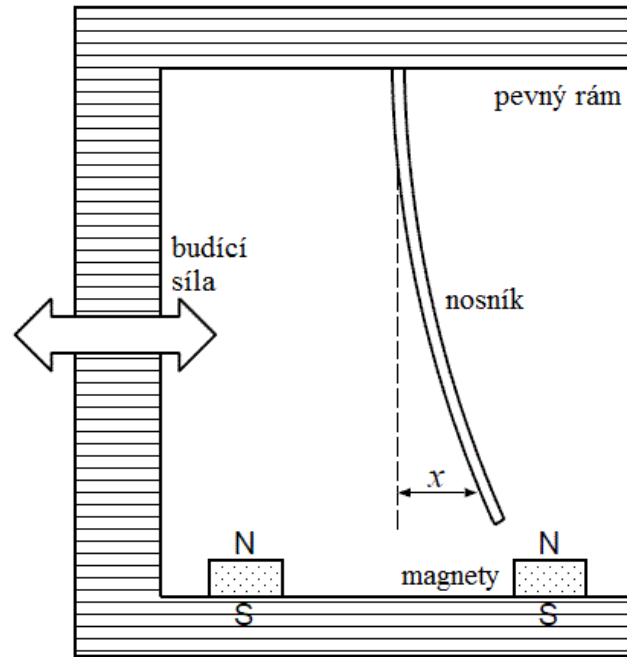
## 2.6 Duffingova mapa

Duffingova mapa je diskrétní variantou Duffingovy rovnice, kterou představil G. Duffing ve své práci [30] z roku 1918. Duffingova rovnice (2.13) [31] je nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu, která se používá k modelování pohybu buzených oscilátorů s tlumením.

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (2.13)$$

Neznámá  $x(t)$  reprezentuje polohu v čase  $t$ ,  $\dot{x}$  je první časová derivace (rychlost),  $\ddot{x}$  je druhá časová derivace (zrychlení) a čísla  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\omega$  jsou konstantní parametry. Fyzikálně lze tento systém pro  $\beta > 0$  reprezentovat jako kývající se závaží zavěšené na pružině, která se neřídí Hookeovým zákonem<sup>8</sup>. Pro  $\beta < 0$  může tento systém reprezentovat periodicky buzený systém s ocelovým nosníkem, který je střídavě přitahován dvěma magnety. Na Obr. 2.11 je takovýto systém vyobrazen.

<sup>8</sup> Hookeův zákon („Ut tensio, sic vis“) lze interpretovat např. takto: „Deformace je přímo úměrná napětí“.



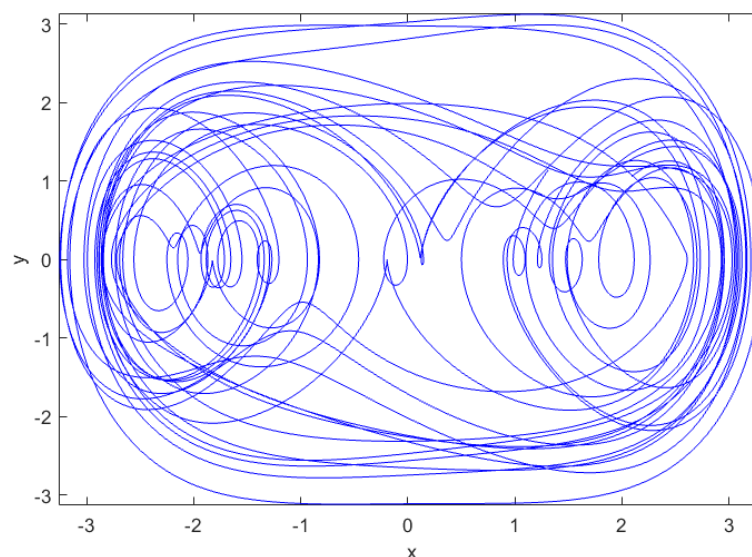
Obr. 2.11: Vizualizace Duffingova oscilátoru pro  $\beta < 0$  [31]

Jednotlivým parametrům lze také přiřadit fyzikální význam. Parametr  $\alpha$  odpovídá lineární tuhosti,  $\beta$  míře nelinearity vratné síly,  $\gamma$  amplitudě periodické budící síly,  $\delta$  míře tlumení a  $\omega$  úhlové rychlosti periodické budící síly.

Počet parametrů Duffingovy rovnice je možno zredukovat zavedením specifických substitucí  $\tau = t\sqrt{\alpha}$  a  $y = x\alpha/\gamma$  [32], díky kterým prakticky dojde pouze k přeškálování.

$$\ddot{y} + 2\eta\dot{y} + y + \varepsilon y^3 = \cos(\sigma\tau) \quad (2.14)$$

Kde  $\eta = \frac{\delta}{2\alpha}$ ,  $\varepsilon = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^3}$  a  $\sigma = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}$ . Díky těmto úpravám lze sledovat chování stejného systému v závislosti na menším počtu parametrů. Fázový portrét buzeného Duffingova oscilátoru, na kterém je patrná chaotická trajektorie se nachází na Obr. 2.12.

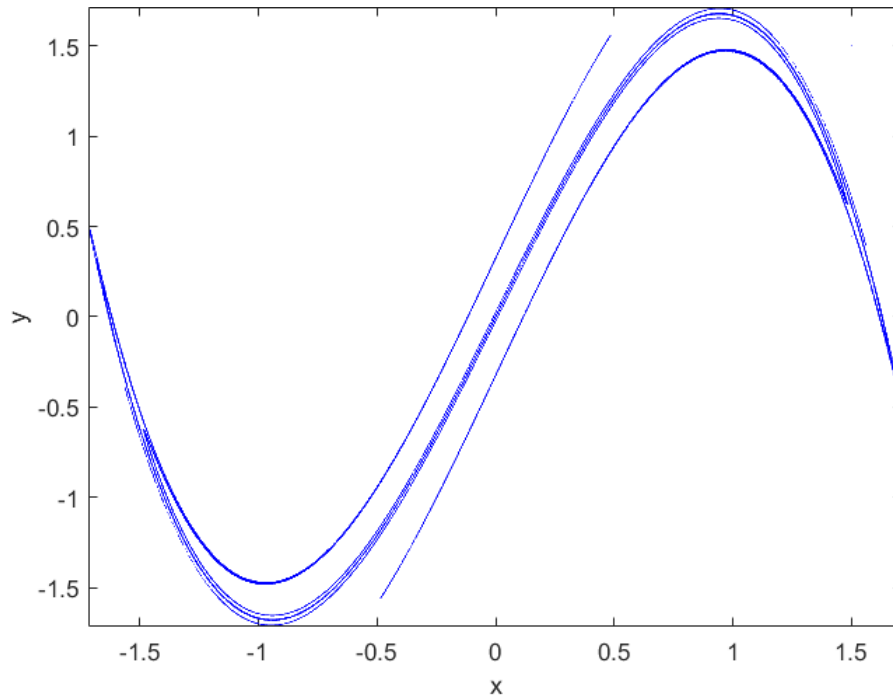


Obr. 2.12: Fázový portrét buzeného Duffingova oscilátoru

Diferenciální rovnici druhého řádu (2.14) lze jednoduchou úpravou převést na soustavu dvou diferenciálních rovnic řádu prvního. Pokud obě rovnice převedeme do diskrétní podoby získáme předpis Duffingovy mapy (2.15) [33].

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= -bx_n + ay_n - y_n^3\end{aligned}\quad (2.15)$$

Chování této mapy závisí na parametrech  $a$  a  $b$ . Duffingova mapa vykazuje chaotické chování pro  $a = 2,75$  a  $b = 0,2$ . Atraktor Duffingovy mapy se nachází na Obr. 2.13.



Obr. 2.13: Atraktor Duffingovy mapy

### 3 METODY STABILIZACE

Přestože není možné chování chaotických systémů dlouhodobě předpovídat, je možné tyto systémy stabilizovat. Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.4, za určitých podmínek přejde dynamický systém do ustáleného stavu v podobě singulárního bodu nebo limitního cyklu. Úkolem stabilizačních metod je tedy pomocí „důmyslně“ navržené perturbace (zásahu) chaotický systém do ustáleného stavu dostat. Způsobů, jak perturbaci navrhnout a zavést do systému je více. V rámci této práce se jedná o Pyragasovu metodu TDAS a její rozšířenou variantu ETDAS.

#### 3.1 Metoda zpožděné zpětné vazby

Metoda zpožděné zpětné vazby slouží ke stabilizaci nestabilních periodických orbitů chaotických systémů. Je jednou ze dvou metod, které K. Pyragas představil ve své práci [34] již v roce 1992. Tato metoda je také známá pod názvem TDAS (Time Delayed Auto Synchronization) a je velmi jednoduchá na implementaci. Je vhodná pro stabilizaci orbitů s nižší periodou, což je zároveň nejvíce limitujícím faktorem této metody.

Mějme obecný dynamický systém  $P$  popsany proměnnou  $x$  a spojitou perturbaci v podobě parametru  $F$  jehož výchozí hodnota je 0 (pro neřízený systém  $P$ ). Tento systém popisuje diferenciální rovnice (3.1).

$$\frac{dx}{dt} = P(x) + F(t) \quad (3.1)$$

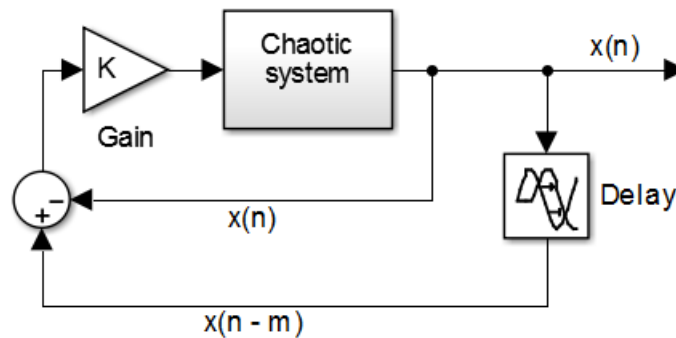
Perturbace je vyjádřena následujícím vztahem:

$$F(t) = K[x(t - \tau) - x(t)] \quad (3.2)$$

V tomto případě  $\tau$  představuje dobu zpoždění. Pokud tato doba odpovídá periodě nestabilní periodické orbity, velikost perturbace se ve stabilním bodě bude rovnat nule. To znamená, že stabilizací nedošlo ke změně řešení systému. Váhový parametr  $K$  mění velikost perturbace, která je do systému zavedena jako záporná zpětná vazba ( $K > 0$ ). Velikost parametru  $K$  je běžně volena v intervalu  $(0, 1)$  [35]. Pro hodnoty větší než 1 by mohla perturbace systém spíše více rozkmitávat než ustalovat. Změnou parametru  $K$  dochází pouze ke změně příslušného Ljapunovova exponentu. Požadovaného (stabilního) chování dynamického systému je dosaženo optimálním nastavením parametru  $K$ . Jednoduchou úpravou rovnic (3.1) a (3.2) získáme diskrétní variantu metody TDAS (3.3) vhodnou ke stabilizaci chaotických map. Hodnota parametru  $m$  je rovna řádu periodického orbitu.

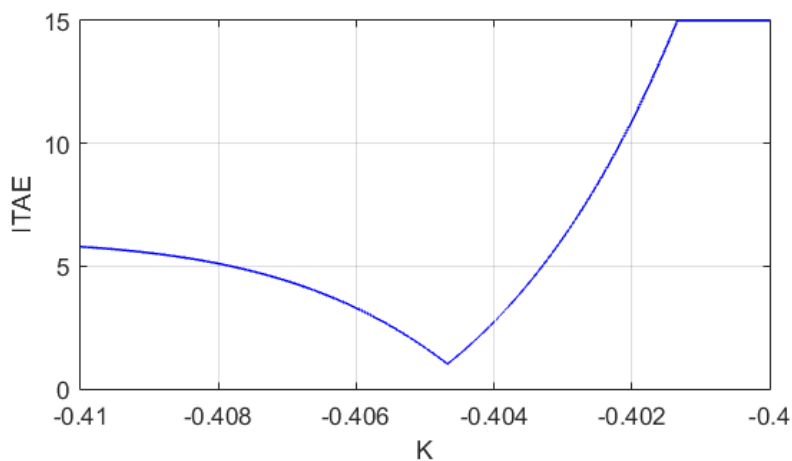
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(x_n) + F_n \\ F_n &= K[x_{n-m} - x_n] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Blokové schéma metody se nachází na Obr. 3.1.



Obr. 3.1: Blokové schéma metody TDAS

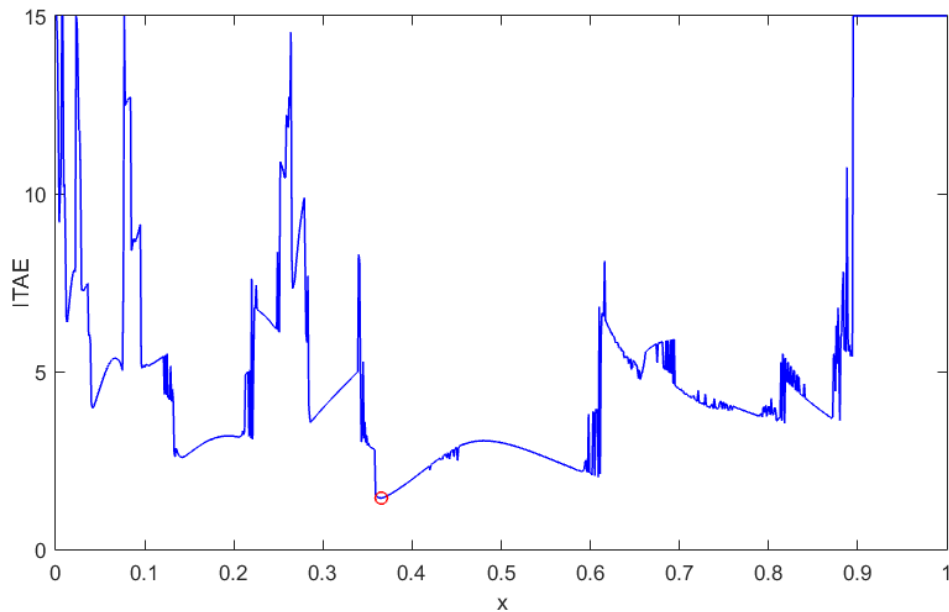
Velkou výhodou této metody je její velmi jednoduchá experimentální realizace a také fakt, že nevyžaduje předběžnou ani průběžnou analýzu dynamiky systému. Vystačí si pouze s měřitelným výstupem a znalostí periody stabilního orbitu. Je zřejmé, že největší vliv na úspěšnost této metody má volba parametru  $K$ . Závislost hodnoty účelové funkce (hodnotící stabilizaci logistické mapy na orbit s periodou 1) na volbě tohoto parametru může vypadat různě. Příklad takovéto závislosti pro stabilizaci logistické mapy na orbit s periodou 1 se nachází na Obr. 3.2.



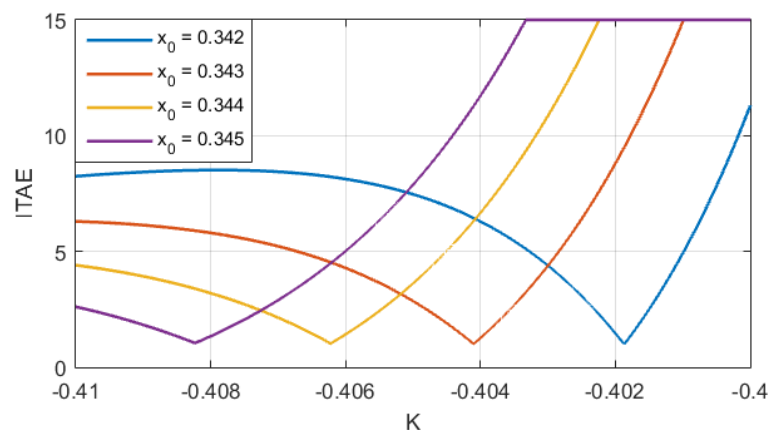
Obr. 3.2: Závislost hodnoty účelové funkce na volbě řídicího parametru pro stabilizaci logistické mapy na orbit s periodou 1 (pro počáteční bod  $x_0 = 0,34326$ )

Dalším faktorem, který má významný vliv na průběh stabilizace je volba počátečního bodu. Tato závislost pro stabilizaci logistické mapy na orbit s periodou 2 je vyobrazena na Obr. 3.3. Můžeme si povšimnout že tato závislost má minimum poblíž hodnoty 0,37, kde se shodou okolností nachází jeden z periodických bodů. Logicky lze tedy předpokládat, že čím je počáteční bod blíže stabilnímu řešení, tím je proces stabilizace jednodušší. Kombinovaná závislost (pro totožnou úlohu stabilizace) se nachází na Obr. 3.4. Tento obrázek znázorňuje, jak se mění průběh hodnoty účelové funkce v závislosti na změně řídicího parametru  $K$  pro čtyři různé blízké počáteční body.





Obr. 3.3: Závislost hodnoty účelové funkce na volbě počátečního bodu (minimum je označeno červeně)



Obr. 3.4: Závislost hodnoty účelové funkce na volbě parametru  $K$  s ohledem na volbu počátečního bodu

### 3.2 Rozšířená metoda zpožděné zpětné vazby

Největší nevýhoda metody TDAS spočívá v omezení velikosti periody orbitu. Kvalita stabilizace s rostoucí periodou orbitu klesá, pro velké hodnoty metoda dokonce selhává. Je to způsobeno tím, že velikost perturbace závisí pouze na jednom předchozím stavu, jelikož metoda není schopna uchovat informace o více předchozích stavech. Tímto problémem se zabývali J. Socolar, D. Sukow a D. Gauthier [36], kteří přišli s rozšířenou (angl. extended) variantou výpočtu perturbace (3.4), která uchovává informace o větším počtu předchozích stavů (teoreticky všech). Rozšířená verze metody TDAS bývá v literatuře označována jako ETDAS (Extended TDAS).

$$F(t) = K[(1 - R) \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x(t - m\tau) - x(t)] \quad (3.4)$$

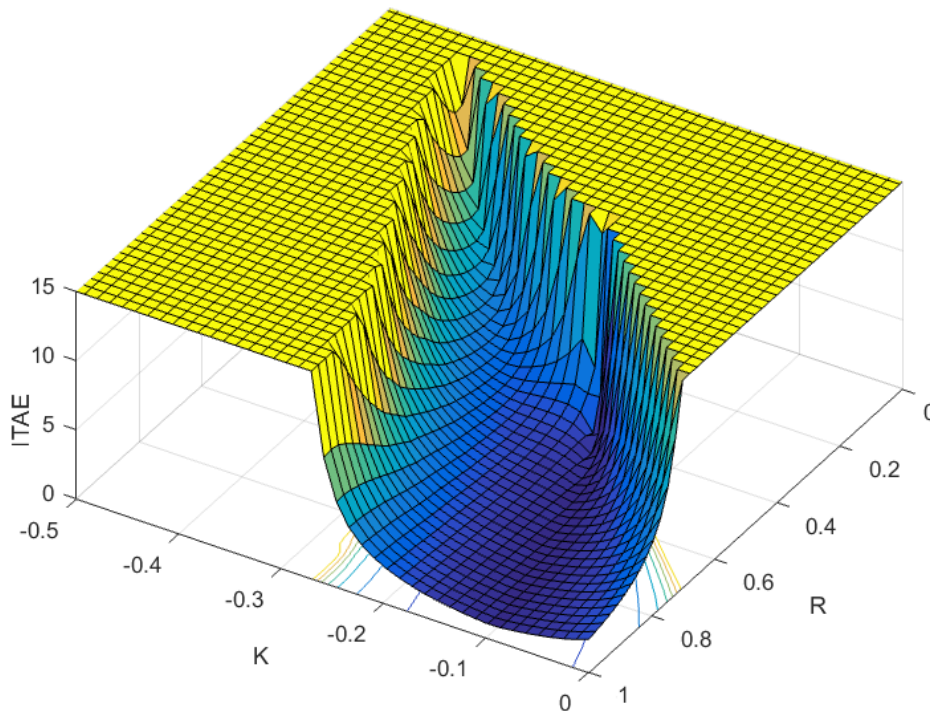
Parametr  $R$  nabývá hodnot  $0 \leq R < 1$ , přičemž varianta  $R = 0$  odpovídá původní metodě TDAS. Stejně jako u metody TDAS platí, že pokud je systém stabilní, jde pro libovolné hodnoty parametrů  $K, R$  velikost perturbace k nule. To znamená, že stabilizací nedošlo ke změně řešení. Náhradou sumačního členu ekvivalentním výrazem (diferenciální rovnicí se zpožděním) se výpočet perturbace rozpadne na dvě rovnice [37].

$$\begin{aligned} F(t) &= K[(1 - R)S(t - \tau) - x(t)] \\ S(t) &= x(t) + RS(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Úpravou (diskretizací) rovnic (3.5) získáme diskrétní variantu metody ETDAS.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(x_n) + F_n \\ F_n &= K[(1 - R)S_{n-m} - x_n] \\ S_n &= x_n + RS_{n-m} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Oproti metodě TDAS dosahuje její rozšířená varianta lepších výsledků. Rozdíl je patrný hlavně v případě stabilizace na orbit s větší periodou, která je často rychlejší, a efektivnější. Obdobně jako u metody TDAS úspěšnost metody závisí na volbě řídicích parametrů  $K$  a  $R$ . Příklad závislosti hodnoty účelové funkce (pro případ stabilizace logistické mapy na orbit s periodou 1) na volbě parametrů  $K$  a  $R$  se nachází na Obr. 3.5.



Obr. 3.5: Závislost hodnoty účelové funkce na volbě řídicích parametrů metody ETDAS (pro stabilizaci logistické mapy na orbit s periodou 1,  $x_0 = 0,5$ )

## 4 METODY OPTIMALIZACE

Úkolem optimalizačních metod je nalézt to nejlepší řešení z množiny všech řešení přípustných. Abychom však mohli řešení kvalitativně porovnávat, je zapotřebí je nejdříve ohodnotit. K tomu využijeme účelovou funkci, která představuje závislost kvality řešení na volbě rozhodovacích proměnných. V praxi pak optimalizace spočívá v nalezení konkrétní hodnoty  $x^*$ , pro kterou nabývá účelová funkce extrému ze všech přípustných řešení  $x$ . Vzhledem k faktu, že účelová funkce není spojitá, nelze k optimalizaci využít metod, které pracují s gradientem funkce. Proto byla k optimalizaci použita metoda z kategorie negradientních. Negradientní metody hledají extrém funkce pomocí porovnávání funkčních hodnot. Konkrétními použitými metodami byla metoda Nelder–Mead a genetický algoritmus.

### 4.1 Účelová funkce a její modifikace

Hodnota účelové funkce nám dává představu o kvalitě řešení optimalizační úlohy. Pro stabilizaci chaotických systémů na orbit s periodou 1 byla jako účelová funkce použita diskretní varianta integrálního kritéria ITAE (Integral Time-weighted Absolute Error).

$$S_{ITAE} = \sum_{i=1}^n |e_i| \cdot i \quad (4.1)$$

Toto kritérium minimalizuje jak odchylku  $e_i$  (rozdíl žádané a skutečné hodnoty), tak i dobu stabilizace  $i$ , která v tomto případě představuje příslušný krok. Existují různé varianty tohoto kritéria, které mohou váhově modifikovat jednotlivé složky [38].

$$S_{ITAE} = \sum_{i=1}^n |e_i|^s \cdot i^r \quad (4.2)$$

Přestože pro stabilizaci na orbit s periodou 1 je kritérium (4.1) plně dostačující, pro vyšší periody není příliš vhodné. Nemá možnost uvažovat více stabilních bodů, natož jejich pořadí. Proto byla pro stabilizaci orbitů s periodou větší než 1 použita modifikovaná verze této účelové funkce (4.3), která zmíněné nedostatky odstraňuje.

$$S_{ITAE_m} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n |e_{1i}| \cdot i, \sum_{i=1}^n |e_{2i}| \cdot i, \dots, \sum_{i=1}^n |e_{ui}| \cdot i \right\} \quad (4.3)$$

S rostoucí periodou orbitu roste úměrně i počet periodických bodů, kterými systém postupně prochází. Počet všech možných uspořádání  $u$  konkrétního počtu  $p$  periodických bodů odpovídá hodnotě  $p!$ . V rámci této práce jde o hodnoty  $2! = 2$  a  $4! = 24$ . Tato modifikovaná účelová funkce vypočte hodnoty kritéria pro všechny varianty uspořádání, ze kterých nakonec vybere tu nejmenší. Právě ta nejlépe odpovídá skutečnému průběhu. Je to způsobeno tím, že dopředu neznáme správné pořadí periodických bodů, ani místo, kde se systém na stabilní cyklus „napojí“.

## 4.2 Metoda Nelder–Mead

Tato numerická iterační metoda, známá také jako metoda simplexů<sup>9</sup> [39], využívá k hledání řešení vrcholů simplexu. Pro dvourozměrný problém se jedná o vrcholy trojúhelníku, pro trojrozměrný problém se využívá čtyřstěn. Simplex se prostorem pohybuje jako améba a pomocí postupných transformací se přibližuje k řešení. I když se na první pohled může algoritmus této metody jevit jako složitý, jeho základní myšlenka je vcelku prostá. Po zjištění hodnoty účelové funkce ve všech vrcholech simplexu vybereme vrchol s nejhorším ohodnocením  $x_w$  a nahradíme ho novým vrcholem, ve kterém je ohodnocení příznivější. Nový vrchol hledáme na polopřímce vycházející ze zmíněného vrcholu s nejhorším ohodnocením, která prochází těžištěm všech ostatních vrcholů. Způsobů, jak lze simplex transformovat je celkem pět a jejich vizuální interpretace se nachází na Obr. 4.1.

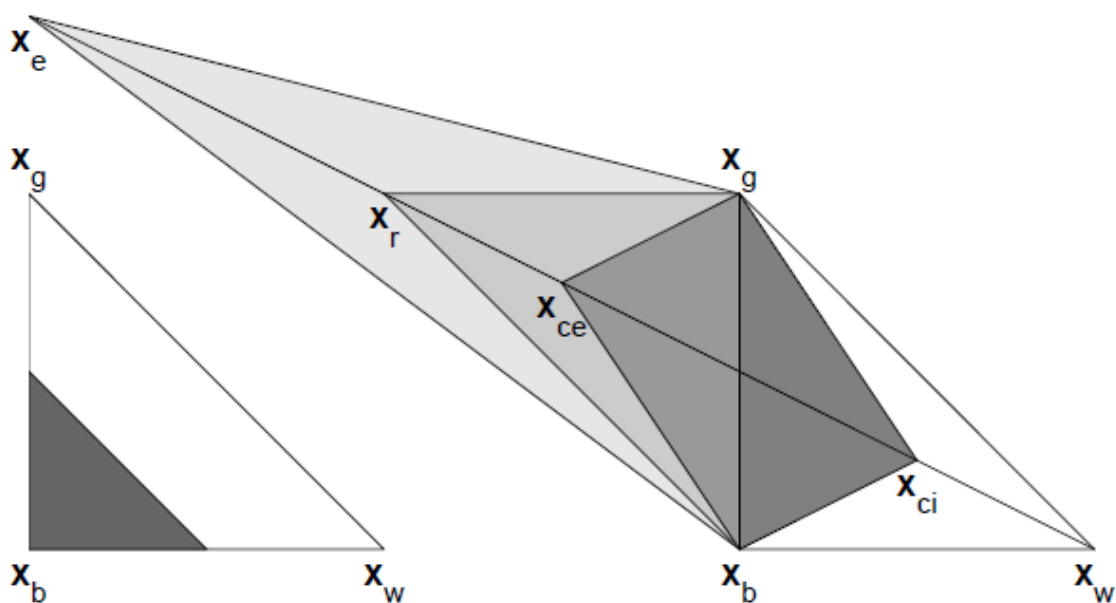
- 1) *Reflexe* – nový bod  $x_r$  je obrazem bodu  $x_w$  ve středové souměrnosti podle těžiště
- 2) *Expanze* – pokud dosáhl reflektovaný bod lepší hodnoty účelové funkce než nejlépe ohodnocený vrchol simplexu  $x_b$ , otestuje se také bod  $x_e$ , který se nachází ve dvojnásobné vzdálenosti reflektovaného bodu a nejhoršího vrcholu ve směru polopřímky vůči bodu  $x_w$
- 3) *Kontrakce vnější* – v případě, že  $x_r$  ani  $x_e$  nedosáhly lepšího řešení, otestuje se střed  $x_{ce}$  úsečky tvořené bodem  $x_r$  a těžištěm
- 4) *Kontrakce vnitřní* – analogicky se testuje střed  $x_{ci}$  úsečky tvořené bodem  $x_w$  a těžištěm
- 5) *Redukce* – pokud všechny předchozí pokusy nenalezly lepší řešení, dojde k redukci simplexu. Vrchol simplexu s nejlepším ohodnocením  $x_b$  zůstává zachován a všechny ostatní vrcholy se k němu přiblíží na polovinu původní vzdálenosti

Algoritmus postupně prochází kroky 1 – 4 a když nalezne lepší řešení, dojde k příslušné transformaci simplexu. Pokud lepší řešení nenalezne, dojde k redukci simplexu. Výpočet opakujeme do chvíle, kdy jsou vzájemné vzdálenosti vrcholů simplexu menší než požadovaná přesnost a vrchol s nejlepším ohodnocením  $x_b$  prohlásíme za řešení. Druhou možností zastavení výpočtu je situace kdy po určitý počet iterací nedošlo ke zlepšení, což v přeneseném významu znamená, že simplex se nachází na rovině. Čím je počet proměnných minimalizované funkce menší, tím je obvykle řešení nalezené touto metodou lepší a i když je o konvergenci této metody známo velice málo [40], dosažené výsledky jsou vynikající.

Značnou nevýhodou této metody je nutnost zadat výchozí hodnoty optimalizovaných parametrů. Když totiž zvolíme počáteční hodnoty „nešťastně“, může nám řešení zkonvergovat k lokálnímu minimu či dokonce zdivergovat. Metoda Nelder–Mead je metodou lokální optimalizace, což je pro účely stabilizace nedostatečné, jelikož má tato metoda pouze malou naději na nalezení nejlepšího řešení. Tento problém byl

<sup>9</sup> Nezaměňovat se simplexovou metodou (algoritmem lineárního programování)

vyřešen mírnou modifikací optimalizační metody. Odhad startovního bodu je nahrazen intervalem, ve kterém se budou optimalizované parametry nacházet. Např. pro metodu ETDAS se oba váhové parametry nacházejí v intervalu (0, 1). Intervaly pro jednotlivé optimalizované proměnné jsou ekvidistantně rozděleny a algoritmus poté optimalizuje všechny možné kombinace proměnných. V přeneseném významu je jeden startovní bod nahrazen mřížkou, díky které si můžeme závislost hodnoty účelové funkce na optimalizovaných parametrech vizualizovat (např. Obr. 3.5) a získat tak představu, o poloze globálního minima. Za účelem zvýšení přesnosti je možné tento postup opakovat pro zpřesněné odhady intervalů, ve kterých se nachází globální minimum. Tato modifikace umožnila efektivní využití metody Nelder–Mead v kontextu globální optimalizace.

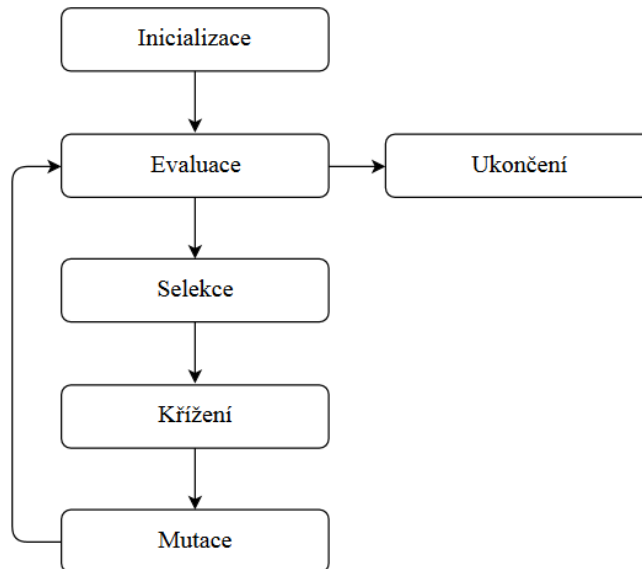


Obr. 4.1: Vizualní interpretace transformací simplexu [41]

### 4.3 Genetický algoritmus

Genetický algoritmus je heuristická optimalizační metoda, založená na principu přirozeného výběru – procesu, který je pomyslným hnacím motorem evoluce. V inicializační fázi algoritmus vygeneruje nultou populaci (množinu jedinců). Každý jedinec nese určitou informaci v podobě chromozomu složeného z jednotlivých genů (např. bitů). Nultá populace se většinou skládá z náhodně vybraných jedinců. Celá populace je nejdříve ohodnocena *fitness* funkcí, která umožní kvalitativní porovnávání. Ke tvorbě nové generace dochází pomocí *křížení* a *mutace*. *Selekce* (výběr) „rodičů“ k reprodukci může být realizována např. ruletovým kolem [42], kdy má každý jedinec pravděpodobnost výběru úměrnou jeho *fitness* ohodnocení. Při křížení dochází k vzájemné výměně dvou částí chromozomů a při mutaci k náhodným změnám jednotlivých genů. Nová populace, vytvořená křížením a mutací je opět ohodnocena *fitness* funkcí a pokud není splněna ukončující podmínka, algoritmus se vrací zpět k selekci, tentokrát s novou populací. Podmínkou ukončení může být např. dosažení

maximálního počtu populací nebo dlouhodobě neměnná hodnota fitness. Populace se postupně „vyvíjí“ směrem k optimálnímu řešení. Nespornou výhodou je fakt, že se v každé iteraci (generaci) na hledání optimálního řešení podílí celá populace, na rozdíl od klasických algoritmů, které běžně rozvíjejí pouze jedno počáteční řešení. Nemodifikovaný genetický algoritmus je algoritmem „slepého“ prohledávání [43], jelikož k orientaci nevyužívá žádnou informaci.



*Obr. 4.2: Zjednodušené schéma práce genetického algoritmu*

Obr. 4.2 zobrazuje zjednodušené obecné schéma práce genetického algoritmu. Z obrázku je patrné pořadí jednotlivých činností

Značný vliv na výsledné řešení optimalizačních úloh pomocí genetického algoritmu má nastavení vnitřních parametrů. V rámci této práce bylo použito výchozí nastavení genetického algoritmu vývojového prostředí MATLAB.

## 5 STABILIZACE CHAOTICKÝCH SYSTÉMŮ

Praktická část práce se zabývá stabilizací zadaných chaotických systémů. Jedná se o dva modelové systémy – logistickou a Hénonovu mapu a jeden reálný systém – Duffingovu mapu. Všechny systémy byly stabilizovány za stejných podmínek. Počet iterací, během kterých probíhala stabilizace byl zvolen na 100. Některé systémy se však ustálily mnohem dříve. Stabilizační metody byly optimalizovány jak genetickým algoritmem, tak metodou Nelder-Mead.

### 5.1 Stabilizace logistické mapy

Chování logistické mapy bylo popsáno v kapitole 2.1. Logistická mapa byla stabilizována na orbitech s periodou 1, 2 a 4. Pro jednotlivé případy bylo potřeba nejprve zjistit, kde se nacházejí konkrétní periodické body. V případě  $p = 1$  orbitu se jedná o řešení rovnice (5.1), která pro logistickou mapu nabývá podoby (5.2).

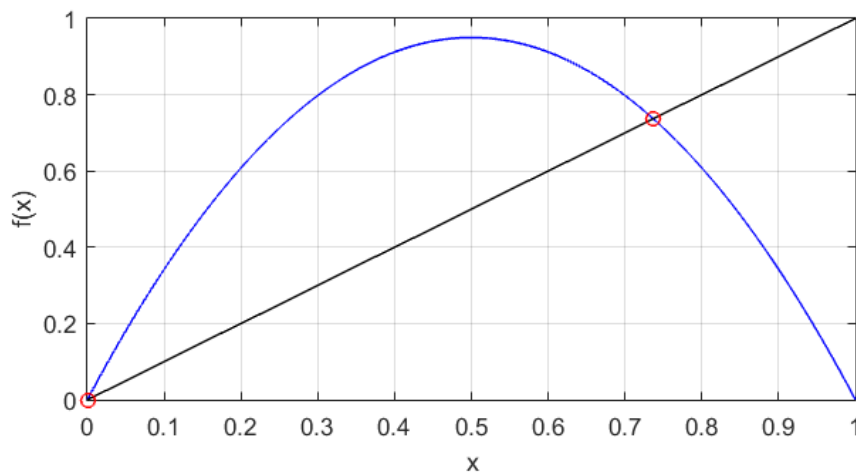
$$f_r(x) = x \quad (5.1)$$

$$rx(1 - x) = x \quad (5.2)$$

Pomocí několika jednoduchých úprav lze rovnici (5.2) převést na tvar (5.3), ze kterého je patrné, že jde o kvadratickou rovnici v normovaném tvaru s koeficienty  $a = 1$ ,  $b = \left(\frac{1}{r} - 1\right)$  a  $c = 0$ .

$$x^2 + \left(\frac{1}{r} - 1\right)x = 0 \quad (5.3)$$

Rovnice (5.3) má dvě řešení a jsou to hodnoty  $x_1 = 0$  a  $x_2 = \frac{r-1}{r}$  za podmínky  $r > 1$ . Pomineme-li triviální řešení  $x_1$ , periodickým bodem je tedy bod  $x_2$ . Grafické řešení je zobrazeno na Obr. 5.1.



Obr. 5.1: Grafické řešení rovnice (5.2) pro  $r = 3,8$

V případě  $p = 2$  orbitu jde o řešení rovnice (5.4), pro logistickou mapu (5.5).

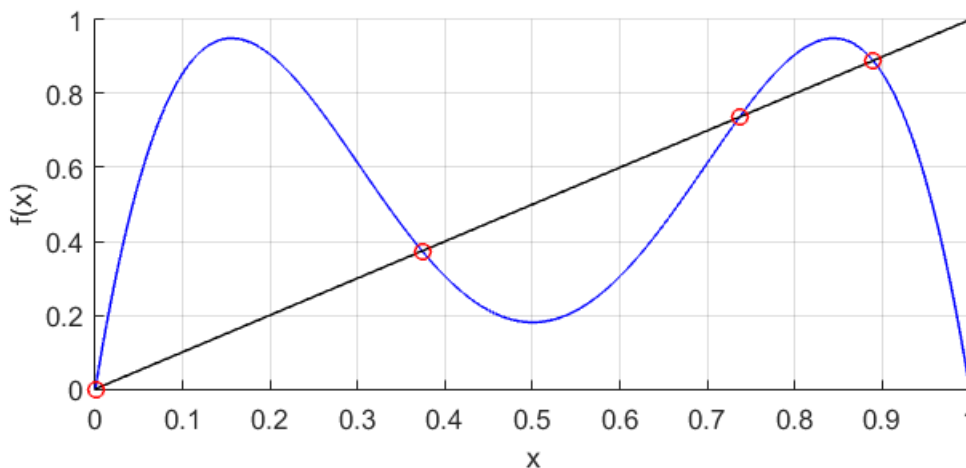
$$f_r^2(x) = f_r(f_r(x)) = x \quad (5.4)$$

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] = x \quad (5.5)$$

Rovnici (5.5) lze upravit na tvar (5.6). Je patrné, že jde o rovnici kvartickou (čtvrtého stupně).

$$x^4 - 2x^3 + \left(\frac{1}{r} + 1\right)x^2 - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\right)x = 0 \quad (5.6)$$

Tato rovnice má čtyři řešení a jsou to hodnoty  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{r-1}{r}$  za podmínky  $r > 1$ ,  $x_3 = \frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$  pro  $r > 3$  a  $x_4 = \frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$  také za podmínky  $r > 3$ . Vzhledem k faktu, že bod  $x_1$  je triviálním řešením a bod  $x_2$  řešením pro orbit s periodou 1, periodickými body budou body  $x_3$  a  $x_4$ . Grafické řešení rovnice (5.5) je zobrazeno na Obr. 5.2.



Obr. 5.2: Grafické řešení rovnice (5.5) pro  $r = 3,8$

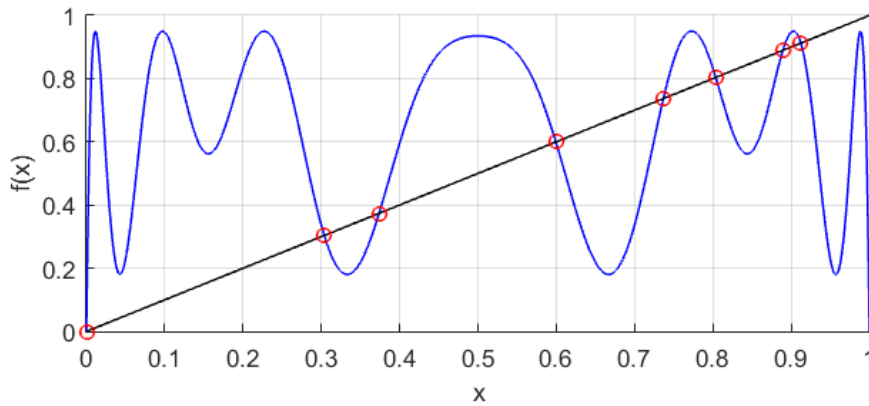
Pro orbit s periodou 4 se výpočet komplikuje. Periodické body jsou 4 reálná řešení rovnice (5.7).

$$f_r^4(x) = f_r\left(f_r\left(f_r\left(f_r(x)\right)\right)\right) = x \quad (5.7)$$

Po dosazení předpisu logistické mapy do (5.7) vyjde rovnice 16. stupně. Konkrétní dosazení, ani normovaný tvar nejsou uvedeny z důvodu nepřehlednosti. Nalézt všech 16 řešení rovnice analyticky není možné<sup>10</sup>. Proto byla rovnice řešena numericky, a také graficky. Grafické řešení se nachází na Obr. 5.3.

<sup>10</sup> Neexistenci algebraického řešení pro rovnice 5. a vyššího řádu popisuje Abel–Ruffini teorém [40]





Obr. 5.3: Grafické řešení rovnice (5.7) pro  $r = 3,8$

### 5.1.1 Nastavení stabilizačních metod

Logistická mapa byla na orbitech s periodou 1 a 2 stabilizována jak metodou TDAS, tak i její rozšířenou variantou ETDAS. Pro orbit s periodou 4 byla použita pouze metoda ETDAS. Cílem stabilizace bylo pomocí daných optimalizačních metod nalézt hodnotu váhových parametrů, pro které nabývá účelová funkce (4.3) minimální hodnoty. Pro metodu TDAS byla ke stabilizaci logistické mapy použita soustava rovnic (5.8) a pro metodu ETDAS soustava (5.9).

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= rx(1-x) + F_n \\ F_n &= K[x_{n-m} - x_n]\end{aligned}\tag{5.8}$$

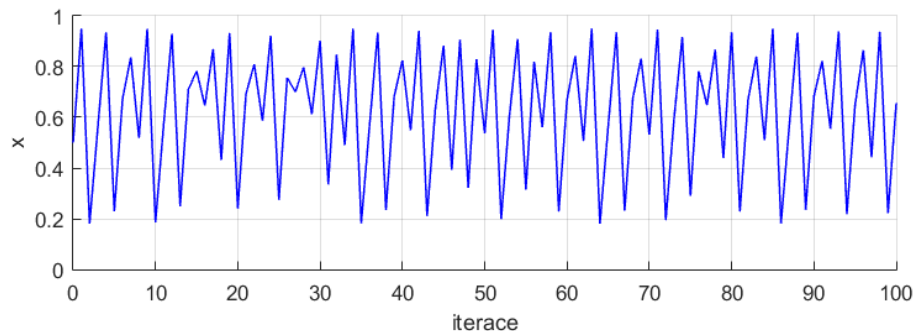
$K$  představuje optimalizovaný váhový parametr.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= P(x_n) + F_n \\ F_n &= K[(1-R)S_{n-m} - x_n] \\ S_n &= x_n + RS_{n-m}\end{aligned}\tag{5.9}$$

V tomto případě jsou optimalizované parametry  $K$  a  $R$ . Pro obě soustavy rovnic je  $m$  rovno periodě orbitu. Aby bylo možno posoudit kvalitu stabilizace, bylo nejdříve nutné zjistit, kde se nacházejí periodické body. Jejich poloha závisí na řídicím parametru  $r$ . Logistická mapa vykazuje chaotické chování pro hodnotu řídicího parametru  $r$  od 3,6 do 4, proto byla pro výpočet zvolena hodnota  $r = 3,8$ . Orbit s periodou 1 má právě jeden stabilní bod, který nabývá hodnoty 0,7386. Orbit s periodou 2 má dva periodické body, které nabývají hodnot 0,3737 a 0,8894. Orbit s periodou 4 byl stabilizován k bodům: 0,8218; 0,7639; 0,4845 a 0,3405.

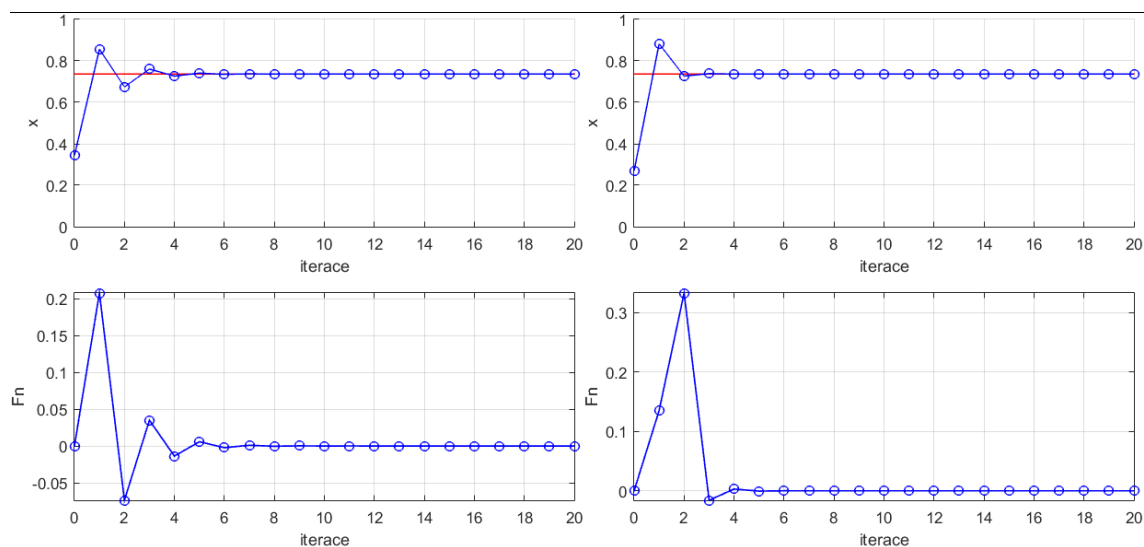
### 5.1.2 Výsledné průběhy

Nestabilní průběh logistické mapy pro počáteční bod  $x_0 = 0,5$  se nachází na Obr. 5.4. Hodnota proměnné  $x$  se po celou dobu pohybuje v intervalu  $(0, 1)$ .



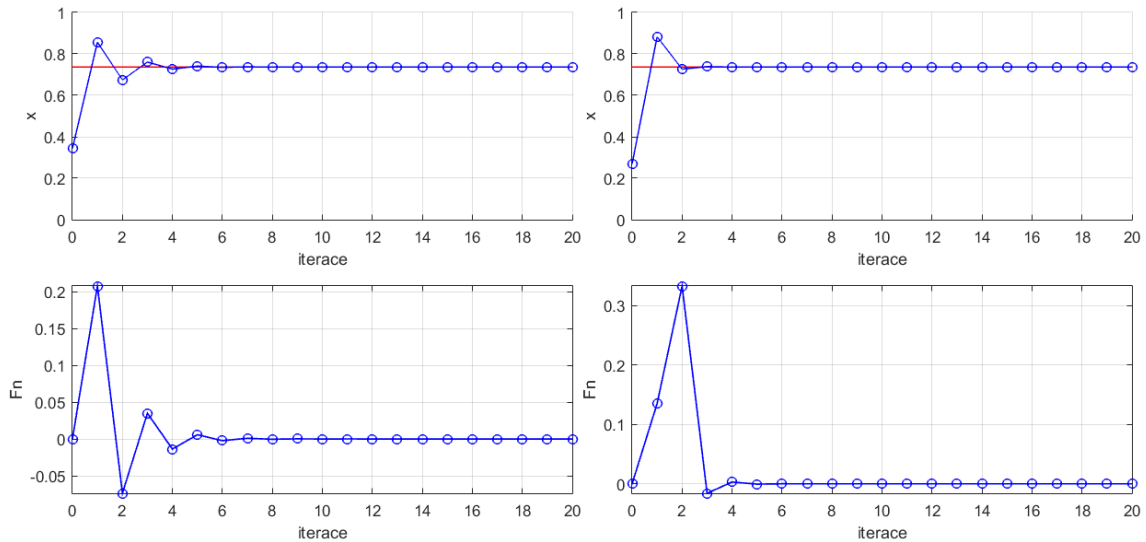
Obr. 5.4: Chaotický průběh logistické mapy

Stabilní průběhy s periodou 1 jsou vyobrazeny na Obr. 5.5. Jde o nejlepší výsledky, kterých bylo dosaženo oběma stabilizačními metodami optimalizovanými pomocí metody Nelder–Mead. Stabilizační metody bez problému našly řešení, přesto se vzájemně mírně liší. Metoda TDAS dosáhla plně stabilního chování po šesti iteracích, zatímco metoda ETDAS již po třech, tedy dvakrát rychleji.



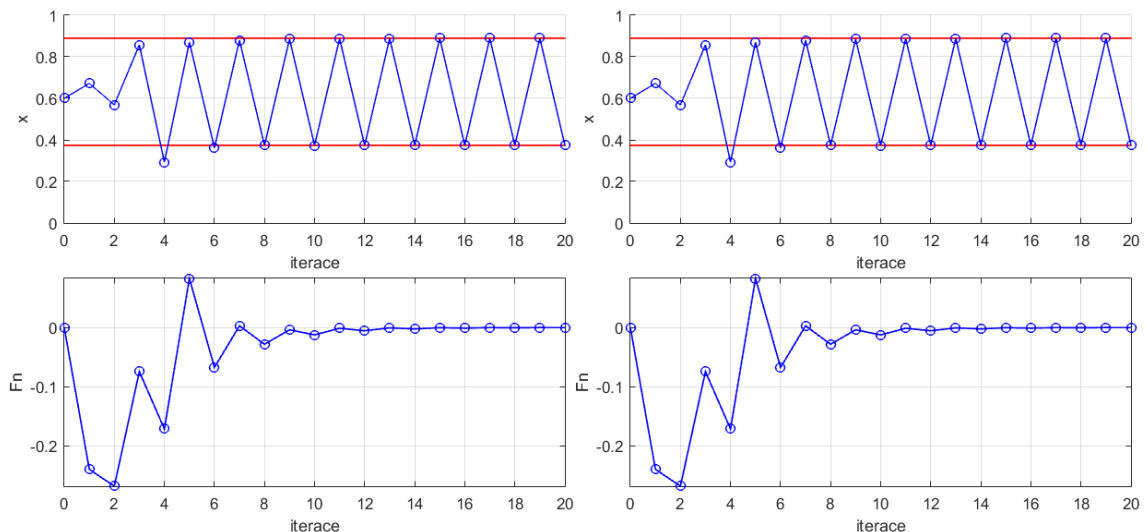
Obr. 5.5: Výsledky stabilizace logistické mapy na orbit s periodou 1 pomocí metod TDAS (vlevo) a ETDAS (vpravo) optimalizovaných metodou Nelder-Mead. Horní grafy zobrazují vývoj polohy, dolní grafy velikost zásahu v příslušném kroku. Červená čára představuje stabilní stav.

Pro srovnání účinnosti obou optimalizačních metod jsou na Obr. 5.6 vyobrazeny průběhy stabilizace stejné úlohy (logistická mapa stabilizovaná na orbit s periodou 1), tentokrát optimalizované pomocí genetického algoritmu.



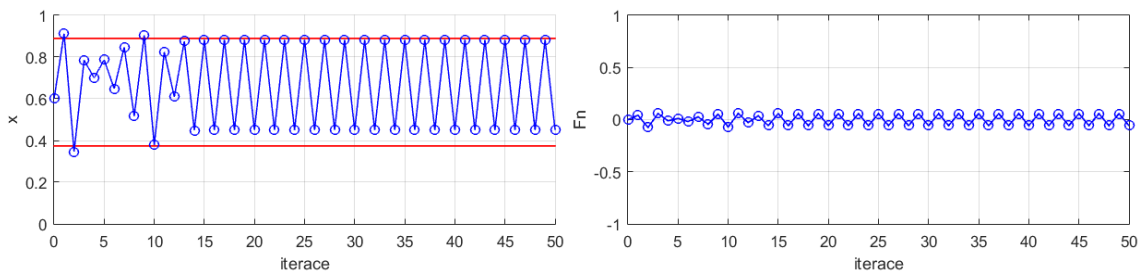
Obr. 5.6: Výsledky stabilizace logistické mapy na orbit s periodou 1 pomocí metod TDAS (vlevo) a ETDAS (vpravo) optimalizovaných genetickým algoritmem. Horní grafy zobrazují vývoj polohy, dolní grafy velikost zásahu v příslušném kroku. Červená čára představuje stabilní stav.

Přestože se průběhy na Obr. 5.5 a Obr. 5.6 mohou zdát totožné, ve skutečnosti tomu tak není. Ukázalo se, že při dostatečném počtu opakování (v řádech tisíců) dosahují oba optimalizační algoritmy prakticky totožných výsledků. Rozdíl hodnot, kterých nabývá účelová funkce pro oba použité optimalizační algoritmy činil v případě metody TDAS  $1.14 \times 10^{-5}\%$  a v případě metody ETDAS  $8.23 \times 10^{-5}\%$ . Tak malé rozdíly nelze v grafech pouhým okem rozlišit a jejich vliv na kvalitu stabilizace je zanedbatelný. Na Obr. 5.7 se nachází stabilní průběh s periodou 2, kterého bylo dosaženo pomocí metody ETDAS. Opět můžeme vidět, že metoda bez problému našla řešení, které dosáhne plně stabilního chování přibližně za dvanáct iterací. Opět je patrné, že mezi úspěšností optimalizačních metod nejsou viditelné rozdíly.



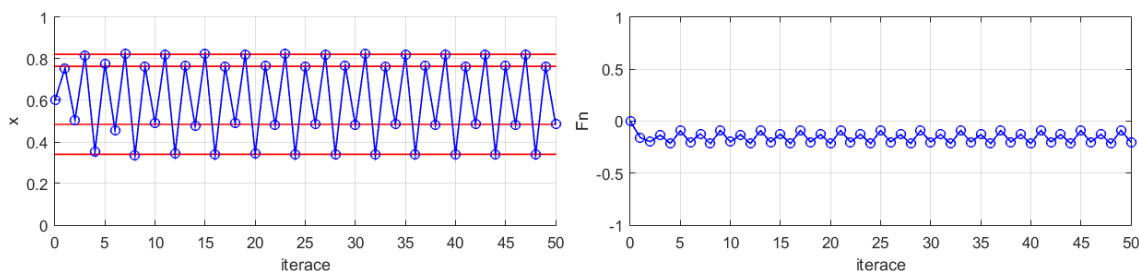
Obr. 5.7: Výsledky stabilizace logistické mapy na orbit s periodou 2 pomocí metody ETDAS optimalizované metodou Nelder-Mead (vlevo) a genetického algoritmu (vpravo). Horní grafy zobrazují vývoj polohy, dolní grafy velikost zásahu v příslušném kroku. Červené čáry představují stabilní stav.

Vzhledem k faktu, že optimalizační metody nacházejí řešení se vzájemnými rozdíly, které nelze rozeznat pouhým okem, bude nadále uváděn pouze jeden ze dvou prakticky identických průběhů. Obr. 5.8 zobrazuje výsledek stabilizace, kterého bylo dosaženo jednodušší, ale zato méně účinnou metodou TDAS. Tato metoda si se stabilizací k přesnému řešení nedokázala poradit. Na obrázku si však můžeme povšimnout, že metoda dokázala systém ustálit v orbitu velmi blízkém. K ustálení dochází po třinácti iteracích.



Obr. 5.8: Výsledky stabilizace logistické mapy na orbit s periodou 2 pomocí metody TDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý graf velikost zásahu v příslušném kroku.

Stabilizace na orbit s periodou 4 už byla příliš obtížnou úlohou, se kterou si metoda TDAS nedokázala poradit. Metoda ETDAS se stabilizací žádný problém neměla. Průběh stabilizace se nachází na Obr. 5.9.



Obr. 5.9: Výsledky stabilizace logistické mapy na orbit s periodou 4 pomocí metody TDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý graf velikost zásahu v příslušném kroku.

## 5.2 Stabilizace Hénonovy mapy

Chování Hénonovy mapy bylo popsáno v kap 2.2. Hénonova mapa byla stabilizována na orbitech s periodou 1, 2 a 4. Postup byl obdobný jako v případě stabilizace logistické mapy. Zásadní rozdíl spočívá v počtu dimenzí. Logistická mapa je jednorozměrný systém, Hénonova mapa je dvourozměrná. Pro jednotlivé případy bylo potřeba nejprve zjistit, kde se nacházejí konkrétní periodické body. V případě  $p - 1$  orbitu se jedná o řešení rovnice (5.10), která je obdobou rovnice (5.1).

$$f_{a,b}([x, y]) = [x, y] \quad (5.10)$$

Pro Hénonovu mapu jde konkrétně o řešení soustavy rovnic (5.11).

$$\begin{aligned} 1 - ax^2 + y &= x \\ bx &= y \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pomocí dosazení proměnné  $y$  z druhé rovnice do první a několika jednoduchých úprav lze soustavu rovnic (5.11) převést na tvar (5.12), ze kterého je patrné, že jde o kvadratickou rovnici v normovaném tvaru s koeficienty  $a = 1$ ,  $b = \frac{1-b}{a}$  a  $c = -\frac{1}{a}$ .

$$x^2 + \frac{1-b}{a}x - \frac{1}{a} = 0 \quad (5.12)$$

Rovnice (5.12) má dvě řešení a jsou to hodnoty  $x_{1,2} = \frac{b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}$  za podmínky  $a > 0$ . Pro klasickou Hénonovu mapu, kde  $a = 1,4$  a  $b = 0,3$  vychází jedno řešení záporné a druhé kladné. V rámci této práce byla Hénonova mapa na orbitu s periodou 1 stabilizována ke kladnému řešení rovnice (5.12), které odpovídá stabilnímu bodu.

Hledání periodických bodů orbitů s periodou 2 a 4 bylo znatelně náročnějším úkolem. Jednalo se o řešení soustav (5.13) a (5.14).

$$f_{a,b}^2([x, y]) = [x, y] \quad (5.13)$$

$$f_{a,b}^4([x, y]) = [x, y] \quad (5.14)$$

Tyto soustavy byly řešeny pouze numericky.

### 5.2.1 Nastavení stabilizačních metod

Hénonova mapa byla na orbit s periodou 1 stabilizována metodou TDAS i ETDAS. Pro orbity s periodou 2 a 4 byla použita pouze metoda ETDAS. Stejně jako v případě logistické mapy bylo cílem stabilizace nalézt hodnotu váhových parametrů, pro které nabývá účelová funkce (4.3) minimální hodnoty. Pro metodu TDAS byla ke stabilizaci Hénonovy mapy použita soustava rovnic (5.15) a pro metodu ETDAS soustava (5.16).

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n + F_n \\ y_{n+1} &= bx_n \\ F_n &= K[x_{n-m} - x_n] \end{aligned} \quad (5.15)$$

$K$  představuje optimalizovaný váhový parametr.

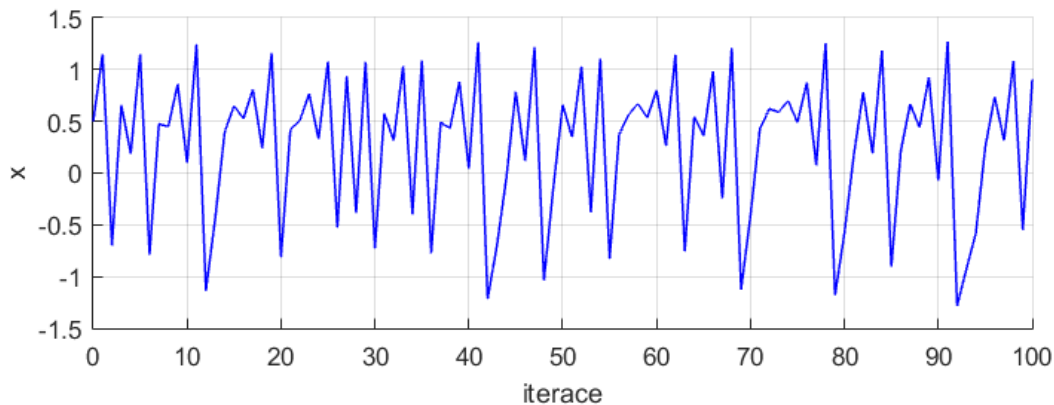
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n + F_n \\ y_{n+1} &= bx_n \\ F_n &= K[(1-R)S_{n-m} - x_n] \\ S_n &= x_n + RS_{n-m} \end{aligned} \quad (5.16)$$

V tomto případě jsou optimalizované parametry  $K$  a  $R$ . Pro obě soustavy rovnic je  $m$  rovno periodě orbitu. Aby bylo možno posoudit kvalitu stabilizace, bylo nejdříve nutné zjistit, kde se nacházejí periodické body. Jejich poloha závisí na řídicích parametrech  $a$ ,  $b$ .

Hénonova mapa vykazuje chaotické chování pro hodnotu parametrů  $a = 1,4$  a  $b = 0,3$ . Pro tyto hodnoty má orbit s periodou 1 má jeden stabilní bod, který nabývá hodnoty  $0,6314$ . Orbit s periodou 2 má dva periodické body, které nabývají hodnot  $0,9758$  a  $-0,4757$ . Orbit s periodou 4 byl stabilizován k bodům  $1,1250$ ;  $0,6382$ ;  $0,2177$  a  $-0,7067$ .

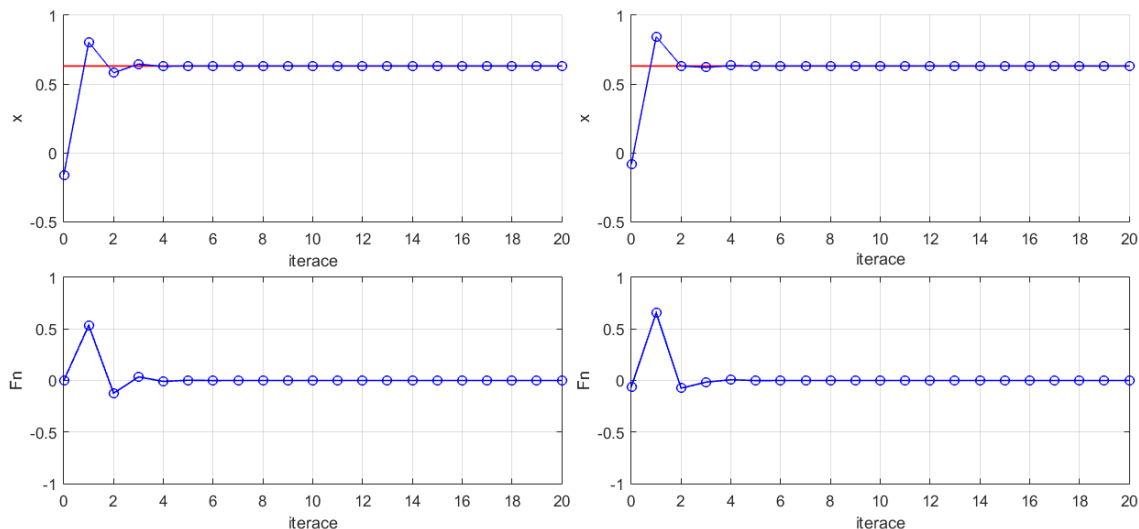
### 5.2.2 Výsledné průběhy

Nestabilní průběh Hénonovy mapy pro počáteční bod  $[x_0; y_0] = [0,5; 0,5]$  se nachází na Obr. 5.10. Hodnota proměnné  $x$  se po celou dobu pohybuje v intervalu  $(-1,5; 1,5)$ .



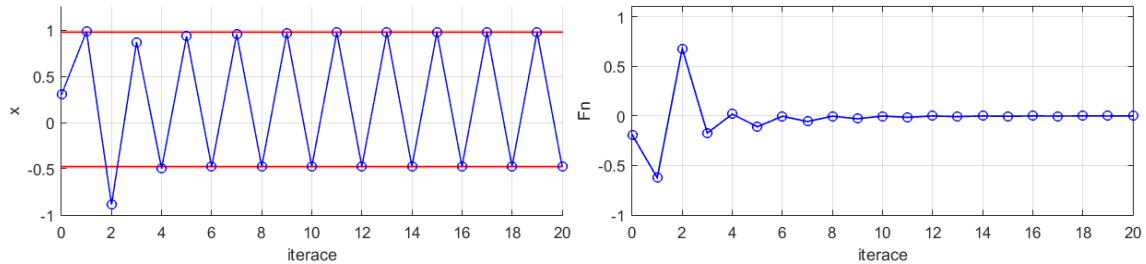
Obr. 5.10: Chaotický průběh Hénonovy mapy

Stabilní průběhy s periodou 1 jsou vyobrazeny na Obr. 5.11. Jde o nejlepší výsledky, kterých bylo dosaženo oběma metodami. Stabilizační metody bez problému našly řešení a podobně jako v případě logistické mapy se vzájemně nepatrně liší. Metoda TDAS dosáhla plně stabilního chování po čtyřech iteracích, zatímco metoda ETDAS již po dvou. Opět jde o výsledek dvakrát rychlejší.



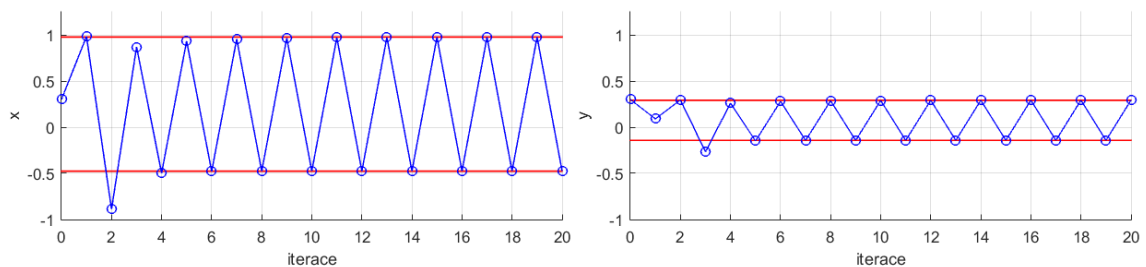
Obr. 5.11: Výsledky stabilizace Hénonovy mapy na orbit s periodou 1 pomocí metod TDAS (vlevo) a ETDAS (vpravo). Horní grafy zobrazují vývoj polohy, dolní grafy velikost zásahu v příslušném kroku.

Na Obr. 5.12 se nachází stabilní průběh s periodou 2, kterého bylo dosaženo pomocí metody ETDAS. Opět můžeme vidět, že metoda bez problému našla řešení, které dosáhne plně stabilního chování přibližně za osm iterací. Metoda TDAS ke stabilizaci na orbit s periodou 2 využita nebyla.



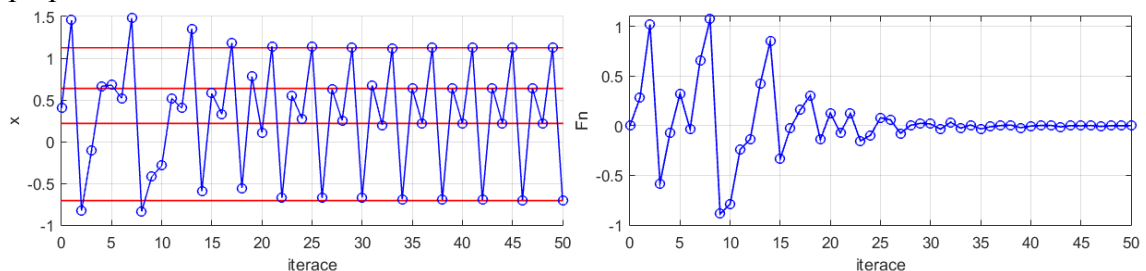
Obr. 5.12: Výsledky stabilizace Hénonovy mapy na orbit s periodou 2 pomocí metody ETDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý velikost zásahu v příslušném kroku.

Přestože má metoda dvě stavové proměnné, vývoj souřadnice  $y$  není nutné sledovat. Z předpisu (2.7) jasně plyne, že hodnota druhé stavové proměnné  $y$  odpovídá fázově posunutě hodnotě proměnné  $x$ , vynásobené konstantou  $b$  (v tomto případě 0,3). Pro představu je tato závislost znázorněna na Obr. 5.13.



Obr. 5.13: Závislost stavové proměnné  $y_n = 0,3x_{n-1}$  (pro průběh z Obr. 5.12)

Stabilizace na orbit s periodou 4 už byla velmi obtížnou úlohou. Přesto metoda ETDAS řešení našla. Průběh stabilizace se nachází na **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů..** Z brázku je patrné, že měla metoda zpočátku s ustálením systému problémy. Náznaky ustalování se začínají objevovat okolo patnácté iterace a k úplnému ustálení dochází až po pětatřiceti iteracích.



Obr. 5.14: Výsledky stabilizace Hénonovy mapy na orbit s periodou 4 pomocí metody ETDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý velikost zásahu v příslušném kroku.

### 5.3 Stabilizace Duffingovy mapy

Chování Duffingovy mapy bylo popsáno v kapitole 2.6. Duffingova mapa byla stabilizována na orbitech s periodou 1, 2 a 4. Postup byl obdobný jako v případě stabilizace Hénonovy mapy. Oproti Hénonově mapě se Duffingova mapa chová ještě chaotičtěji. Je to způsobeno přítomností kubického (Duffingova) členu v předpisu mapy. Hledání periodických bodů bylo velmi obtížným problémem. Jednalo se o řešení soustav (5.17), kde  $f_{a,b}([x, y])$  reprezentuje předpis Duffingovy mapy (2.15).

$$\begin{aligned} f_{a,b}([x, y]) &= [x, y] \\ f_{a,b}^2([x, y]) &= [x, y] \\ f_{a,b}^4([x, y]) &= [x, y] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Uvedené soustavy byly řešeny pouze numericky.

#### 5.3.1 Nastavení stabilizačních metod

Duffingova mapa byla ve všech případech stabilizována pouze metodou ETDAS. Stejně jako v případě modelových systémů bylo cílem stabilizace nalézt hodnotu váhových parametrů  $K$  a  $R$ , pro které nabývá účelová funkce (4.3) minimální hodnoty. Ke stabilizaci Duffingovy mapy byla použita soustava rovnic (5.18)

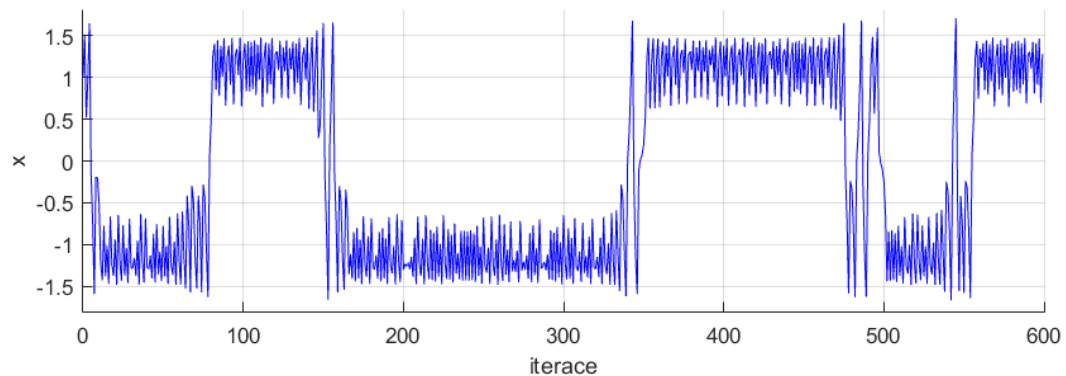
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + F_n \\ y_{n+1} &= -bx_n + ay_n - y_n^3 \\ F_n &= K[(1 - R)S_{n-m} - x_n] \\ S_n &= x_n + RS_{n-m} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pro obě soustavy rovnic je  $m$  rovno periodě orbitu. Aby bylo možno posoudit kvalitu stabilizace, bylo nejdříve nutné zjistit, kde se nacházejí periodické body. Jejich poloha závisí na řídicích parametrech  $a, b$ . Duffingova mapa vykazuje chaotické chování pro hodnotu parametrů  $a = 2,75$  a  $b = 0,2$ . Pro tyto hodnoty byl orbit s periodou 1 stabilizován k bodu 3,0124. Orbit s periodou 2 byl stabilizován k bodům 1,8999 a 2,1622. Orbit s periodou 4 byl stabilizován k bodům 1,5992; 1,6960; 1,9216 a 1,9962.



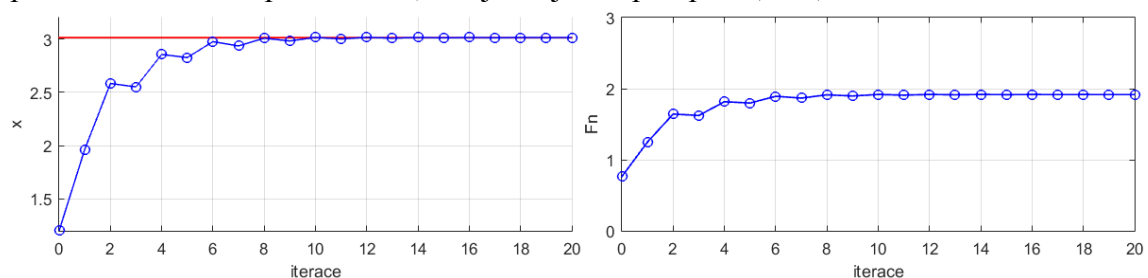
### 5.3.2 Výsledné průběhy

Nestabilní průběh Duffingovy mapy pro počáteční bod  $[x_0; y_0] = [1, 2; 1]$  se nachází na Obr. 5.15. Hodnota proměnné  $x$  se po celou dobu nestabilního pohybu nachází v intervalu  $(-2, 2)$ . Systém postupně „přeskakuje“ mezi dvěma různými stavy. Toto chování je charakteristické pro stavy v blízkosti dvojité potenciálové jámy<sup>11</sup>.



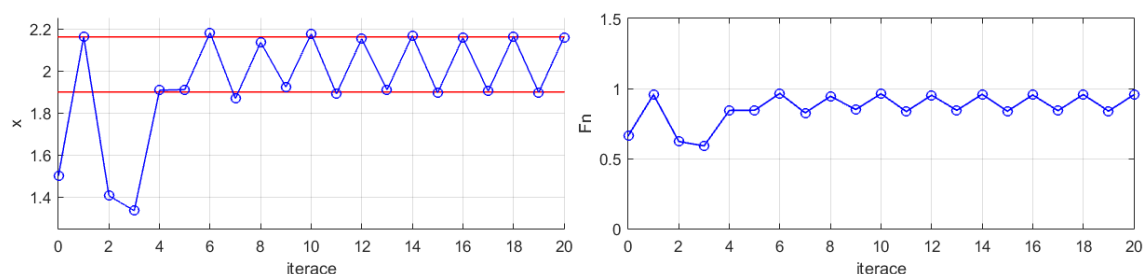
Obr. 5.15: Chaotický průběh Duffingovy mapy

Stabilní průběh s periodou 1, kterého bylo dosaženo pomocí metody ETDAS je vyobrazen na Obr. 5.16. Systém postupně konverguje k ustálenému stavu, kterého dosahuje přibližně za 10 iterací. Podobně jako v případě Hénonovy mapy není třeba u Duffingovy mapy sledovat průběh druhé stavové proměnné  $y$ , jelikož jde pouze o fázově posunutou hodnotu proměnné  $x$ , což je zřejmé z předpisu (2.15).



Obr. 5.16: Výsledky stabilizace Duffingovy mapy na orbit s periodou 1 pomocí metody ETDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý velikost zásahu v příslušném kroku.

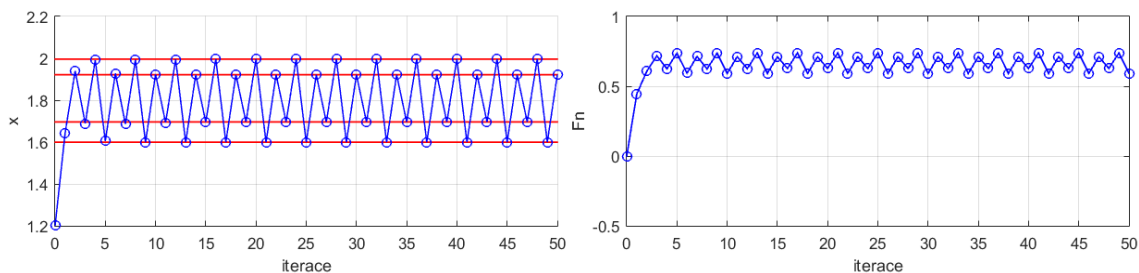
Na Obr. 5.17 se nachází stabilní průběh s periodou 2. Opět můžeme vidět, že metoda ETDAS bez problému našla řešení, které dosáhne plně stabilního chování okolo dvacáté iterace.



Obr. 5.17: Výsledky stabilizace Duffingovy mapy na orbit s periodou 2 pomocí metody ETDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý velikost zásahu v příslušném kroku.

<sup>11</sup> Potenciálovou jámou rozumíme určitou oblast obklopující lokální minimum potenciální energie.

Přestože byla stabilizace Duffingovy mapy na orbit s periodou 4 pomocí metody ETDAS z hlediska náročnosti výpočtu i celkového množství výpočtů ze všech uvedených případů nejnáročnější, dosáhla překvapivě dobrého výsledku. Průběh stabilizace se nachází na Obr. 5.18.



Obr. 5.18: Výsledky stabilizace Duffingovy mapy na orbit s periodou 4 pomocí metody ETDAS. Levý graf zobrazuje vývoj polohy, pravý velikost zásahu v příslušném kroku.

Na obrázku si můžeme povšimnout, že pro nalezené hodnoty  $K$  a  $R$ , systém prakticky okamžitě přechází ke stabilnímu průběhu. Úplné stability je dosaženo přibližně po deseti iteracích.

#### 5.4 Přehled nejlepších dosažených hodnot účelové funkce

Jednotlivé hodnoty účelové funkce (4.3), příslušných počátečních bodů a váhových parametrů stabilizačních metod pro stabilizaci na 100 iterací se nachází v tab. 1.

Systém	Perioda orbitu	Metoda	$x_0$	$y_0$	$K$	$R$	ITAE(100)
Logistická mapa	$p - 1$	TDAS	0,3432	-	0,4046	0	<b>1,0134</b>
		ETDAS	0,2692	-	0,5018	0,1870	<b>0,7988</b>
	$p - 2$	TDAS	0,6000	-	0,2022	0	<b>75,5739</b>
		ETDAS	0,6000	-	0,3999	0,3633	<b>2,1537</b>
	$p - 4$	ETDAS	0,6000	-	0,2625	0,9999	<b>3,2943</b>
Hénonova mapa	$p - 1$	TDAS	-0,1600	-0,1600	0,5544	0	<b>1,3674</b>
		ETDAS	-0,0850	-0,0850	0,7123	0,1178	<b>1,1977</b>
	$p - 2$	ETDAS	0,3000	0,3000	0,6349	0,3936	<b>3,6634</b>
	$p - 4$	ETDAS	0,4000	0,4000	0,7004	0,4996	<b>87,6157</b>
Duffingova mapa	$p - 1$	ETDAS	1,2000	1,2000	0,6363	0,9999	<b>10,6788</b>
	$p - 2$	ETDAS	1,5000	1,5000	0,4420	0,9999	<b>9,1772</b>
	$p - 4$	ETDAS	1,2000	1,2000	0,3700	0,9999	<b>1,2752</b>

Tab.1 Nejlepší dosažené hodnoty účelové funkce (4.3) a příslušné parametry

## 6 ZÁVĚR

Hlavním cílem této práce bylo seznámit se s vybranými metodami stabilizace deterministického chaosu a tyto metody poté aplikovat. Teoretická část práce odpovídá kapitolám 1–4 a praktická část je obsahem kapitoly 5. První kapitola byla věnována základním způsobům analýzy nelineárních dynamických systémů. Znalost uvedených pojmů je pro pochopení dané problematiky nezbytná. Následuje stručný přehled nejznámějších a nejčastěji studovaných chaotických systémů. Třetí kapitola byla věnována metodě zpožděné zpětné vazby a její rozšířené variantě. Obě tyto metody byly použity ke stabilizaci konkrétních chaotických systémů v kapitole 5. Výsledky obou stabilizačních metod závisí na správném nastavení řídicích parametrů. To bylo úkolem optimalizačních metod (genetického algoritmu a metody Nelder–Mead) popsanych v kapitole 4.

Praktická část se sestávala ze tří hlavních úloh (stabilizace logistické mapy, Hénonovy mapy a Duffingovy mapy) z nichž každá měla tři podúlohy (stabilizace na příslušný orbit s periodou 1, 2 a 4). Každá podúloha byla řešena dvěma metodami (TDAS a ETDAS) a každé řešení podúlohy bylo možno optimalizovat buď metodou Nelder–Mead nebo genetickým algoritmem. Dohromady tedy bylo řešeno 36 variant stabilizace a příslušné optimalizace.

Výsledky experimentů prokázaly, že pro dostatečně velké počty opakování výpočtů oba optimalizační přístupy (metoda Nelder–Mead a genetický algoritmus) produkují ekvivalentní řešení. Je třeba poznamenat, že metoda Nelder–Mead je metodou lokální optimalizace, přičemž v dané implementaci byla využita modifikace použitím diskrétní mřížky s ekvidistantním dělením. Pro parametry v intervalu (0, 1) byl interval dělen na 1000 dílků, čímž bylo dosaženo znatelně lepší schopnosti nalézt globální extrém.

Kvalita stabilizace byla hodnocena diskrétní variantou kritéria ITAE. Toto kritérium se však ukázalo jako nedostatečné pro ohodnocení stabilizace orbitů vyšších period, proto byla navržena a implementována modifikace, která nedostatky odstranila.

Navíc bylo také experimentálně potvrzeno, že metoda TDAS si se stabilizací orbitů vyšších period nedokáže efektivně poradit. Tím došlo k redukci počtu variant stabilizačních problémů na 12. Úspěšně ustálit se podařilo všechny testované systémy. Kvalitu stabilizace je možné vyjádřit pomocí navržené modifikované diskrétní varianty integrálního kritéria ITAE. Hodnoty, kterých nabývá toto kritérium pro všech 12 stabilizačních problémů jsou uvedeny v tabulce na konci kapitoly 5.



## 7 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] B. Van der Pol a J. Van der Mark, „Frequency demultiplication,“ *Nature*, 1927.
- [2] C. Kratochvíl a P. Heriban, *Dynamické systémy a chaos*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010.
- [3] I. Švarc, R. Matoušek, M. Šeda a M. Vítěčková, *Automatické řízení*, Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011.
- [4] A. M. Ljapunov, *The general problem of the stability of motion*, Kharkov: University of Kharkov, 1892.
- [5] R. M. Murray, Z. Li a S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1993.
- [6] O. E. Rössler, „An equation for hyperchaos,“ *Physics Letters A*, 1979.
- [7] B. Mandelbrot, *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension*, 1975.
- [8] M. Gardner, „Mathematical Games,“ *Scientific American*, 1967.
- [9] P. F. Verhulst, „A Note on the Law of Population Growth,“ *Correspondance Mathématique et Physique*, 1838.
- [10] R. M. May, „Simple mathematical models with very complicated dynamics,“ *Nature*, 1976.
- [11] M. Feigenbaum, „The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations,“ *Journal of Statistical Physics*, 1979.
- [12] O. Lanford, „A Computer-Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures.,“ *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1982.
- [13] H. Epstein, „New proofs of the existence of the Feigenbaum functions,“ *Communications in Mathematical Physics*, pp. 395-426, 1986.
- [14] S. Steven, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books Publishing, 1994.
- [15] M. Hénon, „A two-dimensional mapping with a strange attractor,“ *Communications in Mathematical Physics*, 1976.
- [16] R. Senkerik, Z. Oplatkova a I. Zelinka, „Investigation on Evolutionary Chaos Controller Synthesis for Hénon Map Stabilization,“ *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 2011.
- [17] R. Lozi, „Un attracteur étrange (?) du type attracteur de Hénon,“ *Journal of Physics*, 1978.
- [18] E. N. Lorenz, „Deterministic nonperiodic flow,“ *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963.
- [19] M. W. Hirsch, S. Smale a R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, & An Introduction to Chaos*, Boston: Academic Press, 2003.

- [20] S. Smale, „Mathematical Problems for the Next Century,“ *Mathematical Intelligencer*, 1998.
- [21] W. Tucker, „A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem,“ *Foundations of Computational Mathematics*, 2002.
- [22] D. Poland, „Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations,“ *Physica D*, 1993.
- [23] K. M. Cuomo a A. V. Oppenheim, „Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications,“ *Physical Review Letters*, 1993.
- [24] H. Haken, „Analogy between higher instabilities in fluids and lasers,“ *Physics Letters A*, 1975.
- [25] N. Hemati, „Strange attractors in brushless DC motors,“ *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1994.
- [26] E. Knobloch, „Chaos in the segmented disc dynamo,“ *Physics Letters A*, 1981.
- [27] S. Tzenov, „Strange Attractors Characterizing the Osmotic Instability,“ 2014. [Online]. Available: arXiv:1406.0979 [physics.flu-dyn].
- [28] O. E. RöSSLer, „An Equation for Continuous Chaos,“ *Physics Letters*, 1976.
- [29] J. Shinn, „Chemical Kinetics and the RöSSLer System,“ *Dynamics at the Horsetooth*, 2010.
- [30] G. Duffing, „Forced oscillations with variable natural frequency and their technical relevance,“ *Sammlung Vieweg*, 1918.
- [31] T. Kanamaru, „Scholarpedia,“ 2008. [Online]. Available: [http://scholarpedia.org/article/Duffing\\_oscillator](http://scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator). [Přístup získán 4 5 2017].
- [32] M. Brennan, I. Kovacic, A. Carrella a T. Waters, „On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator,“ *Journal of Sound and Vibration*, 2008.
- [33] A. Ibraheem a N. Kumar, „Attractors of Duffing Map: Application of DLI and 0-1 Test,“ *International Journal of Engineering and Innovative Technology*, 2015.
- [34] K. Pyragas, „Continuous control of chaos by self-controlling feedback,“ *Physics Letters A*, 1992.
- [35] I. Zelinka, R. Senkerik a E. Navratil, „Optimization of Chaos Control by Means of Evolutionary Algorithms,“ v *DEXA 2007 : 18th International Conference on Database and Expert Systems Applications*, 2007.
- [36] E. Socolar, D. Sukow a D. Gauthier, „Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems,“ *Physical Review E*, 1994.
- [37] K. Pyragas, „Control of chaos via extended delay feedback,“ *Physics Letters A*, 1995.
- [38] R. Matousek, L. Dobrovsky, P. Minar a K. Muralova, „A Note about Robust Stabilization of Chaotic Hénon System using Grammatical Evolution,“ v

- Nostradamus 2014: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 289. Springer, Cham, 2014.*
- [39] J. A. Nelder a R. Mead, „A simplex method for function minimization,“ *Computer Journal*, 1965.
- [40] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright a P. E. Wright, „Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,“ *SIAM Journal of Optimization*, 1998.
- [41] L. Čermák a R. Hlavička, „Optimalizace,“ 2006. [Online]. Available: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/UploadedFiles/246.pdf>. [Přístup získán 7 3 2017].
- [42] A. Lipowski a D. Lipowska, „Roulette-wheel selection via stochastic acceptance,“ 2011. [Online]. Available: arXiv:1109.3627.
- [43] J. Hynek, *Genetické algoritmy a genetické programování*, Grada Publishing a.s., 2008.
- [44] N. H. Abel, „Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré,“ *Mémorial encyclopédique et progressif des connaissances humaines, ou annales des sciences, lettres et beaux-arts*, 1824.
- [45] R. Brooks a J. Matelski, Collars in Kleinian groups, *Duke Mathematical Journal*, 1982.





## **8 SEZNAM PŘÍLOH**

Příloha A – Účelová funkce pro stabilizaci Hénonovy mapy na p-2 orbit.

Příloha B – Optimalizace parametrů stabilizační metody ETDAS.

Příloha C – Vykreslení stabilního průběhu.



# PŘÍLOHA A – ÚČELOVÁ FUNKCE PRO STABILIZACI HÉNONOVY MAPY NA P-2 ORBIT

% princip popsán v kap. 4.1

```
function ITAE = ITAE_Henon_P2_ETDAS(K, R, x0, y0, a, b)
current_x = x0; % initial conditions x0, y0
current_y = y0;
last_S = 0;
second_to_last_S = 0;
errUD = 0; % error relative to the first trajectory
errDU = 0; % error relative to the second trajectory
UB = 0.9758; % upper periodic point
LB = -0.4757; % lower periodic point

for i = 1:100 % for all iterations
    SN = current_x + R * second_to_last_S;
    FN = K * ((1 - R) * second_to_last_S - current_x);
    new_x = 1 - a * current_x^2 + current_y + FN;
    new_y = b * current_x;

    if mod(i, 2) == 0 % increasing appropriate penalization
        errUD = errUD + abs(current_x - UB)*i;
        errDU = errDU + abs(current_x - LB)*i;
    else
        errUD = errUD + abs(current_x - LB)*i;
        errDU = errDU + abs(current_x - UB)*i;
    end

    second_to_last_S = last_S;
    last_S = SN;
    current_x = new_x;
    current_y = new_y;
end

if errUD <= errDU
    ITAE = errUD;
else
    ITAE = errDU;
end
end
```

## PŘÍLOHA B – OPTIMALIZACE PARAMETRŮ STABILIZAČNÍ METODY ETDAS

```

% Optimizing the value of [K, R]
% using the Nelder-Mead method

starting_x = 0.30; % initial conditions
starting_y = 0.30;
a = 1.4; % bifurcation parameters
b = 0.3;
K_points = 201; % no. of different K parameters
R_points = 201; % no. of different R parameters
starting_K = linspace(-1, 1, K_points);
starting_R = linspace(-1, 1, R_points);
ITAEvalues = zeros(K_points, R_points) + 10000;
Kvals = zeros(K_points, R_points) + 10000;
Rvals = zeros(K_points, R_points) + 10000;
WB = waitbar(0, 'Progress');

for i = 1:K_points
    for j = 1:R_points
        [K_R, ITAE] = fminsearch(@(k) ...
            ITAE_Henon_P2_ETDAS(k(1), k(2), ...
            starting_x, starting_y, a, b), ...
            [starting_K(i), starting_R(j)]);
        if ITAE < ITAEvalues(i, j)
            ITAEvalues(i, j) = ITAE;
            Kvals(i, j) = K_R(1);
            Rvals(i, j) = K_R(2);
        end
    end
    waitbar(i/K_points, WB)
end

lowITAE = 1000;
for i = 1:K_points
    for j = 1:R_points
        if (ITAEvalues(i, j) < lowITAE)
            lowITAE = ITAEvalues(i, j);
            I = i;
            J = j;
        end
    end
end
close(WB);

[K_R, ITAE] = fminsearch(@(k) ...
    ITAE_Henon_P2_ETDAS(k(1), k(2), ...
    starting_x, starting_y, a, b), ...
    [starting_K(I), starting_R(J)])

```

## PŘÍLOHA C – VYKRESLENÍ STABILNÍHO PRŮBĚHU

```
iterations = 100;    % number of iterations
current_x = 0.30;   % initial condition x0
current_y = 0.30;   % initial condition y0
a = 1.4;           % bifurcation parameter a
b = 0.3;           % bifurcation parameter b
UB = 0.9758;       % upper periodic point
LB = -0.4757;      % lower periodic point
K = 0.634902;
R = 0.393686;

last_x = current_x;
last_S = 0;
second_to_last_S = 0;

results = zeros(iterations, 2);
results(1, 1) = current_x;
results(1, 2) = 0;

for i = 1:iterations + 1
    SN = current_x + R * second_to_last_S;
    FN = K * ((1 - R) * second_to_last_S - current_x);
    new_x = 1 - a * current_x^2 + current_y + FN;
    new_y = b * current_x;

    results(i, 1) = current_x;
    results(i, 2) = i - 1;

    second_to_last_S = last_S;
    last_S = SN;
    current_x = new_x;
    current_y = new_y;
end

axis([0 50 -1 1.25]);
plot(get(gca, 'xlim'), [UB UB], 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(get(gca, 'xlim'), [LB LB], 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(results(:, 2), results(:, 1), 'bo-', 'LineWidth', 1)
grid on
xlabel('iteration')
ylabel('x')
```