



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky

Diplomová práce

# Skládání papíru jako pomůcka ve výuce matematiky

Vypracovala: Bc. Nikol Schinková  
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2018

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Skládání papíru jako pomůcka ve výuce matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25. 4. 2018

.....

## **Poděkování**

Chtěla bych poděkovat vedoucímu své diplomové práce, prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc, za trpělivost, ochotu a cenné rady, které mi pomohly při psaní této práce.

## **Anotace**

Ve své diplomové práci se zabývám využitím origami ve výuce matematiky. V prvních kapitolách uvádím stručnou historii a základní druhy přehybů (Huzita axiomy). V druhé části práce představuji tři kapitoly konstrukcí skládání s pracovními listy různé obtížnosti. V samostatných kapitolách se věnuji kuželosečkám a průměrům v lichoběžníku. V posledních kapitolách práce se věnuji Yoshimura, Miura a modulárním druhům skládání, které se využívají v architektuře, bytovém designu i v astronautice.

## **Annotation**

In my thesis I am dealing with the usage of origami at teaching mathematics. In the first chapters I mention a brief history and kinds of creases such as Huzita axioms etc. In the second part I introduce three chapters concerning folding of structures supported by work-sheets at different difficulty levels. The content of these chapters comprises of conic sections and diameters of trapezoids. The last chapters of the thesis are focused on three kinds of folding: Yoshimura, Miura and modular, which are also used in architecture, house design and astronautics.

# Obsah

1	Úvod.....	5
2	Historie origami.....	6
2.1	Počátky origami.....	6
2.2	Druhy skládanek.....	7
3	Základní konstrukce skládání.....	8
3.1	Huzita-Justin axiomy.....	8
3.2	Sedm nebo jeden.....	11
4	Kuželosečky.....	12
4.1	Parabola.....	12
4.2	Elipsa.....	13
4.3	Hyperbola.....	15
4.4	Využití ve výuce.....	17
5	Průměry v lichoběžníku.....	24
5.1.1	Aritmetický průměr.....	26
5.1.2	Geometrický průměr.....	27
5.1.3	Harmonický průměr.....	29
5.1.4	Kvadratický průměr.....	30
6	Základní konstrukce využitelné na ZŠ.....	32
6.1	Základní geometrické útvary.....	32
6.1.1	Trojúhelníky.....	35
6.2	Algebraické vzorce.....	44
7	Yoshimura a Miura Ori vzory.....	46
7.1	Yoshimura konstrukce.....	46
7.1.1	Postup konstrukce.....	47

7.2	Miura Ori.....	51
8	Modulární origami .....	53
9	Závěr.....	55
	Literatura.....	56
	Seznam obrázků.....	59

# 1 Úvod

Téma své diplomové práce *Skládání papíru jako pomůcka ve výuce matematiky* jsem si vybrala, jelikož bych chtěla touto cestou ukázat, jak můžeme využít origami ke zpestření hodiny matematiky. Origami má široké využití napříč různými obory, já se ve své práci zaměřím na geometrii. Geometrie je u žáků obecně neoblíbenou částí matematiky, tak proč jí neudělat zábavnější? Pomůcka, která nám složením papíru vznikne, může sloužit jako názorný model, s kterým se dobře manipuluje a lze ho přizpůsobit aktuální situaci. Proto chci představit konstrukce, které jsou využitelné na základních i středních školách.

Výstupem origami je nejen model geometrického útvaru či znázornění problému, ale i rozvíjení klíčových kompetencí během jejich konstrukce (např. kompetence k učení, k řešení problémů, pracovní, ...). Žáci pracují pomocí postupu, vytvářejí model a následně řeší otázky ke konstrukci. Každý samostatně vymýšlí cestu k řešení a k důkazu (Bělecký, 2007). Zároveň rozvíjí nejen prostorovou představivost, tvořivé myšlení, přesnost, pečlivost a trpělivost (Koutecká, 2012), ale i jemnou motoriku.

V první kapitole představím historii skládání, kterou by bylo vhodné zmínit při úvodní hodině origami. V další kapitole uvádím základní přehyby definované pomocí Huzita axiomů. Následuje soubor konstrukcí s pracovními listy, ve kterém se samostatně věnuji kuželosečkám, jejich znázornění na papíru s otázkami, a průměrům v lichoběžníku. Poslední dvě kapitoly představují 3D konstrukce, jež jsou využívány v praxi, Yoshimura, Miura a modulární skládání.

Vlastní obrázky jsou vytvářené v programu GeoGebra, u převzatých uvádím zdroj v poznámce pod čarou.

## 2 Historie origami

Origami, též paper folding či papiroflexia, je název pro umění skládání papíru. Označení vzniklo roku 1880 spojením dvou japonských slov „oru“ a „kami“(skládání papíru). Pojem se rozšířil do celého světa a je dnes běžně používán téměř po celém světě. Výjimkou je např. Španělsko, ve kterém se toto umění pravděpodobně vyvíjelo nezávisle na Japonsku, a proto pro něj používají jiný název, „papiroflexia“. (Pupík, 2008)

### 2.1 Počátky origami

Jaké by bylo skládání papíru bez papíru? Nemožné, proto se nejprve podíváme na počátky výroby papíru. Málokdo ví, že už ve 3. tisíciletí př. n. l. byl v Číně papír vyráběn, měl odlišné složení než náš běžný, a to z konopí setého (*Cannabis sativa*). V 1. století př. n. l. se vyráběl ze zbytků hedvábných a lněných hadrů a kolem roku 105 n. l. vyrobili Číňané svůj první tradiční papír, jak ho známe dnes. Byl to pro ně i pro celý svět významný objev, a tak se snažili utajit jeho postup výroby. Dlouho se jim to dařilo, ale postupem času se tajemství výroby přes korejský poloostrov dostalo v 6. století do Japonska. Do arabského světa (751 n. l.) se dostalo tajemství výroby papíru z Číny a následně se rozšířilo po Evropě. (Štorková, 2007)

Papír byl drahou komoditou, která měla materiální i náboženskou hodnotu. První vytvořené papírové skládanky byly využívány k náboženským účelům, k výzdobě šintoistických<sup>1</sup> svatyní a při obřadních činnostech. (Hatori, 2010)

V Japonsku se dědily tradiční postupy skládání z generace na generaci, pro každou rodinu představovaly důležité rodinné dědictví, předávané pouze ústně. Nejstarší dochovaný dokument, ve kterém je zmínka o origami, je báseň z roku 1680 od Ihara Saikaku. Tato báseň popisuje poletující papírové motýlky, symbol nevěsty a ženicha během svatebních ceremonií původního japonského náboženství Šintó. (Hatori, 2010)

---

<sup>1</sup> šintó = tradiční japonské náboženství, uctívá se v něm bohyně Slunce, ale i jiní bohové, pohádkové bytosti a zvířata



Od 17. století se začalo skládat pro zábavu a byly sepsány první soubory postupů. V roce 1797 Akisato Rito publikoval knihu "Sembazuru Orikata", což doslovně znamená tisíc jeřábů, ovšem v té době to znamenalo desítky spojených Orizurů složených z jednoho listu papíru. Jeřáb byl a je nejznámější skládankou, která symbolizuje dlouhý život, mír a plnění snů. (Wu, 2016)

Jako je u nás znám příběh Anny Frankové, v Japonku je Sadako Sasaki. Japonská holčička Sadako Sasaki ve svých 2 letech přežila svržení atomové bomby na Hirošimu dne 6. srpna 1945. Bohužel u ní, 9 let po katastrofě, lékaři diagnostikovali leukémii, v důsledku silného ozáření. Sadako se doslechla o legendě, která se váže ke skládání jeřábů: ten, kdo složí 1000 jeřábů, splní se mu jeho přání. Během 14 měsíců v nemocnici skládala a podle jedné verze složila 1300 orizurů, podle druhé 644 a její přátelé jí doskládali ostatní. Boj s leukémií bohužel i tak prohrála, ale její příběh se stal symbolem útoku na Hirošimu. Roku 1958 byla postavena socha Sadako držící zlatého jeřába, tento památník je umístěn v Parku Míru v Hirošimě a každoročně se shromáždí desítky skládanek za účelem uctění obětí. (Coerr, Himler, 1999)

## 2.2 Druhy skládanek

První skládanky jsou označovány jako denšó<sup>2</sup> origami, využívá se jeden papír a jeho přehyby, jiné zásahy jsou zakázány. Tyto skládanky představují zjednodušené předměty, symboly či zvířata, které popisují přesně dané postupy.

Sósako<sup>3</sup> origami nemají pevné hranice, záleží jen na kreativitě. Velmi známé je modulární origami, kde se z jednotlivých komponentů složí celek. Mohou se využívat nůžky, lepidlo, pastelky, různé druhy papíru a vytvořit pomocí nich, co nejméně podobný model. Tímto způsobem můžeme sestavit i geometrická tělesa a jiné geometrické útvary. (Schinová, 2016), (Hatori, 2010)

---

<sup>2</sup> denšó origami = tradiční origami

<sup>3</sup> sósako origami = moderní origami

### 3 Základní konstrukce skládání

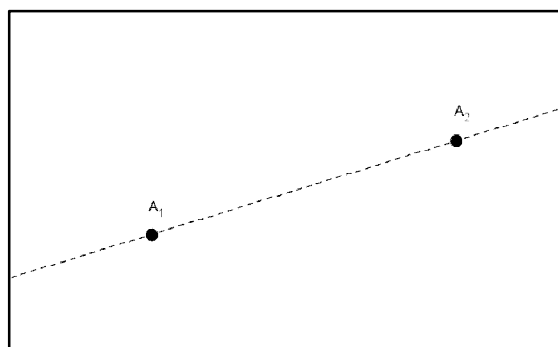
Než se podíváme na různé konstrukce pomocí skládání papíru, je důležité definovat základní možnosti skládání. Postupy jsou většinou uváděné obrázkem konstrukce s šipkami či písemně, pro jednoznačnost je ideální jejich kombinace. Základními možnostmi je přikládání bodu na bod, bodu na přímku, přímky na přímku a jejich kombinace.

Humiaki Huzita byl první matematik, který definoval skládání origami pomocí axiomů. Základní konstrukce představil světu v roce 1898 a vydal článek „*Understanding geometry through origami axioms*“, ve kterém uvedl právě šest axiomů, neboli Huzita axiomů. Následně bylo 6 axiomů doplněno o 7., a to francouzským matematikem F. J. Justinem. Soubor axiomů byl následně zkoumán, zda je kompletní, obsahuje-li všechny možnosti přehybů bodů a přímek. Tuto úplnost dokázal až Robert J. Lang. (Lang, 2003)

#### 3.1 Huzita-Justin axiomy

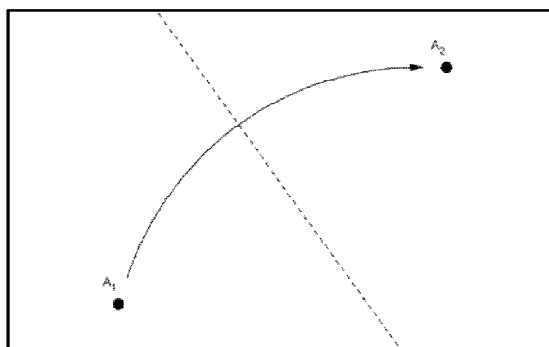
Podle publikace Roberta J. Langa: *Origami and Geometric Construction* uvedu znění axiomů. (Lang, 2003, s. 40-43)

(01) Máme-li dány body  $A_1$  a  $A_2$ , můžeme vytvořit přehyb, který jimi prochází (obr. 3.1.).



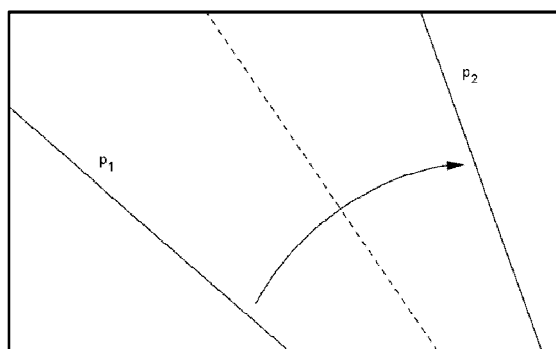
Obrázek 3.1: Axiom 1

(02) Máme-li dány dva body  $A_1$  a  $A_2$ , můžeme vytvořit přehyb bodu  $A_1$  na bod  $A_2$  (obr. 3.2.).



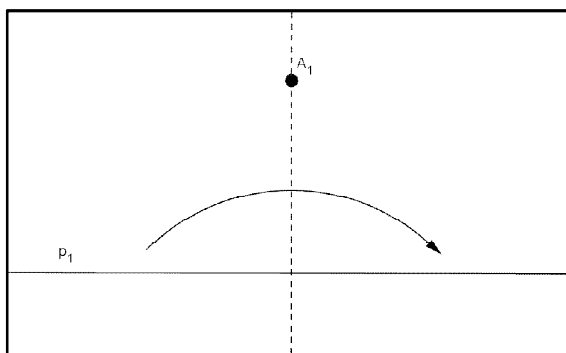
Obrázek 3.2: Axiom 2

(03) Máme-li dány dvě přímky  $p_1$  a  $p_2$ , můžeme vytvořit přehyb přímky  $p_1$  na přímku  $p_2$  (obr. 3.3.).



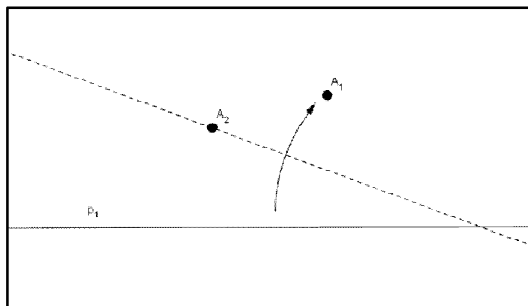
Obrázek 3.3: Axiom 3

(04) Máme-li dán bod  $A_1$  a přímku  $p_1$ , můžeme vytvořit přehyb kolmý na  $p_1$ , procházející bodem  $A_1$  (obr. 3.4.).



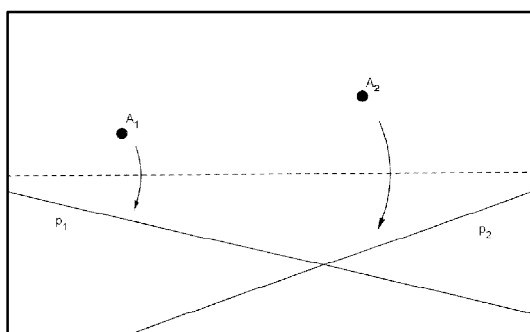
Obrázek 3.4: Axiom 4

(05) Máme-li dány body  $A_1$ ,  $A_2$  a přímku  $p_1$ , můžeme vytvořit přehyb bodu  $A_1$  na přímku  $p_1$  takový, aby procházel bodem  $A_2$  (obr. 3.5.).



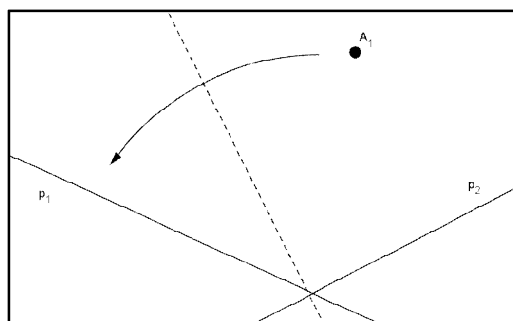
Obrázek 3.5: Axiom 5

(06) Máme-li dány body  $A_1$ ,  $A_2$  a přímky  $p_1$ ,  $p_2$ , můžeme vytvořit přehyb bodu  $A_1$  na přímku  $p_1$  a zároveň bodu  $A_2$  na přímku  $p_2$  (obr. 3.6.).



Obrázek 3.6: Axiom 6

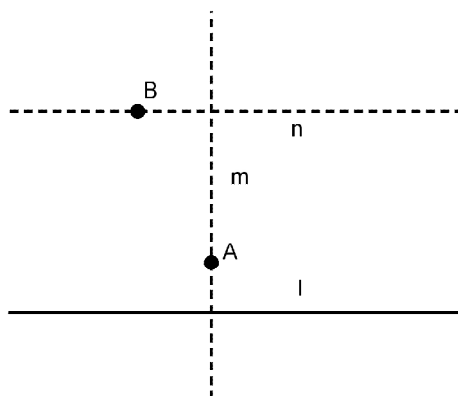
(07) Máme-li dán bod  $A_1$  a přímky  $p_1$ ,  $p_2$ , můžeme vytvořit přehyb bodu  $A_1$  na přímku  $p_1$ , který bude zároveň kolmý na přímku  $p_2$  (obr. 3.7.).



Obrázek 3.7: Axiom 7

## 3.2 Sedm nebo jeden

První tři axiomy ((01),(02),(03)) představují jednoduchou geometrickou konstrukci. (01) umožňuje proložit přímkou dvěma body, (02) je konstrukce osy úsečky dané dvěma body a (03) je konstrukce osy úhlu daného dvojicí přímek. Přehybem (04) získáme kolmici  $m$  k dané přímce  $l$ , která prochází daným bodem  $A$ . Když zopakujeme (04) tak, že danou přímkou bude kolmý přehyb  $m$  a bod  $B$  bude daný bod, získáme rovnoběžný přehyb  $n$  s původní přímkou  $l$  (obr. 3.8.). Přehyb (05) je tečnou paraboly dané ohniskem  $A_1$  a řídicí přímkou  $p_1$ . (06) je klíčový axiom, který přesahuje Euklidovskou konstrukci a představuje tečnu k dvěma parabolám (Geretschlager, 1995). Dále ho můžeme využít k řešení Klasických antických problémů (duplikace krychle, trisekce úhlu, kvadratura kruhu), které jsou pomocí pravítka a kružítka neřešitelné. (07) je kombinací předešlých axiomů a představuje tečnu k parabole, která je kolmá na druhou přímkou.



Obrázek 3.8: Kolmý přehyb

Otázkou ovšem je, zda potřebujeme všech sedm axiomů. Touto myšlenkou se zabýval Fadoua Ghourabi, Asem Kasem, a Cezary Kaliszyk ve článku *Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extension* (Ghourabi, Kasem, Kaliszyk, 2012, s. 143-160), kde společně provedli podrobnou analýzu. Výstupem je, že stačí pouze jeden z axiomů, a to (06).

## 4 Kuželosečky

Kuželosečky jsou rovinné útvary, křivky, které vzniknou průnikem roviny s rotačním kuželem, kdy rovina řezu neprochází vrcholem kuželu. Průnikem mohou vzniknout tyto křivky: kružnice, elipsa, hyperbola a parabola.

Pomocí euklidovské konstrukce můžeme narýsovat kuželosečky mnoha způsoby. Dále se budu ovšem zabývat konstrukcí pomocí skládání papíru. Jednotlivými přehyby vytvoříme obálky tečen a tímto způsobem znázorníme jednotlivé křivky.

### 4.1 Parabola

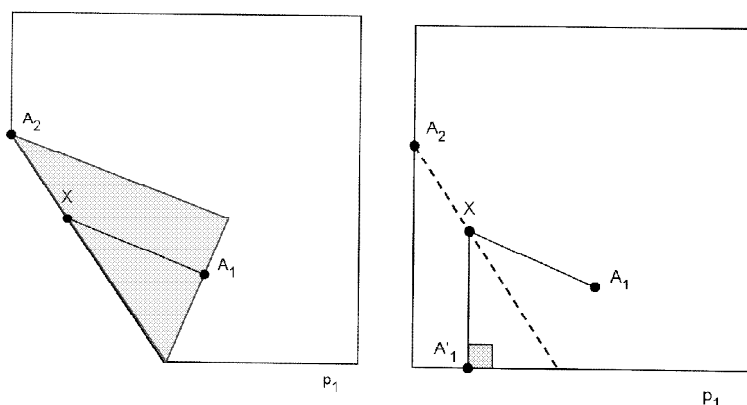
Parabola je definována jako množina bodů v rovině, které mají od daného bodu  $F$  (ohniska) a dané přímky  $d$  stejnou vzdálenost. Při konstrukci tečen paraboly budeme využívat (05) axiom pomocí přikládání libovolných bodů přímky k danému bodu. (Pech, 2004)

Postup konstrukce (05) axiomu:

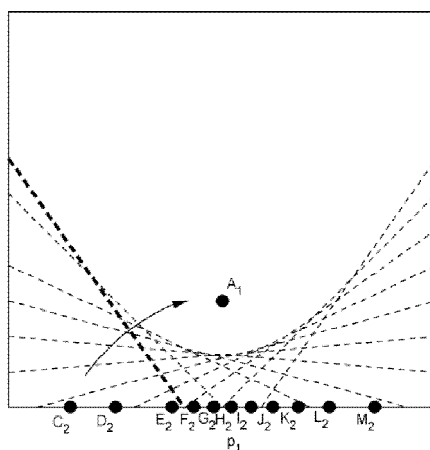
- 1) Určíme si jednu hranu papíru jako přímku  $p_1$ , bod  $A_1$  je libovolně zvolen (uvnitř papíru, ne na hranách) a  $A_2$  je libovolný bod na druhé hraně papíru.
- 2) Na obrázku je bod  $X$ , bod dotyku tečny, jelikož splňuje definici paraboly  $|XA_1| = |XA'_1|$ , vzdálenost bodu  $X$  a ohniska  $A_1$  je rovna vzdálenosti bodu  $X$  od řídicí přímky  $p_1$  (obr. 4.1.).

Postup konstrukce paraboly:

Začneme stejně jako u (05), určíme si jednu hranu papíru jako přímku  $p_1$ , (řídicí přímku) a bod  $A_1$  (ohnisko) je zvolen libovolně na papíru. Poté budeme přikládat několik bodů řídicí přímky na bod  $A_1$ . Čím více bodů přiložíte, tím je parabola pomocí tečen znatelnější (obr. 4.2.). (Johnson, 1957)



Obrázek 4.1.: Přeložení papíru podle pátého axiomu

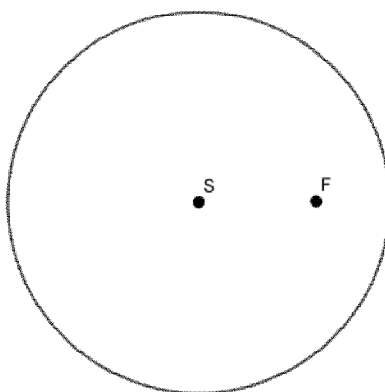


Obrázek 4.2.: Parabola určená tečnami

## 4.2 Elipsa

Elipsa je množina bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od dvou daných ohnisek, je konstantní. Dále potřebujeme vyslovit větu o řídicí kružnici: Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je řídicí kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru  $2a$ . (Pech, 2004)

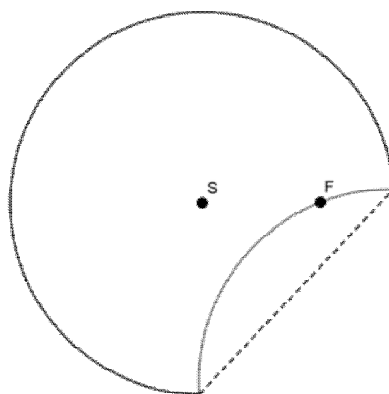
Daná konstrukce bude založena na sestavení tečen pomocí bodů řídicí kružnice. Tvar elipsy bude záviset na umístění druhého ohniska, pokud bude blíže k prvnímu, tak bude vypouklejší než s ohniskem u kružnice (protáhlý tvar). Kdybychom si zvolily druhé ohnisko ve stejném bodě jako první, tak nám vznikne kružnice o poloměru  $a$ .



Obrázek 4.3.: Ohniska elipsy

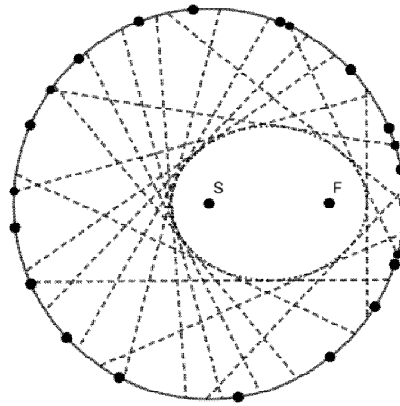
Postup konstrukce (Johnson, 1957):

- 1) Na papíru si libovolně vyznačíme bod S (první ohnisko), který bude středem kružnice o poloměru  $2a$ .
- 2) Uvnitř této řídicí kružnice libovolně zvolíme bod F (druhé ohnisko).
- 3) V tomto okamžiku máme určená ohniska elipsy bodem S a F (obr. 4.3.).
- 4) Pro lepší manipulování si kružnici z papíru vystříháme.
- 5) Posledním krokem je vytvoření obálky tečen, kterou uděláme pomocí přehybů libovolných bodů kružnice na ohnisko F. Na obrázku 4.4. je znázorněn jeden přehyb.
- 6) Čím více bodů přiložíme, tím více bude křivka znatelná (obr. 4.5.).



Obrázek 4.4.: Jeden přehyb



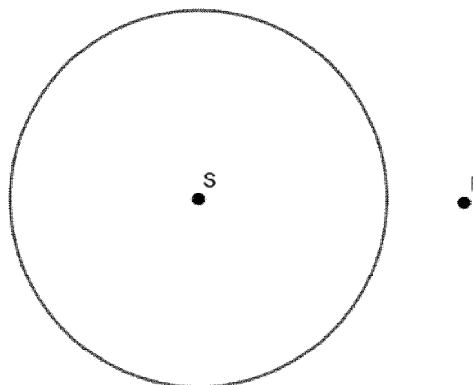


Obrázek 4.5.: Obálka tečen elipsy

### 4.3 Hyperbola

Hyperbola je množina bodů v rovině, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou daných ohnisek, je konstantní. Dále potřebujeme vyslovit větu o řídicí kružnici: Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je řídicí kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru  $2a$ . (Pech, 2004)

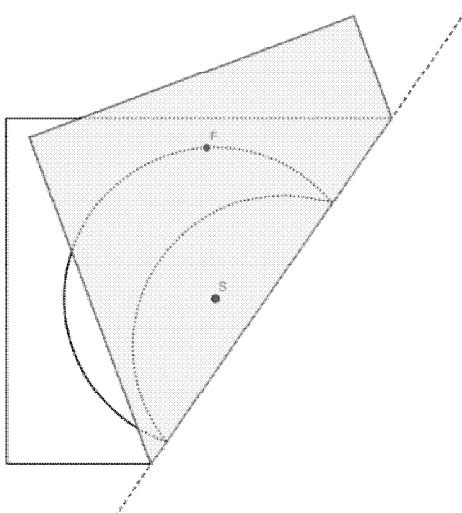
Konstrukce hyperboly je analogická s konstrukcí elipsy, též sestrojíme obálku tečen pomocí řídicí kružnice a ohniska. (Johnson, 1957)



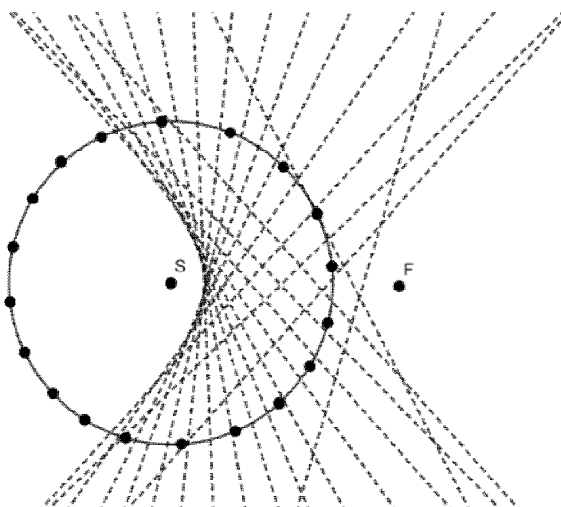
Obrázek 4.6.: Ohniska elipsy

Postup konstrukce:

- 1) Na papíru si libovolně vyznačíme bod  $S$  (první ohnisko), který bude středem kružnice o poloměru  $2a$ .
- 2) Vně této řídicí kružnice libovolně zvolte bod  $F$  (druhé ohnisko).
- 3) V tomto okamžiku máme určená ohniska elipsy, bodem  $S$  a  $F$  (obr. 4.6.).
- 4) Posledním krokem je vytvoření obálky tečen, kterou uděláme pomocí přehybů ohniska  $F$  na libovolné body kružnice. Na obrázku 4.7. je znázorněn jeden přehyb.
- 5) Čím více bodů přiložíte, tím více bude křivka znatelná (obr. 4.8.)



Obrázek 4.7.: Jeden přehyb



Obrázek 4.8.: Obálka tečen hyperboly

## 4.4 Využití ve výuce

Konstrukce kuželoseček pomocí skládání papíru lze využít na ZŠ i SŠ. Na základní škole se žáci v rámci kuželoseček setkají nejčastěji s kružnicí, s parabolou a hyperbolou u funkcí v 9. třídě. Na křivky (parabolu a hyperbolu) se nahlíží pouze jako na grafy funkcí. Grafy jsou konstruovány pomocí několika bodů, které vypočítáme z předpisu funkcí (kvadratické či nepřímé úměrnosti). Na středních školách jsou probírány všechny kuželosečky a jejich vlastnosti.

Ke znázornění grafů se využívá nejčastěji rýsování, jeho nevýhodou je ovšem časová náročnost a špatná manipulativnost. Pokud chceme znázornit několik grafů, které chceme porovnávat, je výhodné využít matematický software GeoGebra<sup>4</sup>. Pro zpestření výuky lze využít skládání papíru.

Uvedu zde pracovní listy s postupem konstrukce, s otázkami a řešením. Důležité je dát prostor žákům, aby řešení vymysleli sami, proto zde uvedu i můj doporučený postup použití.

Pracovní list ZŠ-P1 je vytvořen pro žáky na 9. ročníku ZŠ a studenty na SŠ. Žáci se pokusí vytvořit parabolu pomocí postupu konstrukce, učitel jim poskytne čas, aby stihli sestrojít konstrukci sami a až poté postup předvede. Následně by měli žáci a studenti dostat prostor zamyslet se nad otázkami a sami je zodpovědět (případně ve dvojici). Nakonec bude společná diskuze nad řešením. U následujících pracovních listů SŠ-E1 a SŠ-H1 je postup analogický, ovšem tyto úlohy jsou určeny pro studenty na SŠ.

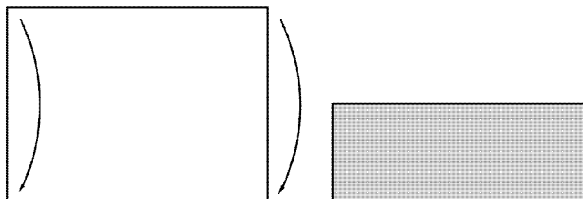
---

<sup>4</sup> GeoGebra = dynamický matematický software pro geometrii i algebru

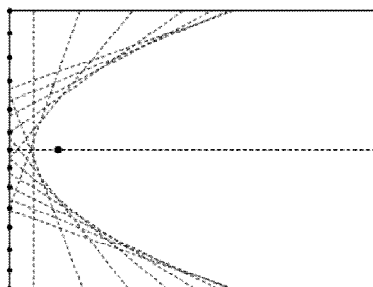
**Pomůcky:** papír formátu A4, černý fix

**Postup konstrukce:**

- 1) Papír přeložíme podélně na polovinu a rozložíme.



- 2) Na papíru si libovolně zvolte jednu z kratších stran papíru, kterou budete v dalším kroku využívat.
- 3) Na papíru si libovolně zvolte bod (= ohnisko), který bude ležet přibližně 3-5 cm od určené strany a na půlícím přehybu. Tento bod si vyznačte fixem.
- 4) Postupně přiložíme libovolné body zvolené strany (z 2. kroku) na bod vyznačený fixem (čím více bodů se přiloží, tím lépe).



**Otázky:**

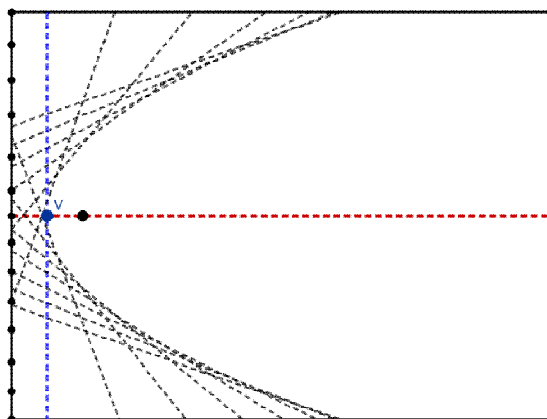
- a) Dokážete přesně určit, kde je vrchol paraboly?
- b) Jaké geometrické útvary nám znázornily parabolu na papíru?  
Zakroužkuj správné řešení.

SEČNY - TEČNY - OSY - BODY

- c) Jakou vlastnost má přehyb, který podélně půlí papír na polovinu k parabole?
- d) Jak bude vypadat parabola, pokud bude ohnisko blíž/dál k určené straně?
- e) Kde se kolem nás setkáme s parabolou?

**Otázky:****a) Dokážete přesně určit, kde je vrchol paraboly?**

Ano, pomocí přiložení bodu, který je průsečíkem půlicího přehybu a vybrané strany, na ohnisko. Průsečíkem vzniklého přehybu (= vrcholová tečna) a půlicího přehybu (=osa paraboly) je vrchol paraboly.

**b) Jaké geometrické útvary nám znázornily parabolu na papíru? Zakroužkuj správné řešení.**

SEČNY - TEČNY - OSY - BODY

Tečny nám tvoří obálku tečen, které znázorní parabolu.

**c) Jakou vlastnost má přehyb, který podélně půlí papír na polovinu k parabole?**

Tento přehyb je osou paraboly.

**d) Jak bude vypadat parabola, pokud bude ohnisko blíž/dál k určené straně?**

Pokud bude ohnisko blíž k řídicí přímce, tak bude parabola užší a rychleji stoupající.

Pokud bude dál, parabola bude rozevřenější.

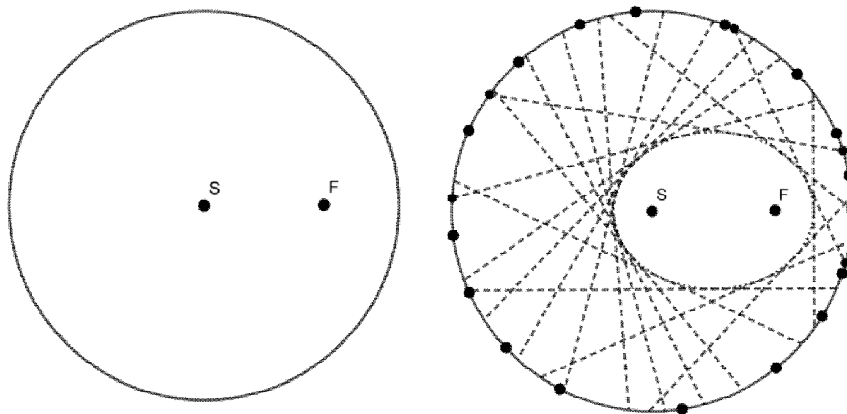
**f) Kde se kolem nás setkáme s parabolou?**

Mosty, reflektory, satelit, tryskající voda z fontány, atd.

**Pomůcky:** papír formátu A4, černý fix, kružítko, nůžky

**Postup konstrukce:**

- 1) Na papíru si libovolně vyznačte bod S, který bude středem kružnice o libovolném poloměru. (čím větší kružnice bude, tím lépe se s ní bude manipulovat).
- 2) Uvnitř této kružnice libovolně zvolte bod F.
- 3) Pro lepší manipulování si kružnici na papíru vystříhejte.



- 4) Posledním krokem je vytvoření přehybů libovolných bodů kružnice na ohnisko F. Čím více bodů přiložíte, tím více bude křivka znatelná.

**Otázky:**

- a) Jakou mají vlastnost body S a F vzhledem k elipse?
- b) Jaké geometrické útvary nám znázornily elipsu na papíru? Zakroužkuj správné řešení.  
SEČNY - TEČNY - OSY - BODY
- c) Co by se stalo, kdybychom umístili bod F na bod S?
- d) Vyznačte si na vytvořené elipse: střed, vrcholy, excentricitu, hlavní a vedlejší poloosy. (Můžete už využít pravítko)
- e) Kde se kolem nás setkáme s elipsou?

**Otázky:**

- a) **Jakou mají vlastnost body S a F vzhledem k elipse?**

Body S a F jsou ohniska elipsy.

- b) **Jaké geometrické útvary nám znázornily elipsu na papíru? Zakroužkuj správné řešení.**

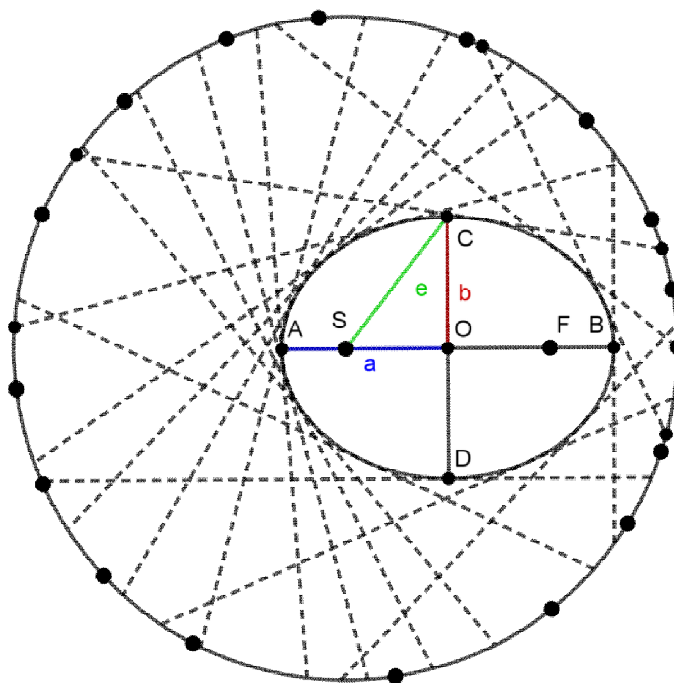
SEČNY - TEČNY - OSY - BODY

Tečny nám tvoří obálku tečen, které znázorní elipsu.

- c) **Co by se stalo, kdybychom umístili bod F na bod S?**

Obálka tečen nám znázorní kružnici s polovičním poloměrem než má řídicí kružnice.

- d) **Vyznačte si na vytvořené elipse: střed, vrcholy, excentricitu, hlavní a vedlejší poloosy (můžete už využít pravítko).**



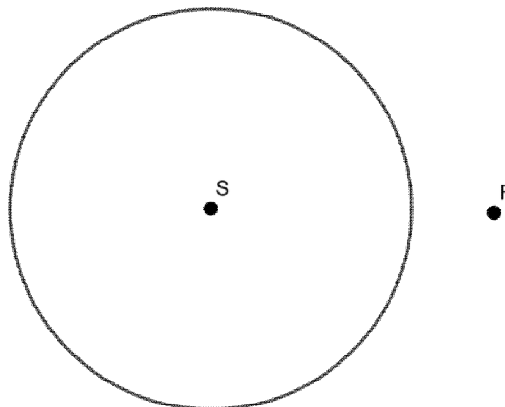
- e) **Kde se kolem nás setkáme s elipsou?**

např. oběžné dráhy planet, vodní hladina v nakloněné lahvi, atd.

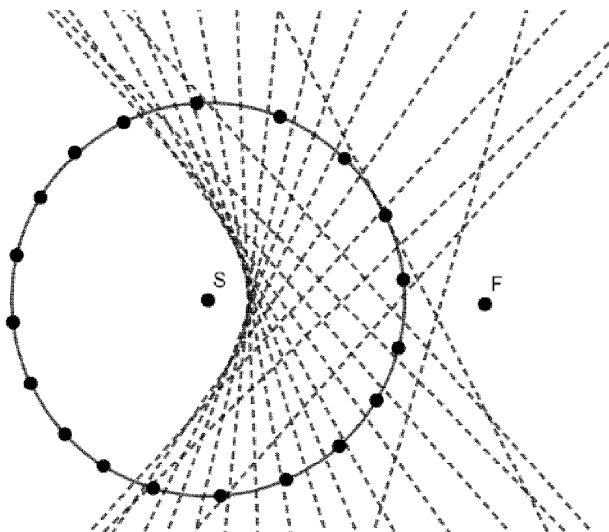
**Pomůcky:** papír formátu A4, černý fix, kružítko, nůžky

**Postup konstrukce:**

- 1) Na papíru si libovolně vyznačte bod S, který bude středem kružnice o libovolném poloměru (čím větší kružnice bude, tím lépe se s ní bude manipulovat).



- 2) Vně této kružnice libovolně zvolte bod F.
- 3) Posledním krokem je vytvoření přehybů libovolných bodů kružnice na ohnisko F. Čím více bodů přiložíte, tím více bude křivka znatelná.



**Otázka:**

- a) Kde se kolem nás setkáme s hyperbolou?



**Otázka:****a) Kde se kolem nás setkáme s hyperbolou?**

Typickým příkladem jsou chladicí věže jaderných elektráren, dalším příkladem jsou přesýpací hodiny. Pokud máme stolní lampu se stínítkem podobnou jako na obrázku 4.6., světlo nám na zdi za ní vytváří hyperbolu. Dále nám jí může připomínat prošívání basebalového míčku a kresba na basketbalovém míči. Pokud budeme mít ořezanou více hrannou tužku, řež stranou nám představuje též hyperbolu (obr. 4.10.)

Obrázek 4.9.: Lampa<sup>5</sup>Obrázek 4.10.: Tužka<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Zdrojem obrázku je <https://i.pinimg.com/originals/df/9a/9b/df9a9ba15b4d1d10395978862c55d758.jpg>

<sup>6</sup> Zdrojem obrázku je <http://www.levnedrevenuehracky.cz/soubory/produkty/tuzka-s-pastelkami-mala-barevna.jpg>

## 5 Průměry v lichoběžníku

Než si ukážeme jednotlivé průměry v lichoběžníku pomocí skládání papíru, je důležitá jejich definice. Ve škole se žáci nejdříve setkají s aritmetickým průměrem a využívají ho například k určení průměru známek. Běžně se využívá pro tento průměr jen název průměr. S ostatními se žáci seznámí až na střední či vysoké škole.

Obecně je aritmetický průměr definován jako statistická veličina, která se vypočítá pomocí vzorce:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$n$  je počet prvků

Geometrický průměr je dán vzorcem:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Harmonický průměr je dán vzorcem nebo geometrickým a aritmetickým průměrem:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{(\bar{x}_g)^2}{\bar{x}}$$

Kvadratický průměr je dán vzorcem, který je dán odmocninou aritmetického průměru s druhou mocninou jeho hodnot:

$$\bar{x}_k = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\bar{x}^2}$$

Mezi těmito průměry platí nerovnosti, z kterých je nejznámější AG nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Aritmetický je vždy větší nebo roven geometrickému, rovnost nastane, jsou-li všechny hodnoty stejné. Obecná nerovnost:

$$\bar{x}_k \geq \bar{x} \geq \bar{x}_g \geq \bar{x}_h$$

Když máme definované dané průměry, ukážeme si je v lichoběžníku (obr. 5.1.) a dokážeme si nerovnost pro dva prvky, které označíme  $a$  a  $c$ :

$$\overline{x_k} \geq \bar{x} \geq \overline{x_g} \geq \overline{x_h}$$

Nejprve se podíváme na nerovnost  $\overline{x_k} \geq \bar{x}$ . Jestliže vždy platí:

$$\begin{aligned} (a - c)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ac + c^2 &\geq 0 \\ 2a^2 - a^2 - 2ac + 2c^2 - c^2 &\geq 0 \\ 2a^2 + 2c^2 &\geq a^2 + 2ac + c^2 \\ \frac{a^2 + c^2}{2} &\geq \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} \\ \frac{a^2 + c^2}{2} &\geq \frac{(a + c)^2}{4} \\ \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} &\geq \frac{a + c}{2} \end{aligned}$$

Následně nerovnost  $\bar{x} \geq \overline{x_g}$ . Jestliže vždy platí:

$$\begin{aligned} (a - c)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ac + c^2 &\geq 0 \\ a^2 - 4ac + 2ac + c^2 &\geq 0 \\ a^2 + 2ac + c^2 &\geq 4ac \\ \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} &\geq ac \\ \frac{(a + c)^2}{4} &\geq ac \\ \frac{a + c}{2} &\geq \sqrt{ac} \end{aligned}$$

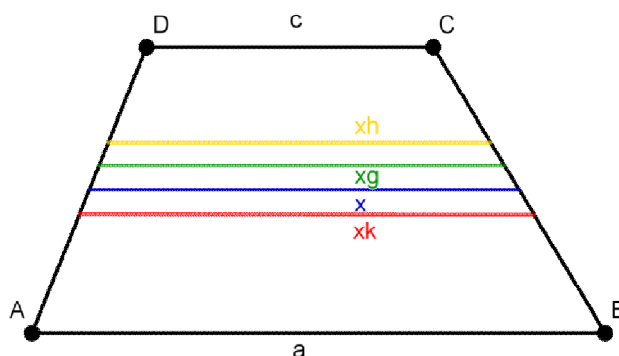
Jako poslední nerovnost  $\overline{x_g} \geq \overline{x_h}$ .

$$\begin{aligned} (a - c)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ac + c^2 &\geq 0 \\ a^2 + 2ac + c^2 &\geq 4ac \\ ac(a^2 + 2ac + c^2) &\geq 4a^2c^2 \end{aligned}$$

$$ac \geq \frac{4a^2c^2}{a^2 + 2ac + c^2}$$

$$\sqrt{ac} \geq \frac{2ac}{a+c}$$

Tímto máme nerovnost dokázanou pro dva prvky, základny lichoběžníku  $a$  a  $c$ .



Obrázek 5.1.: Průměry v lichoběžníku

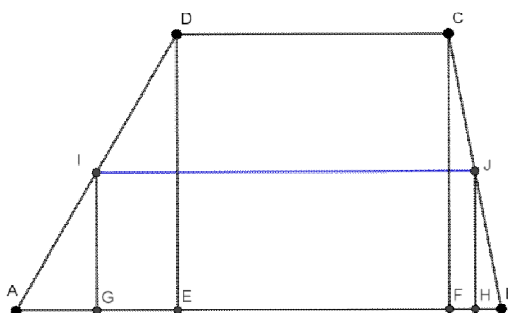
Pomocí tohoto způsobu znázornění průměrů je velmi dobře vidět nerovnost mezi nimi. Pokud bychom využili obdélník, všechny průměry by měly stejnou délku, tím by došlo k rovnosti  $\overline{x_k} = \overline{x} = \overline{x_g} = \overline{x_h}$ .

### 5.1.1 Aritmetický průměr

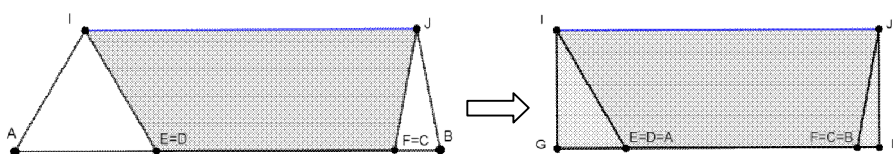
Tento průměr je střední příčkou lichoběžníku, jelikož je jeho délka:

$$\overline{x} = \frac{a+c}{2}$$

Jestliže máme papírový lichoběžník  $ABCD$  (obr. 5.2.), aritmetický průměr sestrojíme pomocí přehybu bodu  $C$  a  $D$  na úsečku  $AB$  (obr. 5.3.). Přehyb (průměr) nám vytvoří úsečku  $IJ$ , kde  $I$  je střed úsečky  $AD$  a  $J$  je střed úsečky  $BC$ .



Obrázek 5.2.: Aritmetický průměr



Obrázek 5.3.: Konstrukce aritmetického průměru

Zároveň můžeme využít tento přehyb k určení obsahu lichoběžníku. Máme přiložené body  $C$  a  $D$  na úsečce  $AB$ , dále přiložíme bod  $A$  na  $E$  a bod  $B$  na  $F$  (obr. 5.3). Úsečka  $IJ$  půlí výšku lichoběžníku, proto má obdélník  $GHJI$  poloviční obsah lichoběžníku:

$$S_{GHJI} = |IJ| \cdot \frac{v}{2} = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{(a+c) \cdot v}{4} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

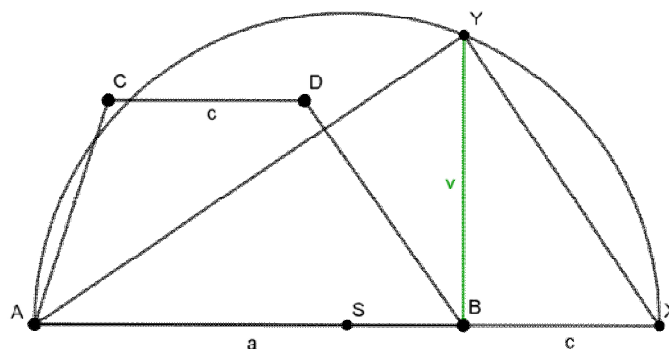
## 5.1.2 Geometrický průměr

Geometrický průměr  $\bar{x}_g = \sqrt{a \cdot c}$  rozdělí lichoběžník na dva podobné lichoběžníky. K sestrojení využijeme Euklidovu větu o výšce, jelikož platí v pravoúhlém trojúhelníku:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

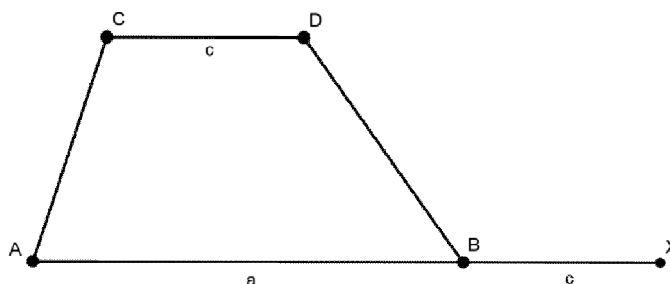
$$v_c = \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

Pro lichoběžník  $ABCD$  se základnami  $a$  a  $c$  využijeme pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $a+c$  a výškou  $v = \sqrt{a \cdot c}$  (obr. 5.4). Výška trojúhelníku je zároveň délkou geometrického průměru lichoběžníku. Tuto délku lze přenést na úsečku  $AB$  a pomocí rovnoběžek ho umístit na správnou pozici (obr. 5.6.).



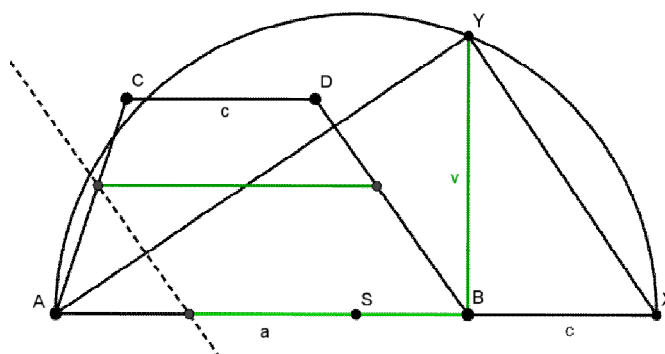
Obrázek 5.4.: Výška  $v = \sqrt{a \cdot c}$

Celou tuto konstrukci lze sestavit i pomocí skládání papíru. Jestliže máme dán lichoběžník  $ABCD$  a základna  $a$  je prodloužená o délku  $c$  (obr. 5.5.).



Obrázek 5.5.: Zadání pro skládání

Nejprve se musí sestavit kolmice (04) na úsečce  $AX$  bodem  $B$ . Abychom sestrojili výšku pravoúhlého trojúhelníku, musíme mít střed  $S$  úsečky  $AX$ , abychom přenesli vzdálenost  $SX$  (Thaletova kružnice). Vytvoříme přehyb (05) bodu  $X$  na kolmou přímku tak, aby procházel bodem  $S$ . V místě přiložení bodu  $X$  na kolmici, vznikne bod  $Y$ . Úsečka  $BY$  má délku geometrického průměru lichoběžníku  $ABCD$  (obr. 5.4.).



Obrázek 5.6.: Geometrický průměr

### 5.1.3 Harmonický průměr

Harmonický průměr je dán předpisem:

$$\overline{x_h} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c}$$

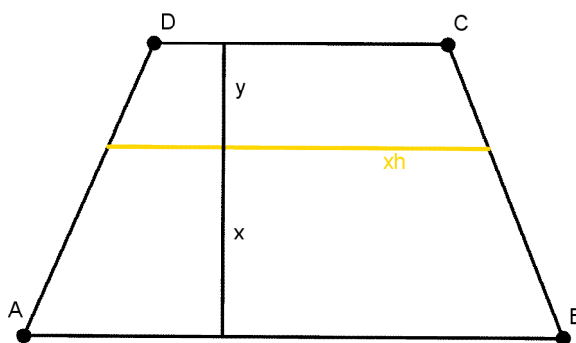
Kde ho ovšem v lichoběžníku najdeme? Na obrázku 5.7. je harmonický průměr  $xh$  a dělí lichoběžník  $ABCD$  na dva s výškou  $x$  a  $y$ . Zároveň musí platit, že součet obsahů menších lichoběžníků je roven obsahu lichoběžníku  $ABCD$ . Platí rovnice:

$$\frac{\left(a + \frac{2ac}{a+c}\right) \cdot x}{2} + \frac{\left(\frac{2ac}{a+c} + c\right) \cdot y}{2} = \frac{a+c}{2} \cdot (x+y)$$

Po úpravách dostaneme rovnici  $cx = ay$ , která lze přepsat do rovnice:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{y}$$

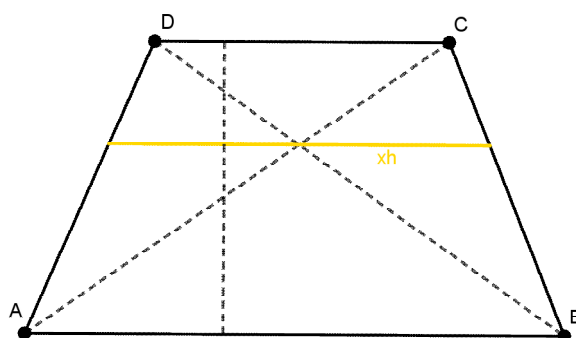
Tento vztah platí, jestliže prochází harmonický průměr průsečíkem úhlopříček lichoběžníku  $ABCD$ .



Obrázek 5.7.: Harmonický průměr

Tuto konstrukci lze sestavit pomocí skládání papíru, jestliže máme dán libovolný lichoběžník. Pomocí přehybů (01) vytvoříme úhlopříčky. Následně si vytvoříme libovolný kolmý přehyb na základny. Harmonický průměr (obr. 5.8.) sestojíme pomocí

přehybu (04), vytvoříme kolmý přehyb na pomocnou kolmici k základnám tak, aby procházel průsečíkem úhlopříček.



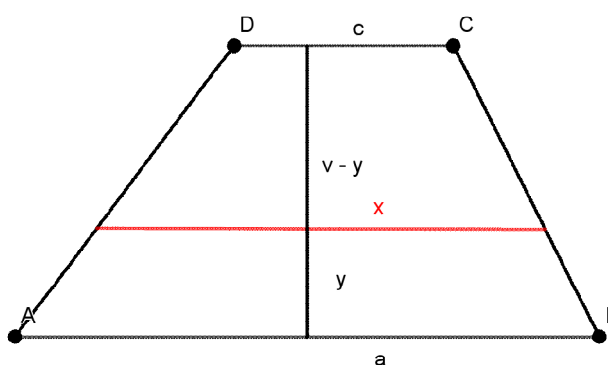
Obrázek 5.8.: Harmonický průměr s úhlopříčkami

### 5.1.4 Kvadratický průměr

Kvadratický průměr rozdělí lichoběžník na dva o stejném obsahu. Jeho předpis:

$$\overline{x_k} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

Pokud chceme ověřit, že platí rovnost obsahů menších lichoběžníků, zvolíme si průměr  $x$ , výšku lichoběžníku  $v$  a výšku  $y$  lichoběžníku se základnami  $a$  a  $x$  (obr. 5.9.).



Obrázek 5.9.: Ověření rovnosti obsahů



Jestliže platí rovnost menších obsahů, tak zároveň musí platit i rovnosti s polovičním obsahem lichoběžníku  $ABCD$ :

$$\frac{(a+x) \cdot y}{2} = \frac{(x+c) \cdot (v-y)}{2} = \frac{(a+c) \cdot v}{4}$$

Z toho vztahu vytvoříme soustavu dvou rovnic:

$$2 \cdot (a+x) \cdot y = (a+c) \cdot v$$

$$\underline{2 \cdot (x+c) \cdot (v-y) = (a+c) \cdot v}$$

$$y \cdot (a^2 + c^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

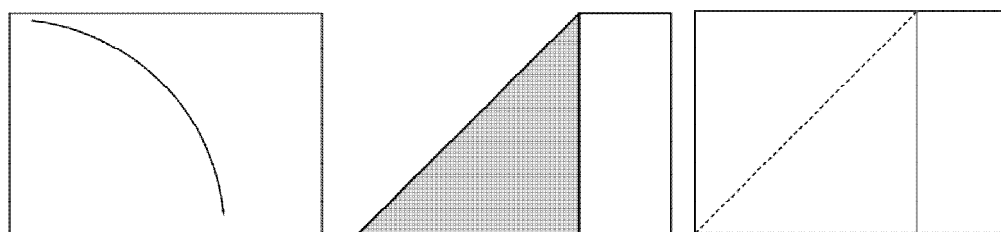
## 6 Základní konstrukce využitelné na ZŠ

V této kapitole se budu věnovat konstrukcím, které lze využít ve výuce matematiky. Představím postupy skládání a pracovní listy, které mohou být nápomocné k prostorové představivosti a pochopení učiva. Skládanky slouží ke zpestření hodiny a představení jiného pohledu na geometrii.

### 6.1 Základní geometrické útvary

Nejprve se podíváme na konstrukci základních geometrických útvarů s využitím papíru formátu A4, jelikož je nejběžnější. Skládanky obdélníku, čtverce a trojúhelníku lze využít ve výuce na 1. stupni ZŠ, ostatní podle obtížnosti spíše na 2. stupni ZŠ. Jelikož jsou tyto konstrukce jednoduché, můžou se navzájem kombinovat.

Papír je obdélníkového tvaru, tím máme daný geometrický útvar. Případně lze papír přeložit vodorovně či horizontálně na polovinu a získáme dva shodné obdélníky. U konstrukce čtverce je důležité přenesení kratší strany papíru na delší a zároveň pravého úhlu hrany papíru (obr. 6.1.). Obecně využíváme základních charakteristik čtverce: má všechny strany stejně dlouhé, vnitřní úhly jsou pravé a je osově souměrný podle úhlopříček.



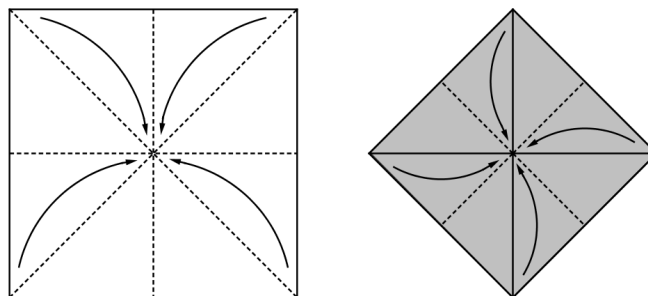
Obrázek 6.1.: Čtverec

Na papírovém modelu čtverce a obdélníku se velmi dobře ukazují jejich vlastnosti a odlišnosti. Přikládáním stran ověřujeme délky stran, to samé u úhlů. Když zkonstruujeme úhlopříčky, můžeme ověřit jejich shodné délky a zda jsou na sebe kolmé či nikoli. Tento typ ověřování lze využít u každého modelu.

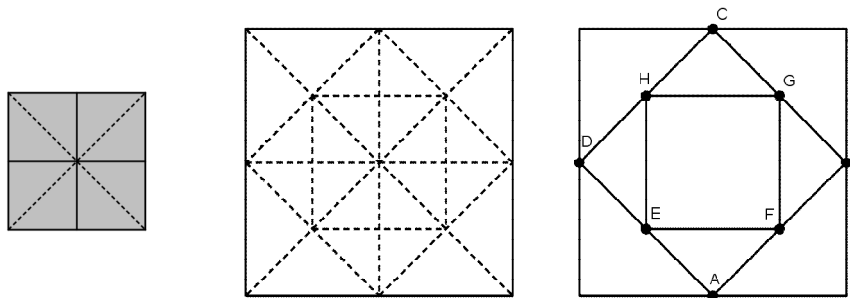
**Pomůcky:** čtvercový papír

**Postup:**

- 1) Na čtvercovém papíru vytvořte úhlopříčné přehyby.
- 2) Dále sestrojte vodorovný a horizontální půlící přehyb.



- 3) Přiložte vrcholy čtverce ke středu.
- 4) Vrcholy vzniklého čtverce opět přiložte ke středu.
- 5) Následně model rozložte, aby byla vidět síť přehybů.



**Otázky:**

- a) Jaký vztah má obsah čtvercového papíru k vepsanému čtverci  $ABCD$ ?
- b) Jaký vztah má obsah vepsaného čtverci  $ABCD$  ke čtverci  $EFGH$ ?
- c) Jaký by byl vztah obsahu čtvercového papíru ke čtverci vepsanému  $EFGH$ ?

Otázky:

a) Jaký vztah má obsah čtvercového papíru k vepsanému čtverci  $ABCD$ ?

Čtverec  $ABCD$  má poloviční obsah papíru.

b) Jaký vztah má obsah vepsaného čtverci  $ABCD$  ke čtverci  $EFGH$ ?

Čtverec  $ABCD$  má dvakrát větší obsah než čtverec  $EFGH$ .

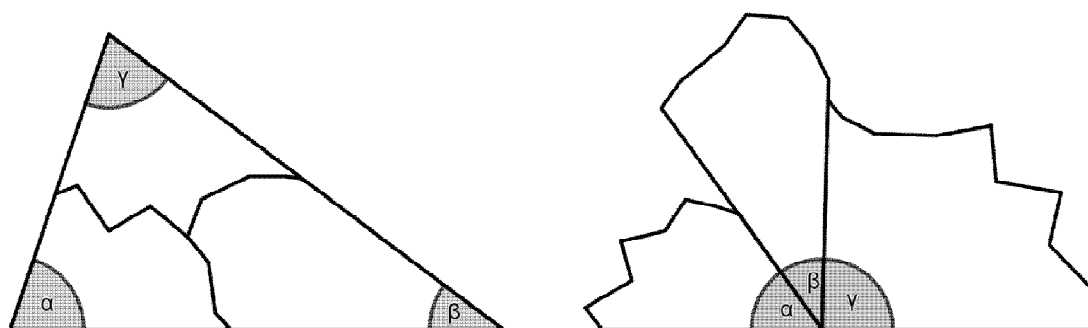
c) Jaký by byl vztah obsahu čtvercového papíru ke čtverci vepsanému  $EFGH$ ?

Jestliže má čtverec  $ABCD$  poloviční obsah papíru, čtverec  $EFGH$  má čtvrtinový obsah papíru, tak by měl následující čtverec osminu obsahu papíru. Obsahy představují řadu čísel  $\frac{1}{2^n}$ .

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

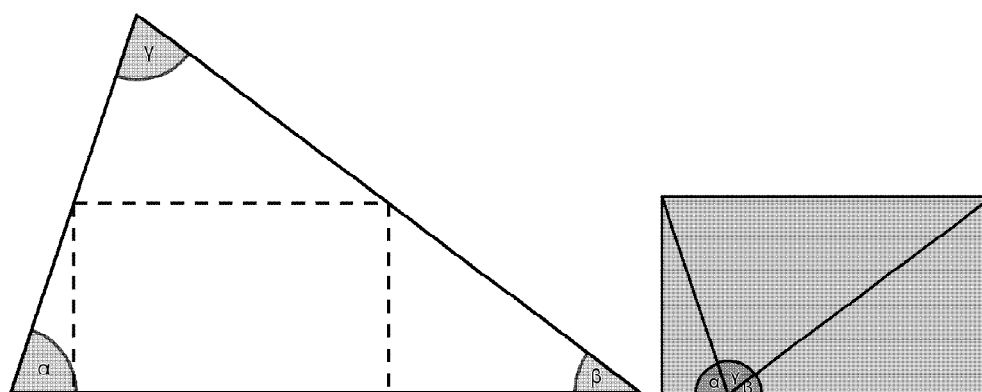
## 6.1.1 Trojúhelníky

Jelikož máme více druhů trojúhelníků, tak je i mnoho způsobů jak je zkonstruovat. Nejprve se podíváme obecně na trojúhelníky, na součet vnitřních úhlů. Představím zde dva jednoduché způsoby, jak si ve výuce názorně součet dokázat. První je založený na roztrhnutí papírového trojúhelníku na tři úhly. Přiložíme-li úhly k sobě, aby měly vždy společné rameno, znázorněný součet je vždy  $180^\circ$ . Z důvodu ověření tohoto obecného tvrzení, je zapotřebí s žáky ve škole vyzkoušet pomocí tohoto způsobu více druhů trojúhelníků.



Obrázek 6.2.: Součet úhlů v trojúhelníku

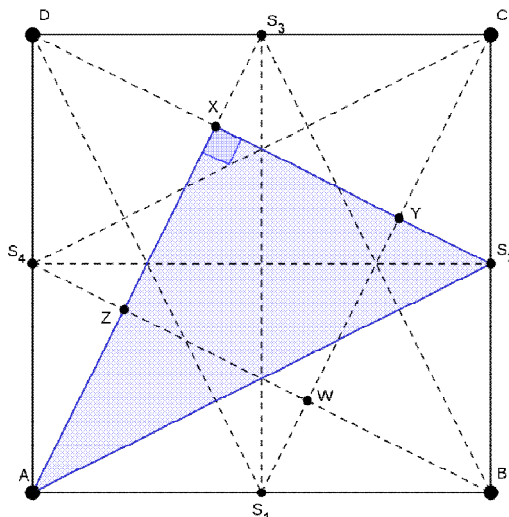
Druhý způsob ověření je bez trhání. Papírový model složíme podle obrázku 6.3., a tím součet úhlů dokážeme. (Johnson 1957)



Obrázek 6.3.: Součet úhlů pomocí přeložení

Pravoúhlý trojúhelník lze sestrojít přeložením čtverce podle úhlopříčky, čímž dostaneme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Pokud chceme sestrojít Pythagorejský

trojúhelník, jeho poměr délek stran je 3:4:5, opět použijeme čtvercový základ. Sestrojíme spojnice vrcholů a středů protějších stran a ty nám představí daný trojúhelník, který je znázorněný na obrázku 6.4. Nevznikl nám pouze jeden  $\Delta AXS_2$ , ale osm.



Obrázek 6.4.: Pythagorejský trojúhelník (Schinková 2016)

Otázkou je, zda je trojúhelník opravdu Pythagorejský. Musíme tedy ověřit jeho pravoúhlost a poměr délek stran. Důkaz pochází z mé bakalářské práce Skládání papíru ve výuce matematiky (Schinková, 2016, s. 35-36):

**Pravoúhlost:** Víme, že strana AD je kolmá na DC, když otočíme stranu AD tak, že vznikne  $AS_3$  a DC tak, že vznikne  $DS_2$ . Pak víme, že strana  $AS_3$  je kolmá na  $DS_2$ , proto je  $\Delta AXS_2$  pravoúhlý.

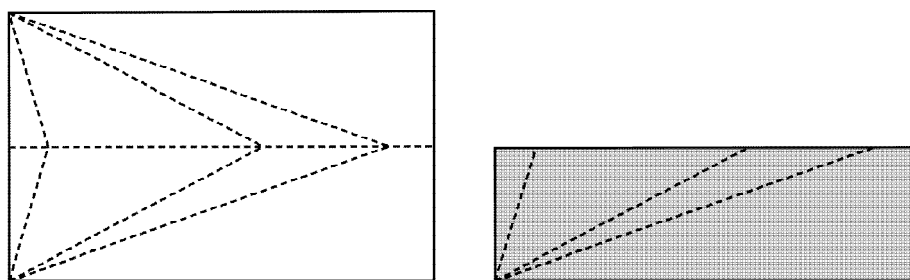
**Poměr délek stran 3:4:5:** Jelikož víme, že  $AS_3 \parallel CS_1$  pak i  $XS_3 \parallel CY$ . Bod X je střed DY, proto je  $XS_3$  střední příčka  $\Delta CYD$  a poloviční CY. Trojúhelníky  $\Delta CYD = \Delta CWB = \Delta AZB = \Delta AXD$  a  $\Delta DXS_3 = \Delta CYS_2 = \Delta BWS_1 = \Delta AZS_4$  jsou shodné. Označíme si  $|XS_3| = a$ , proto  $|CY| = 2a$ .

$$\text{Strany } \Delta AXS_2 \text{ jsou } |XS_2| = |XY| + |YS_2| = |CY| + |XS_3| = 2a + a = 3a$$

$$|XA| = |XZ| + |AZ| = |CY| + |CY| = 2a + 2a = 4a$$

$$|AS_2| = 5a \text{ (Pythagorova věta), poměr délek stran je 3:4:5.}$$

U konstrukce rovnoramenných trojúhelníků využijeme opět jejich vlastností, především jedné osy souměrnosti. Nejjednodušší je začít podélným přehybem, který půlí papír a bude osou trojúhelníků. Opět rozložíme a určíme si levou stranu papíru jako základnu. Ramena sestrojíme pomocí spojnic vrcholu základny a osy (obr. 6.5.). Na obrázku 6.4. si můžeme všimnout mnoha rovnoramenných trojúhelníků vznikající pomocí os stran čtverce a přehybů, které představují spojnice vrcholů a středů protějších stran. Když ve výuce využijeme předešlou konstrukci, můžeme se zeptat, kolik rovnoramenných trojúhelníků nám přitom vzniklo na papíru.

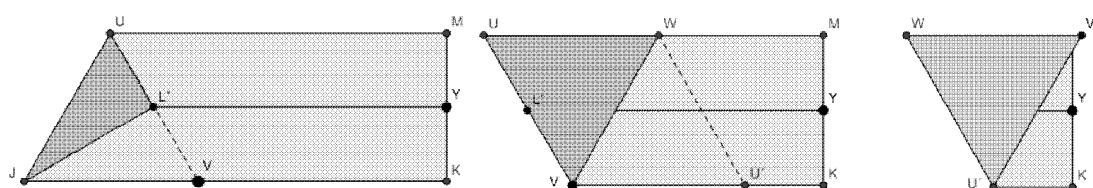
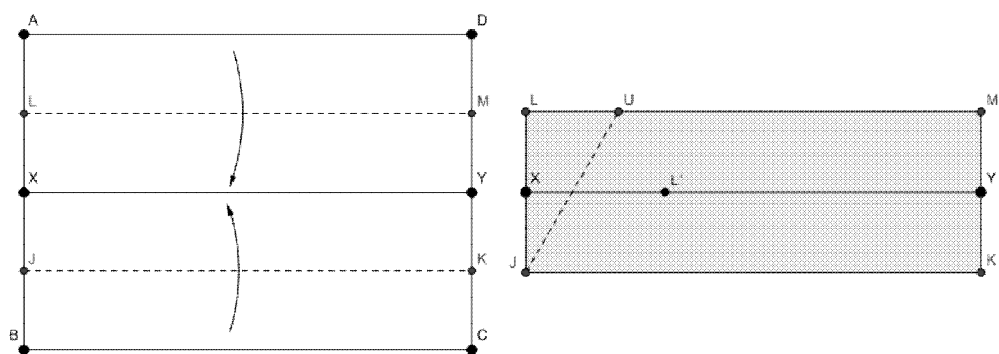


Obrázek 6.5.:Rovnoramenný trojúhelník

Model rovnostranného trojúhelníku si představíme v pracovním listu ZŠ-T1, který je jeho návodem a zároveň ukazuje, jak model dále využít k demonstraci určitých vlastností. Žáci si nejprve vytvoří model a následně zodpoví otázky za pomoci manipulace a přehybání modelu. Pracovat by měl každý samostatně, případně ve dvojici. Po zodpovězení všech otázek, by v ideálním případě měla proběhnout diskuze nad řešením.

Obrázky uvedené v pracovním listu jsou převzaty z mé bakalářské práce (Schinková, 2016, s. 30-34)

S rovnostranným trojúhelníkem úzce souvisí jedno těleso, a to pravidelný čtyřstěn. Jeho konstrukce (obr. 6.6.) je s ním analogická, jelikož je jeho síť tvořena čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky. Výsledný čtyřstěn je vhodný modelem při výuce jehlanů v 9. ročníku.



Obrázek 6.6.: Konstrukce čtyřřtěnu<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Zdroj obrázku: SCHINKOVÁ, Nikol. *Skládání papíru ve výuce matematiky*. České Budějovice, 2016. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita.

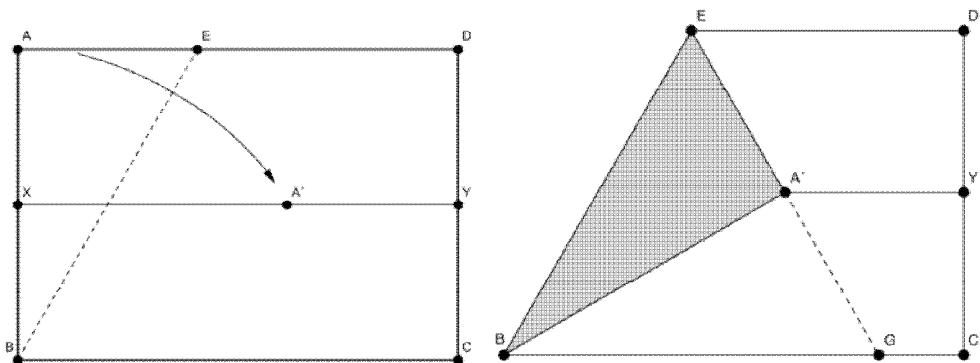


Pomůcky: 3x papír A4

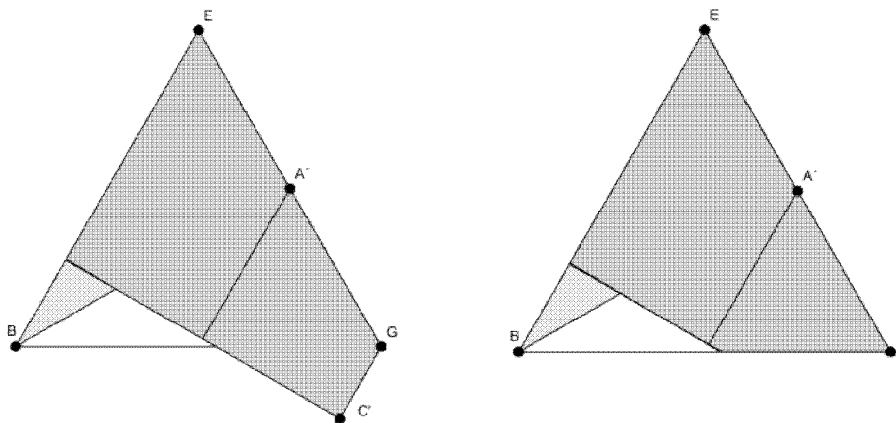
### Rovnostranný trojúhelník

#### Postup:

- 1) Přehneme papír podélně na polovinu a rozložíme.
- 2) Přiložíme vrchol  $A$  na podélnou linii tak, aby přehy procházel vedlejším vrcholem  $B$ .



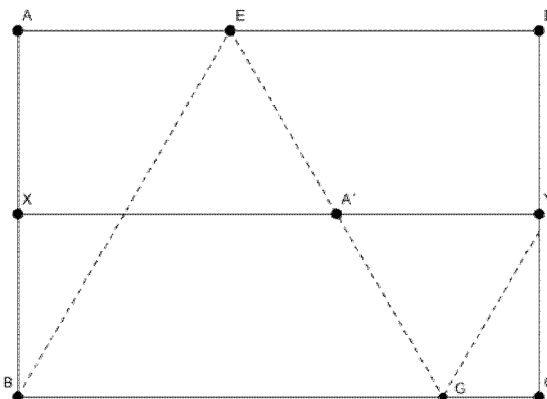
- 3) Dále přehneme lichoběžníkovou část papíru  $GCDE$  podle hrany  $EA'$ .



- 4) Posledním krokem je přehnutí přesahující části z rovnostranného trojúhelníku  $BEG$  na druhou stranu.

Otázky a práce s modelem:

- Určete, kolik os souměrnosti má daný trojúhelník.
- Sestrojte výšky a těžnice pomocí přehybů papíru.
- Určete pomocí přehybů střed kružnice opsané a vepsané.
- Vytvořte si ještě jeden model rovnostranného trojúhelníku a následně papír rozložte. Jakou má funkci podélný přehyb k trojúhelníku  $BEG$ ?



- Opět si model složte a vytvořte střední příčky. Následně rozhodněte jakého tělesa je síť, která je tvořena středními příčkami rovnostranného trojúhelníku.

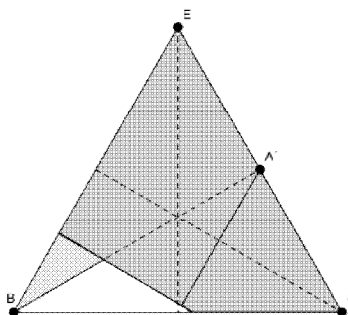
**Úkol:**

Pokuste se vymyslet vlastní postup konstrukce rovnostranného trojúhelníku, jestliže máte k dispozici pouze papír A4. Papír můžete libovolně přehýbat, nesmíte používat pravítko, kružítko ani nůžky.

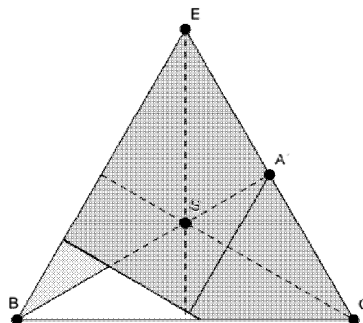
Otázky a práce s modelem:

a) Určete, kolik os souměrnosti má daný trojúhelník.  
tři osy souměrnosti

b) Sestrojte výšky a těžnice pomocí přehybů papíru.  
Výšky a těžnice se překrývají.



c) Určete pomocí přehybů střed kružnice opsané a vepsané.



d) Vytvořte si ještě jeden model rovnostranného trojúhelníku a následně papír rozložte. Jakou má funkci podélný přehyb k trojúhelníku *BEG*?

Prochází středy stran trojúhelníku, proto je střední příčkou.

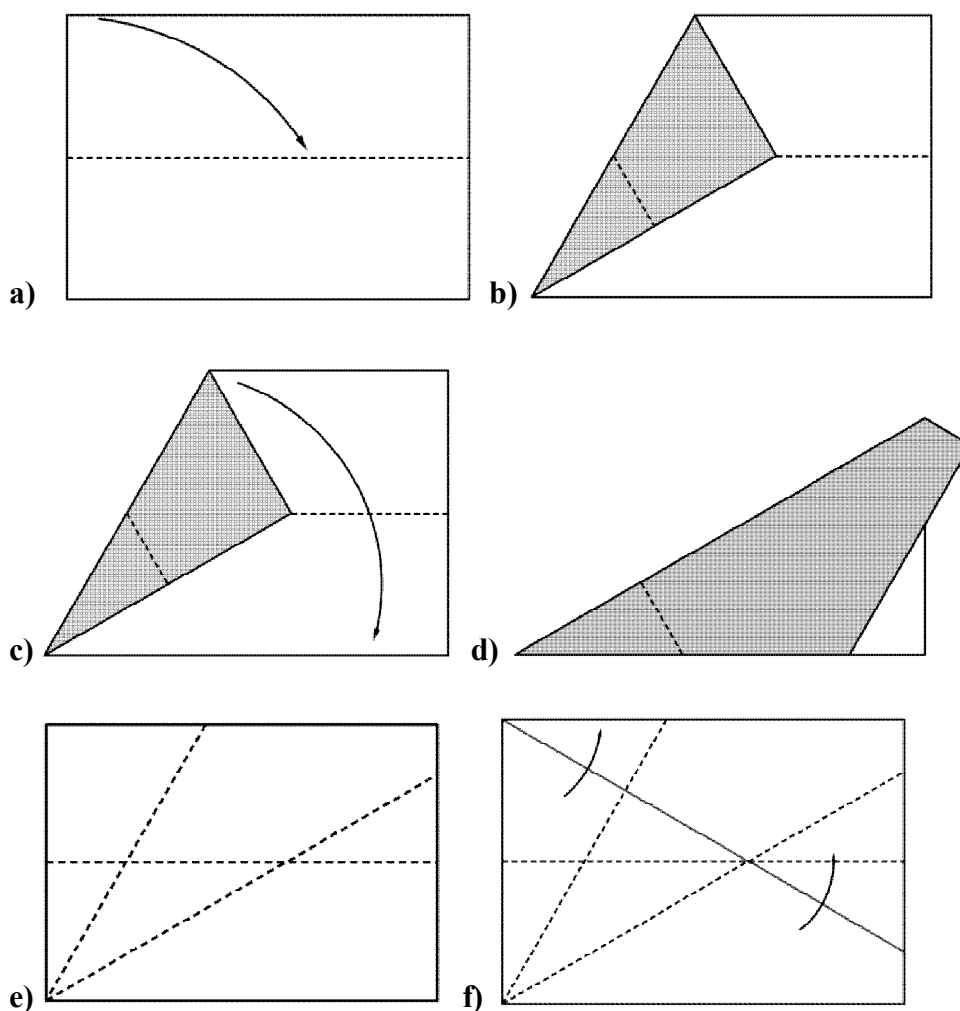
e) Opět si model složte a vytvořte střední příčky. Následně rozhodněte, jakého tělesa je síť, která je tvořena středními příčkami rovnostranného trojúhelníku.

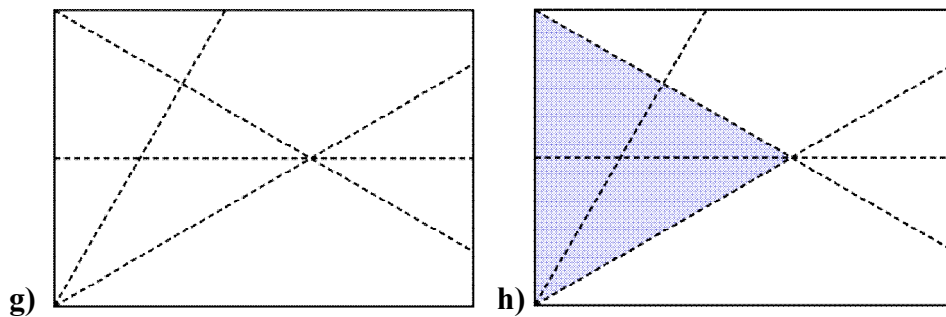
Střední příčky tvoří síť pravidelného čtyřstěnu.

## Úkol:

**Pokuste se vymyslet vlastní postup konstrukce rovnostranného trojúhelníku, jestliže máte k dispozici pouze papír A4. Papír můžete libovolně přehýbat, nesmíte používat pravítko, kružítko ani nůžky.**

Uvedu zde jednoduchou konstrukci (tabulka 1), která je založena na přenesení délky strany na její výšku. Levá hrana papíru je strana trojúhelníku a vodorovný půlící přehyb je výškou. V bodu e) rozložíme list papíru a jsou vidět dva vzniklé přehyby, podle průsečíku delšího přehybu s vodorovným půlícím přehybem sestrojíme poslední bod konstrukce. Na obrázku h) tabulky 1 je zvýrazněn vzniklý rovnostranný trojúhelník.

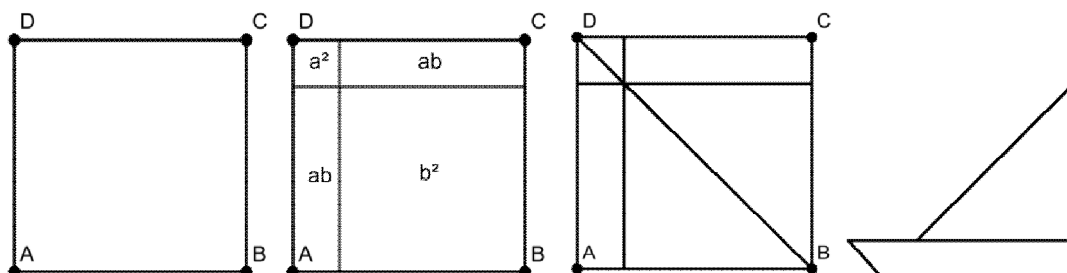




Tabulka 1: Postup konstrukce rovnostranného trojúhelníku

## 6.2 Algebraické vzorce

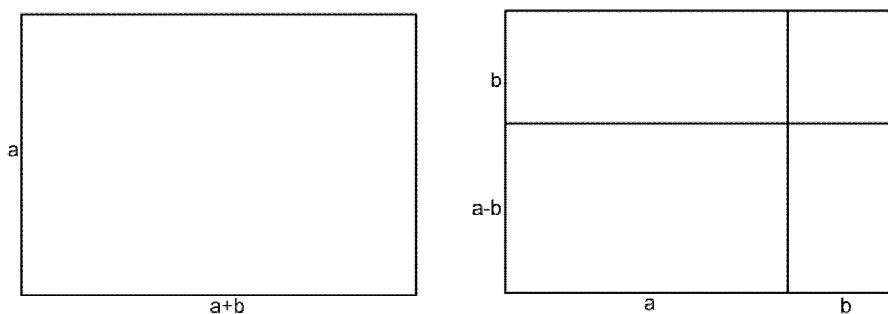
Typické využití origami v matematice je v geometrii, ale i v algebře se najde jeho uplatnění. Představím zde postup konstrukce loďky, která zároveň obsahuje druhou mocninu dvojčlenu  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (obr. 6.7.). (Sastry, 2007)



Obrázek 6.7.: Loďka

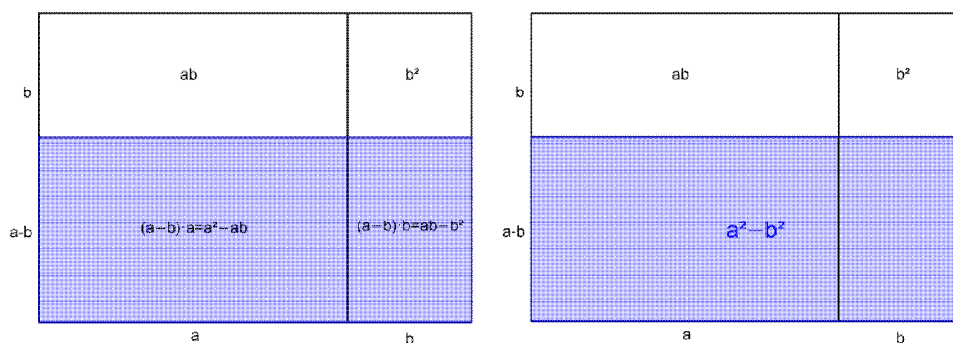
Připravíme si čtvercový papír, u kterého máme podle obrázku 6.7. označeny vrcholy  $ABCD$ . Stranu  $AB$  si rozdělíme rovnoběžným přehybem s  $BC$  na úseky  $a$  a  $b$ . Stejným způsobem rozdělíme stranu  $AD$  na úseky  $a$  a  $b$ . Přehyby nám čtvercovou plochu rozdělily na dva menší čtverce o obsahu  $a^2$  a  $b^2$  a dva obdélníky o stejném obsahu  $ab$  (nezáleží na tom, zda je čtverec  $a^2$  u vrcholu  $D$  nebo u jiného). Jestliže je strana čtverce  $a + b$ , jeho obsah je  $S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , pomocí přehybů máme tento vzorec znázorněn na listu papíru. Dále vytvoříme úhlopříčný přehyb procházející čtverci  $a^2$  a  $b^2$ , teď už můžeme pomocí přehybů list složit do podoby loďky.

Jelikož je součástí konstrukce loďky i znázorněn vzorec rozkladu dvojčlenu, je zde propojení zábavného skládání modelu s názorným ztvárněním vztahu obsahů. U dalšího vzorce uvedu pouze jeho znázornění na listu papíru pomocí skládání.



Obrázek 6.8.: Znázornění vzorce

Máme list papíru A4, na kterém si určíme delší stranu  $a + b$  a kratší  $a$ . Pomocí rovnoběžného přehybu s kratší stranou rozdělíme delší stranu na úseky  $a$  a  $b$  (obr. 6.8.). Dále podle obrázku 6.8. vytvoříme takový vodorovný přehyb, aby nám rozdělil kratší strany na úseky  $a - b$  a  $b$ . V tuto chvíli máme obdélníkový list rozdělen na čtyři různé obdélníky a na obrázku 6.9. vidíme jejich obsahy.



Obrázek 6.9.: Zobrazení vzorce

Vzorec pro rozdíl čtverců  $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$  nám představuje obsah modrého obdélníku o stranách  $a - b$  a  $a + b$ , který je složen ze dvou menších obdélníků o obsahu  $a^2 - ab$  a  $ab - b^2$ . Součtem obsahů  $a^2 - ab$  a  $ab - b^2$  dostaneme  $a^2 - b^2$ .

## 7 Yoshimura a Miura Ori vzory

V této kapitole představím dvě techniky skládání papíru, které se využívají v architektuře, astrofyzice či bytovém designu. Jedná se o určitou panelovou strukturu využívající reverzní skládání (střídání orientace přehybů). Základem jsou papírové modely sítí, které nám umožní z listu papíru složit 3D model, kde se opakují geometrické útvary, ornamenty, atd. Následně se design nebo konstrukce může využít k výrobě stínítek na lampy, lampionů či ke skládání solárních panelů pro přepravu kosmu.



Obrázek 7.1: Papírová stínítka na lampy<sup>8</sup>

### 7.1 Yoshimura konstrukce

Yoshimura vzor je nejznámější a nejpoužívanější vzor pro konstrukci papírových stínidel na různé lampy. Tato skládaná stínidla se stala velmi oblíbená ve Skandinávii a jejich design se hojně využívá. Uvedu zde čtyři základní předlohy pro konstrukci stínidla, které lze sestojit doma či ve škole z jednoho kusu papíru bez speciálních

---

<sup>8</sup> Papírová stínítka na lampy - zdrojem obrázku je <https://www.popsugar.com/home/photo-gallery/26570573/image/26570586/Origami-Paper-Pendants-68-each-started-off-prop-lights>

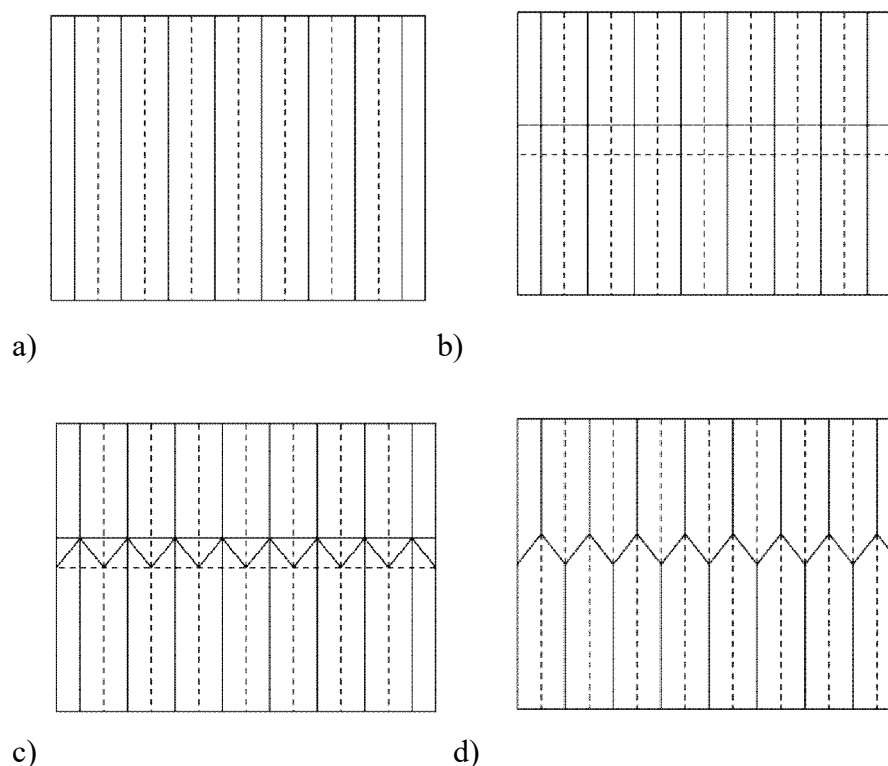


materiálů a komponentů. Ve výuce se konstrukce může využít ke zpestření hodiny geometrie a představení origami konstrukcí, které jsou využívány v praxi. Zároveň je při konstrukci modelu zapojena prostorová představivost a jemná motorika. (Suzuki 2016)

### 7.1.1 Postup konstrukce

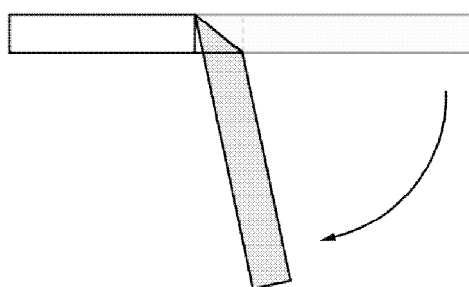
Čím větší papír využijeme, tím je konstrukce jednodušší a lépe se s modelem manipuluje. Doporučuji proto formát A3, ovšem můžeme však skládat z libovolného formátu. Pro lepší názornost uvedu postup na papíru, který má poměr délek stran formátu A. Jednotlivé konstrukce modelů označím A-D. Pro lepší orientaci si lze konstrukci narýsovat a následně přehýbat, nebo si vytisknout síť daného modelu a následně skládat.

Model A je nejjednodušší a základem konstrukce je sestavení „harmoniky“, reverzních přehybů (střídání orientace směrem nahoru, dolů). Proto budu v nákresech uvádět přehyb orientovaný nahoru (ven) silnou čarou a dolů (dovnitř) čárkovaně. Prvním krokem je horizontální rozdělení na 16 obdélníků (obr. 7.2.a)). Dále vytvoříme dva pomocné vodorovné přehyby, které nám určí tvar modelu (obr. 7.2.b)).

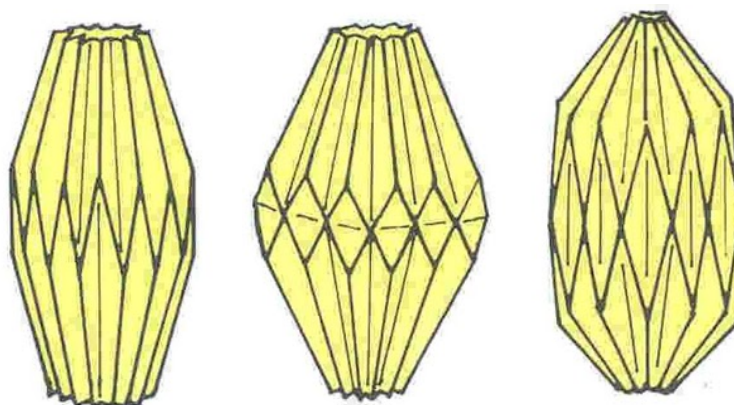


Obrázek 7.2: Model A

Dalším krokem je vytvoření spojnic pomocných přehybů podle obrázku obr. 7.2.c). Tento krok je velmi obtížný, proto je nejjednodušší, si spojnici nejprve pomocí pravítka narýsovat a následně papír ohýbat. Pokud nechcete během konstrukce rýsovat, můžete složit papír do „harmoniky“ a přehnout ho tak, aby byl přehyb spojnicí podle obr. 7.3.. Posledním krokem je finální určení orientace přehybů, které nám určí konečnou podobu modelu podle obrázku obr. 7.2.d). Pokud sít' stočíme do válcové podoby, dostaneme model stínítka (obr. 7.4.)

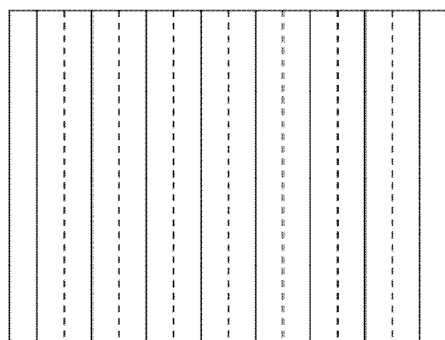


Obrázek 7.3: Pomocná konstrukce

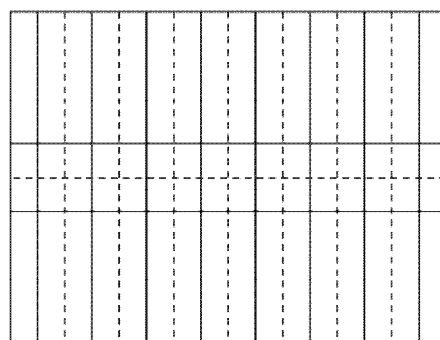


Obrázek 7.4: Model A, B a C (Kenneway 1987, str.100)

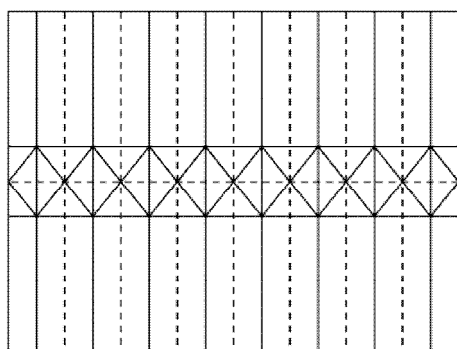
Model B má podobnou konstrukci jako A. Prvním krokem je horizontální rozdělení na 16 obdélníků (obr. 7.5.a)). Dále vytvoříme tři pomocné vodorovné přehyby, které nám určí tvar modelu (obr. 7.5.b)). Dalším krokem je vytvoření spojnic pomocných přehybů podle obrázku obr. 7.5.c). Posledním krokem je finální určení orientace přehybů, které nám určí konečnou podobu modelu podle obrázku obr. 7.5.d).



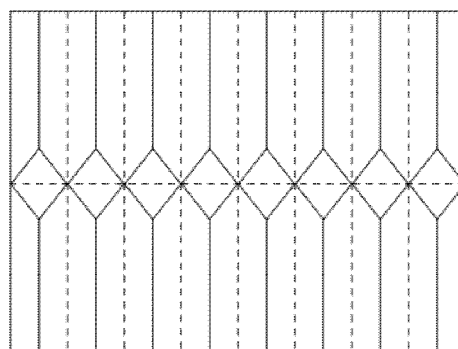
a)



b)



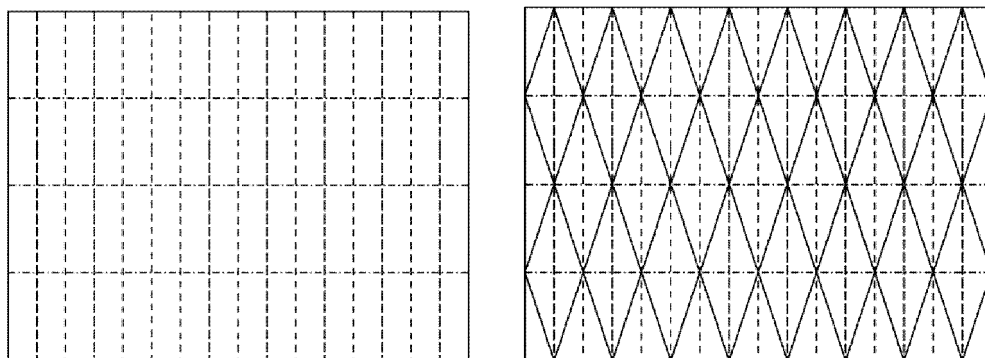
c)



d)

Obrázek 7.5.: Model B

Prvním krokem modelu C je opět horizontální rozdělení na 16 shodných obdélníků. Dále vytvoříme tři pomocné vodorovné přehyby, které nám rozdělí list vodorovně na čtvrtiny (čerchované úsečky na obr. 7.6.a)). Následující přehyby sestojíme pomocí průsečíků vodorovných a horizontálních přehybů podle obr. 7.6.b). Sít' je těmito přehyby kompletní (pomocné čerchované přehyby už nevyužijeme), stačí jen model stočit do válcové podoby (obr. 7.4.).

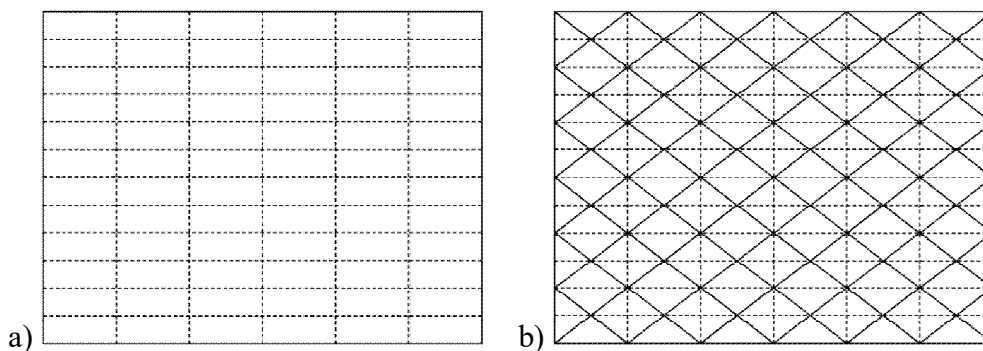


a)

b)

Obrázek 7.6.: Model C

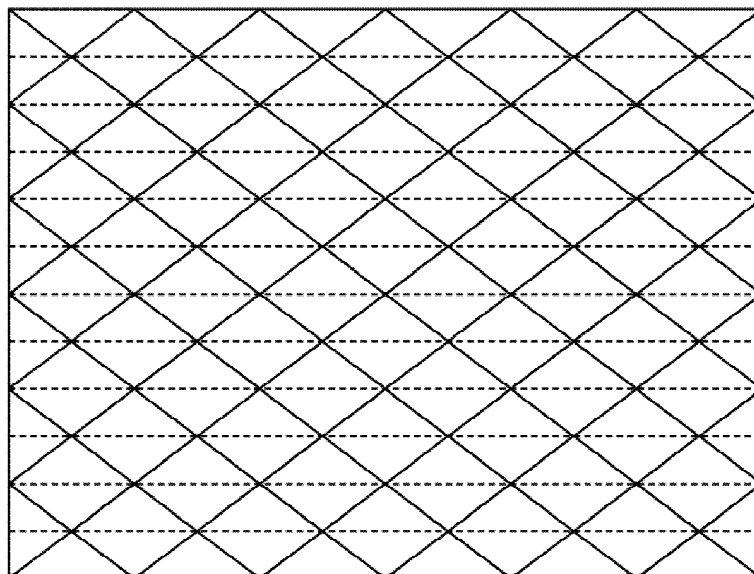
Poslední model D je podobný modelu C, jen je jeho síť tvořena více kosočtverci. Při konstrukci sítě začneme vodorovným rozdělením na dvanáct shodných obdélníků a horizontálním na šest shodných obdélníků. Následně sestrojíme přehyby, které jsou úhlopříčkami obdélníkového papíru. Když máme úhlopříčky, vytvoříme si k nim rovnoběžné přehyby podle obrázku 7.7.b). Na výsledný válcový model využijeme vodorovné a šikmé přehyby (obr. 7.8.), nebo si lze síť vytvořit na počítači a využít následně vytisknutou. U tohoto druhu sítě nemusíte mít striktně přesné počty vodorovných a horizontálních přehybů 12x6. V příloze 1 přikládám fotografie modelu 7x3 (vodorovné x horizontálním).(16)



a)

b)

Obrázek 7.7.: Model D



Obrázek 7.8.:Síť modelu D

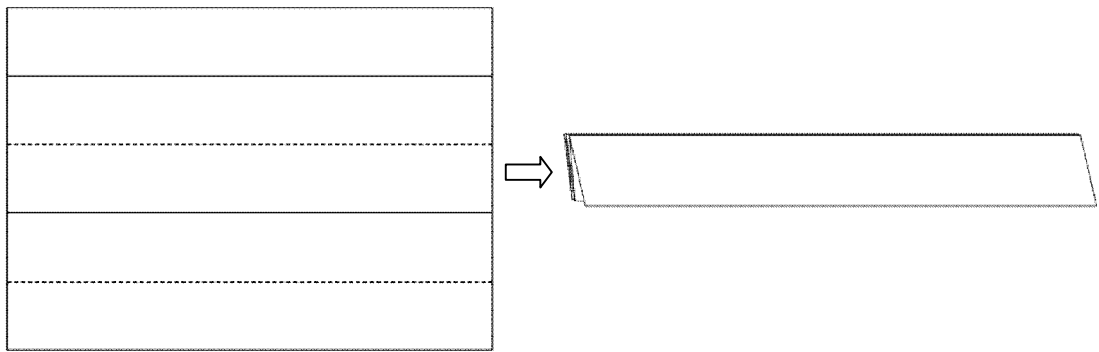
## 7.2 Miura Ori

Miura skládání (= Miura Ori) je druh konstrukce, díky které lze rovinný útvar složit do kompaktnější podoby. Konstrukce se jmenuje po svém autorovi, japonském astrofyzikovi Koryo Miura. Je velmi známá, jelikož se využívá v astronautickém inženýrství. Tato tradiční forma origami se využívá ke skládání solárních panelů určených pro družice ve vesmíru. Při přepravě panelů je důležitá jak jejich velikost při složení, tak i následná jednoduchost rozložení v kosmu. Právě Miura konstrukce umožňuje jednoduché složení i rozložení.

Uvedu zde postup konstrukce modelu, který bude představovat skládání solárních panelů. Zároveň se tímto způsobem skládají některé mapy, aby se daly co nejlépe a nejrychleji rozložit a složit. Ve výuce se skládání tohoto modelu může představit jako názorná modelace, která se využívá v praxi v astronautice.

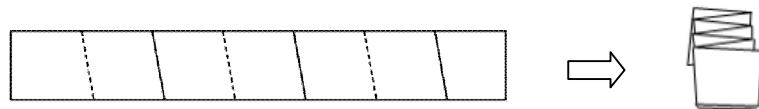
Postup konstrukce (Nishiyama, 2012):

- 1) Připravíme si list papíru formátu A<sub>3</sub> nebo B<sub>4</sub>.
- 2) Rozdělíme vodorovnými přehyby list papíru na pět shodných obdélníků a složíme ho do „harmoniky“ podle určené orientace na obrázku 7.9. Obdélníky nemusí být zcela shodné, menší nepřesnosti jsou tolerovány.



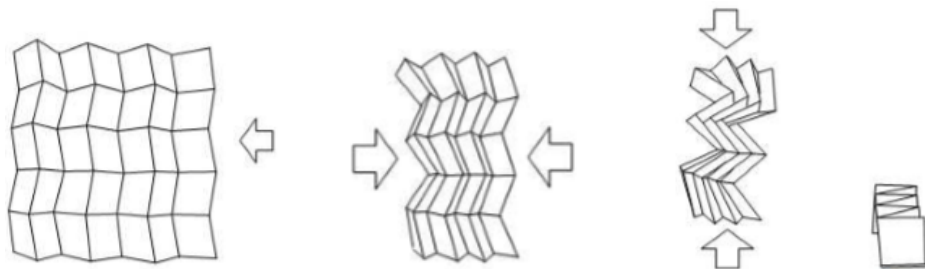
Obrázek 7.9.: Miura 1

- 3) Šikmými horizontálními přehyby rozdělíme „harmoniku“ na sedm částí podle obrázku 7.10. a složíme do kompaktního balíčku.



Obrázek 7.10.:Miura 2

- 4) Papír rozložíme a opět zkusíme složit takovým způsobem, že budeme tlačit z obou stran (obr. 7.11.).



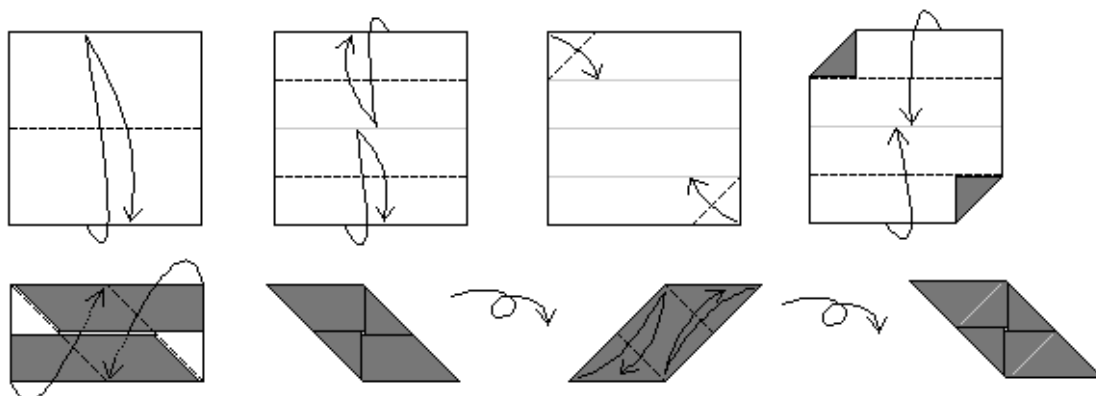
Obrázek 7.11.: Miura 3<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Zdroj obrázku Miura 3: NISHIYAMA, Yutaka. Miura folding: Applying origami to space exploration. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2012, **79**(2), 269-279.

## 8 Modulární origami

Předešlé skládky nám představovaly tradiční formu origami, a to skládání z jednoho kusu papíru. V této kapitole stručně představím modulární origami a jeho využití. Při konstrukci složitějších prostorových struktur či těles musíme použít větší papír a někdy ani dané těleso z jednoho kusu papíru nesložíme např. krychli. Ovšem pomocí modulárního origami je sestavení podstatně jednodušší. Hlavním rozdílem je skládání z více kusů papíru, z kterých se sestojí stejné komponenty (dílků). Dané komponenty se do sebe zasunou a vytvoří 3D strukturu. Tento princip se využívá v architektuře.

Nejznámější konstrukcí je Sonobova kostka, která je složena z šesti sonoba stavebních dílů (obr. 8.1.), které se do sebe zasunují. Jejím autorem je Mitsunobu Sonobe, dá se říci, že položil základy této techniky. Když využijeme například 30 dílů, získáme sedesátistěn. (Mulatinho, 2001, s. 76-78)



Obrázek 8.1.: Sonobův stavební díl<sup>10</sup>



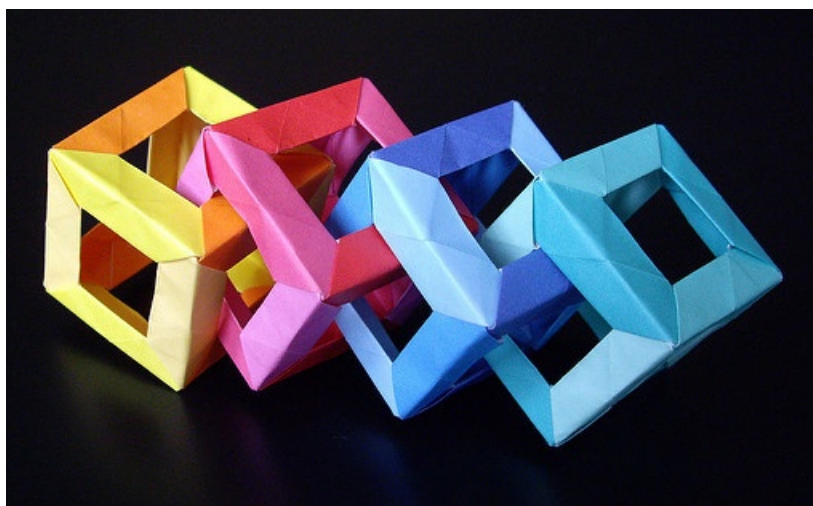
Obrázek 8.2.: Sonobova kostka<sup>11</sup>

<sup>10</sup>Zdroj obrázku: <http://www.logickaolympiada.cz/tabor/2009/prednasky/origami/kostka.png>

Další významnou osobou modulárního origami je Tomoko Fuse, která je autorkou mnoha komponentu z kterých lze sestavit krychli a další mnohostěny. Zároveň vymyslela mnoho krabiček a napsala přes 60 knih s různými návody. Postup konstrukce dvou jejích krychlí je popsán v knize *Nápadité origami: 32 skládanek krok za krokem* od Paula Mulatinho.



Obrázek 8.3.: Fuse krychle (Mulatinho, 2001, s. 73)



Obrázek 8.4.: Otevřená kostka<sup>12</sup>

---

<sup>11</sup> Zdroj obrázku: <https://www.oriwiki.com/showModel.php?ModelID=27690>

<sup>12</sup> Zdroj obrázku: [https://farm3.staticflickr.com/2157/2440395907\\_0d6bee75b5\\_z.jpg](https://farm3.staticflickr.com/2157/2440395907_0d6bee75b5_z.jpg)



## 9 Závěr

Ve své práci jsem se zabývala využitím origami ve výuce matematiky. Skládáním papíru se děti baví po celém světě, nejznámějšími skládkami jsou u nás letadla, parníky či čepice. Ovšem již při překládání papíru u konstrukce čepice vidíme geometrické útvary, které nám během ní vznikají. Pro seznámení s origami jsou tyto základní skládky nebo zvířecí modely ideální, každý si vyzkouší práci s papírem podle určitého postupu s dávkou trpělivosti. Následně (na druhém stupni základní školy) lze tuto tvorbu posunout blíže k matematickému kontextu a využívat názornější modely s komentářem, co nám dané přehyby představují a jakou mají vlastnost. Proto jsem ve své práci uváděla postupy konstrukcí s důkazy a několik pracovních listů, abych představila formu zadávání úloh toho typu. V příloze 2 jsou již pracovní listy připravené k tisku pro žáky a studenty.

Z vlastní zkušenosti a z jiných diplomových prací na toto téma mohu říci, že je přínosné ukázat geometrii z jiné perspektivy, a tím zpestřit vyučovací hodinu. Představováním modelů využívaných v praxi, jako je například Miura skládání solárních panelů, může sloužit k motivaci a zároveň k odůvodnění důležitosti geometrie kolem nás. V dnešní době techniky je mnoho aplikací a programů, které jsou aktivně používány ve výuce a připravují se další. Proč nevyužít i potenciál origami? Při skládání navíc nepotřebujeme speciální vybavení, stačí nám pouze list papíru.

# Literatura

BOAKES, Norma J. Origami-mathematics lessons: Paper folding as a teaching tool. *Mathitudes* [online]. 2008, **1**(1), 1-9 [cit. 2018-04-05].

BĚLECKÝ, Zdeněk. *Klíčové kompetence v základním vzdělávání*. V Praze: Výzkumný ústav pedagogický, 2007. ISBN 978-80-87000-07-6.

BOHÁČOVÁ, Jana. *Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání*. Praha, 2009. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Dostupné z: <http://jana.vysehrad.org/diplomka.pdf>

COERR, Eleanor. HIMLER, Ronald. *Sadako and the thousand paper cranes*. New York: Puffin, 1999. ISBN 0698118022.

Česká origami společnost. *Historie origami* [online]. 2010 [cit. 2018-04-04]. Dostupné z: <http://www.origami-cos.cz/historie-origami>.

GERETSCHLAGER, Robert. Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine*. 1995, **68**(No. 5), 357-371.

GHOUBABI, F., A. KASEM a C. KALISZYK. Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extensions. *Automated Deduction in Geometry*. T. Ida and J. Fleuriot (Eds.), Springer, 2012, (LNAI 7993), 143-160.

HATORI, Koshiro. *History of Origami* [online]. 2010 [cit. 2018-04-04]. Dostupné z: <https://origami.ousaan.com/library/historye.html>

HULL, Thomas C. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *The American Mathematical Monthly*. 2011, **118**(4), 307-315. Dostupné z: <http://mars.wne.edu/~thull/papers/amer.math.monthly.118.04.307-hull.pdf>

HUZITA, Humiaki. Axiomatic Development of Origami Geometry. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. 1989, **1**, 143-158.

JOHNSON, Donovan A. *Paper Folding for the Mathematics Class*. Minneapolis: National council of teachers of mathematics, 1957.

KENNEWAY, Eric. *Complete origami*. London: Ebury press, 1987.

KOUTECKÁ, Lucie. *Prostorové origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání*. Plzeň, 2012. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni.

LANG, Robert J. *Origami and Geometric Construction* [online]. 2003 [cit. 2018-04-05]. Dostupné z: [http://www.langorigami.com/files/articles/origami\\_constructions.pdf](http://www.langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf)

LANG, Robert J. a R. C. ALPERIN. One-, two-, and multi-fold origami axioms. *4th International Conference on Origami, Science, Mathematics and Education*. Pasadena: Caltech, 2006.

MULATINHO, Paulo. *Nápadité origami: 32 skládanek krok za krokem*. Praha: Ikar, 2001. ISBN 8072029207.

NISHIYAMA, Yutaka. Miura folding: Applying origami to space exploration. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2012, **79**(2), 269-279. ISSN 13118080.

PECH, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004.

PUPÍK, Petr. *Origami: Seminární práce z Historie matematiky*. Brno, Masarykova univerzita, 2008.

SASTRY, V. S. S. *Origami – Fun and Mathematics*. New Delhi: Vigyan Prasar, 2007.

SCHINKOVÁ, Nikol. *Skládání papíru ve výuce matematiky*. České Budějovice, 2016. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita.

SLÁMA, Michal. *Pythagorejské trojúhelníky*. Praha, 2015. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/164175/>

SUNDARA ROW, T., Wooster Woodruff BEMAN a David Eugene SMITH. *Geometric exercises in paper folding*. New York: Dover publications, 1966. ISBN 0486215946.

SUZUKI, Hirotaka. Modified Yoshimura Pattern for Lighting Environment Education. In: *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 20. Vídeň: Heldermann Verlag, 2016, s. 263-271. ISSN 1433-8157.

ŠTORKOVÁ, Marie. *Origami*. Zlín, 2007. Bakalářská práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.

WU, Joseph. *Origami: A brief history of the ancient art of paperfolding* [online]. 2016 [cit. 2018-04-05]. Dostupné z: <http://www.origami.as/home.html>

# Seznam obrázků

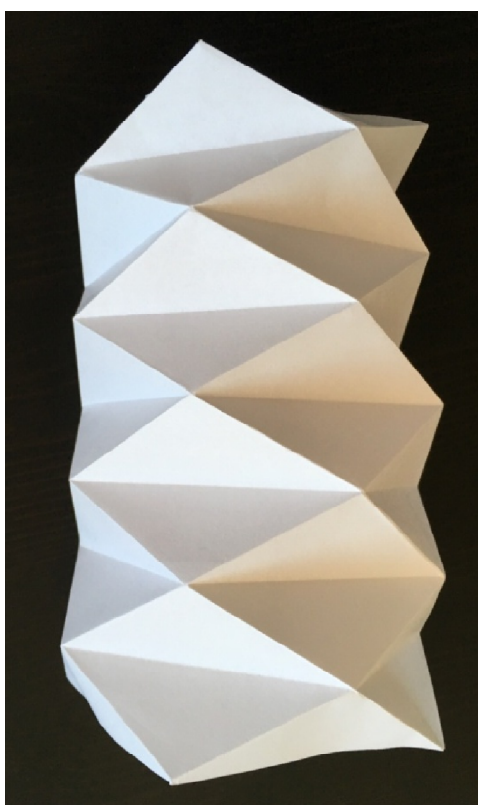
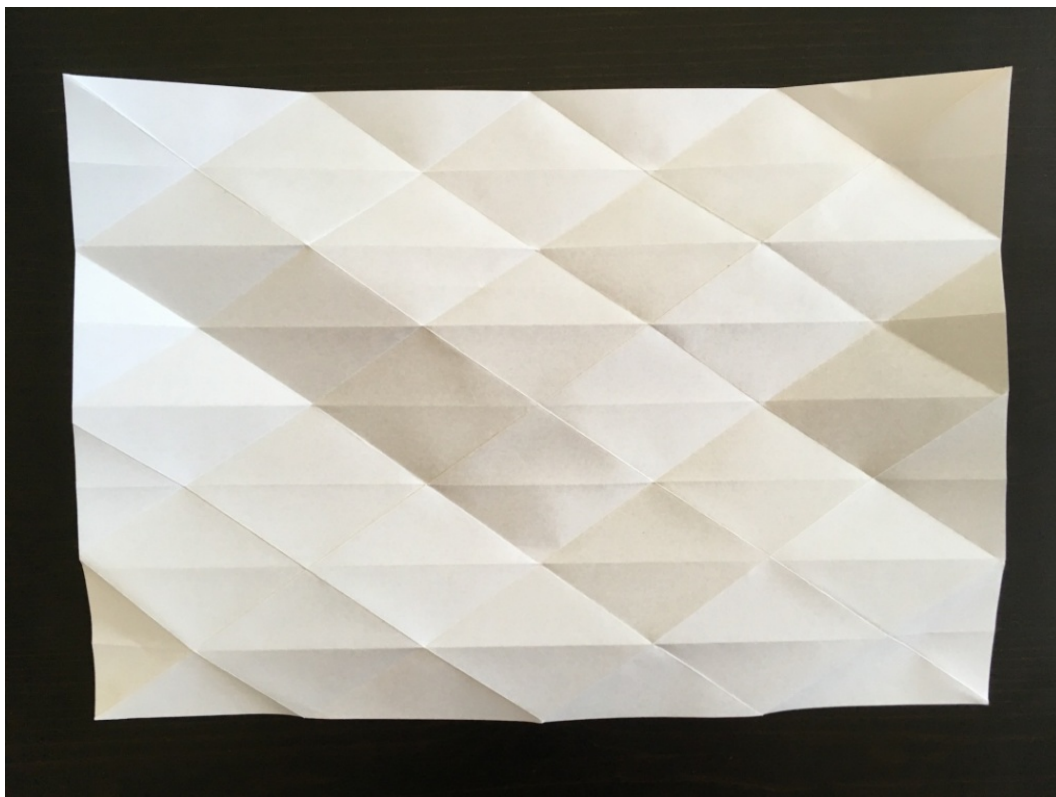
Obrázek 3.1: Axiom 1 .....	8	
Obrázek 3.2: Axiom 2 .....	9	
Obrázek 3.3: Axiom 3 .....	9	
Obrázek 3.4: Axiom 4 .....	9	
Obrázek 3.5: Axiom 5 .....	10	
Obrázek 3.6: Axiom 6 .....	10	
Obrázek 3.7: Axiom 7 .....	10	
Obrázek 3.8: Kolmý přehyb .....	11	
Obrázek 4.1.: Přeložení papíru podle axiomu 5 .....	13	
Obrázek 4.2.: Parabola určená tečnami.....	13	
Obrázek 4.3.: Ohniska elipsy .....	14	
Obrázek 4.4.: Jeden přehyb .....	14	
Obrázek 4.5.: Obálka tečen elipsy .....	15	
Obrázek 4.6.: Ohniska elipsy .....	15	
Obrázek 4.7.: Jeden přehyb .....	16	
Obrázek 4.8.: Obálka tečen hyperboly.....	16	
Obrázek 4.9.: Lampa	Obrázek 4.10.: Tužka.....	23
Obrázek 5.1.: Průměry v lichoběžníku .....	26	
Obrázek 5.2.: Aritmetický průměr.....	27	
Obrázek 5.3.: Konstrukce aritmetického průměru.....	27	
Obrázek 5.4.: Výška $v = a \cdot c$ .....	28	
Obrázek 5.5.: Zadání pro skládání.....	28	
Obrázek 5.6.: Geometrický průměr .....	28	
Obrázek 5.7.: Harmonický průměr .....	29	
Obrázek 5.8.: Harmonický průměr s úhlopříčkami .....	30	
Obrázek 5.9.: Ověření rovnosti obsahů.....	30	
Obrázek 6.1.: Čtverec .....	32	
Obrázek 6.2.: Součet úhlů v trojúhelníku.....	35	
Obrázek 6.3.: Součet úhlů pomocí přeložení .....	35	

Obrázek 6.4.: Pythagorejský trojúhelník (Schinková 2016) .....	36
Obrázek 6.5.:Rovnoramenný trojúhelník .....	37
Obrázek 6.6.: Konstrukce čtyřstěnu.....	38
Obrázek 6.7.: Lod'ka .....	44
Obrázek 6.8.: Znáznění vzorce.....	44
Obrázek 6.9.: Zobrazení vzorce.....	45
Obrázek 7.1: Papírová stínítka na lampy .....	46
Obrázek 7.2: Model A.....	47
Obrázek 7.3: Pomocná konstrukce .....	48
Obrázek 7.4: Model A, B a C (Kenneway 1987, str.100).....	48
Obrázek 7.5.: Model B.....	49
Obrázek 7.6.: Model C .....	50
Obrázek 7.7.: Model D.....	50
Obrázek 7.8.:Síť modelu D .....	51
Obrázek 7.9.: Miura 1 .....	52
Obrázek 7.10.:Miura 2 .....	52
Obrázek 7.11.: Miura 3 .....	52
Obrázek 8.1.: Sonobův stavební díl.....	53
Obrázek 8.2.: Sonobova kostka.....	53
Obrázek 8.3.: Fuse krychle (Mulatinho, 2001, s. 73) .....	54
Obrázek 8.4.: Otevřená kostka .....	54

## Seznam tabulek

Tabulka 1: Postup konstrukce rovnostranného trojúhelníku.....	43
---	----

# PŘÍLOHA 1



# PŘÍLOHA 2

Pracovní list – parabola

Pracovní list – elipsa

Pracovní list – hyperbola

Pracovní list – čtverec

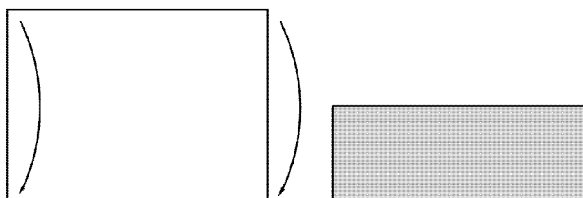
Pracovní list – trojúhelník



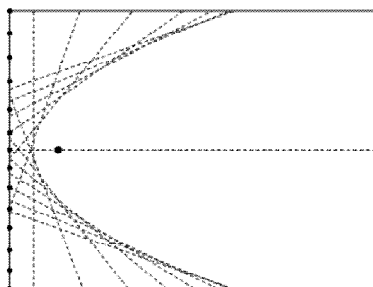
**Pomůcky:** papír formátu A4, černý fix

**Postup konstrukce:**

- 1) Papír přeložíme podélně na polovinu a rozložíme.



- 2) Na papíru si libovolně zvolte jednu z kratších stran papíru, kterou budete v dalším kroku využívat.
- 3) Na papíru si libovolně zvolte bod (= ohnisko), který bude ležet přibližně 3-5 cm od určené strany a na půlícím přehybu. Tento bod si vyznačte fixem.
- 4) Postupně přiložíme libovolné body zvolené strany (z 2. kroku) na bod vyznačený fixem (čím více bodů se přiloží, tím lépe).



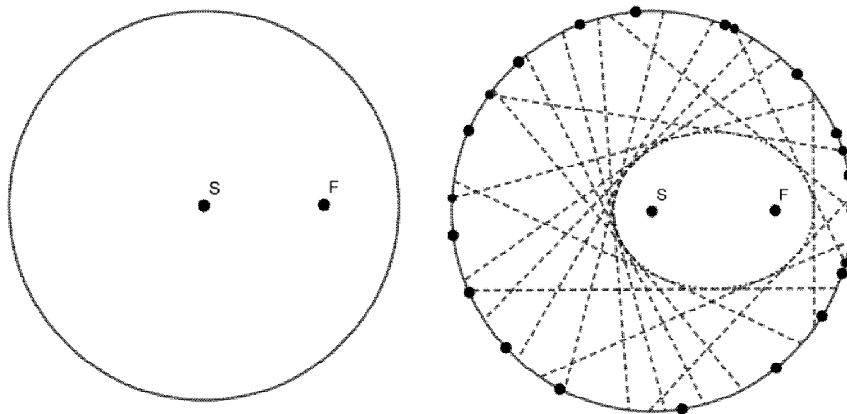
**Otázky:**

- a) Dokážete přesně určit, kde je vrchol paraboly?
- b) Jaké geometrické útvary nám znázornily parabolu na papíru?  
Zakroužkuj správné řešení.  
SEČNY - TEČNY - OSY - BODY
- c) Jakou vlastnost má přehyb, který podélně půlí papír na polovinu k parabole?
- d) Jak bude vypadat parabola, pokud bude ohnisko blíž/dál k určené straně?
- e) Kde se kolem nás setkáme s parabolou?

**Pomůcky:** papír formátu A4, černý fix, kružítko, nůžky

**Postup konstrukce:**

- 1) Na papíru si libovolně vyznačte bod S, který bude středem kružnice o libovolném poloměru. (čím větší kružnice bude, tím lépe se s ní bude manipulovat).
- 2) Uvnitř této kružnice libovolně zvolte bod F.
- 3) Pro lepší manipulování si kružnici na papíru vystříhejte.



- 4) Posledním krokem je vytvoření přehybů libovolných bodů kružnice na ohnisko F. Čím více bodů přiložíte, tím více bude křivka znatelná.

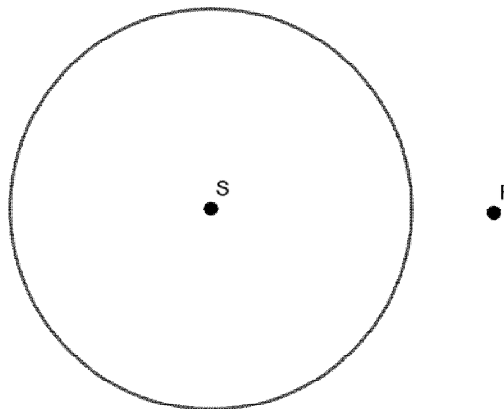
**Otázky:**

- a) Jakou mají vlastnost body S a F vzhledem k elipse?
- b) Jaké geometrické útvary nám znázornily elipsu na papíru? Zakroužkuj správné řešení.  
SEČNY - TEČNY - OSY - BODY
- c) Co by se stalo, kdybychom umístili bod F na bod S?
- d) Vyznačte si na vytvořené elipse: střed, vrcholy, excentricitu, hlavní a vedlejší poloosy. (Můžete už využít pravítko)
- e) Kde se kolem nás setkáme s elipsou?

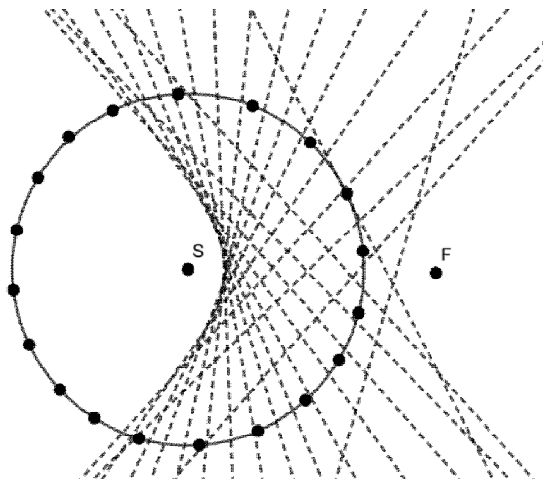
**Pomůcky:** papír formátu A4, černý fix, kružítko, nůžky

**Postup konstrukce:**

- 1) Na papíru si libovolně vyznačte bod S, který bude středem kružnice o libovolném poloměru (čím větší kružnice bude, tím lépe se s ní bude manipulovat).



- 2) Vně této kružnice libovolně zvolte bod F.
- 3) Posledním krokem je vytvoření přehybů libovolných bodů kružnice na ohnisko F. Čím více bodů přiložíte, tím více bude křivka znatelná.



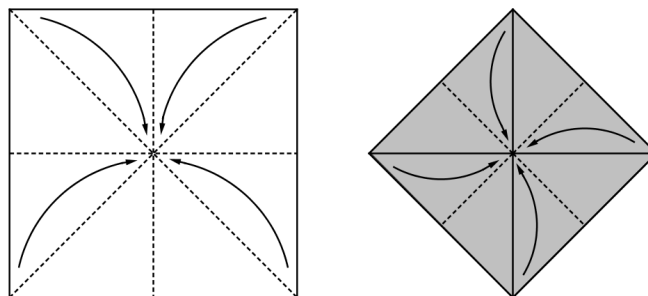
**Otázka:**

- a) Kde se kolem nás setkáme s hyperbolou?

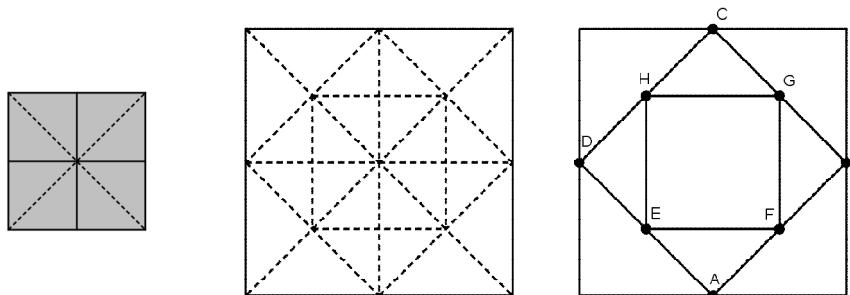
**Pomůcky:** čtvercový papír

**Postup:**

- 1) Na čtvercovém papíru vytvořte úhlopříčné přehyby.
- 2) Dále sestrojte vodorovný a horizontální půlící přehyb.



- 3) Přiložte vrcholy čtverce ke středu.
- 4) Vrcholy vzniklého čtverce opět přiložte ke středu.
- 5) Následně model rozložte, aby byla vidět síť přehybů.



**Otázky:**

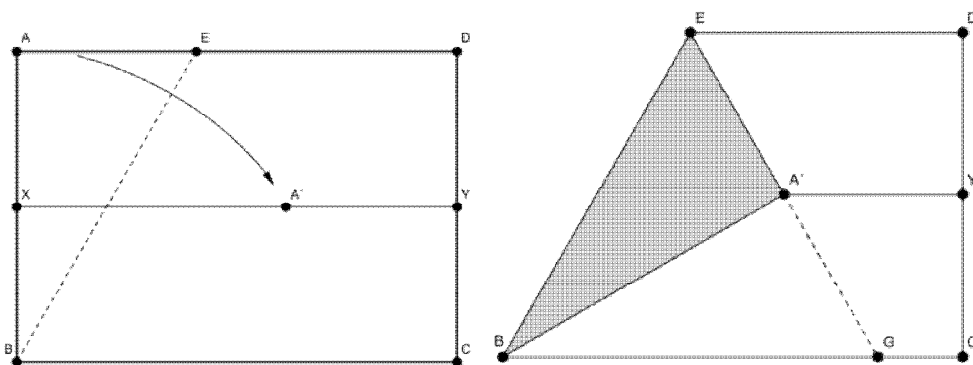
- a) Jaký vztah má obsah čtvercového papíru k vepsanému čtverci  $ABCD$ ?
- b) Jaký vztah má obsah vepsaného čtverci  $ABCD$  ke čtverci  $EFGH$ ?
- c) Jaký by byl vztah obsahu čtvercového papíru ke čtverci vepsanému  $EFGH$ ?

**Pomůcky:** 3x papír A4

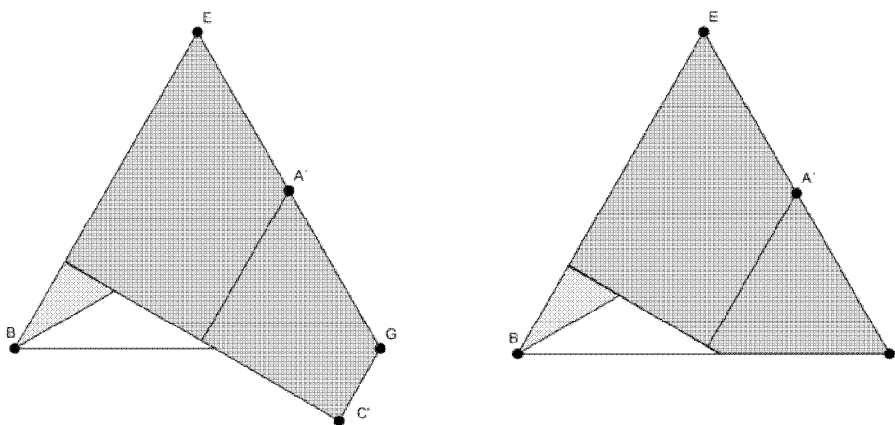
**Rovnostranný trojúhelník**

**Postup:**

- 1) Přehneme papír podélně na polovinu a rozložíme.
- 2) Přiložíme vrchol  $A$  na podélnou linii tak, aby přehyb procházel vedlejším vrcholem  $B$ .



- 3) Dále přehneme lichoběžníkovou část papíru  $GCDE$  podle hrany  $EA'$ .

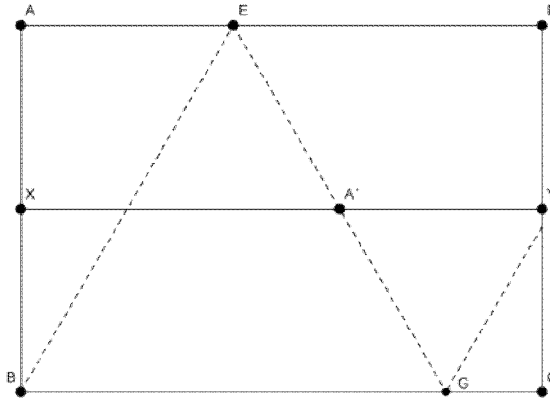


- 4) Posledním krokem je přehnutí přesahující části z rovnostranného trojúhelníku  $BEG$  na druhou stranu.

**Otázky a práce s modelem:**

- a) Určete, kolik os souměrnosti má daný trojúhelník.

- b) Sestrojte výšky a těžnice pomocí přehybů papíru.
- c) Určete pomocí přehybů střed kružnice opsané a vepsané.
- d) Vytvořte si ještě jeden model rovnostranného trojúhelníku a následně papír rozložte. Jakou má funkci podélný přehyb k trojúhelníku  $BEG$ ?



- e) Opět si model složte a vytvořte střední příčky. Následně rozhodněte jakého tělesa je síť, která je tvořena středními příčkami rovnostranného trojúhelníku.

### Úkol:

Pokuste se vymyslet vlastní postup konstrukce rovnostranného trojúhelníku, jestliže máte k dispozici pouze papír A4. Papír můžete libovolně přehýbat, nesmíte používat pravítko, kružítko ani nůžky.