UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Barbora Slezáková

Kuželosečky

Olomouc 2019 vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a uvedla veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne 16. 4. 2019 Barbora Slezáková

Poděkování

Děkuji Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a zkušenosti, kterými mě vedl a motivoval při zpracování bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Se studiem kuželoseček se setkáváme na střední škole v části analytické geometrie. Pojem kuželosečky zahrnuje dva typy – regulární kuželosečky a singulární kuželosečky. Se singulárními kuželosečkami se běžně setkáváme, ale tímto termínem je většinou ve školské matematice neoznačujeme. Zatímco regulární kuželosečky, to jest elipsa (včetně kružnice), hyperbola a parabola, se probírají podrobněji, jak analyticky, tak konstrukčně. Analytická podoba je součástí státní maturitní zkoušky z matematiky. Konstrukční podoba se probírá spíše až na vysokých školách.

Cílem bakalářské práce je ucelené zpracování informací a vlastností o jednotlivých typech kuželoseček, kterými se zabývám především v teoretické části. V praktické části se věnuji porovnání jednotlivých typů kuželoseček z hlediska analytického a konstrukčního.

Teoretickou část jsem rozdělila do kapitol, které napovídají, o jaký typ kuželosečky se jedná. V první kapitole vytvářím obecný náhled do oblasti kuželoseček. V dalších dvou kapitolách už se zabývám konkrétnějším rozdělením kuželoseček, a to jestli je kuželosečka regulární (vlastní) či singulární (nevlastní). Kapitola o singulárních kuželosečkách není tak rozsáhlá jako ta o kuželosečkách regulárních, jelikož o nich není tolik informací. Kapitolu o regulárních kuželosečkách dále dělím na podkapitoly, kde už se zabývám problematikou jednotlivých kuželoseček. Jednotlivé kuželosečky rozebírám dopodrobna. Dozvídáme se o jejich nákresu a obecných vlastnostech. Dále popisuji slovně i symbolicky konstrukce kuželosečky i hyperoskulačních kružnic, rovnice, které jsou s danou kuželosečkou spojeny, vzájemnou polohu kuželosečky s přímkami v rovině a další informace o tečně kuželosečky.

Praktickou část rozděluji do čtyř podkapitol – kružnice, elipsa, hyperbola a parabola. Jednotlivé podkapitoly dále dělím na analytickou geometrii kuželosečky a konstrukční geometrii kuželosečky. V analytické části, jak už název napovídá, podrobně počítám jednotlivé kuželosečky včetně vrcholů, ohnisek, os, tečen, bodů dotyků a podobně. V konstrukční části vždy zadávám nějaké parametry, body či přímky a podle různých vlastností jednotlivých kuželoseček je konstruuji. Konstruuji pomocí bodů, přímek či úseček, kružnic popř. dalších geometrických útvarů. Každý příklad zahrnuje rozbor, popis konstrukce, konstrukci, důkaz a diskuzi. Rozbor by měl obsahovat náčrtek a samotný rozbor příkladu, ale jelikož příklady rýsuji pomocí software Geogebra, tím pádem náčrtky vynechávám. Každou analytickou část propojuji s konstrukční, a to tak, že např. první příklad v analytické části paraboly, kde vypočítám všechny parametry a vše, co se v zadání žádá, pak konstruuji v prvním příkladu paraboly v konstrukční části. Pracuji s těmito vypočítanými parametry, takže si můžu ověřit, zda vše souhlasí, jak v analytické, tak v konstrukční části.

Inspiraci u příkladů v praktické části čerpám mimo jiné ze dvou středoškolských učebnic (Analytická geometrie a Sbírka úloh z deskriptivní geometrie od nakladatelství PROMETHEUS).

Grafickou stránku této práce rýsuji pomocí software Geogebra, který je volně dostupný pro instalaci nebo se dá i rýsovat online přímo ve webové aplikaci.

1 Kuželosečky

Definice

Kuželosečky jsou křivky, ve kterých rovina protíná rotační kuželovou plochu.

Rovnice kuželosečky:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}x + a_{33} = 0$$

Maticový tvar kuželosečky:

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Velký determinant kuželosečky:

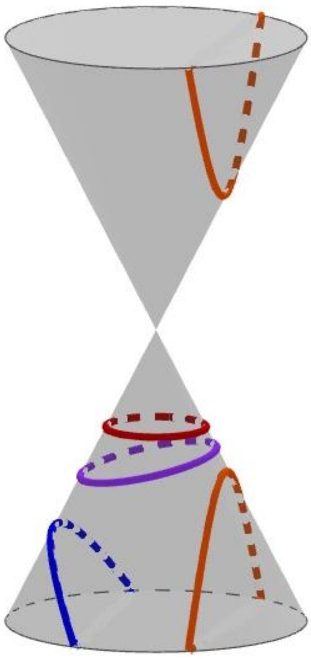
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Malý determinant kuželosečky:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1.1 Řezy na kuželové ploše

Jak už nám název kuželoseček napovídá, získáme je řezem rotační kuželové plochy. Jednotlivé druhy regulárních kuželoseček získáme tím, kde protne sečná rovina kuželovou plochu.



Obrázek 1 – jednotlivé řezy rotační kuželové plochy

Protne-li sečná rovina kuželovou plochu, která je rovnoběžná s rovinou kruhového řezu, nazveme ji kružnicí. Kuželosečku nazýváme elipsou, jestliže vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu protíná rovinu řídící kružnice kuželové plochy v přímce, která je vnější přímkou kružnice. Hyperbolu poznáme podle toho, že vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu protíná rovinu řídící kružnice v sečně ke kružnici. Posledním typem je parabola vyznačující se tím, že vrcholová rovina je rovnoběžná s rovinou řezu a protíná rovinu řídící kružnice v tečně ke kružnici. (Hodaňová a kol., 2005)

1.2 Rozdělení

Kuželosečky dělíme do dvou kategorií, a to na singulární (nevlastní) a regulární (vlastní).

Za singulární kuželosečky označujeme případy, kdy průnikem kuželové plochy a roviny vznikne bod (též užíváme název singulární elipsa), dvojice různoběžek (singulární hyperbola), dvojice rovnoběžek či množina přímek (oba případy spadají pod název singulární parabola). Za regulární kuželosečky označujeme již výše zmíněné útvary – kružnice, elipsa, hyperbola a parabola, u kterých závisí na velikosti úhlu, který svírá rovina řezu s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy.

Definice

Buď $K \neq \emptyset$ kuželosečka, F její libovolná matice v některé bázi. Řekneme, že K je regulární, jestliže $\Delta \neq 0$. V opačném případě řekneme, že K je singulární.

Věta 1

Buď K kuželosečka, B libovolná báze a F některá matice kuželosečky K v této bázi, Δ, δ nechť jsou po řadě velký a malý determinant, λ některé z vlastních čísel matice F_0. Pak platí:

$\Delta \neq 0 \wedge \delta > 0 \wedge \lambda\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je elipsa (vč. kružnice),

$\Delta \neq 0 \wedge \delta > 0 \wedge \lambda\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = \emptyset$,

$\Delta \neq 0 \wedge \delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je hyperbola,

$\Delta \neq 0 \wedge \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je parabola,

$\Delta = 0 \wedge \delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je jednobodová množina,

$\Delta = 0 \wedge \delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je dvojice různoběžek,

$\Delta = 0 \wedge \delta = 0 \wedge h(F) \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je dvojice rovnoběžek, nebo $K = \emptyset$,

$\Delta = 0 \wedge \delta = 0 \wedge h(F) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ K je přímka. (Jukl, 2006)

Věta 2

Buď K neprázdná kuželosečka, F její libovolná matice v libovolné bázi. Pak

- nulovost či nenulovost Δ,
- znaménko δ,
- $h(F)$,

jsou jednoznačně určeny kuželosečkou K (jde o geometrické vlastnosti). (Jukl, 2006)

Definice

Buď $K \neq \emptyset$ kuželosečka, F její libovolná matice v některé bázi. Kuželosečka K se nazývá

- eliptického typu, jestliže $\delta > 0$,
- hyperbolického typu, jestliže $\delta < 0$,
- parabolického typu, jestliže $\delta = 0$.

Tabulka 1 - utřídění kuželoseček

	singulární kuželosečka: $\mathbf{\Delta = 0}$	**regulární kuželosečka:** $\mathbf{\Delta \neq 0}$
eliptický typ: $\boldsymbol{\delta} > 0$	jednobodová množina	elipsa
hyperbolický typ: $\boldsymbol{\delta} < 0$	dvojice různoběžek	hyperbola
parabolický typ: $\boldsymbol{\delta = 0}$	dvojice rovnoběžek přímky	parabola

2 Singulární kuželosečky

Singulární kuželosečky vzniknou průnikem vrcholové roviny s rotační kuželovou plochou. Vrcholová rovina je rovina procházející vrcholem.

2.1 Jednobodová množina

Definice

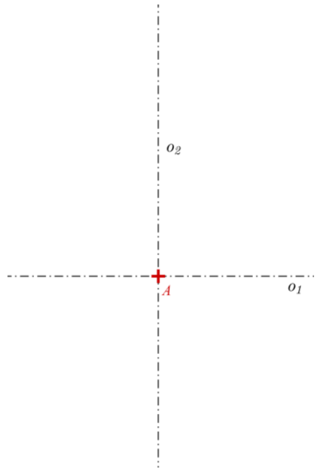
Je dána kuželosečka K nazveme takový bod $X\ [x, y]$, pro který platí

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

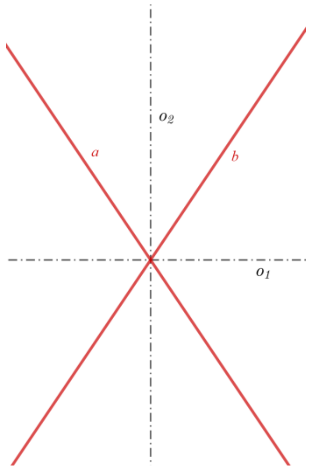
Singulární bod kuželosečky je bodem kuželosečky a zároveň jejím středem. Protíná-li vrcholová rovina pouze vrchol, je výsledkem bod.



Obrázek 2 - singulární bod

2.2 Dvojice různoběžek

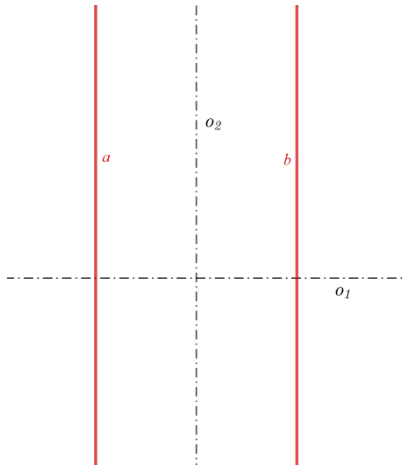
Kuželosečka se skládá ze dvou různých přímek právě tehdy, protíná-li vrcholová rovina kuželovou plochu a zároveň je hyperbolického typu.



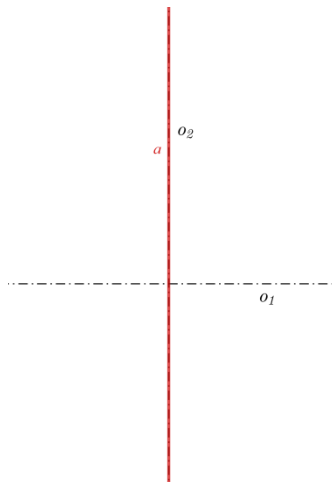
Obrázek 3 - dvojice různoběžných přímek

2.3 Dvojice rovnoběžek, přímka

Kuželosečka se skládá z dvojice rovnoběžek či přímky právě tehdy, protíná-li vrcholová rovina kuželovou plochu a zároveň je parabolického typu. Dvojice rovnoběžek je pouze imaginární, jelikož lze spočítat, ale nedá se představit.



Obrázek 4 - dvojice rovnoběžných přímek

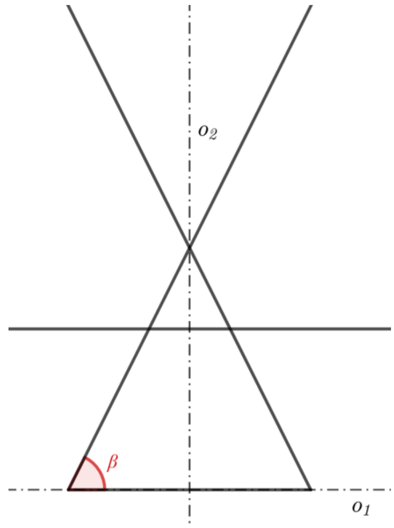


Obrázek 5 - přímka

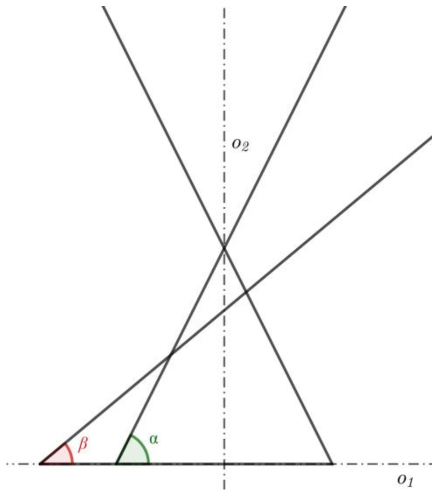
3 Regulární kuželosečky

3.1.1 Quételetova-Dandelinova věta[1]

Rovina σ, která neprochází vrcholem kuželové plochy, a která svírá s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy úhel β menší než je úhel α, který svírají povrchové přímky kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace, protíná kuželovou plochu v elipse. Je-li úhel α roven úhlu β, potom rovina σ protíná kuželovou plochu v parabole. Je-li úhel β větší než úhel α, potom řezem roviny σ a kuželové plochy je hyperbola. Ohniska F' a F'' popř. ohnisko F v případě paraboly, jsou body dotyku kulových ploch κ', κ'' vepsaných kuželové ploše, které se zároveň dotýkají roviny řezu σ. (Pech, 2004)

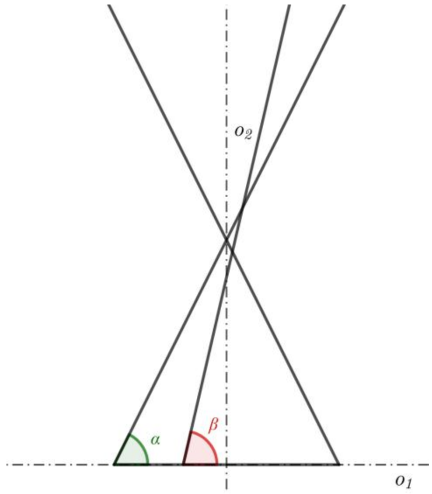


Obrázek 6 - řezem je kružnice

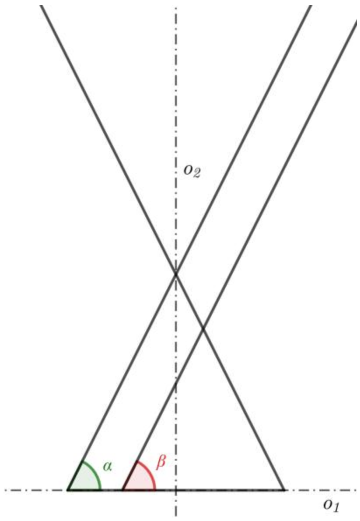


Obrázek 7- řezem je elipsa

[1] Číst: [Kételetova – Dándelenova], L. A. J. Quételet, G. P. Dandelin jsou dva slavní matematici z přelomu 18. a 19. století



Obrázek 8 - řezem je hyperbola



Obrázek 9 - řezem je parabola

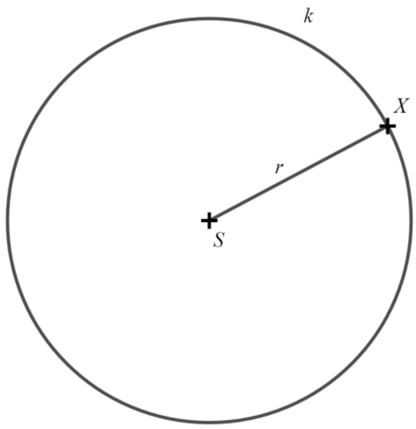
3.2 Kružnice

Definice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost r.

Symbolicky:

$$k = \{X \in \rho;\ |SX| = r\}$$



Obrázek 10 - kružnice

Kružnici značíme k, bod S nazýváme středem, r je poloměr kružnice a d nazýváme průměr, $d = 2r$. Je to speciální případ elipsy, kde se rovnají velikosti poloos a excentricita e je rovna nule.

S kružnicí jsou blízce spojeny pojmy kruh a tětiva. Kruh je množina bodů, která se skládá z kružnice a její vnitřní části. Tětiva je úsečka, která spojuje v kružnici dva body, prochází-li úsečka středem kružnice, nazveme ji průměrem. Kružnice může být opsaná nebo vepsaná. Opsaná prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníku. Vepsaná leží uvnitř trojúhelníku, dotýká se jeho všech tří stran.

3.2.1 Konstrukce kružnice

Určíme si bod S, který je středem. Vezmeme si kružítko a narýsujeme kružnici k o poloměru r. V postupech se značí $k\ (S, r)$.

3.2.2 Rovnice kružnice

Obecná rovnice kružnice je rovna:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0, p = m^2 + n^2 - r^2$$

Středová rovnice kružnice je rovna:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

U středové rovnice, kde máme střed posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [m;\ n]$.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

U středové rovnice, kde nemáme střed S nijak posunut a souřadnice jsou $S\ [0;\ 0]$.

Rovnice tečny ke kružnici v bodě dotyku T je rovna:

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$$

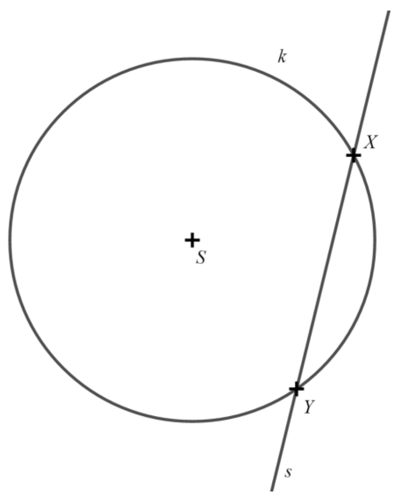
Souřadnice bodu dotyku jsou $T\ [x_0;\ y_0]$ a $S\ [m;\ n]$.

3.2.3 Vzájemná poloha kružnice a přímky v rovině

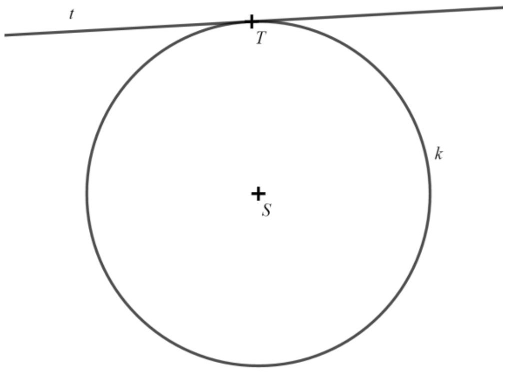
U kružnice a přímky rozlišujeme tři varianty vzájemné polohy, a to že přímka je sečnou kružnice – přímka protíná kružnici ve dvou bodech. Přímka je tečnou ke kružnici – přímka má s kružnicí společný jen jeden jediný bod, který se nazývá bod dotyku T. Posledním případem je přímka, která nemá s kružnicí společný žádný bod. Tato přímka se nazývá vnější přímka.

Vnitřní oblast kružnice nazýváme množinou bodů X roviny, pro které platí $|SX| < r$, kde r je poloměr kružnice.

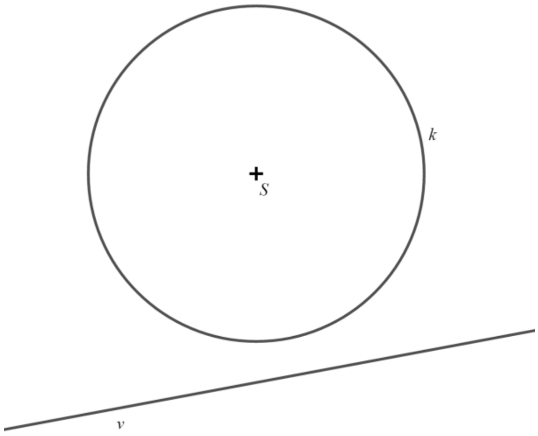
Vnější oblast kružnice nazýváme množinou bodů X roviny, pro které platí $|SX| > r$, kde r je poloměr kružnice.



Obrázek 11 - sečna ke kružnici



Obrázek 12 - tečna kružnice



Obrázek 13 - vnější přímka ke kružnici

3.3 Elipsa

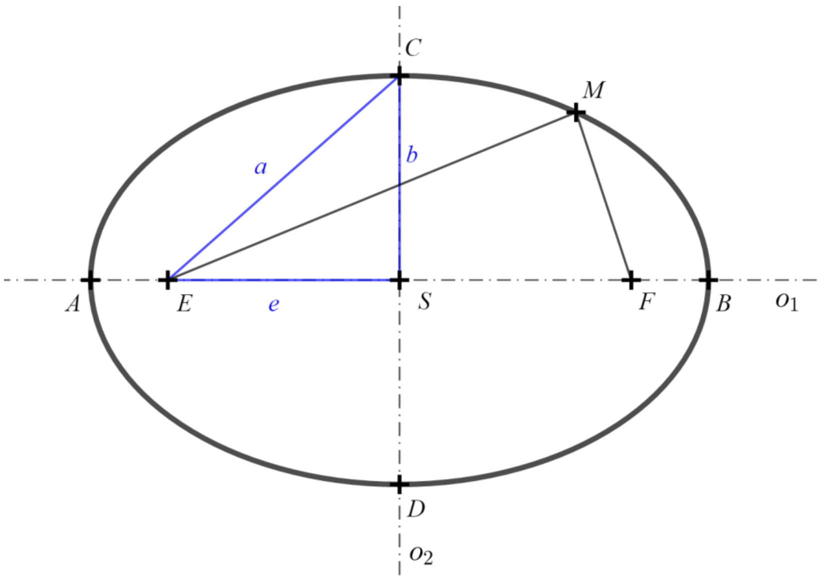
Definice

Prostorová definice: Elipsa je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina není kolmá k ose rotační kuželové plochy a rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem má s kuželovou plochou společný pouze vrchol.

Ohnisková definice: Elipsa e je množina všech bodů v dané rovině ρ, jejichž součet vzdáleností od dvou různých pevně daných bodů E, F je roven danému číslu $2a$, které je větší než vzdálenost bodů E, F.

Symbolicky:

$$e = \{X \in \rho;\ |EX| + |FX| = 2a, 0 < |EF| < 2a\}$$



Obrázek 14 - elipsa

Body A, B nazýváme hlavní vrcholy a body C, D nazýváme vedlejší vrcholy elipsy. Velikost $|AB| = 2a$ nazýváme délkou hlavní poloosy, $|CD| = 2b$ délkou vedlejší poloosy. Body E, F nazýváme ohniska a bod S je středem elipsy. Vzdálenost ohnisek E, F od jejich vedlejších vrcholů C, D je $|EC| = |FC| = |ED| = |FD| = a$. Vzdálenost vedlejších vrcholů od středu S je $|CS| = |DS| = b$. Vzdálenost ohniska od středu elipsy je $|ES| = |FS| = e$, e nazýváme excentricitou a tedy $|EF| = 2e$.

Bod M je libovolný bod elipsy, úsečky ME a MF jsou průvodiče bodu M. Úhel mezi body E, M, F nazýváme vnitřním úhlem průvodičů bodu M. Pravoúhlý trojúhelník ESC nazýváme charakteristickým trojúhelníkem elipsy.

Kružnice je zvláštním případem elipsy, kde ohniska splývají se středem a excentricita je rovna nule, tj $e = 0$.

3.3.1 Konstrukce elipsy

Sestrojíme hlavní body A, B a ohniska E, F na hlavní poloose elipsy, $|AB| > |EF|$. Všechny čtyři body leží na hlavní ose elipsy o_1. Pod konstrukcí elipsy si narýsujeme pomocnou úsečku XY ($|AB| = |XY|$) a na ní zvolíme bod P ($|PX| - |PY| < |EF|$). Dále narýsujeme kružnici k_1 se středem v bodě E o poloměru $|PX|$ a kružnici k_2 se středem v bodě F o poloměru $|PY|$. V místech, kde se nám protne k_1 s k_2 vzniknou body M_1 a M_2, jsou to libovolné body elipsy. Zvolením dalších a dalších bodů P a při jejich opakovaném postupu nám vzniknou další body elipsy. Uprostřed přímky AB narýsujeme bod S. Kolmo na hlavní poloosu ve středu S narýsujeme vedlejší poloosu a na ni vedlejší body C a D. Vedlejší osu značíme o_2. Této metodě říkáme bodová konstrukce elipsy.

Poznámka: hlavní osu o_1 i vedlejší osu o_2 rýsujeme čerchovaně.

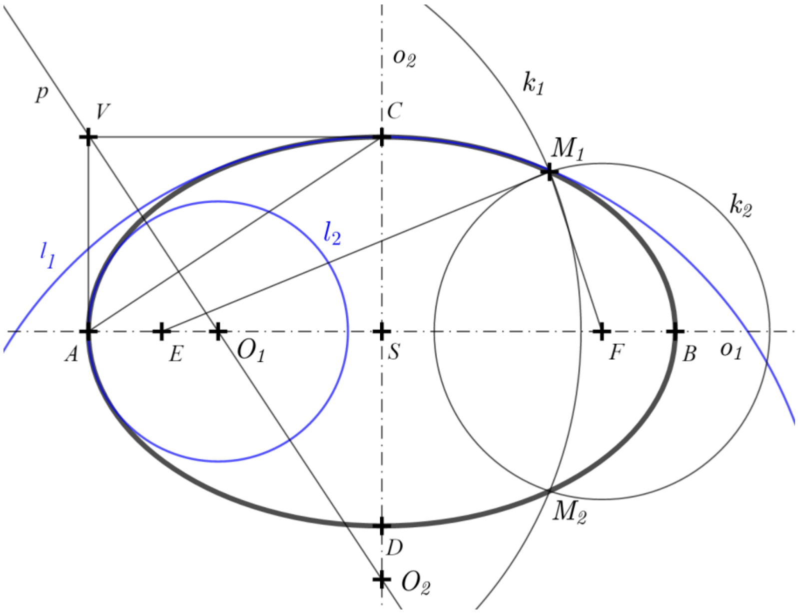
U konstrukce elipsy nesmíme zapomenout na hyperoskulační kružnice, které znázorňují pomocí oblouků v oblasti hlavních a vedlejších vrcholů část elipsy. Sestrojíme čtvrtý vrchol V tak, abychom doplnili trojúhelník ASC na obdélník $ASCV$. Z bodu V vedeme polopřímku p, která je kolmá na přímku AC. V průniku polopřímky p hlavní poloosy elipsy nám vznikne bod O_1, nyní sestrojíme kružnici l_1 se středem v bodě O_1 a poloměrem $|O_1A|$. Stejným postupem při protnutí polopřímky p s vedlejší poloosou elipsy vznikne bod O_2. Narýsujeme kružnici l_2 se středem v bodě O_2 o poloměru $|O_2C|$. Stejným postupem sestrojíme i kružnice l_3 a l_4 v bodech B a D. Kružnice l_1, l_2, l_3 a l_4 nazýváme hyperoskulační kružnice v bodech A, B, C, D.

Symbolický zápis konstrukce elipsy:

1. sestrojíme body A, B, E, F
2. o_1; o_1 je hlavni osa elipsy
3. $S; S = \frac{|AB|}{2}$
4. o_2; $o_2 \in S, o_2 \perp o_1$
5. úsečka mimo elipsu XY; $|XY| = |AB|$
6. libovolný bod P; $P \in \overleftrightarrow{XY}$
7. k_1; $k_1\ (E, |PX|)$
8. k_2; $k_2\ (F, |PY|)$
9. M_1, M_2; $k_1 \cap k_2 = \{M_1, M_2\}$
10. elipsa

Symbolický zápis konstrukce hyperoskulačních kružnic:

1. $V;\ V \in$ obdélníku $ASCV$
2. $p;\ p\ \perp \overleftrightarrow{AC}, V \in p$
3. $O_1;\ O_1 \in p \cap o_1$
4. $l_2;\ l_2\ (O_1, |O_1A|)$
5. $O_2, O_2 \in p \cap o_2$
6. $l_1;\ l_1\ (O_2, |O_2C|)$
7. stejným postupem sestrojíme kružnice l_3, l_4



Obrázek 15 - konstrukce elipsy

3.3.2 Rovnice elipsy

Obecné vztahy:

- velikost hlavní poloosy elipsy: $a = |AS| = |BS|$
- velikost vedlejší poloosy elipsy: $b = |CS| = |DS|$
- excentricita: $e = |ES| = |FS|, e = |EM| - |FM|$

$$a^2 = e^2 + b^2$$

$$|M_1E| + |M_2F| = 2a$$

<u>Obecná rovnice elipsy je rovna:</u>

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0, (pq > 0)$$

<u>Středová rovnice kružnice je rovna:</u>

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

U středové rovnice, kde máme střed posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [m;\ n]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$

U středové rovnice, kde máme střed posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [m;\ n]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

U středové rovnice, u které nemáme střed S nijak posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [0;\ 0]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

U středové rovnice, u které nemáme střed S nijak posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [0;\ 0]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

Rovnice tečny k elipse v bodě dotyku T je rovna:

$$\frac{(x_0-m)(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x_0-m)(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)^2}{a^2}=1$$

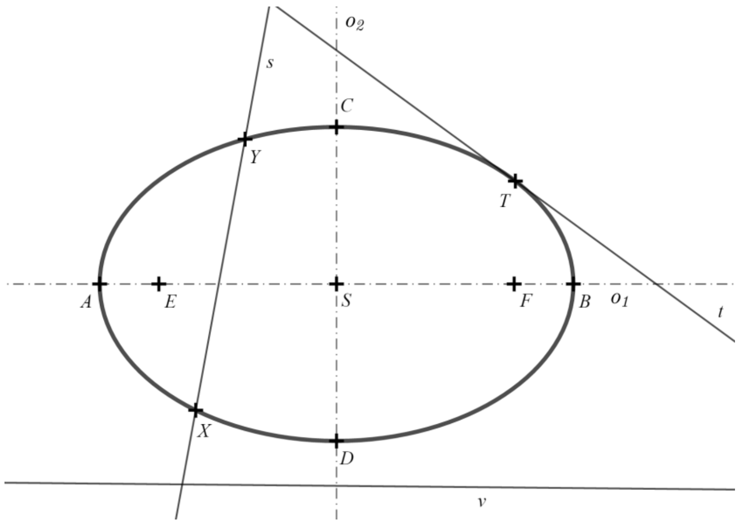
Souřadnice bodu dotyku jsou $T\ [x_0;\ \ y_0]$ a $S\ [m;\ \ n]$.

3.3.3 Vzájemná poloha elipsy a přímky v rovině

Se vzájemnou polohou přímek v rovině to u elipsy máme stejné jako u vzájemné polohy přímek a kružnice, proto vše shrneme do jednoho nákresu. Opět existují tři varianty, a to že buď přímka prochází elipsou ve dvou bodech, nazýváme jí sečnou elipsy. Nebo přímka prochází v jednom bodě elipsy, se střetnutím v bodě dotyku T, tuto přímku nazýváme tečnou. V posledním případě nemá přímka s elipsou žádný společný bod. Přímka se nazývá vnější přímka elipsy.

Vnitřní oblastí elipsy s hlavní délkou osy $|EF| < 2a$ nazveme množinu bodů M roviny, pro které platí $|EM| + |FM| < 2a$.

Vnější oblastí elipsy s hlavní délkou osy $|EF| < 2a$ nazveme množinu bodů M roviny, pro které platí $|EM| + |FM| > 2a$.



Obrázek 16 - vzájemná poloha přímek a elipsy

3.3.4 Tečna elipsy

Definice

Nechť M je libovolný bod elipsy. Přímka, procházející bodem M, který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s elipsou, nazýváme tečna elipsy s dotykovým bodem M. Přímka, procházející bodem M, která je kolmá na tečnu, nazýváme normálou v bodě M. (Pech, 2004)

Přímky EM_1 a FM_1 (obrázek č. 15) jsou průvodiče bodu M_1 a rozdělují rovinu na čtyři úhly. Úhel, který obsahuje střed S, nazýváme vnitřní úhel průvodičů. Úhel k němu vedlejší nazýváme vnějším úhlem průvodičů bodu M_1. Osa vnějšího úhlu průvodičů je tečnou elipsy v bodě M_1. Normála elipsy je přímka n kolmá na tečnu v bodě M_1. (Hodaňová a kol., 2005)

Věta 1

Tečna elipsy, sestrojená v libovolném bodě, je osou vnějších úhlů průvodičů tohoto bodu dotyku. (Hodaňová a kol, 2005)

Věta 2

Tečna elipsy půlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku. (Pech, 2005)

Věta 3

Množina všech bodů, které jsou souměrně sdružené s jedním ohniskem elipsy podle tečen, je kružnice se středem v druhém ohnisku o poloměru rovném velikosti hlavní osy elipsy. (Hodaňová a kol., 2005)

Věta 4

Množina všech pat kolmic, které jsou spuštěny z ohnisek elipsy na všechny její tečny, je kružnice opsaná okolo středu elipsy poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy. (Hodaňová a kol., 2005)

Výpočet tečny

Bod $M\ [m;\ n]$ je bod elipsy s rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3.3.4.1}$$

Bodem M povedeme jakoukoliv přímkou r

$$r: x = m + ut$$
$$y = n + vt \tag{3.3.4.2}$$

$\vec{u} = (u, v)$ je směrový vektor přímky r, t je parametr

Budeme hledat společné body elipsy a přímky r, dosadíme tedy do rovnosti (3.3.4.1) a (3.3.4.2). Dostaneme rovnici pro t ve tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0 \tag{3.3.4.3}$$

$$\frac{m^2+2mut+(ut)^2}{a^2}+\frac{n^2+2nvt+(vt)^2}{b^2}=1 \tag{3.3.4.4}$$

$$b^2(m^2 + 2mut + (ut)^2) + a^2(n^2 + 2nut + (vt)^2) - a^2b^2 = 0 \tag{3.3.4.5}$$

odtud dostaneme

$$A = a^2v^2 + b^2u^2$$
$$B = vna^2 + umb^2$$
$$C = b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 \tag{3.3.4.6}$$

Rovnice (3.3.4.3) je kvadratická a z (3.3.4.6) plyne, že $A \neq 0$, jelikož bod M náleží elipse, je $C = 0$. Rovnice je tedy

$$At^2 + 2Bt = 0 \tag{3.3.4.7}$$

Jedním kořenem je pro nás nula. Kořen vede po dosazení do rovnice (3.3.4.2) k průsečíku bodu M elipsy a přímky r. Bod M bude dvojnásobným průsečíkem elipsy a přímky r, jestliže nula bude dvojnásobným kořenem $t(At + 2B) = 0$ čili bude-li $B = 0$. Ze vztahu $vna^2 + umb^2 = 0 = B$ dostaneme souřadnice směrového vektoru $\vec{u}$ přímky r. Směrový vektor $\vec{u}$ je vždy nenulový a přímka r existuje v každém bodě elipsy. (Pech, 2004)

3.4 Hyperbola

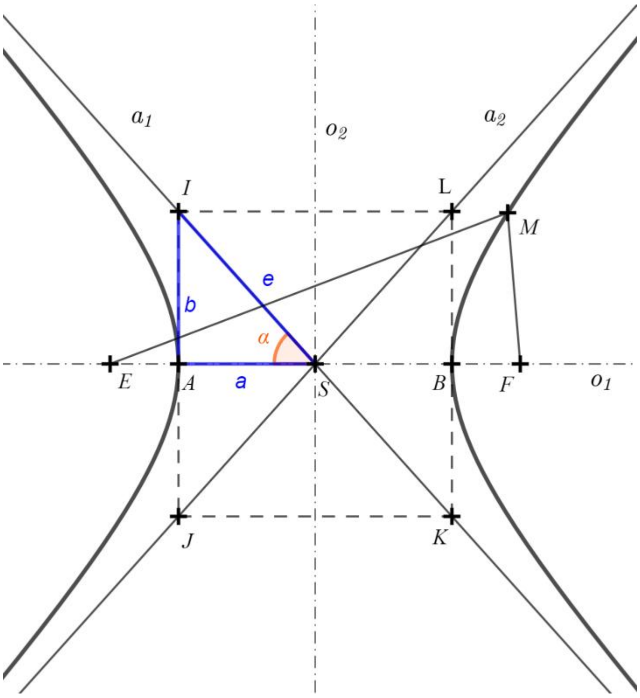
Definice

Prostorová definice: Hyperbola je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem protíná kuželovou plochu ve dvou různoběžných přímkách.

Ohnisková definice: Hyperbola h je množinou všech bodů v dané rovině ρ, pro něž je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou různých pevných bodů E, F rovna danému číslu $2a$, které je menší než vzdálenost bodů E, F.

Symbolicky:

$$h = \{X\epsilon\rho;\ \big||EX| - |FX|\big| = 2a, 0 < 2a < |EF|\}$$



Obrázek 17 - hyperbola

Body A, B nazýváme hlavními vrcholy a body C, D vedlejšími vrcholy hyperboly. Body E a F jsou ohniska hyperboly, $|AB| < |EF|$. Přímku o_1, která prochází hlavními vrcholy i ohnisky, nazýváme hlavní osou hyperboly. Leží na ní střed hyperboly S. Středem hyperboly prochází vedlejší osa o_2, kolmá na hlavní osu o_1. Hlavní délka poloosy je rovna $|AS| = |BS| = a$. Vedlejší délka poloosy je rovna b. Je-li $a = b$ nazýváme takovouto hyperbolu rovnoosou. Vzdálenost ohniska ke středu je rovna excentricitě e, vzdálenost obou ohnisek je rovna $2e$ a nazýváme ji ohnisková vzdálenost.

Hyperbola má svůj charakteristický obdélník, který prochází body A, B, C, D. V tomto obdélníku se nachází charakteristický trojúhelník hyperboly, kde přeponu tvoří část úhlopříčky od středu S k jednomu z vrcholů obdélníku, vzdálenost přepony je rovna středové výstřednosti. Úhlopříčky obdélníku tvoří asymptoty a_1 a a_2. Hyperbola se skládá ze dvou částí – větví. Bod M je libovolný bod, který leží na jedné z větví, přímky EM a FM nazýváme průvodiče bodu M, $|EM| - |FM| = 2a$. Kromě délkové výstřednosti u hyperboly počítáme ještě číselnou výstřednost, která je rovna $\varepsilon = \frac{e}{a}$ a délková výstřednost je vždy větší než délka hlavní poloosy.

3.4.1 Konstrukce hyperboly

K sestrojení hyperboly si vybereme bodovou konstrukci. Nejprve narýsujeme hlavní osu o_1 a na ni hlavní vrcholy A, B a ohniska E, F. Velikost úsečky AB musíme mít menší než velikost úsečky EF. Uprostřed hlavní osy, tedy uprostřed úsečky AB, narýsujeme střed S. Na polopřímce EF zvolíme libovolný bod H. Z obou ohnisek narýsujeme kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_1 a k_2 mají střed v bodě E, k_1 má poloměr $|BH|$ a k_2 je o poloměru $|AH|$. K_3 a k_4 mají střed v ohnisku F, k_3 má stejný poloměr jako k_1. Kružnice k_4 má stejný poloměr jako k_2, tedy $|AH|$. V průniku první a poslední kružnice nám vzniknou body M_3, M_4, které leží na jedné větvi hyperboly. V místech, kde se protnou k_2 a k_3, vzniknou body M_1 a M_2, které leží na druhé větvi hyperboly.

Nyní budeme provádět konstrukci hyperoskulačních kružnic hyperboly. Ve vrcholu A sestrojíme kolmici k hlavní ose, která je zároveň i tečnou hyperboly. To samé zopakujeme i ve vrcholu B, ve kterém opět vyneseme kolmici k ose. Ze středu S narýsujeme kružnici v, která se nazývá vrcholová. Vrcholová kružnice má poloměr o velikosti excentricity čili $v(S, e)$, poloměr je roven $|ES| = |FS|$. Vrcholy charakteristického obdélníku hyperboly vzniknou v místech, kde se protínají tečny s kružnicí v. Asymptoty a_1 a a_2 vedeme úhlopříčkami charakteristického obdélníku. Z libovolného vrcholu obdélníku, narýsujeme kolmici k oběma asymptotám (ke každé asymptotě z jednoho vrcholu). V bodě, kde se kolmice protne s hlavní poloosou, vznikne bod S_1, který je středem první hyperoskulační kružnice m_1 o poloměru $|S_1A|$. Stejný postup provedeme u druhé asymptoty a vznikne nám tak na hlavní poloose střed S_2 druhé hyperoskulační kružnice s poloměrem $|S_2B|$.

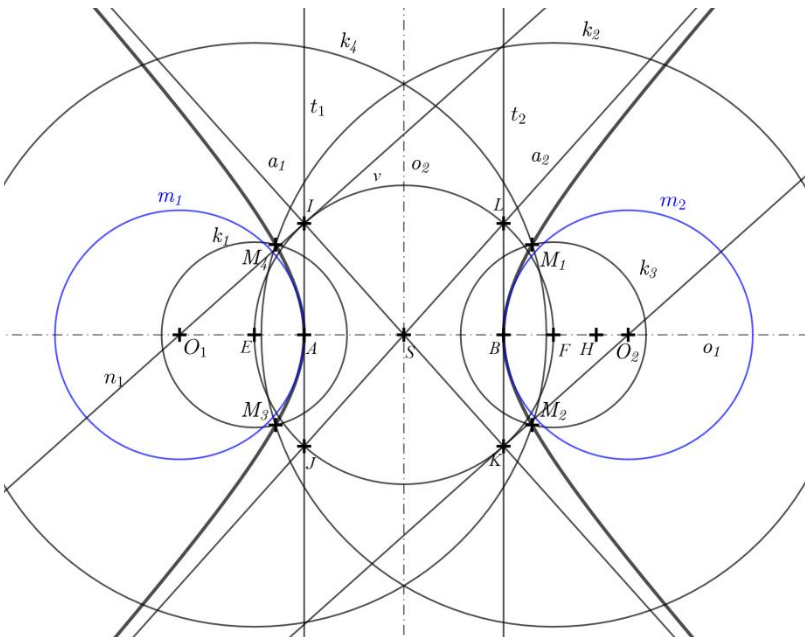
Symbolický zápis konstrukce hyperboly:

1. sestrojíme body A, B, E, F
2. o_1; $A, B, E, F \in o_1$, o_1 je hlavní osa hyperboly
3. S; $S \in o_1$, S je střed hyperboly

4. libovolný bod H; $H \in \overrightarrow{EF}$
5. o_2; $o_2 \in S, o_2 \perp o_1$
6. k_1; $k_1\ (E, |BH|)$
7. k_2; $k_2\ (E, |AH|)$
8. k_3; $k_3\ (F, |BH|)$
9. k_4; $k_4\ (F, |AH|)$
10. M_3, M_4; $k_1\ \cap\ k_4 = \{M_3, M_4\}$
11. M_1, M_2; $k_2\ \cap\ k_3 = \{M_1, M_2\}$
12. hyperbola

Symbolický zápis hyperoskulačních kružnic:

1. t_1; $t_1 \perp o_1, A \in t_1$
2. t_2; $t_2 \perp o_1, B \in t_2$
3. v; $v\ (S, e)$
4. obdélník $IJKL$; $v \cap (t_1, t_2) = \{I, J, K, L\}$
5. a_1; $a_1 \in I, a_1 \in K$
6. a_2; $a_2 \in J, a_1 \in L$
7. n_1; $n_1 \perp a_1, n_1 \in I$
8. S_1; $S_1 \in o \cap n_1$
9. m_1; $m_1\ (S_1, |S_1A|)$
10. hyperoskulační kružnici m_2 získáme stejným postupem jako m_1



Obrázek 18 - konstrukce hyperboly

3.4.2 Rovnice hyperboly

Obecné vztahy:

- velikost hlavní poloosy hyperboly: $a = |AS| = |BS|$
- velikost vedlejší poloosy hyperboly: $b = |IA| = |JA|$
- excentricita: $e = |ES| = |FS|$, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$

  $$|EM_1| - |FM_2| = 2a$$

- číselná výstřednost: $\varepsilon = \frac{e}{a}$
- úhel mezi asymptotou a hlavní osou: $tg\ \varphi = \frac{b}{a}$

<u>Obecná rovnice hyperboly je rovna:</u>

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0, (pq < 0)$$

<u>Středová rovnice hyperboly je rovna:</u>

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

U středové rovnice, kde máme střed posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [m;\ n]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$

U středové rovnice, kde máme střed posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [m;\ n]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

U středové rovnice, kde nemáme střed S nijak posunut a souřadnice jsou $S\ [0;\ 0]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

U středové rovnice, kde nemáme střed S nijak posunut a souřadnice jsou $S\ [0;\ 0]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

<u>Rovnice asymptot:</u>

$$y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$$

U rovnice, kde máme střed S posunut. Souřadnice středu jsou $S\ [m;\ n]$. Platí pro hlavní osu rovnoběžnou s x i s y, tak jako u předešlých rovnic.

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

U rovnice, kde nemáme střed S nijak posunut a souřadnice jsou $S\ [0;\ 0]$. Platí pro hlavní osu rovnoběžnou s x i s y, tak jako u předešlých rovnic.

Rovnice tečny k hyperbole v bodě dotyku T je rovna:

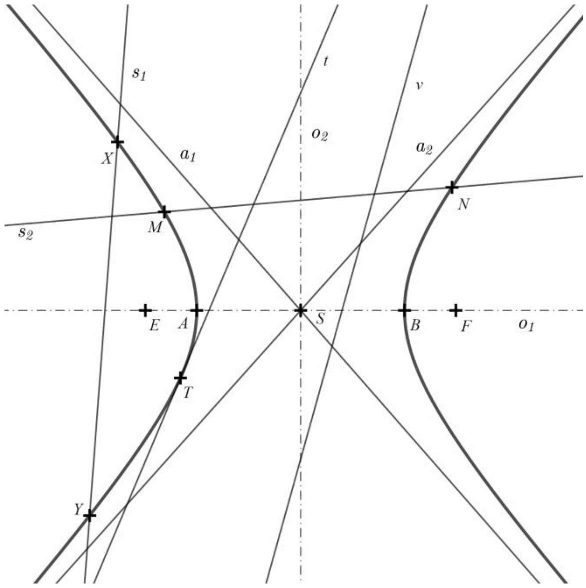
$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y_0 - n)(y - n)}{a^2} - \frac{(x_0 - m)(x - m)}{b^2} = 1$$

Souřadnice bodu dotyku jsou $T\ [x_0;\ y_0]$ a $S\ [m;\ n]$.

3.4.3 Vzájemná poloha hyperboly a přímky v rovině

Opět mohou nastat tři varianty vzájemné polohy hyperboly a přímky – sečna s_1 a s_2), tečna t s bodem bodem dotyku T a vnější přímka v. Sečna může v hyperbole procházet buď dvěma body hyperboly na jedné větvi, nebo může procházet jedním bodem na jedné větvi a druhým bodem na větvi druhé.



Obrázek 19 - vzájemná poloha hyperboly a přímek

3.4.4 Tečna hyperboly

Definice

Nechť M je libovolný bod hyperboly. Přímka procházející bodem M, který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s hyperbolou, se nazývá tečna hyperboly s dotykovým bodem M. Přímka procházející bodem, která je kolmá na tečnu, se nazývá normála v bodě M. (Pech, 2004)

Hyperbola dělí rovinu, vnitřní a vnější oblast hyperboly. Je-li libovolný bod M bodem hyperboly, pak platí, že $\big||EM| - |FM|\big| = 2a$. Je-li bod M vnitřním bodem hyperboly, platí, že $\big||EM| - |FM|\big| > 2a$. Je-li bod M vnějším bodem hyperboly, pak platí, že $\big||EM| - |FM|\big| < 2a$.

Věta 1

Tečna hyperboly je přímka, které má s hyperbolou jediný společný bod, jejíž ostatní body jsou vnější. (Pech, 2004)

Věta 2

Tečna hyperboly půlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku. (Pech, 2004)

Věta 3

Množina všech bodů souměrných s jedním z ohnisek hyperboly podle jejich tečen je kružnice se středem v druhém ohnisku o poloměru $2a$. (Hodaňová a kol., 2005)

Věta 4

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je kružnice se středem ve středu hyperboly a poloměrem a. (Králová a kol., 2005)

Výpočet tečny

Bod $M\ [m;\ n]$ je bod hyperboly s rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.4.3.1}$$

Bodem Mpovedeme přímkou r

$$r: x = m + ut$$
$$y = n + vt \tag{3.4.3.2}$$

$\vec{u} = (u, v)$ je směrový vektor přímky r, t je parametr

Budeme hledat společné body hyperboly a přímky r, dosadíme tedy do rovnosti (3.4.3.1) a (3.4.3.2). Dostaneme rovnici pro t ve tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0 \tag{3.4.3.3}$$

$$\frac{m^2+2mut+(ut)^2}{a^2} - \frac{n^2+2nvt+(vt)^2}{b^2} = 1 \tag{3.4.3.4}$$

$$b^2[m^2 + 2mut + (ut)^2] - a^2[n^2 + 2nut + (vt)^2] - a^2b^2 = 0 \tag{3.4.3.5}$$

odtud platí

$$A = b^2u^2 - a^2v^2$$
$$B = b^2um - a^2vn$$
$$C = b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 \tag{3.4.3.6}$$

Protože bod M náleží hyperbole, je $C = 0$. Rovnice je tedy

$$At^2 + 2Bt = 0 \tag{3.4.3.7}$$

Rovnice je kvadratická pro $A \neq 0$, tedy pro $\vec{u} \neq (a, b)$ či $\vec{u} \neq (a, -b)$. Zvolíme tedy směrový vektor $\vec{u}$ přímky r tak, aby vyhovoval. Rovnice $At^2 + 2Bt + C = 0$ má dvojnásobný kořen, vyhovuje-li nula rovnici $(At + 2B) = 0$ čili bude-li $B = 0$. Ze vztahu $b^2um - a^2vn = 0 = B$ dopočítáme souřadnice směrového vektoru $\vec{u}$ přímky r, ta má s hyperbolou dvojnásobný průsečík $M\,[m, n]$. Směrový vektor $\vec{u}$ zvolený například $u = a^2n, v = b^2m$ je pro libovolné M vždy nenulový a přímka r existuje v každém bodě hyperboly. (Pech, 2004)

3.5 Parabola

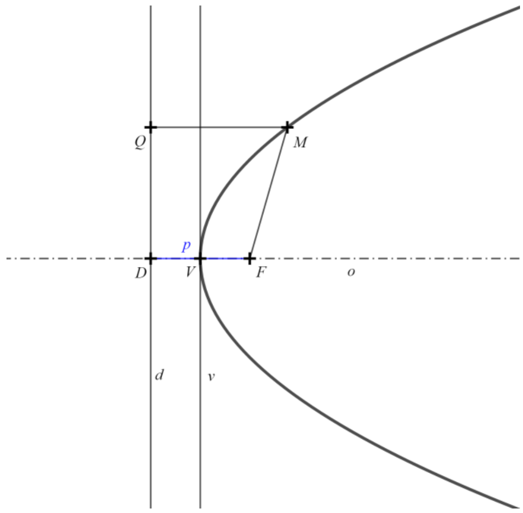
Definice

Prostorová definice: Parabola je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem se dotýká kuželové plochy podél jedné její povrchové přímky.

Ohnisková definice: Parabola p je množinou všech bodů v dané rovině ρ, jež mají stejnou vzdálenost od dané přímky d a od daného bodu F, který na přímce neleží.

Symbolicky:

$$p = \{X \epsilon \rho;\ |Xd| = |FX|, F \notin d\}$$



Obrázek 20 - parabola

Bod F, ležící na ose o, nazýváme ohnisko paraboly. Zatímco hyperbola a elipsa měly ohniska dvě, parabola má jen jedno. Přímku d kolmou na osu o nazýváme řídící přímkou paraboly. Vzdálenost mezi řídící přímkou a ohniskem nazýváme parametr a značíme jej p. V místě protnutí řídící přímky d a osy o se nachází bod D. Bod, ve kterém protíná parabola osu, značíme V a nazýváme ho vrcholem paraboly. Z tohoto bodu uděláme kolmici v k ose o. Přímka v má vzdálenost od ohniska paraboly polovinu parametru, $v = t_v$, tedy v je tečna k parabole ve vrcholu V, proto ji nazýváme vrcholovou tečnou.

Bod M je libovolným bodem, ležící na parabole. Bod Q je pata kolmice, která vede z bodu M a je kolmá na řídící přímku d. Úsečky MQ a MF nazýváme průvodiče bodu M. Parabola rozděluje rovinu na dvě části. Část, která obsahuje ohnisko F, nazýváme vnitřní oblastí paraboly. Naopak část, která neobsahuje ohnisko F, nazýváme vnější oblastí paraboly. Úhel $\measuredangle FMQ$ obsahující vrchol paraboly V nazýváme vnějším úhlem průvodičů a k němu úhel vedlejší nazýváme vnitřním úhlem průvodičů. Na ose paraboly najdeme subtangentu, což je $|GL|$ a subnormálu, což je $|LI|$.

Věta 1

Subtangenta je půlena vrcholem V.

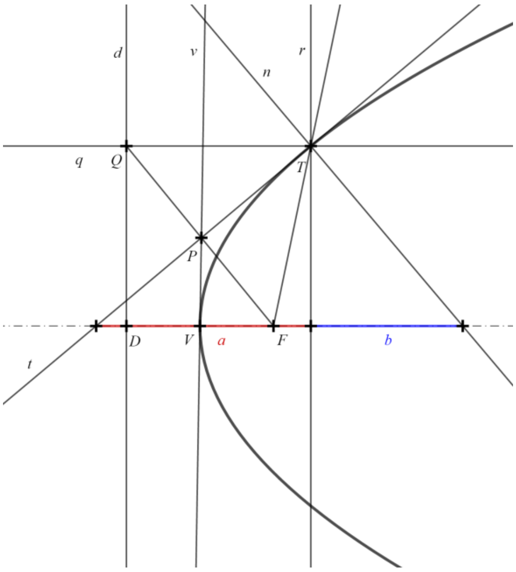
Věta 2

Délka subnormály je rovna velikosti parametru p.

Věta 3

Součet subtangenty a subnormály je půlen ohniskem F.

Subtangenta je v obrázku značena a. Subnormála je v obrázku značena b.



Obrázek 21 - subtangenta a subnormála

3.5.1 Konstrukce paraboly

K sestrojení paraboly si opět vybereme bodovou konstrukci. Nejprve zvolíme osu o a na ní ohnisko F. Poté narýsujeme řídící přímku d. V bodě, kde se protne řídící přímka s osou, vznikne bod D. Vzdálenost přímky DF nazveme parametrem p, tedy $|DF| = p$. Střed přímky DF označíme jako vrchol paraboly V. Z vrcholu V vedeme kolmici $v = t_v$ k ose o. Nyní si na polopřímce VF zvolíme bod X. Z bodu X narýsujeme kolmici x k ose o. Do kružítka vezmeme vzdálenost $|DX|$, kterou opíšeme z ohniska F. V místech, kde se protne kružnice s přímkou x nám vzniknou libovolné body paraboly M_1 a M_2, tedy rovnost $|dM_1| = |FM_1| = |DX|$.

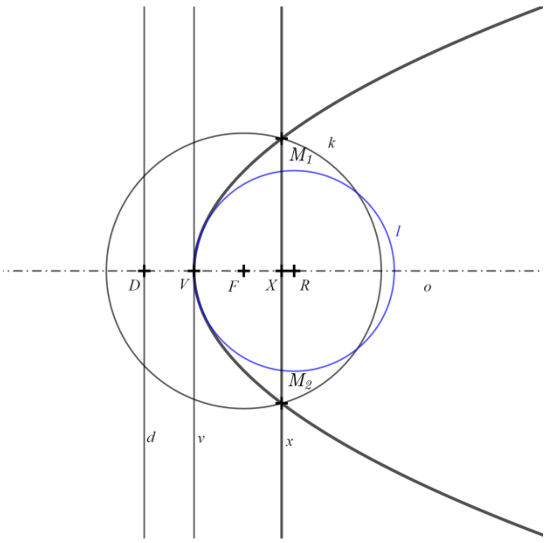
Nyní sestrojíme hyperoskulační kružnici. Naměříme si od vrcholu V na polopřímce DV vzdálenost parametru p a na ose o sestrojíme bod R. Z bodu R opíšeme kružnici s poloměrem parametru p.

Symbolický zápis konstrukce paraboly:

1. zvolíme bod F
2. $o;\ F \in o, o$ je osa paraboly
3. $d;\ d \perp o, |Fd| = p$
4. $D;\ d \cap o = \{D\}$
5. $v;\ v \perp o, |Fv| = \frac{p}{2}$
6. $V;\ v \cap o = \{V\}$
7. $X;\ X \in \overrightarrow{DF}$
8. $x;\ x \perp o, X \in x$
9. $k;\ k\ (F, |DX|)$
10. $M_1, M_2;\ k \cap x = \{M_1, M_2\}$
11. parabola

Symbolický zápis konstrukce hyperoskulačních kružnic:

1. $R; R \in \overrightarrow{DF}, |VR| = p$
2. $l;\ l\ (R, p)$



Obrázek 22 - konstrukce paraboly

3.5.2 Rovnice paraboly

Obecné vztahy:

- Parametr paraboly: $p = |dF| \Longrightarrow$ vzdálenost řídící přímky od ohniska

<u>Obecná rovnice paraboly je rovna:</u>

$$x^2 + 2rx + 2sy + t = 0, (s \neq 0)$$

$$y^2 + 2rx + 2sy + t = 0, (r \neq 0)$$

Vrcholová rovnice paraboly je rovna:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \Rightarrow kladná\ poloosa$$

$$(y-n)^2 = -2p(x-m) \Rightarrow záporná\ poloosa$$

U vrcholové rovnice, kde máme vrchol posunut. Souřadnice vrcholu jsou $V\ [m;\ n]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \Rightarrow kladná\ poloosa$$

$$(x-m)^2 = -2p(y-n) \Rightarrow záporná\ poloosa$$

U vrcholové rovnice, kde máme vrchol posunut. Souřadnice vrcholu jsou $V\ [m;\ n]$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

$$y^2 = 2px \Rightarrow kladná\ poloosa$$

$$y^2 = -2px \Rightarrow záporná\ poloosa$$

U vrcholové rovnice, kde nemáme vrchol V nijak posunut, tedy souřadnice jsou $V\ [0;\ 0]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$x^2 = 2py \Rightarrow kladná\ poloosa$$

$$x^2 = -2py \Rightarrow záporná\ poloosa$$

U vrcholové rovnice, kde nemáme vrchol V nijak posunut, tedy souřadnice jsou $V\ [0; 0]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

Rovnice tečny k parabole v bodě dotyku T je rovna:

$$(x_0-m)(x-m) = p(y_0-n) + p(y-n)$$

$$(x_0-m)(x-m) = -p(y_0-n) - p(y-n)$$

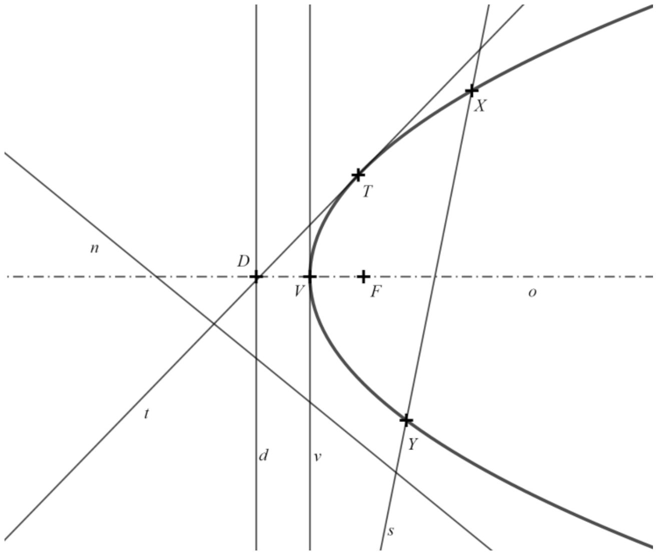
$$(y_0-n)(y-n) = p(x_0-m) + p(x-m)$$

$$(y_0-n)(y-n) = -p(x_0-m) - p(x-m)$$

Souřadnice bodu dotyku jsou $T\ [x_0;\ y_0]$ a $S\ [m;\ n]$.

3.5.3 Vzájemná poloha paraboly a přímky v rovině

U paraboly nám opět existují tři varianty vzájemné polohy přímky a paraboly, jimiž jsou již zmiňované: sečna, tečna a vnější přímka.



Obrázek 23 - vzájemná poloha paraboly a přímek

3.5.4 Tečna paraboly

Definice

Tečna paraboly je přímka, která není rovnoběžná s osou paraboly, má s ní právě jeden společný bod a ostatní body jsou body vnější oblasti paraboly.

Věta 1

Množina všech bodů souměrných s ohniskem paraboly podle jejích tečen je řídící přímka paraboly. (Doležal, 2007)

Věta 2

Množin všech pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna paraboly. (Doležal, 2007)

Věta 3

Tečna (normála) v bodě paraboly půlí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů. (Doležal, 2007)

Věta 4

Spojnice průsečíku R dvou různých tečen t_1, t_2 paraboly se středem úsečky určené jejich dotykovými body je rovnoběžná s osou paraboly a nazývá se průměr paraboly. (Hodaňova a kol., 2005)

Výpočet tečny

Bod $M\ [m;\ n]$ je libovolný bod paraboly s rovnicí

$$y^2 - 2px = 0 \tag{3.5.4.1}$$

Bodem M povedeme přímkou r

$$r{:}\, x = m + ut$$
$$y = n + vt \tag{3.5.4.2}$$

$\vec{u} = (u, v)$ je směrový vektor přímky r, t je parametr

Budeme hledat společné body paraboly a přímky r, dosadíme tedy rovnici (3.5.4.2) do (3.5.4.1). Dostaneme rovnici pro t ve tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0 \tag{3.5.4.3}$$
$$(n + vt)^2 - 2p(m + ut) = 0 \tag{3.5.4.4}$$
$$n^2 + 2nvt + (vt)^2 - 2pm - 2put = 0 \tag{3.5.4.5}$$

odtud platí

$$A = v^2$$
$$B = nv - tu$$
$$C = n^2 - 2pu \tag{3.5.4.6}$$

Protože bod M náleží parabole, je $C = 0$. Rovnice je tedy

$$At^2 + 2Bt = 0 \tag{3.5.4.7}$$

Rovnice (3.5.4.7) je kvadratická, jestliže A je různé od nuly, to platí v případě, že v je různé od nuly. Při volbě směrového vektoru budeme tedy brát v potaz, aby směrový vektor přímky r nebyl rovnoběžný s osou paraboly. Jedním kořenem rovnice bude nula. Ten nám směřuje po dosazení do rovnice (3.5.4.2) k průsečíku M přímky r a paraboly. Bude-li nula dvojnásobným kořenem rovnice (3.5.4.7), pak bude bod M dvojnásobným průsečíkem přímky r a paraboly, $t(At + 2B) = 0$, tedy $B = 0$. Ze vztahu $nv - pu = 0 = B$ získáme volbou $u = n, v = p$ souřadnice u, v směrového vektoru $\vec{u}$ zvolené přímky r. Vektor $\vec{u}$ volený tímto způsobem bude vždy nenulový a přímka r tak bude existovat v každém bodě paraboly. (Pech, 2004)

4 Příklady

4.1 Kružnice

Příklad č. 1

Napište rovnici kružnice s daným středem S a poloměrem r, $S\ [2;\ -1], r = 6$

Řešení

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 6^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 36$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$

Příklad č. 2

Zjistěte, zda následující rovnice jsou rovnicemi kružnic. V kladném případě určete střed a poloměr.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$

Řešení

a) $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 6 = 0$

Rovnici si přeskládáme a rozložíme pomocí doplnění na čtverec.

$x^2 - 6x + y^2 + 5y + 6 = 0$

$(x^2 - 6x - 3^2)\ \wedge (y^2 + 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2)$

$(x-3)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 - 9 - \frac{25}{4} + 6 = 0$

$(x-3)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \sqrt{\frac{37}{4}}$

nebo

$(x-3)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 + 6 = 0$ z obecné rovnice víme, že $p = m^2 + n^2 - r^2$, tedy

$r^2 = m^2 + n^2 - p$

$r^2 = 9 + \frac{25}{4} - 6$

$(x-3)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \sqrt{\frac{37}{4}}$

Ano, rovnice je rovnicí kružnice a $r = \frac{\sqrt{37}}{2}$ a $S\ \left[3;\ -\frac{5}{2}\right]$.

b) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$

Již na první pohled vidíme, že rovnice není rovnicí kružnice.

Příklad č. 3

Ukažte, že rovnicí $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 39 = 0$ je dána kružnice. Napište rovnici kružnice soustředné, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

Řešení

$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 39 = 0$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 9 - 16 - 39 = 0$

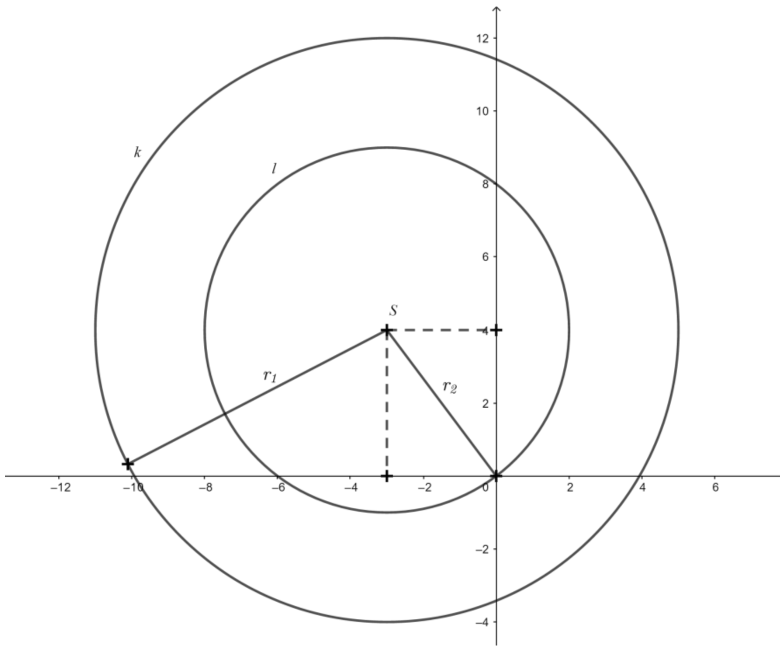
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 8^2$

Souřadnice středu jsou $S\,[-3;\ 4]$ a poloměr $r = 8$. Soustřednou kružnici k této kružnici získáme tím, že se spočítáme vzdálenost středu S od počátku soustavy souřadnic.

$|SO| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Tedy poloměr soustředné kružnice bude $r = 5$. A jelikož je to kružnice soustředná, tím pádem mají kružnice střed stejný.



Obrázek 24 - řešení k příkladu č. 3

Příklad č. 4

Najděte společné body kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ a přímky p: $2x - y - 8 = 0$.

Řešení

Je-li bod $X\,[x;\ y]$ společným bodem této kružnice a přímky p, pak je $y = 2x - 8$. Po dosazení do rovnice dané kružnice nám vznikne kvadratická rovnice, po jejíž upravení dostaneme kořeny, ze kterých následně vypočítáme společné body přímky p a dané kružnice.

$x^2 + (2x - 8)^2 - 2x + 4(2x - 8) = 0$

$x^2 + 4x^2 - 32x + 64 - 2x + 8x - 32 = 0$

$5x^2 - 26x + 32 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-26)^2 - 4 * 5 * 32 = 36$

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{26 \pm 6}{10}$, tedy $x_1 = 2$ a $x_2 = \frac{16}{5} \Longrightarrow [2;\ y_1]$ a $\left[\frac{16}{5};\ y_2\right]$

$y_1 = 2x_1 - 8 = -4 \wedge y_2 = 2x_2 - 8 = -\frac{8}{5}$

Společné body přímky p a dané kružnice jsou: $[2;\ -4]$ a $\left[\frac{16}{5};\ -\frac{8}{5}\right]$.

Příklad č. 5

Veďte bodem $A\left[\frac{1}{2};\ \frac{9}{2}\right]$ tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$. Nejprve zjistíme parametry kružnice zadaní rovnicí.

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 9 - 4 + 3 = 0$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{10}$

Daná kružnice má tedy poloměr $r = \sqrt{10}$ a $S\ [3;\ 2]$.

Nyní musíme zjistit body dotyku tečen, které procházejí bodem $A\left[\frac{1}{2};\ \frac{9}{2}\right]$.

$T \in k: {x_0}^2 + {y_0}^2 - 6x_0 - 4y_0 + 3 = 0$

$T \in t: (x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 - 2)(y - 2) = 10$

$A \in t: (x_0 - 3)\left(\frac{1}{2} - 3\right) + (y_0 - 2)\left(\frac{9}{2} - 2\right) = 10$

$A \in t: (x_0 - 3)\left(-\frac{5}{2}\right) + (y_0 - 2)\left(\frac{5}{2}\right) = 10 / * 2$

$A \in t: (x_0 - 3)(-5) + (y_0 - 2)(5) = 20$

$A \in t: (-5x_0 + 15) + (5y_0 - 10) = 20$

$A \in t: -5x_0 + 5y_0 - 15$, tedy $x_0 - y_0 + 3 \Longrightarrow x_0 = y_0 - 3$

$T \in k: (y_0 - 3)^2 + {y_0}^2 - 6(y_0 - 3) - 4y_0 + 3 = 0$

$T \in k: {y_0}^2 - 6y_0 + 9 + {y_0}^2 - 6y_0 + 18 - 4y_0 + 3 = 0$

$T \in k: 2{y_0}^2 - 16y_0 + 30 = 0$, tedy ${y_0}^2 - 8y_0 + 15 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 * 1 * 15 = 4$

$y_{0_1}, y_{0_2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \pm 2}{2}$, tedy $y_{0_1} = 3$ a $y_{0_2} = 5$ a po dosazení je $x_{0_1} = 0$ a $x_{0_2} = 2$

Body dotyku jsou: T_1 [0; 3] a T_2 [2; 5].

$T_1 \in t_1: (0-3)(x-3) + (3-2)(y-2) = 10$

$T_1 \in t_1: -3x + 9 + y - 2 = 10$

$T_1 \in t_1: -3x + y - 3 = 0$

$t_1: y = 3x + 3$

$T_2 \in t_2: (2-3)(x-3) + (5-2)(y-2) = 10$

$T_2 \in t_2: -x + 3 + 3y - 6 = 10$

$T_2 \in t_2: -x + 3y - 13 = 0$

$t_2: y = \frac{x}{3} + \frac{13}{3}$

Tečnami zadané kružnice, které procházejí bodem $A\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$ jsou $t_1: y = 3x + 3$ a $t_2: y = \frac{x}{3} + \frac{13}{3}$.

Příklad č. 6

Určete rovnici tečny t, která je kolmá k přímce $p: 4x - 3y + 7 = 0$, $k: x^2 + y^2 = 25$.

Řešení

Nejprve si určíme přímku t kolmou k přímce p, tedy $t: 3x + 4y + c$. A poté se postupným dosazováním dostaneme ke kvadratické rovnici, kde D musíme položit rovno nule, protože jedná-li se o tečnu, pak $D = 0$. Z kořenů této kvadratické rovnice vypočteme c_1 a c_2, čímž získáme rovnice pro tečny t_1 a t_2.

$T \in t: 3x_0 + 4y_0 + c = 0$, tedy $x_0 = \frac{-4y_0 - c}{3}$

$T \in k: {x_0}^2 + {y_0}^2 = 25$

$T \in t: (\frac{-4y_0 - c}{3})^2 + {y_0}^2 = 25$

$T \in t: 16{y_0}^2 + 8cy_0 + c^2 + 9{y_0}^2 = 225$

$T \in t: 25{y_0}^2 + 8cy_0 + c^2 - 225 = 0$

$D = (8c)^2 - 4 * 25 * (c^2 - 225) = 64c^2 - 100c^2 + 22500 = -36c^2 + 22500$

$-36c^2 + 22500 = 0$

$c = \sqrt{\frac{22500}{36}}$

$c_1, c_2 = \pm 25$

Rovnice tečen kolmé k přímce p jsou $t_1: 3x + 4y + 25$ a $t_2: 3x + 4y - 25$.

4.2 Elipsa

4.2.1 Analytická část

Příklad č. 7

Ukažte, že $x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 48 = 0$ je obecná rovnice elipsy. Určete její střed, ohniska a vrcholy.

Řešení

$x^2 - 6x + 4y^2 + 32y + 48 = 0$

$(x-3)^2 + 4(y+4)^2 - 9 - 64 + 48 = 0$

$(x-3)^2 + 4(y+4)^2 = 25$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+4)^2}{(\frac{5}{2})^2} = 1$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - (\frac{5}{2})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Souřadnice středu elipsy jsou $S\,[3;\ -4]$, velikost hlavní poloosy $a = 5$ a velikost vedlejší poloosy je $b = \frac{5}{2}$, $a > b$, proto je excentricita $e = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Ohniska jsou rovny $E\,\left[3 - \frac{5\sqrt{3}}{2};\ 4\right]$ a $F\,\left[3 + \frac{5\sqrt{3}}{2};\ 4\right]$. Hlavní vrcholy jsou rovny $A\,[-2;\ -4]$ a $B\,[8;\ -4]$, vedlejší vrcholy jsou rovny $C\,\left[3;\ -\frac{13}{2}\right]$ a $D\,\left[3;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Příklad č. 8

Napište rovnici elipsy, jejímiž ohnisky jsou body $E\,[2;\ 5]$, $F\,[2;\ 1]$, která obsahuje bod $M\,[5;\ 1]$ a najděte vrcholy elipsy.

Řešení

Snadno lze zjistit střed elipsy, jelikož excentricita elipsy je $e = 2j$, pak souřadnice středu jsou $S\,[2;\ 3]$.

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

Zjistili jsme, že $a < b$, ohniska leží na vedlejší ose elipsy, tedy ose rovnoběžné s osou y. Díky výpočtu excentricity můžeme vypočítat $b^2 = a^2 + e^2 = a^2 + 4$. Jelikož má elipsa procházet bodem M, musí platit:

$$\frac{(5-2)^2}{a^2}+\frac{(1-3)^2}{b^2}=1$$

Nyní nám stačí dosadit za b^2 a vypočítat kvadratickou rovnici.

$$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{a^2+4}=1$$

$$9a^2+36+4a^2=a^4+4a^2$$

$$a^4-9a^2-36=0$$

$$D=b^2-4ac=(-9)^2-4*1*(-36)=225$$

$$a_1,a_2=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{9\pm 15}{2}$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $a_1=12$, $a_2=-3$. Druhý kořen této rovnice nevyhovuje, tedy $a^2=12$ a $b^2=16$.

$$\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

Hlavní vrcholy elipsy jsou $A\,[2;\ 7]$ a $B\,[2;\ -1]$, vedlejší vrcholy elipsy jsou $C\,\left[2+2\sqrt{3};\ 3\right]$ a $D\,\left[2-2\sqrt{3};\ 3\right]$.

Příklad č. 9

Určete průsečíky přímky dané rovnice $4x+5y=140$ s elipsou, která má rovnici $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$, a napište rovnice tečen elipsy v těchto průsečících a vrcholy elipsy.

Řešení

$$\frac{x^2}{25^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$$

Hlavní vrcholy elipsy jsou $A\,[-25;\ 0], B\,[25;\ 0]$. Vedlejší vrcholy elipsy jsou $C\,[0;\ 20], D\,[0;\ -20]$.

Z rovnice přímky si vyjádříme $x=\frac{140-5y}{4}=35-\frac{5}{4}y$ a dosadíme do rovnice elipsy, ze které nám vznikne kvadratická rovnice, z kořenů této rovnice vypočítáme souřadnice společných bodů s elipsou. Na závěr příkladu k těmto bodům dopočítáme tečny.

$$\frac{\left(35-\frac{5y}{4}\right)^2}{25^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$$

$$400*\left(1225-\frac{175}{2}y+\frac{25}{16}y^2\right)+625y^2=250000$$

$$490000-35000y+625\mathrm{y}^2+625\mathrm{y}^2=250000$$

$$1250y^2-35000y+240000=0$$

$y^2 - 28y + 192 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 * 1 * 192 = 16$

$y_1, y_2 = \frac{28 \pm 4}{2}$, tedy $y_1 = 16$ a $y_2 = 12$, k tomu dopočítáme $x_1 = 15$ a $x_2 = 20$

Vzhledem k tomu, že $D > 0$, je přímka sečnou elipsy se společnými body $X\,[15;\ 16]$ a $Y\,[20;\ 12]$. Nyní vypočítáme tečny v bodech X, Y.

$$\frac{15x}{625} + \frac{16y}{400} = 1$$

$6000x + 10000y = 250000$, tedy $3x + 5y - 125 = 0$

$$\frac{20x}{625} + \frac{12y}{400} = 1$$

$8000x + 7500y - 250000 = 0$, tedy $16x + 15y - 500 = 0$

Tečna v bodě $X\,[15;\ 16]$ je přímka $t_1\!: y = \frac{125-3x}{5}$. Tečna v bodě $Y\,[20;\ 12]$ je přímka $t_2\!: y = \frac{500-16x}{15}$.

4.2.2 Konstrukční část

Příklad č. 10

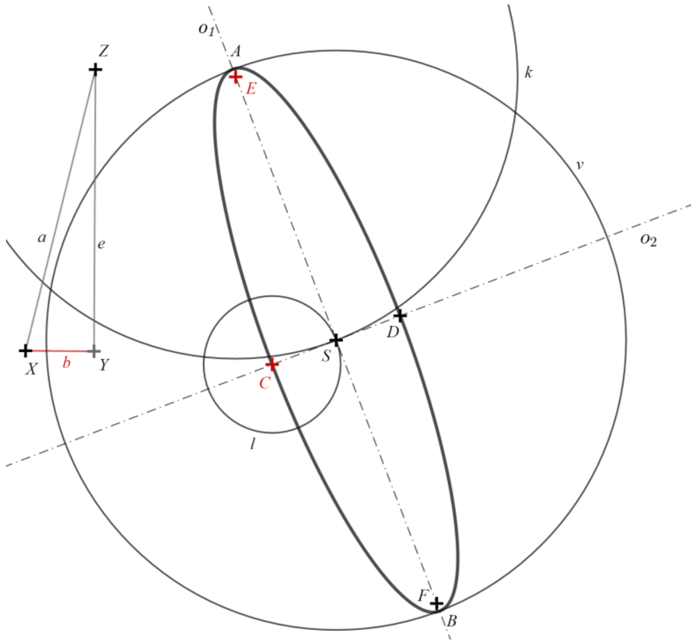
Sestrojte elipsu, znáte-li: C, E, b.

1) Rozbor

Umístíme body C a E. Z obecných vlastností elipsy víme, že $a = |EC|$, tedy pomocí Pythagorovy věty můžeme pomocí narýsování pomocného trojúhelníku zjistit délku excentricity $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pomocí velikostí e a a jsme schopni najít střed elipsy S. Hlavní osa elipsy je o_1, vedlejší osa elipsy o_2, $o_1 \perp o_2$. Pomocí středové souměrnosti narýsujeme body F a D. Sestrojením kružnice $v\ (S, a)$ získáme hlavní body elipsy.

2) Konstrukce

1. sestrojíme dané body C a E
2. $k;\ k\ (E, e)$
3. $l;\ l\ (C, b)$
4. $S;\ S \in k \cap l$
5. $v;\ v\ (S, a)$
6. $o_1; o_1 \in E, o_1 \in S$
7. $o_2; o_2 \in C, o_2 \in S$
8. $F; S\ (S): E \rightarrow F$
9. $A, B;\ v \cap o_1 = \{A, B\}$
10. $D;\ S\ (S): C \rightarrow D$
11. elipsa



Obrázek 25 - konstrukce k příkladu č. 10 a 7

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad č. 11

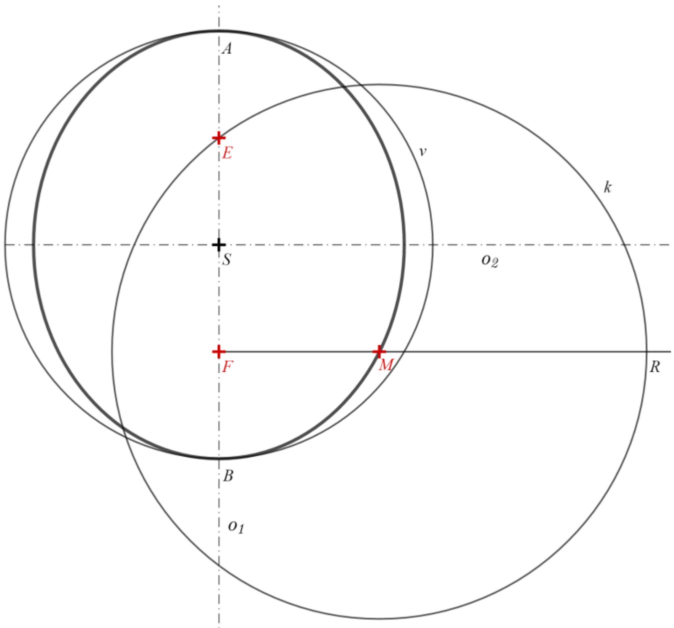
Sestrojte elipsu, znáte-li: libovolný bod M, E, F.

1) Rozbor

Umístíme body M, E, F. Jelikož máme obě ohniska elipsy, můžeme narýsovat hlavní osu elipsy o_1, střed elipsy S a vedlejší osu o_2. Vzdálenost a získáme z vlastností elipsy, $\left||EM| + |FM|\right| = 2a$. Sestrojme tedy z bodu M kružnici k, $k\ (M, |ME|)$. V místě, kde se střetne kružnice k s polopřímkou FM, vznikne bod R a $|FR| = 2a$. Ze středu naneseme vzdálenost a a na hlavní ose nám vzniknou hlavní vrcholy elipsy. Poté naneseme vzdálenost a z bodu E a na vedlejší ose nám vzniknou vedlejší vrcholy elipsy.

2) Konstrukce

1. sestrojíme dané body E, F, M
2. $o_1;\ o_1 \in E, o_1 \in F$
3. $S; S = \left|\frac{E+F}{2}\right|$
4. $o_2; o_2 \in S, o_2 \perp o_1$
5. $k; k\ (M, |ME|)$
6. $R;\ R \in \overrightarrow{FM} \cap k, |FR| = 2a$
7. $v;\ v\ (S, a)$
8. $A, B;\ v \cap o_1 = \{A, B\}$
9. $l\ ; l\ (E, a)$
10. $C, D;\ l \cap o_2 = \{C, D\}$
11. elipsa



Obrázek 26 - konstrukce k příkladu č. 11 a 8

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad č. 12

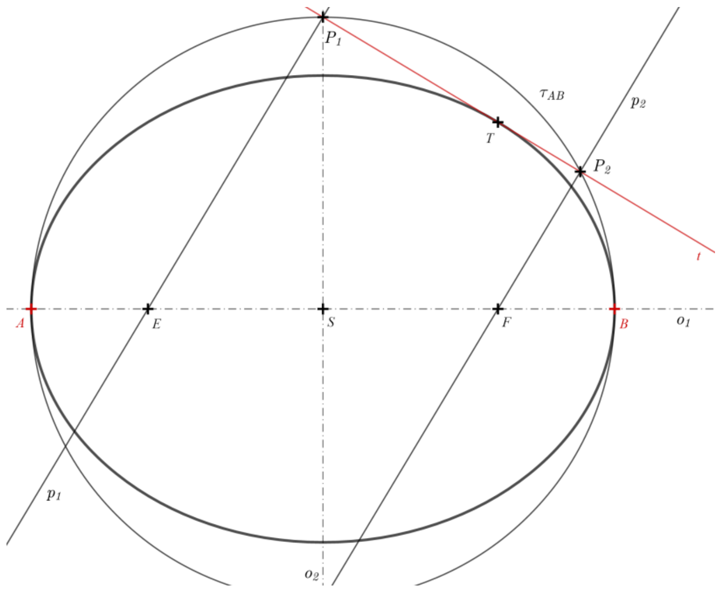
Sestrojte elipsu, znáte-li: A, B, t.

1) Rozbor

Umístíme hlavní vrcholy A, B a tečnu t. Jelikož máme oba hlavní vrcholy, narýsujeme hlavní osu o_1, střed S a vedlejší osu o_2. Poté sestrojíme Thaletovu kružnici τ_{AB}, pomocí které sestrojíme ohniska E, F. Díky vzdálenosti $|AS| = a$ můžeme narýsovat i vedlejší vrcholy elipsy, protože vzdálenost ohniska od vedlejšího vrcholu je rovna vzdálenosti a.

2) Konstrukce

1. sestrojíme A, B, t
2. $o_1;\ o_1 \in A, o_1 \in B$
3. $S;\ S = \left|\frac{AB}{2}\right|$
4. $o_2;\ o_2 \in S, o_2 \perp o_1$
5. $\tau_{AB};\ \tau_{AB}$ ... Thaletova kružnice
6. $P_1, P_2;\ \tau_{AB} \cap t = \{P_1, P_2\}$
7. $p_1;\ p_1 \in P_1, p_1 \perp t$
8. $p_2;\ p_2 \in P_2, p_2 \perp t$
9. $E;\ E \in o_1 \cap p_1$
10. $F;\ F \in o_1 \cap p_2$
11. $k;\ k\ (E, |AS|)$
12. $C, D;\ k \cap o_2 = \{C, D\}$
13. elipsa



Obrázek 27 - konstrukce k příkladu č. 12 a 9

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

4.3 Hyperbola

4.3.1 Analytická část

Příklad č. 13

Hyperbola je dána svými ohnisky $E\ [-4;\ 0], F\ [4;\ 0]$ a vrcholem $A\ [-3;\ 0]$. Sestrojte několik jejích bodů.

Řešení

Hlavní vrchol B má souřadnice $B\ [3;\ 0]$. Pomocí ohnisek lze zjistit souřadnice středu S, který je $S\ [0;\ 0]$. Z toho lze zjistit, že vzdálenost $a = 3$ a $e = 4$. Pythagorovou větou dopočítáme vzdálenost b, abychom mohly zjistit rovnic asymptot a_1 a a_2.

$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$a_1, a_2: y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{7}{3}x$

Příklad č. 14

Určete střed, vrcholy a ohniska hyperboly, která je dána obecnou rovnicí $x^2 - y^2 = 20$. Napište rovnici tečny, která prochází bodem $X\ [4;\ 4]$.

Řešení

$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{20} = 1$

Z Pythagorovy věty dopočítáme excentricitu, tedy $a = \sqrt{20}, b = \sqrt{20}$, $e = \sqrt{\sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2} = 2\sqrt{10}$. Hyperbola je rovnoosá. Hlavní vrcholy mají souřadnice $A\left[-\sqrt{20};\ 0\right], B\left[\sqrt{20};\ 0\right]$. Ohniska mají souřadnice $E\left[-2\sqrt{10};\ 0\right], F\left[2\sqrt{10};\ 0\right]$. Hlavní body máme a nyní vypočteme tečnu k hyperbole, která prochází bodem X.

$t: \frac{xx_0}{20} - \frac{yy_0}{20} = 1$

$X \in t: \frac{4x_0}{20} - \frac{4y_0}{20} = 1$

$X \in t: 4x_0 - 4y_0 = 20$

$X \in t: x_0 - y_0 = 5$, tedy $x_0 = y_0 + 5$

$(y_0 + 5)^2 - {y_0}^2 = 20$

${y_0}^2 + 10y_0 + 25 - {y_0}^2 = 20$

$10y_0 = -5$

$y_0 = -\frac{1}{2}$ a $x_0 = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2}$

$t\colon \frac{\frac{9}{2}x}{20} + \frac{\frac{1}{2}y}{20} = 1$

$t\colon \frac{9}{2}x + \frac{1}{2}y = 20$

$t\colon 9x + y = 40$

Obecná rovnice pro tečnu t, která prochází bodem $X\ [4;\ 4]$ je $9x + y - 40 = 0$.

Příklad č. 15

Bodem $K\ [2;\ 3]$ hyperboly $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} = 1$ veďte všechny přímky, které mají s hyperbolou společný právě jeden bod.

Řešení

$\frac{x^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

Velikosti a a b jsou rovny: $a = \sqrt{2}, b = 3$. Excentricitu dopočítáme z Pythagorovy věty $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 3^2} = \sqrt{11}$. Hlavní vrcholy mají souřadnice $A\left[-\sqrt{2};\ 0\right]$ a $B\left[\sqrt{2};\ 0\right]$, ohniska mají souřadnice $E\left[-\sqrt{11};\ 0\right], F\left[\sqrt{11};\ 0\right]$.

$a_1, a_2 = \pm\frac{b}{a}x$

$a_1, a_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$

Asymptoty jsou rovny $a_1\colon y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$ a $a_2\colon y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x$.

$t\colon \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$

$t\colon \frac{2x}{2} - \frac{3y}{9} = 1$

$t\colon 18x - 6y = 18$

$t\colon 3x - y - 3 = 0$

Rovnice tečny v bodě $K\ [2;\ 3]$ je rovna $3x - y - 3 = 0$. Máme vést všechny přímky, spočítáme tedy i přímky, které jsou rovnoběžné s některou z asymptot a prochází bodem K.

$q_1\colon y = kx + q$

$y = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}x + q$

$K \in q_1\colon 3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}2 + q$

$3 - 3\sqrt{2} = q$

$q_1 \colon y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 3 - 3\sqrt{2}$

$K \in q_2 \colon 3 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}2 + q$

$3 + 3\sqrt{2} = q$

$q_2 \colon y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x + 3 + 3\sqrt{2}$

4.3.2 Konstrukční část

Příklad č. 16

Sestrojte hyperbolu, znáte-li: A, E, F.

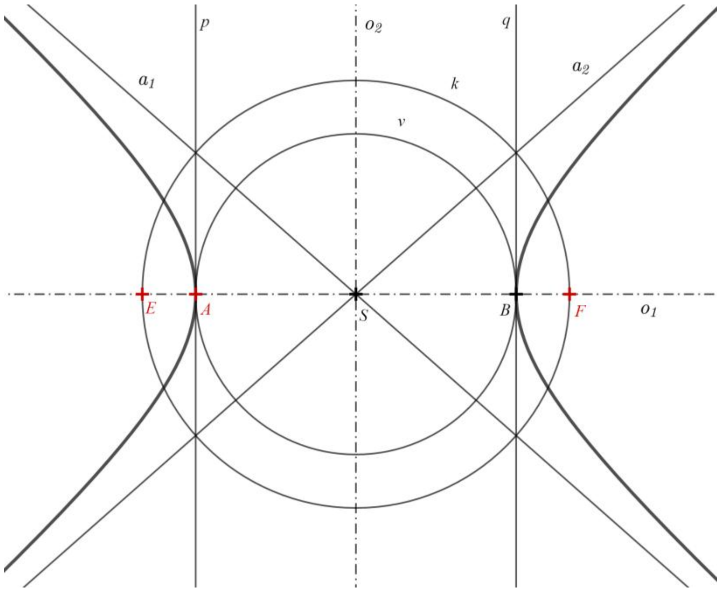
Řešení

1) Rozbor

Umístíme body A, E, F. Jelikož máme obě ohniska, můžeme narýsovat hlavní osu, střed a vedlejší osu. Hlavní vrchol B určíme pomocí vrcholové kružnice v.

2) Konstrukce

1. sestrojíme A, E, F
2. o_1; $o_1 \in A, o_1 \in E$
3. S; $S = \frac{|EF|}{2}, S \in o_1$
4. o_2; $o_2 \in S, o_2 \perp o_1$
5. v; $v\ (S, |AS|)$
6. p; $p \in A, p \perp o_1$
7. q; $q \in B, q \perp o_1$
8. k; $k\ (S, |ES|)$
9. a_1, a_2; $a_1, a_2 \in (k \cap p) \wedge (k \cap q)$
10. hyperbola



Obrázek 28 - konstrukce k příkladu č. 16 a 13

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad č. 17

Sestrojte hyperbolu, znáte-li: A, B, t.

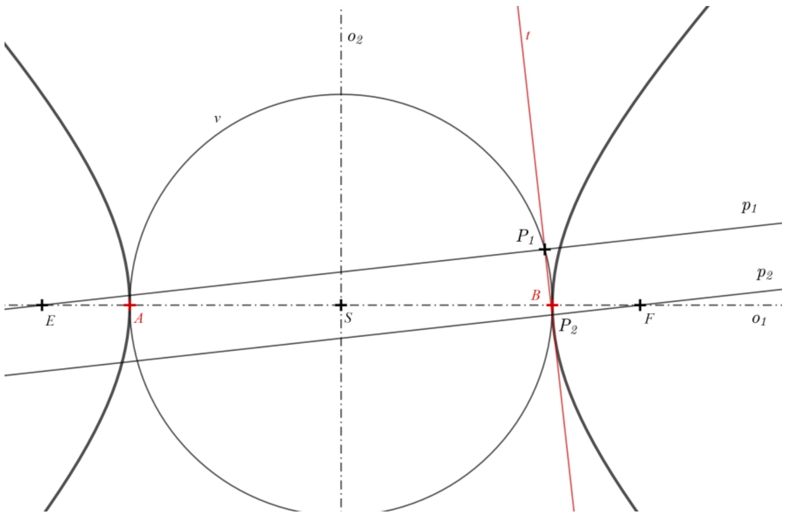
Řešení

1) Rozbor

Umístíme body A, B a tečnu t. Jelikož máme oba hlavní vrcholy, můžeme sestrojit hlavní osu o_1, střed S i vedlejší osu o_2. Abychom získali obě ohniska, musíme zjistit paty P_1, P_2, které vzniknou průnikem kružnice v a tečny t. Z pat narýsujeme kolmice na tečnu a kde se protnou s hlavní osou o_1, vzniknou ohniska Ea F.

2) Konstrukce

1. sestrojíme A, B, t
2. o_1; $o_1 \in A, o_1 \in B$
3. S; $S \in \frac{\overleftrightarrow{AB}}{2}$
4. o_2; $o_2 \in S, o_2 \perp o_1$
5. v; $v\ (S, |AS|)$
6. $P_1, P_2; v \cap t = \{P_1, P_2\}$
7. p_1; $p_1 \in P_1, p_1 \perp t$
8. p_2; $p_2 \in P_2, p_2 \perp t$
9. E ; $E \in o_1 \cap p_1$
10. F; $F \in o_1 \cap p_2$
11. hyperbola



Obrázek 29 - konstrukce k příkladu č. 17 a 14

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad č. 18

Sestrojte hyperbolu, znáte-li: $a, K, t, E, (K \in t)$.

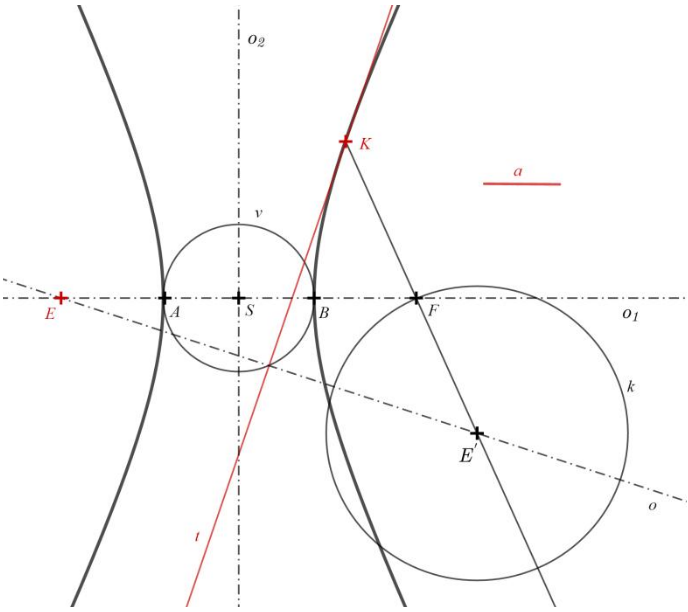
Řešení

1) Rozbor

Umístíme body K, E a tečnu t. Bod K je libovolný bod hyperboly a prochází jím tečna t. Abychom mohli udělat hlavní osu, musíme získat ohnisko F. Pomocí osové souměrnosti sestrojíme přes tečnu bod $E', o(t): E \rightarrow E'$.

2) Konstrukce

1. sestrojíme K, E, t
2. E'; $o(t): E \rightarrow E'$
3. k; $k\ (E', 2a)$
4. F; $F \in k \cap \overrightarrow{KE'}$
5. o_1; $o_1 \in E, o_1 \in F$
6. S; $S = \frac{|EF|}{2}$
7. v; $v\ (S, a)$
8. A, B; $v \cap o_1 = \{A, B\}$
9. hyperbola



Obrázek 30 - konstrukce k příkladu č. 18 a 15

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

4.4 Parabola

4.4.1 Analytická část

Příklad č. 19

Ukažte, že rovnicí $y^2 - 6x - 4y = 0$ je dána parabola. Určete její vrchol, ohnisko a řídící přímku.

Řešení

$(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$

$y^2 - 4y = 6x$

$(y-2)^2 - 4 = 6x$

$(y-2)^2 = 6x + 4$

$(y-2)^2 = 2 * 3(x + \frac{2}{3})$

Parametr paraboly je $p = 3$. Vrcholem paraboly $V\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$, ohnisko paraboly je rovno $F\left[-\frac{2}{3} + \frac{3}{2};\ 2\right] = \left[\frac{5}{6};\ 2\right]$. Rovnicí řídící přímky je $x = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{13}{6}$. Vzdálenost počátku od ohniska je $\sqrt{(\frac{5}{6})^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{36} + 4} = \frac{13}{6}$.

Příklad č. 20

Napište rovnici tečny paraboly $y^2 = 18x$, která je rovnoběžná s přímkou p: $3x - 4y + 17 = 0$. V bodě dotyku určete normálu paraboly. Napište i její ohnisko, vrchol a parametr.

Řešení

Parametr paraboly je roven $p = 9$, protože $y^2 = 2 * 9x$. Vrchol paraboly má souřadnice $V\,[0;\ 0]$. Ohnisko má souřadnice $F\left[\frac{9}{2};\ 0\right]$ a řídící přímka je rovna $x = -\frac{9}{2}$. Jestli má být tečna rovnoběžná s přímkou p, pak ji lze zapsat ve tvaru $3x - 4y + c = 0$. Ze soustavy rovnic vypočteme rovnici tečny.

$3x - 4y + c = 0$

$y^2 = 18x \Longrightarrow x = \frac{y^2}{18}$

$\frac{3y^2}{18} - 4y + c = 0$

$y^2 - 24y + 6c = 0$

$D = (-24)^2 - 4 * 1 * 6c = 576 - 24c$

Jelikož hledáme tečnu, položíme diskriminant roven nule.

$576 - 24c = 0 \implies c = 24$

$t: 3x - 4y + 24$

Potřebuje zjistit bod dotyku T. Tečna má rovnici $t: 3x - 4y + 24 = 0$, dosadíme tedy za x a vypočteme bod dotyku, který bude i bodem dotyku pro normálu.

$\frac{y^2}{6} - 4y + 24 = 0$

$y^2 - 24y + 144 = 0$

$(y - 12) * (y - 12) = 0$

$y = 12$

$12^2 = 18x \implies x = 8$

Bod dotyku má souřadnice $T\ [8;\ 12]$. Normála k tečně t má tvar $n: 4x + 3y + c = 0$. Jelikož tečna i normála mají společný bod T [8; 12], můžeme ho použít pro dosazení do rovnice a zjistit tak rovnici pro normálu k vypočtené tečně t.

$$4 * 8 + 3 * 12 + c = 0$$

$$c = -68$$

Rovnice normály je tedy $n: 4x + 3y - 68 = 0$.

Příklad č. 21

Určete parametr p tak, aby se parabola, která má rovnici $y^2 = 2px$, dotýkala přímky $q: y = \frac{x}{2} + 5$. Dále určete řídící přímku, ohnisko a vrchol paraboly.

Řešení

Abychom zjistili parametr p, musíme vypočítat soustavu rovnic danou parabolou a přímky q, jelikož se má přímka paraboly dotýkat, položíme diskriminant roven nule.

$y^2 = 2px$

$q: y = \frac{x}{2} + 5$

$x = \frac{y^2}{2p}$

$\frac{\frac{y^2}{2p}}{2} - y + 5 = 0$

$\frac{y^2}{4p} - y + 5 = 0$

$y^2 - 4py + 20p = 0$

$D = (-4p)^2 - 4 * 20p = 16p^2 - 80p$

$16p^2 - 80p = 0$

$16p * (p - 5) = 0 \implies p = 5$

Parametr $p = 5$, vrchol má souřadnice $V\ [0;\ 0]$. Ohnisko je rovno $F\ \left[\frac{5}{2};\ 0\right]$ a řídící přímku $x = -\frac{5}{2}$.

4.4.2 Konstrukční část

Příklad č. 22

Sestrojte parabolu, znáte-li: p, o, F.

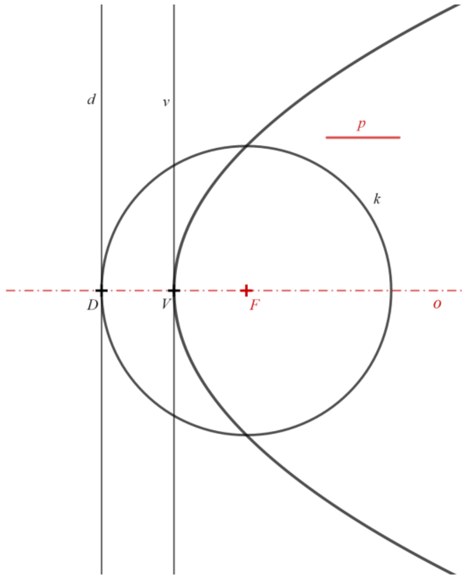
Řešení

1) Rozbor

Umístíme bod F a osu o. Jelikož známe velikost parametru, narýsujeme kružnici $k\ (F, p)$ a sestrojíme na ose o bod D a poté řídící přímku d. Bod V je středem úsečky DF.

2) Konstrukce

1. sestrojíme F, o
2. $k;\ k\ (F, p)$
3. $D;\ D \in k \cap o$
4. $d;\ d \in D, d \perp o$
5. $V;\ V = \frac{\overleftrightarrow{DF}}{2}$
6. $v;\ v \in V, v \perp o$
7. parabola



Obrázek 31 - konstrukce k příkladu č. 22 a 19

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

Příklad č. 23

Sestrojte parabolu, znáte-li: $F, T, t, T \in t$. Narýsujte normálu k tečně t.

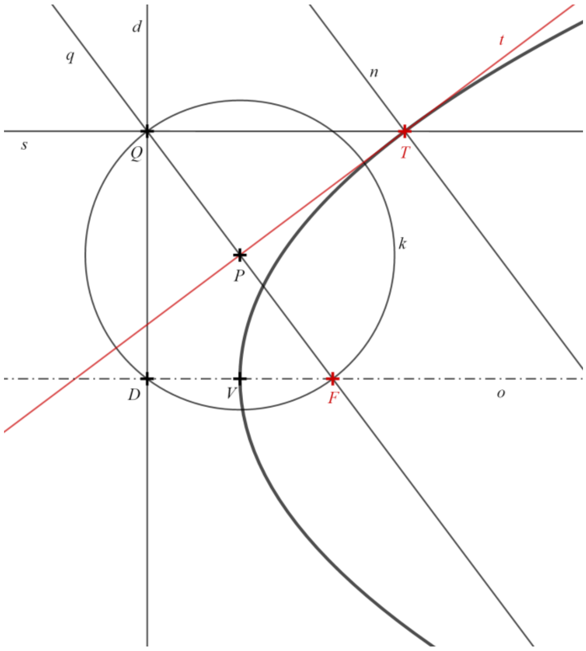
Řešení

1) Rozbor

Umístíme body F, T a tečnu t. Musíme sestrojit pomocný bod Q, kterými spolu s bodem T prochází přímka rovnoběžná s osou paraboly. Řídící přímka d je kolmá na přímky s a o a prochází bodem Q. Bod D vznikne protnutím řídící přímky a osy o. Vrchol paraboly V leží na ose o a tvoří střed úsečky DF.

2) Konstrukce

1. sestrojíme F, T, t
2. $q;\ q \in F, q \perp t$
3. $P;\ P \in q \cap t$
4. $k;\ k\ (P, |PF|)$
5. $Q;\ Q \in k \cap q$
6. $s;\ s \in Q, s \in T$
7. $o;\ o \parallel s, o \in F$
8. $d;\ d \in Q, d \perp s$
9. $D;\ D \in d \cap o$
10. $V;\ V \in o, V = \frac{\overleftrightarrow{DF}}{2}$
11. $n;\ n \in T, n \perp t$
12. parabola



Obrázek 32 - konstrukce k příkladu č. 23 a 20

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad č. 24

Sestrojte parabolu, znáte-li: p, t, F.

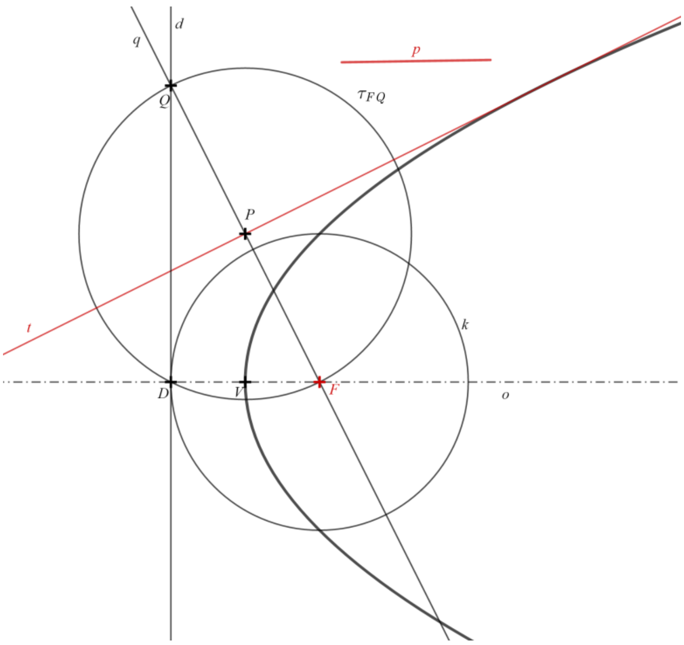
Řešení

1) Rozbor

Umístíme bod F a tečnu t. Narýsujeme kolmici q na tečnu t, která prochází bodem F. Pomocí středové souměrnosti přes bod P sestrojíme bod Q. Nad $\overleftrightarrow{FQ}$ opíšeme Thaletovu kružnici. V místě, kde se střetne Thaletova kružnice a kružnice k, $k\ (F, p)$ vznikne bod D. Bodem D a Q prochází řídící přímka d, kolmá přímka na řídící přímku je osa o, která prochází bodem F. Vrchol V se nachází na ose o a je vzdálený $\frac{p}{2}$ od F.

2) Konstrukce

1. sestrojíme F, t
2. $q;\ q \in F, q \perp t$
3. $P;\ P \in t \cap q$
4. $Q;\ S\ (P): F \rightarrow Q$
5. $\tau_{FQ};\ \tau_{FQ}$... Thaletova kružnice
6. $k;\ k\ (F, p)$
7. $D;\ D \in \tau_{FQ} \cap k$
8. $d;\ d \in D, d \in Q$
9. $o;\ o \in D, o \perp d$
10. $V;\ V \in o, V \in \frac{\overleftrightarrow{DF}}{2}$
11. parabola



Obrázek 33 - konstrukce k příkladu č. 24 a 21

3) Důkaz

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

Závěr

Hlavním cílem mé bakalářské práce je uvést čtenáře do problematiky kuželoseček a porovnat jejich analytickou geometrii s geometrií konstrukční, čehož si myslím, že jsem se zhostila velmi dobře.

Myslím si, že po pročtení práce by tuto problematiku pochopil jakýkoliv matematický „lajk“. V první polovině je látka podrobně vysvětlena – čtenář si zde může osvojit nové informace ohledně dané problematiky či si nějaké zopakovat. Dovídá se zde informace od dělení kuželoseček až po souhrn o jednotlivých kuželosečkách. Co se týká vlastností a rovnic kuželoseček, v práci jsou vypsány všechny základní informace, se kterými se může každý člověk běžně setkat. Také obrázky mohou čtenáři velmi pomoci při orientaci v dané problematice, snažila jsem se je vytvářet názorné a přehledné.

V druhé polovině jsou kuželosečky propočítány i s drobnými pomocnými návody, což může posloužit nejen pro kontrolu čtenářova postupu, ale také k případnému nasměrování správným směrem. Příklady v konstrukční části obsahují samotný postup konstrukce, což také může být čtenáři nápomocno při řešení daných úloh.

Seznam literatury

HODAŇOVÁ, Jitka, David NOCAR a Vladimír VANĚK. *Konstrukční geometrie I: kuželosečky*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2005. ISBN 80-244-1091-5.

PECH, Pavel. *Kuželosečky* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004 [cit. 2019-04-16]. ISBN 80-704-0755-7. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Kuzelosecky.pdf

DOLEŽAL, Jiří. *Geometrie* [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2007 [cit. 2019-03-07]. ISBN 978-80-248-1318-9.

Dostupné z: http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Geometrie.pdf

JUKL, Marek. *Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik*. 2., upr. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-1292-6.

KRÁLOVÁ, Alice, Petr LIŠKA a Miroslava TKADLECOVÁ. *Konstruktivní geometrie*[online]. Brno, 2005. Dostupné také z: http://user.mendelu.cz/balcarko/deska.pdf

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.

VOŠICKÝ, Zdeněk. *Matematika v kostce: pro střední školy* [online]. Havlíčkův Brod: Fragment, 2007 [cit. 2019-03-29]. Maturita v kostce. ISBN 978-80-253-0191-3. Dostupné z: http://www.gvp.cz/~horyna/matematika/Matematika%20v%20kostce.pdf

MAŇÁSKOVÁ, Eva. *SBÍRKA ÚLOH Z DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE*. Praha: PROMETHEUS, 2001. ISBN SBN 80-7196-160-4.

MALLE, Günther, Maria KOTH, Helge WOSCHITZ, Sonja MALLE, Bernhard SALZGER a Andreas ULOVEC. *Mathematik verstehen 7*. Wien: öbv, 2016. ISBN 978-3-209-08452-1.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Barbora Slezáková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D
Rok obhajoby:	2019

Název práce:	Kuželosečky
Název v angličtině:	Conics
Anotace práce:	Hlavním cílem této bakalářské práce je uvést do problematiky kuželoseček a porovnat jejich analytickou geometrii s konstrukční geometrií. Obsahem práce je teoretický úvod do problematiky a vymezení základních pojmů z oblasti kuželoseček, řešení ukázkových příkladů a konstrukční postupy jednotlivých typů kuželoseček. Analytická část je propojena s částí konstrukční.
Klíčová slova:	Kuželosečky, singulární kuželosečky, regulární kuželosečky, kružnice, elipsa, hyperbola, parabola
Anotace v angličtině:	The aim of this bachelor thesis is to introduce conics and compare their analytical geometry with structural geometry. The thesis consists of a introduction to the problem and a definition of basic concepts of conics, solution of examples and construction procedures of conics. The analytical part closely related and linked to the structural part of this thesis.
Klíčová slova v angličtině:	Conics, singular conics, regular conics, circle, ellipse, hyperbola, parabola
Přílohy vázané v práci:	anotace
Rozsah práce:	60
Jazyk práce:	Český