Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra Matematiky

Diplomová práce

Rovnice a soustavy rovnic v úlohách matematické olympiády kategorie A, B a C

Autor diplomové práce: Bc. Zuzana Šimánková

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Hana Štěpánková, PhD.

České Budějovice, duben 2015

Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

University of South Bohemia in České Budějovice

Faculty of Education

Department of Mathematics

The equations and systems of equations in problems from Mathematical Olympiad categories A, B and C

Author Diploma Thesis: Bc. Zuzana Šimánková

Supervisor Diploma Thesis: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice, April 2015

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Bc. Zuzana Šimánková

Název diplomové práce: Rovnice a soustavy rovnic v úlohách matematické olympiády kategorie A, B a C

Pracoviště: Katedra Matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

Rok obhajoby diplomové práce: 2015

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá informacemi o matematické olympiádě, rovnicemi a soustavami rovnic. Teoretická část obsahuje historický vývoj matematické olympiády a její organizaci, dále obsahuje informace o rovnicích a jejich výuce jak je tomu dáno v Rámcově vzdělávacím programu. Praktickou část tvoří sbírka řešených příkladů na téma rovnice a soustavy rovnic, které byly zařazeny do soutěže Matematická olympiáda. Příklady ve sbírce jsou roztříděny dle kategorií, ve kterých se objevily, a seřazeny podle obtížnosti. Dále praktická část obsahuje vyhodnocení pracovních listů, které vyplnili studenti Pedagogické fakulty, Jihočeské univerzity. Vyplněné pracovní listy najdeme v příloze. Tato práce může sloužit jako příprava žáků na matematickou olympiádu nebo jako sbírka příkladů pro nadanější žáky.

Klíčová slova: rovnice, soustavy rovnic, matematická olympiáda

Bibliographic identification

Name and Surname: Bc. Zuzana Šimánková

Title of Diploma Thesis: The equations and systems of equations in problems from Mathematical Olympiad categories A, B and C

Department: Matematics in education, Pedagogicial faculty, University of South Bohemia in České Budějovice

Supervisor: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: The diploma thesis included of information's of a Mathematical Olympiad, equations and systems of equations. The theoretical part contains a historical development and its organization, next it contains information's about equations and their teaching as it is given in the National Curriculum. The practical part consists of a collection of exercises on the topic of equations and systems of equations, which were included in the competition Mathematical Olympiad. Examples in the collection are divided into categories which appeared, and ranked by difficulty. Further practical part includes evaluation works heeds completed by students of Pedagogical faculty, University of South Bohemia. This thesis may serve as preparation pupils on Mathematical Olympiad or as a collection of examples for talented pupils.

Keywords: equations, system of equations, Mathematical Olympiad

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Rovnice a soustavy rovnic v úlohách matematické olympiády kategorie A, B a C jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....(datum) ....

(podpis)

Poděkování

Ráda bych poděkovala Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, trpělivost a ochotu mi pomoci, za mnoho námětů a připomínek, které mi velmi pomohly. Dále bych ráda poděkovala své rodině, která mi po celou dobu studia byla oporou.

Obsah

1 Úvod

S rovnicemi se žáci setkávají již na prvním stupni základní školy, a aniž by to věděli, provází je celou povinnou školní docházkou. S rovnicemi v daleko větší míře pracují studenti střední škol a gymnázií. Právě proto se tato diplomová práce zabývá rovnice a soustavami rovnic pro střední školy.

Jedním z hlavních cílů diplomové práce je vytvořit sbírku řešených příkladů na rovnice a soustavy rovnic. Ovšem nejedná se o příklady z běžných učebnic pro střední školy, nýbrž o ty z matematických olympiád. Sbírku mohou učitelé středních škol používat se studenty v matematickém kroužku nebo k prohlubování učiva talentovaných studentů. Práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol. Teoretická část obsahuje informace o matematické olympiádě a výuce rovnic na základních potažmo na středních školách.

Sbírka řešených příkladů na rovnice a soustavy rovnic je uvedena v další kapitole. Příklady jsou rozděleny podle jednotlivých kategorií, kde jsou dále členěny podle kola, ve kterém se objevily. Samotné příklady jsou řazeny podle obtížnosti od nejjednodušších po nejtěžší. Příklady ve sbírce jsou převzaty z uvedeného zdroje, doplněna vlastními řešeními a pro lepší srozumitelnost komentáři. Dále se práce zabývá analýzou řešení pracovních listů, které vypracovali studenti Pedagogické fakulty, Jihočeské univerzity. Vypracované listy jsou zcela anonymní.

Hlavní cíle této diplomové práce jsou:

- vypracovat přehled o matematické olympiádě kategorie A, B, C (historie a organizace matematické olympiády daných kategorií)

- vytvořit sbírku řešených úloh na rovnice a soustavy rovnic, které se vyskytují v matematických olympiádách

- ukázat obtížnost jednotlivých úloh a způsob hodnocení vypracovaných řešení

2 Matematická olympiáda

Matematická olympiáda (dále jen MO) vznikla roku 1951 v tehdejším Československu. Padesátá léta byla v Československu jak po hospodářské, tak i po politické stránce velmi složitá. O to více se musí ocenit iniciativa matematiků v čele s profesorem Karlovy univerzity Dr. Eduardem Čechem. Podařilo se jim založit matematickou soutěž pro studenty tehdejších tzv. výběrových, dnešních středních škol, která se později rozšířila i na základní školy. Profesor Dr. Eduard Čech pracoval ještě před 2. světovou válkou v Brně, odkud znal Dr. Františka Kahudu, který v padesátých letech nejdříve vykonával funkci náměstka, poté byl několik let ministrem školství, a plně podpořil vznik a průběh prvních ročníků MO. Dr. Kahuda byl také dlouhá léta předsedou Jednoty československých matematiků a fyziků (JČSMF), a právě Jednota českých matematiků a fyziků je spolu s Matematickým ústavem Akademie věd České republiky odborným garantem matematické olympiády. V padesátých letech bylo hlavním cílem matematické olympiády získat studenty středních škol pro studium technických oborů, aby se stali příštími budovateli, především těžkého průmyslu. Iniciátoři MO i učitelé ve školách viděli v tomto počinu hlavně prostředek ke zvýšení zájmu o matematiku. Olympiáda navázala na soutěž v řešení matematických úloh, kterou vypisovala JČMF ve svém časopise (byla to ovšem soutěž trochu jiného druhu) a také na matematické olympiády v jiných zemích, například v Polsku, Maďarsku nebo v Sovětském svazu.

Prof. Dr. František Vyčichlo, profesor Českého vysokého učení technického byl prvním předsedou ústředního výboru MO. Mimo jiné i tímto bylo zdůrazněno spojení MO s přípravou studentů na vysoké školy technického zaměření. Profesor Vyčichlo musel ze zdravotních důvodů po roce svojí funkci opustit, jeho nástupcem byl zvolen prof. Dr. Josef Novák, ředitel Matematického ústavu ČSAV. Z dalších předsedů je třeba připomenout docenta Jana Vyšína, kterého zná většina kantorů matematiky jako propagátora modernizace výuky matematiky. A dále například slovenského prof. Dr. Jozefa Moravčíka ze Žiliny, který vedl ÚV MO od 27. do 32. ročníku.

Pod slovy „ústřední výbor" si je třeba představit nepříliš početnou skupinu vědeckých pracovníků a učitelů matematiky základních, středních a vysokých škol, kteří nad rámec svých pracovních povinností matematickou olympiádu připravují. Dr. Rudolf Zelinka, zástupce ředitele MÚ ČSAV, vykonával funkci tajemníka ústředního výboru od vzniku této soutěže až do své smrti v roce 1956. Na tajemníkovi ÚV MO spočívá převážně celý průběh každého ročníku, jako např. příprava letáků, komentářů úloh, konečné formulace textů úloh atd. Především se věnoval výběru úloh, většinu sám vymýšlel. Když se tato nadstavbová aktivita rozšířila i do nižších tříd a přidalo se programování, vzrostl počet soustředění, počet tajemníků se musel zvýšit na dva, později na tři. Samozřejmě matematická olympiáda nestojí pouze na práci předsedy a tajemníků, ale není možné jmenovat všechny, kteří se v různých letech podíleli na práci pro tuto vzdělávací aktivitu. Dále se zmíním ještě o dvou pracovnících. Doc. Dr. Jiří Sedláček byl členem ÚV MO od 16. ročníku soutěže, pracoval však pro MO i předtím, připravoval úlohy, měl na starosti soustředění žáků na mezinárodní matematické olympiády a také psal texty pro řešitele úloh MO. V posledních letech se o výběr úloh starají dvě úlohové komise, jedna pro kategorie Z – základní školy, druhá pro kategorie A, B, C – střední školy. Vznik obou komisí inicioval doc. Dr. Jaromír Šimša z pobočky Matematického ústavu AV v Brně. Obě komise pracují společně se slovenskými kolegy a kolegyněmi. Výsledkem jsou stejné termíny i stejné úkoly jednotlivých kol MO u nás i na Slovensku.

Není možné opomenout práci tisíců učitelek a učitelů, profesorek a profesorů matematiky na základních a středních školách, kteří informují své žáky a studenty o existenci MO, předkládají jim úlohy, pomáhají návodnými úlohami, doporučují vhodnou literaturu.

V roce 1986 vznikla kategorie P- programování. Z této kategorie je třeba zmínit doc. Dr. Pavla Töpfra z MFF UK Praha, který je autorem většiny úloh v kategorii P. Dále žákovská řešení hodnotí, sepisuje k úlohám komentáře a připravuje studenty na mezinárodní soutěže v informatice.

Kategorie A (pro studenty 3. a 4. ročníků střední školy) a kategorie P jsou každým rokem zakončeny celostátním kolem MO. V prvních letech se celostátní kolo konalo vždy v Praze na matematicko-fyzikální fakultě, od 10. ročníku MO se jednotlivé kraje v uspořádání celostátního kola střídaly, za organizaci zodpovídal z pověření MŠMT odbor školství příslušného krajského národního výboru. To se v posledních letech změnilo a celostátní kola organizuje opravdu dobrovolně vždy některá střední škola, která je ochotna se tohoto úkolu ujmout.

2.1 Korespondenční semináře

Korespondenční seminář je další forma péče o nadané studenty. Vznikl ve 24. ročníku MO, za účelem individuální péče pro studenty, kteří neměli možnost navštěvovat semináře na speciálních školách. Hlavním cílem korespondenčních seminářů tedy je zlepšit individuální přípravu studentů, kteří ukázali svůj matematický talent. Úlohy jsou studentům zasílány přímo domů. Vyřešené úlohy zasílají zpět organizátorům. Organizátoři opravené úlohy zasílají poštou zpět řešiteli včetně vzorového řešení a nové sady úloh. Tento proces se opakuje několikrát za rok. Organizátory korespondenčních seminářů jsou u nás především studenti středních a vysokých škol pod vedením učitelů.

Tato soutěž slouží k vytipování žáků resp. studentů (korespondenční semináře jsou pořádané pro žáky základních škol, ale i pro studenty středních škol) s talentem a také k udržování a rozvoji žákova zájmu o matematiku. Seminář vytváří vhodné klima ke zvyšování přízně o matematiku.

V ČR je spektrum korespondenčních seminářů opravdu bohaté. Každý korespondenční seminář má svůj název i svá upřesnění. Semináře se liší například v počtu kol, v počtu úloh, které jsou v jednotlivých kolech posílány, v obtížnosti úloh dle věkové skupiny pro kterou jsou určeny nebo ve způsobu komunikaci mezi organizátory a řešiteli, ale také ve zveřejňování výsledků a odměny pro řešitele.

V roce 1980 v Košicích proběhl historicky první seminář. Seminář byl určen pro žáky středních škol a žáky vyšších ročníků gymnázií. O rok později, tedy roku 1981 byl založen korespondenční seminář i pro žáky základních škol.

Korespondenční semináře pro studenty středních škol jsou celorepublikové, v souvislosti se žáky základních škol mluvíme spíše o regionálních.

Forma korespondenčních seminářů se v průběhu let měnila. Hlavní změnou prošlo zadání úloh. Prvotní izolované úlohy v jednotlivých sériích byly obměněny do podoby literárních příběhů.

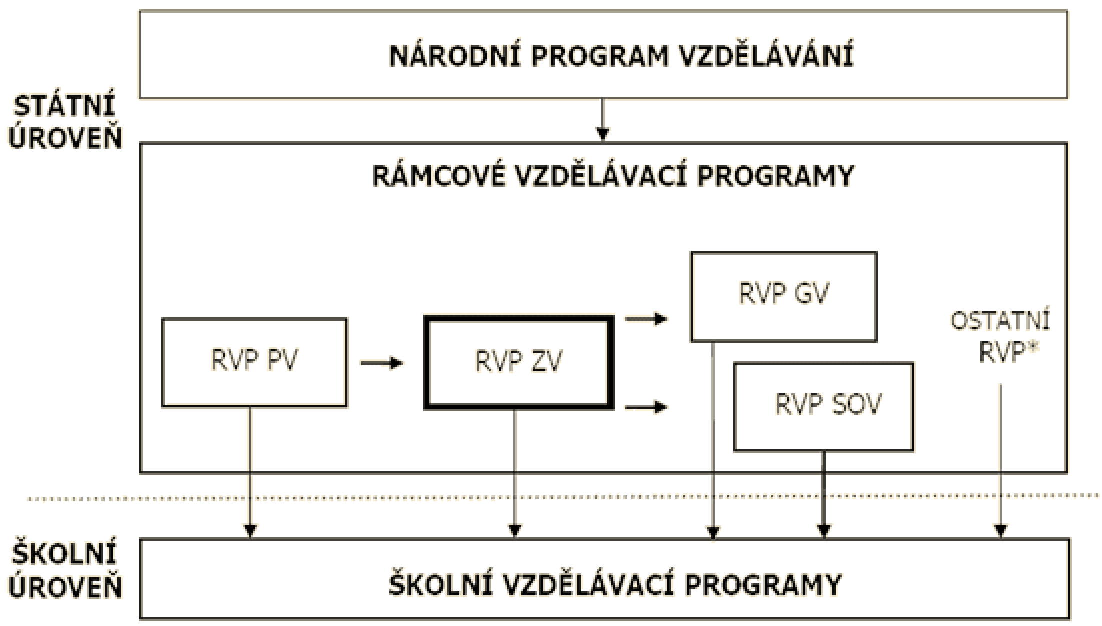
3 Výuka rovnic a soustavy rovnic

Žáci se s výukou rovnic setkávají již na prvním stupni základní školy, i když řešené příklady nejsou přímo prezentovány jako rovnice či soustavy rovnic. Pomáhají jim při řešení běžných situací, se kterými se setkávají nejen ve škole. Dle Rámcově vzdělávacího programu se tato látka zavádí na druhém stupni obvykle v osmé třídě.

3.1 Národní program vzdělávání

Podle Výzkumného ústavu pedagogického (2007) přinesl systém kurikulárních dokumentů revoluci ve vzdělávání. Tyto dokumenty jsou vytvořeny ve dvou úrovních. První úroveň státní a druhá úroveň školní.

Dle Výzkumného ústavu pedagogického (2007) vymezuje národní program vzdělávání počáteční vzdělávání jako celek. Rámcově vzdělávací programy udávají jednotlivé rámce vzdělání pro předškolní, základní a školní vzdělávání. Rámcově vzdělávací program vymezuje povinný obsah, rozsah a podmínky vzdělávání, podle kterých jsou na školách vytvářeny školní vzdělávací programy.



Obr. 1 Národní program vzdělávání

Zdroj: http://tvormeskolu.webnode.cz/vyuka/pedagogika/skolsky-system-a-skolske-dokumenty/

Před příchodem rámcově vzdělávacích programů, byly na školách osnovy, které obsahovaly přesný plán učiva, jenž se měl v daném měsíci a týdnu splnit. Od školního roku 2007/2008 je povinné na všech školách realizovat školní vzdělávací program. Podle Kitzbergera (2010) nyní máme k dispozici moderně pojaté kurikulum, které je v souladu s evropskými trendy.

3.2 Rámcově vzdělávací program

Rámcově vzdělávací programy (dále jen RVP) jsou vytvářeny pro všechny stupně vzdělání – od mateřských škol až po školy střední. Své programy mají základní umělecké školy a existují i RVP pro žáky s lehkým mentálním postižením a pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami.

RVP se především zaměřuje na klíčové kompetence, jejich spojitost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí v praxi. V neposlední řadě podporují pedagogickou autonomii škol a profesní odpovědnost učitelů za výsledky vzdělávání.

3.3 Školní vzdělávací program

Školní vzdělávací program (dále jen ŠVP) je dokument, který si podle RVP zpracovává každá škola sama.

Podle Výzkumného ústavu pedagogického (2006) vychází ŠVP z konkrétních vzdělávacích záměrů školy, zohledňuje podmínky a možnosti školy, ale také potřeby žáků. Vzdělávací proces se realizuje podle konkrétního ŠVP, který si daná škola sama vypracovala. Jak zmiňuje Výzkumný ústav pedagogický (2006) záměrem tvorby ŠVP je přimět učitele ke vzájemně spolupráci. Spolupráce by se měla projevit v propojování témat z různých vzdělávacích oborů.

3.4 Rovnice a soustavy rovnic v rámcově vzdělávacím programu

Rovnice se staly nedílnou součástí běžného života, proto mají nemalé zastoupení při výuce. V Rámcově vzdělávacím programu májí zastoupení v oblasti Číslo a proměnná.

3.4.1 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

RVP je rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí (Jazyk a jazyková komunikace, Matematika a její aplikace, Informační a komunikační technologie, Člověk a jeho svět, Člověk a společnost, Člověk a příroda, Umění a kultura, Člověk a zdraví, Člověk a svět práce) a doplňující vzdělávací obory (Výzkumný ústav, 2007).

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace klade důraz zejména na aktivní činnosti, které jsou pro práci s matematickými objekty a pro využívání matematiky v běžných situacích charakteristické (Výzkumný ústav pedagogický, 2007).

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace vymezuje čtyři tematické okruhy:

- Čísla a početní operace (na 2. stupni Číslo a proměnná)
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Geometrie v rovině a v prostoru
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

3.4.2 Rovnice ve vzdělávací oblasti Číslo a proměnná

Do samotného učiva týkající se rovnic na ZŠ řadí RVP základní pojmy: rovnice – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Očekávané výstupy v této oblasti jsou formulace a řešení reálné situace pomocí rovnic a jejich soustav.

Dle RVP pro SŠ zahrnuje tato oblast učivo zabývající se lineárními rovnicemi, nerovnicemi a jejich soustavami, kvadratickými rovnicemi (diskriminantem, vztahy mezi kořeny a koeficienty). Dále pak obsahuje rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, rovnice s neznámou ve jmenovateli a pod odmocninou, logaritmické, exponenciální a goniometrické rovnice. Jeden z mnoha očekávaných výstupů je rozložení mnohočlenů na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikování této dovednosti při řešení rovnic a nerovnic. Další očekávané výstupy je řešení lineárních a kvadratických rovnic a nerovnic, řešení soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutování o řešitelnosti či o počtu řešení. Student rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy. Znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a soustav rovnic graficky. Analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav.

4 Sbírka

Sbírka obsahuje řešené úlohy, které se vyskytly v některém z ročníků MO. Pro lepší srozumitelnost jsou vzorová řešení doplněna komentářem. Úlohy jsou rozděleny do kategorií a seřazeny dle obtížnosti od nejjednodušší po nejsložitější. Každá kategorie začíná krátkým úvodem.

4.1 Kategorie A

Kategorie A je určená pro žáky 3. a 4. ročníků středních škol, 7. a 8. ročníků osmiletých gymnázií a 5. a 6. ročníků šestiletých gymnázií. Kategorie A probíhá ve školním, krajském a ústředním soutěžním kole.

4.1.1 Příklad z 52. ročníku MO, kategorie A, úloha školního kola

Zadání: Zjistěte, pro které reálné číslo *p* mají rovnice

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0, \qquad (1)$$

$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0 \qquad (2)$$

jeden společný kořen.

Vzorové řešení:

Z první rovnice vyjádříme *p* a dosadíme do druhé rovnice

$$x^3 - 2x^2 - (x^3 + x^2 - 36x)x + 2(x^3 + x^2 - 36x) = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - x^4 - x^3 + 36x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 72x = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x = 0$$

Vytkneme x, upravíme a postupným rozkladem zjistíme kořeny

$$x(x^3 - 2x^2 - 36x + 72) = 0$$

$$x(x^2(x-2) - 36(x-2)) = 0$$

$$x((x-2)(x^2-36)) = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 6,\ x_4 = -6}$$

Kořeny dosadíme do (1)

$x_1 = 0$

$p_1 = 0$

$x_2 = 2$

$2^3 + 2^2 - 36 \cdot 2 - p = 0$

$8 + 4 - 72 - p = 0$

$p_2 = -60$

$x_3 = 6$

$6^3 + 6^2 - 36 \cdot 6 - p = 0$

$216 + 36 - 216 - p = 0$

$p_3 = 36$

$x_4 = -6$

$(-6)^3 + (-6)^2 - 36 \cdot (-6) - p = 0$

$-216 + 36 + 216 - p = 0$

$p_4 = 36$

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440659/A52s.pdf)

4.1.2 Příklad z 60. ročníku MO, kategorie A, úloha školního kola

Zadání: Určete všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$x^2 + \frac{5}{2}x + c = 0 \qquad (1)$$

dva reálné kořeny, jež lze zařadit s číslem c do trojčlenné aritmetické posloupnosti.

Vzorové řešení:

Diferenci aritmetické posloupnosti označíme *d*.

Řešení rozdělíme na dva případy.

První případ: *c* leží uprostřed kořenů x_1 a x_2,

platí $$x_1 = c - d \qquad (2)$$

$$x_2 = c + d \qquad (3)$$

Mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty *a*, *b*, *c* kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ platí dle Viètových vztahů tento vztah pro součet $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Sečtením rovnic (2) a (3) dostáváme

$$x_1 + x_2 = 2c$$

Z rovnice (1) dosadíme *a*, *b* do vztahu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$$x_1 + x_2 = -\frac{\frac{5}{2}}{1}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$2c = -\frac{5}{2} \qquad \boldsymbol{c_1 = -\frac{5}{4}}$$

Dosadíme c_1 do (1) a rovnici vyřešíme pomocí diskriminantu

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4} = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{20}{4}}}{2} \qquad x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{4}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{20}{4}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{4}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5}}$$

Druhý případ: *c* je krajním členem aritmetické posloupnosti

$$x_1 = c + d \qquad (4)$$

$$x_2 = c + 2d \qquad (5).$$

Pro součet kořenů dle Viètových vztahů tentokrát vychází

$$x_1 + x_2 = -\frac{\frac{5}{2}}{1}$$

$$x_1 + x_2 = 2c + 3d$$

$$2c + 3d = -\frac{5}{2}$$

$$3d = -\frac{5}{2} - 2c$$

$$d = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$$

Postupně dosadíme diferenci *d* do vztahů (4) a (5) a úpravami zjistíme po řadě x_1 a x_2

$$x_1 = c + -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$$

$$x_1 = \frac{6c - 4c - 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}c - \frac{5}{6}$$

$$x_2 = c + 2(-\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c)$$

$$x_2 = c - \frac{10}{6} - \frac{4}{3}c$$

$$x_2 = \frac{6c - 8c - 10}{6}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}c - \frac{5}{3}$$

Oba kořeny dosadíme do Viètových vztahů pro součin kořenů $x_1 \cdot x_2 = c \cdot a$

$$\left(\frac{1}{3}c - \frac{5}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}c - \frac{5}{3}\right) = c$$

Po roznásobení dostáváme

$$-\frac{1}{9}c^2 - \frac{5}{9}c + \frac{5}{18}c + \frac{25}{18} = c$$

Převedeme *c* na levou stranu

$$-\frac{1}{9}c^2 - \frac{5}{9}c + \frac{5}{18}c - c + \frac{25}{18} = 0$$

Upravíme na tvar kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

$$-\frac{1}{9}c^2 - \frac{23}{18}c + \frac{25}{18} = 0$$

$$-2c_2 - 23c + 25 = 0$$

Vypočítáme kořeny c_2 a c_3

$$c_2, c_3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$c_2, c_3 = \frac{23 \pm \sqrt{529 + 200}}{-4}$$

$$c_2 = \frac{23 + 27}{-4}$$

$$\boldsymbol{c_2 = -\frac{25}{2}}$$

$$c_3 = \frac{23 - 27}{-4}$$

$$\boldsymbol{c_3 = 1}$$

Dosadíme do c_2 a $c_3$do (1)

$$c_2 = -\frac{25}{2}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{2} = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25 + 200}{4}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{225}{4}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{15}{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{5}{2}}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25 + 200}{4}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{15}{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -5}$$

$c_2 = 1$

$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25-16}{4}}}{2} \qquad x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25-16}{4}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} \qquad x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{x_2 = -2}$$

Řešení má rovnice 3: $\boldsymbol{c_1 = -\frac{5}{4}, c_2 = -\frac{25}{2}, c_3 = 1}$

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440778/A60s.pdf)

4.1.3 Příklad z 58. ročníku MO, kategorie A, úloha domácí části I. kola

Zadání: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2\sin x \cos\,(x+y) + \sin y = 1,$$

$$2\sin y\,\cos\,(y+x) + \sin x = 1.$$

Vzorové řešení:

Zadanou rovnici upravíme s využitím vzorce pro cos (x + y).

1. *rovnice*

$$2\sin x\,(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+\sin y=1$$
$$2\sin x\cos x\cos x+(1-2\,sin^2\,x)\sin y=1$$
$$\sin 2x\cos y+\cos 2x\cdot\sin y=1$$
$$\sin(2x+y)=1$$

Druhou rovnici upravíme podobným způsobem jako první rovnici.

2. *rovnice*

$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1$$
$$2\sin y\,(\cos y\cos x-\sin y\sin x)+\sin x=1$$
$$2\sin y\cos y\cos x+(1-2\,sin^2)\sin x=1$$
$$\sin 2\,y\cos x+\cos 2\,x\cdot\ \sin x=1$$
$$\sin(2y+x)=1$$

Funkce *sin* nabývá hodnoty 1 v bodech $\frac{1}{2}\pi+2k\pi$, kde *k* je celé číslo. Řešením rovnice budou uspořádané dvojice (x, y) pro něž existují celá čísla *k, l* taková, že

$$2x+y=\frac{1}{2}\pi+2k\pi$$
$$2y+x=\frac{1}{2}\pi+2l\pi \qquad /\cdot(-2)$$
$$\overline{-3y\ =-\frac{1}{2}\pi-4l\pi+2k\pi}$$
$$y=\frac{\frac{1}{2}\pi+4l\pi-2k\pi}{3}$$

$$y = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2l - k) \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2k - l) \cdot \pi$$

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440742/A58i.pdf)

4.2 Kategorie B

Kategorie B je určená pro žáky 2. ročníků středních škol, 6. ročníků osmiletých gymnázií a 4. ročníků šestiletých gymnázií. Kategorie B probíhá ve školním a krajském soutěžním kole.

4.2.1 Příklad ze 42. ročníku MO, kategorie B

Zadání: Pro která reálná čísla *p* má soustava rovnic

$$x^3 - x + 3p = 6,$$

$$x^3 + x + 4p = 10.$$

alespoň jedno řešení v oboru reálných čísel?

Vzorové řešení:

$$x^3 - x + 3p - 6 = 0$$

$$x^3 + x + 4p - 10 = 0$$

Odečtením druhou rovnici od první obdržíme:

$$(x^3 - x + 3p - 6) - (x^3 + x + 4p - 10) = 0$$

$$x^3 - x + 3p - 6 - x^3 - x - 4p + 10 = 0$$

$$-2x - p + 4 = 0$$

$$-2x = p - 4$$

$$x = \frac{-p}{2} + 2$$

Dosadíme-li do první rovnice zadané soustavy, dostaneme rovnici s jednou neznámou *p*

$$\left(\frac{-p}{2}+2\right)^2-\left(\frac{-p}{2}+2\right)+3p=6$$

Po úpravě dostáváme:

$$8-6p+3\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{8}+\frac{p}{2}-2+3p-6=0$$

$$-3p+3\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{8}+\frac{p}{2}=0 \qquad /\cdot 8$$

$$-24p+12p^2-p^3+4p=0$$

$$-p^3+12p^2-20p=0$$

$$p\,(p^2-12p+20=0$$

$$p\,(p-2)(p-10)=0$$

Řešením jsou $p_1=0$, $p_2=2$, $p_3=10$

Hodnoty p_1, p_2, p_3 dosadíme za parametr p do zadané soustavy a vypočítáme x_1, x_2, x_3

p_1:

$$x^3-x=6$$

$$x^3+x=10$$

$$x^3-x-6=0$$

$$x^3+x-10=0$$

$$2x^3-16=0$$

$$2x^3=16$$

$$x^3=8$$

$$\boldsymbol{x_1=2}$$

p_2:

$$x^3-x+3(10)=6$$

$$x^3+x+4(10)=10$$

$$x^3-x+30-6=0$$

$$x^3+x+40-10=0$$

$$2x^3 + 54 = 0$$
$$2x^3 = -54$$
$$x^3 = -27$$
$$\boldsymbol{x_2 = -3}$$

p_3: $$x^3 - x + 3(2) = 60$$
$$x^3 + x + 4(2) = 10$$

$$x^3 - x + 6 - 6 = 0$$
$$x^3 + x + 8 - 10 = 0$$

$$2x^3 - 2 = 0$$
$$2x^3 = 2$$
$$x^3 = 1$$
$$\boldsymbol{x_3 = 1}$$

(inspirováno řešením z: BOČEK, HORÁK. [1])

4.2.2 Příklad z 50. ročníku MO, kategorie B, úloha domácí části I. kola

Zadání: Řešte v oboru kladných čísel soustavu rovnic

$$3x + y_{10} = 598{,}6,$$
$$x_{10} + 2y = 723{,}4,$$

v níž x_{10} a y_{10} označují po řadě čísla x a y zaokrouhlená na desítky.

Vzorové řešení:

$$x = x_{10} + m,\ y = y_{10} + n,\ -5 \leq m \leq 5,\ \ -5 \leq n \leq 5 \quad (1)$$

Označíme

$$a = 3x_{10} + y_{10},\ \ b = x_{10} + 2y_{10}. \quad (2)$$

Čísla a, b jsou násobky deseti a původní soustavu rovnic můžeme přepsat do tvaru

$$a = 598{,}6 - 3m,\ \ b = 723{,}4 - 2n. \qquad (3)$$

Čísla m, n jsou z intervalu $\langle -5,\ 5)$, proto $a \in \{590, 600, 610\}$ a $b \in \{720, 730\}$.

Dále z (2) dostáváme

$$x_{10} = \frac{1}{5}\,(2a - b), \quad y_{10} = \frac{1}{5}\,(3b - a). \qquad (4)$$

Vidíme, že čísla $2a - b$ a $3b - a$ musejí být dělitelná padesáti, a proto přícházejí v úvahu jen dvojice $[a, b]$ = [590,730], $[a, b]$ = [610,720]. Nalezené hodnoty čísel a, b postupně dosadíme do (4) a (3). Pomocí (1) určíme x a y.

A) $[a, b]$ = [590,730]

$$x_{10} = \frac{1}{5}\,(2 \cdot\ 590 - 730) = 90$$

$$y_{10} = \frac{1}{5}\,(3\ \cdot 730 - 590) = 320 \qquad (4)$$

$$590 = 598{,}6 - 3m$$

$$m = 2{,}86$$

$$730 = 723{,}4 - 2n$$

$$n = -3{,}3 \qquad (3)$$

B) $[a, b]$ = [610,720]

$$x_{10} = \frac{1}{5}\,(2 \cdot\ 610 - 720) = 100$$

$$y_{10} = \frac{1}{5}\,(3\ \cdot 730 - 590) = 320 \qquad (4)$$

$$610 = 598{,}6 - 3m$$

$$m = -3{,}8$$

$$720 = 723{,}4 - 2n$$

$$n = 1{,}7 \qquad (3)$$

Hledaná řešení jsou:

$$x = 90 + 2{,}87 = 92{,}86 \qquad\qquad x = 100 - 3{,}8 = 96{,}2$$

$$y = 320 - 3{,}3 = 316{,}7 \qquad\qquad y = 310 + 1{,}7 = 311{,}7$$

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440733/B57s.pdf)

4.2.3 Příklad ze 42. ročníku MO, kategorie B

Zadání: Zapište, pro která reálná čísla *a* má soustava rovnic řešení v oboru reálných čísel a vyřešte ji

$$x + y = z + 2, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 + 4, \qquad (2)$$

$$x^3 + y^3 = z^3 + a. \qquad (3)$$

Vzorové řešení:

Vidíme, že rovnice (1) má mocninu prvního řádu a absolutní člen je 2, rovnice (2) má mocninu druhého řádu a absolutní člen rovná se 4 ($2^2 = 4$). Rovnice (3) má mocninu třetího řádu absolutní člen *a* bude tedy rovno 8, protože $2^3 = 8$.

Jiné řešení:

Rovnici (1) umocníme druhou mocninou a odečteme od rovnice (2)

$$(x + y)^2 = (z + 2)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 4z + 4$$

$$x^2 + y^2 = z^2 + 4$$

$$-x^2 - 2xy - y^2 = -z^2 - 4z - 4$$

$$2xy = 4z$$

Celou rovnici vydělíme 2

$$xy = 2z \qquad (4)$$

Rovnici (1) umocníme třetí mocninou a odečteme od rovnice (3)

$$(x+y)^3 = (z+2)^3$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = z^3 + 6z^2 + 12z + 8$$

$$x^3 + y^3 = z^3 + a$$

$$-x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = -z^3 - 6z^2 - 12z - 8$$

$$3x^2y + 3xy^2 = 6z^2 + 12z + 8 - a$$

$$3xy(x+y) = 6z^2 + 12z + 8 - a \qquad (5)$$

Rovnici (4) společně s rovnicí (1) dosadíme do rovnice (5)

$$3(2z)(z+2) = 6z^2 + 12z + 8 - a$$

$$6z^2 + 12z = 6z^2 + 12z + 8 - a$$

$$\boldsymbol{a = 8}$$

Všechna řešení pro *a* = 8 jsou tedy trojice (*x, y, z)* ve tvaru (2, *t*, *t*) nebo (*t*, 2, *t*), kde *t* je libovolný parametr.

(inspirováno řešením z: BOČEK, HORÁK [1])

4.3 Kategorie C

Kategorie C je určená pro žáky 1. ročníků středních škol, 5. ročníků osmiletých gymnázií a 3. ročníků šestiletých gymnázií. Kategorie C probíhá ve školním a krajském soutěžním kole.

4.3.1 Příklad z 63. ročníku MO, kategorie C, úloha školního kola

Zadání: Určete, jakých hodnot může nabývat výraz *V* = *ab* + *bc* + *cd* + *da*, splňují-li reálná čísla *a, b, c, d*, dvojici podmínek

$$2a - 5b + 2c - 5d = 4,$$
$$3a - 4b + 3c - 4d = 6.$$

Vzorové řešení: Pro daný výraz V platí:

$$V = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)\,(b + d)$$

Podobně lze upravit i obě dané podmínky:

$$2(a + c) - 5(b + d) = 4,$$
$$3(a + c) + 4(b + d) = 6. \qquad (1)$$

Zvolíme-li tedy substituci $m = a + c$ a $n = b + d$, řešíme soustavu (1)

$$2m - 5n = 4 \qquad / \cdot(-3)$$
$$3m + 4n = 6 \qquad / \cdot(2)$$

Sečtením oboru rovnic:

$$-7n = 0$$
$$n = 0$$
$$3m = 6$$
$$m = 2$$
$$V = mn = 0$$

Z daných podmínek nabývá výraz *V* pouze hodnoty 0.

Jiné řešení: zadané podmínky si představíme jako soustavu rovnic o dvou neznamých *a*, *b* s pamametry *c, d.*

$$2a - 5b + 2c - 5d = 4 \qquad (1)$$

$$3a + 4b + 3c + 4d = 6 \qquad (2)$$

První rovnici soustavy vynásobíme 4, druhou rovnici 5 a sečteme je.

$$8a - 20b + 8c - 20d = 16$$

$$15a + 20b + 15c + 20d = 30$$

$$23a + 23c = 46$$

Po převedení parametru na pravou stranu a vydělení celé rovnice 23 dostáváme

$$a = 2 - c$$

Dosadíme například do (2) a vypočítáme *b*

$$3(2 - c) + 4b + 3c + 4d = 6$$

$$6 - 3c + 4b + 3c + 4d = 6$$

$$4b = -4d$$

$$b = -d$$

Hodnoty *a*, *b* dosadíme do výrazu V

$$V = (2 - c)(-d) + (-d) \cdot c + c \cdot d + d(2 - c)$$

$$V = -2d + cd - cd + cd + 2d - cd$$

$V = 0$

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440733/B57s.pdf)

4.3.2 Příklad ze 48. ročníku MO, kategorie C, úloha školního kola

Zadání: Najděte všechny dvojice a, b nezáporných reálných čísel, pro která platí

$$\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a+b}.$$

Vzorové řešení:

Rovnici umocníme na druhou podle vzorce $(a+b)^2 = a^2+2\,ab+b^2$

$$(\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a})^2=(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a+b})^2$$

$$a^2+b+2\sqrt{a^2+b}\cdot\sqrt{b^2+a}+b^2+a=a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a+b}+a+b$$

Po odečtení pravé strany od levé dostáváme

$$\sqrt{a^2+b}\cdot\sqrt{b^2+a}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a+b}$$

Znovu umocníme na druhou a po úpravě dostáváme

$$(a^2+b)(b^2+a)=(a^2+b^2)(a+b)$$

Roznásobíme

$$a^3+a^2b^2+b^3+ab=a^3+ab^2+a^2b+b^3$$

Odečteme a^3 a b^3 a všechny členy převedeme na levou stranu rovnice

$$a^2b^2+ab-ab^2-a^2b=0$$

Vytkneme ab

$$ab\,(ab+1-b-a)=0$$

$$ab\,(a-1)\,(b-1)=0$$

Z poslední úpravy vidíme, že hledané $a = 0$, $b = 0$, $a = 1$, $b = 1$.

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440691/C54s.pdf)

4.3.3 Příklad z 54. ročníku MO, kategorie C, úloha školního kola

Zadání: Najděte všechny trojice celých čísel *x*, *y*, *z*, pro která platí

$$x + yz = 2005, \qquad (1)$$

$$y + xz = 2006. \qquad (2)$$

Vzorové řešení:

Z (1) si vyjádříme *x*

$$x = 2005 - yz. \qquad (3)$$

Rovnici (3) dosadíme do rovnice (2) a dostáváme

$$y + (2005 - yz) \cdot z = 2006.$$

Upravíme

$$y + 2005\,z - yz^2 = 2006$$

$$y - yz^2 = 2006 - 2005\,z$$

$$y(1 - z^2) = 1 + 2005(1 - z).$$

Z poslední rovnice plyne, že *z* se nemůže rovnat 1.

Rovnici tedy můžeme vydělit výrazem a upravit na tvar

$$y + (1 + z) = 2005 + \frac{1}{1 - z},$$

levá část poslední rovnosti je celá → i pravá část musí být celá. Proto $z = 0$ nebo $z = 2$.

Dosazením do rovnice (1) a (2) pro $z = 0$ je

$$x = 2005, \ y = 2006$$

Pro $z = 2$, dosazením do rovnic (1), (2) dostáváme:

$$x + 2y = 2005$$

$$2x + y = 2006 \qquad /\cdot(-2)$$

$$-3y = -2004$$
$$y = 668$$
$$x = 669$$

Obdrželi jsme dvě řešení zadané úlohy [2005, 2006] a [669, 668]

(inspirováno řešením z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440691/C54s.pdf)

5 Pracovní listy

Pracovní listy byly zpracovány na základě prostudování různých pramenů o soutěži Matematická olympiáda. Obsahují jeden konkrétní příklad z každé kategorie, který se objevil v minulých ročnících soutěže. Dva příklady jsou ze školního kola a třetí z krajského kola olympiády. V části školní kolo je vždy u řešení napsán i postup, jak jednotlivá řešení vyhodnotit a obodovat. Na základě tohoto hodnocení byly vyhodnoceny příklady jedna a tři. V krajském kole již tyto kroky nenajdeme. Proto do pracovních listů byl zařazen právě jeden příklad, který se objevil v krajském kole soutěže. K tomuto příkladu byla navržena metrika pro vyhodnocení.

Pracovní listy byly rozdány studentům Jihočeské univerzity, Pedagogické fakulty, katedry Matematiky. Studenti řešili úlohy v jedné učebně a měli na vypracování stejný čas. Neměli k dispozici žádné pomůcky, pouze papíry na pomocné výpočty, které se neodevzdávali. Proto také mohlo dojít ke statistickému zpracování řešení, což bylo hlavním cílem tohoto průzkumu.

5.1 Zadání

Zde jsou zadání pracovního listu. Příklady jsou z různých ročníků i z různých částí Matematické olympiády.

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$$

společný kořen.

(57. ročník matematické olympiády kategorie B, školní část)

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A, krajské kolo)

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

(59. ročník matematické olympiády kategorie C, školní kolo)

5.2 Vzorová řešení úloh

Níže najdeme vypracovaná řešení upravená autorkou DP.

5.2.1 Př. 1

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + (3b + a)x + 4b = 0. \quad (2)$$

Rovnice budou mít spolčený kořen *x*. Rovnici (1) a (2) roznásobíme

$$x^2 + 3ax + bx + 4a = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 3bx + ax + 4b = 0 \quad (2)$$

Rovnici (2) vynásobíme -1 a sečteme s rovnicí (1)

$$2ax - 2bx + 4(a - b) = 0,$$

$$2x(a - b) + 4(a - b) = 0.$$

Celou rovnici vydělíme 2

$$x(a - b) + 2(a - b) = 0,$$

$$(a - b) \cdot (x + 2) = 0.$$

Uvažujme dvě možná řešení: $a = b$ nebo $x = -2$.

Pokud ***a*=*b*** dosazením do (1) nebo (2) dostaneme

$$x^2 + 4ax + 4a = 0$$

Pomocí diskriminantu vypočítáme interval parametru a

D = $b^2 - 4ac$

D = $16\,a^2 - 16a$

Po vydělení 16 dostaneme

$a^2 - a \geq 0$

$a\,(a-1) \geq 0$ nulové body: $a_1 = 0,\ \ a_2 = 1$

$a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Pro $\boldsymbol{x = -2}$ dosadíme do jakékoliv zadané rovnice v našem případě do (1) a vypočteme

$$(-2^2) + 3a(-2) + b(-2) + 4a = 0$$

$$4 - 6a - 2b + 4a = 0$$

$$-2a - 2b + 4 = 0$$

$$a + b - 2 = 0$$

$$b = 2 - a$$

Závěr: Rovnice mají aspoň jeden společný kořen $x = -2$ pro všechny dvojice $(a, 2 - a)$, kde *a* je libovolné reálné číslo, a pro všechny dvojice (*a*, *a*), *kde* $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

5.2.2 Př. 2

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1 \qquad (2)$$

Předpokládejme, že parametr *n* je čtyřciferné přirozené číslo.

Upravíme rovnici (1)

$$(x^2 + y^2)(x + y) = n.$$

Označme $a = x^2 + y^2$ a $b = x + y$,

platí: $$a + b = n,$$

$$a \cdot b = n + 1.$$

Čísla *a, b* jsou kořeny rovnice $q^2 - (n+1)q + n = 0.$

Roznásobíme a dostaneme

$$q^2 - (qn + q) + n = 0,$$

$$q^2 - qn - q + n = 0.$$

Postupným vytýkáním dostaneme

$$q(q-1) - n(q-1) = 0,$$

$$(q-1)(q-n) = 0.$$

Nulové body {1, n} = {a, b}

Dvojice *x*, *y* je řešením soustavy právě, tehdy, když řešení jedné ze soustav je

I. $x + y = 1$ (1)
$x^2 + y^2 = n$ (2)

II. $x + y = n$ (3)
$x^2 + y^2 = 1$ (4)

I. *x* =*k*
Z (1) vyjádříme *y*; $y = 1 - k$ a dosadíme do (2)

$$k^2 + (1-k)^2 - n = 0$$

Podle vzorečku $(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$ roznásobíme závorku $(1-k)^2$

$$k^2 + (1 - 2k + k^2) - n = 0$$

$$2k^2 - 2k + 1 - n = 0$$

Pomocí diskriminantu zjistíme kořeny *x* a *y*

$D = \ b^2 - 4ac$

$D = -4 + 8n$

Celou pravou stranu vydělíme *4*

$D = -1 + 2n$

$$\frac{2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{2n - 1}}{4}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{2n - 1}}{4} \qquad y = \frac{2 - \sqrt{2n - 1}}{4}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{2n - 1}}{2} \qquad y = \frac{1 - \sqrt{2n - 1}}{2}$$

II. *x* =*k*

Z (3) vyjádříme *y*; $y = n - k$ a dosadíme do (4)

$$k^2 + (n - k)^2 - 1 = 0$$

Podle vzorečku $(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$ umocníme závorku $(n - k)^2$

$$k^2 + n^2 - 2nk + k^2 - 1 = 0$$

$$2k^2 - 2nk + n^2 - 1 = 0$$

Pomocí diskriminantu zjistíme kořeny *x* a *y*

$$D = \ b^2 - 4ac$$

$$D = 4n^2 - 8(n^2 - 1)$$

$$D = 4n^2 - 8n^2 + 8$$

$$D = 4(2 - n^2)$$

Od začátku předpokládáme, že *n* je přirozené číslo, proto přichází v úvahu pouze $n = 1$.

Pak jsou soustavy I. a II. totožné a neexistují jiná řešení než $\{x, y\} = \{\frac{1+\sqrt{2n-1}}{2}, \frac{1-\sqrt{2n-1}}{2}\}$.

Závěr: Zjistili jsme, že pro každé přirozené číslo *n* jsou řešení soustavy v oboru reálných čísel

$\{x, y\} = \{\frac{1+\sqrt{2n-1}}{2}, \frac{1-\sqrt{2n-1}}{2}\}$.

Pokud je $2\mathrm{n} - 1$ druhou mocninou přirozeného čísla jsou x, y celá čísla. Aby bylo číslo *n* čtyřmístné, musí platit $n \geq 1000$. Z toho plyne, že $2n - 1 \geq 1999$. Nejmenší možná druhá mocnina je $2025 = 45^2$ (řešením jsou i další druhé mocniny lichých čísel větší než 45).

Z rovnice $2n - 1 = 2025$ vypočítáme *n*

$n = 1013$.

5.2.3 Př. 3

$$a^2 + b + 2 = a + b^2$$

Konstantu *2* dáme na jednu stranu rovnice a neznámé na druhou stranu rovnice

$$2 = -a^2 + a + b^2 - b$$

$$2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$$

První závorku na pravé straně rozložíme podle vzorce pro rozdíl čtverců $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$$2 = (b - a)(b + a) - (b - a)$$

Vytkneme výraz $(b - a)$

$$2 = (b - a)(b + a - 1)$$

Protože hledáme pouze nezáporná celá- čísla, tak uvažujeme čtyři možnosti řešení:

a) $(b - a) = 1, \quad \rightarrow \quad (b + a - 1) = 2$
   $a = 1$
   $b = 2$
b) $(b - a) = -1 \quad \rightarrow \quad (b + a - 1) = -2$
   Žádná dvojice nezáporných kořenů.
c) $(b - a) = 2 \quad \rightarrow \quad (b + a - 1) = 1$
   $a = 0$
   $b = 2$
d) $(b - a) = -2 \quad \rightarrow \quad (b + a - 1) = -1$
   $a = 0$

$b = 0$, toto řešení nevyhovuje 1. rovnici.

Úloha má tedy dvě řešení: $a = 1$, $b = 2$ nebo $a = 0, b = 2$.

5.3 Statistika řešení

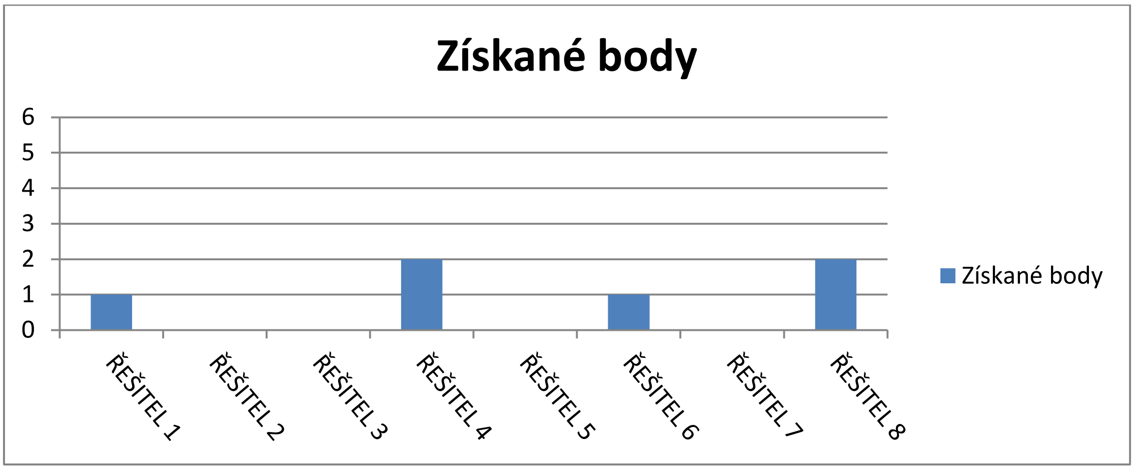
Pracovní listy vypracovalo 8 studentů Pedagogické fakulty, Jihočeské univerzity, katedry Matematiky. Cílem bylo zjistit, jak si budoucí učitelé matematiky povedou při řešení ne zcela typických úloh, se kterými se setkávají při vyučovacích hodinách matematiky. Zadány byly tři příklady, které se objevily v minulých letech ve školních a krajských kolech MO.

5.3.1 Vyhodnocení příkladu číslo 1

Tento příklad se vyskytl v 57. ročníku MO, kategorie B, školního kola. Za úspěšné vyřešení příkladu bylo možno získat maximálně 6 bodů. Příklad byl ohodnocen dle zveřejněného bodování.

Statistika úspěšnosti	
	Získané body
ŘEŠITEL 1	1
ŘEŠITEL 2	0
ŘEŠITEL 3	0
ŘEŠITEL 4	2
ŘEŠITEL 5	0
ŘEŠITEL 6	1
ŘEŠITEL 7	0
ŘEŠITEL 8	2

Modus 0



Obr. 2 Získané body příklad 1

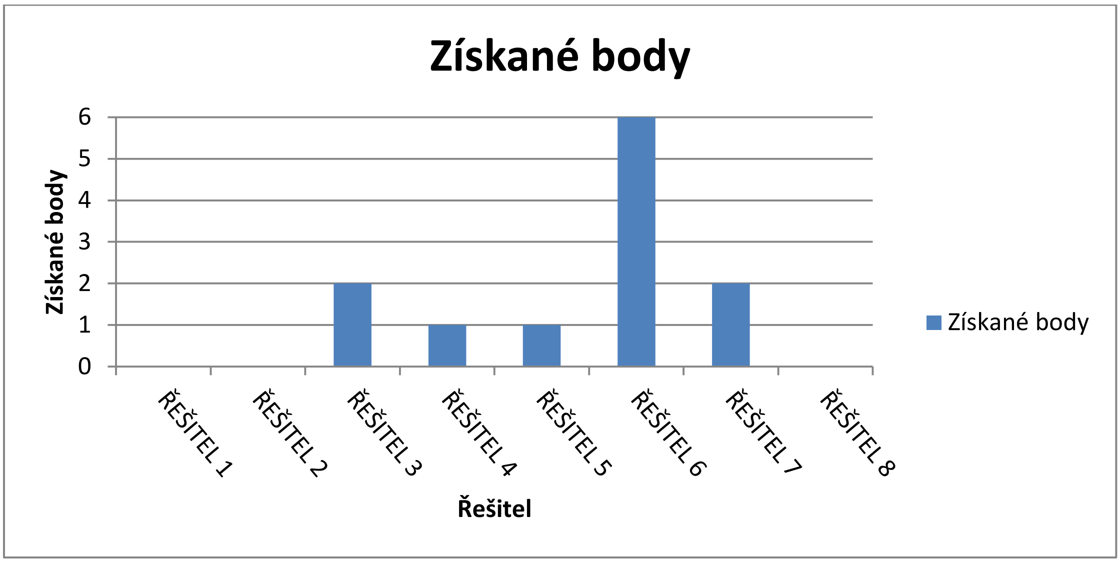
Je patrné, že plného počtu bodů nedosáhl žádný řešitel. Modus, neboli nejčastěji se vyskytované bodové ohodnocení je 0 bodů.

5.3.2 Vyhodnocení příkladu číslo 2

Tento příklad se vyskytl v 50. ročníku MO, kategorie A, krajského kola. Za úspěšné vyřešení příkladu bylo možno získat maximálně 6 bodů. Pro tento příklad byla sestavena vlastní metrika bodování, neboť u příkladů z krajského kola není zveřejněn postup bodování.

Statistika úspěšnosti	
	Získané body
ŘEŠITEL 1	0
ŘEŠITEL 2	0
ŘEŠITEL 3	2
ŘEŠITEL 4	1
ŘEŠITEL 5	1
ŘEŠITEL 6	6
ŘEŠITEL 7	2
ŘEŠITEL 8	0

Modus 0



Obr. 3 Získané body příklad 2

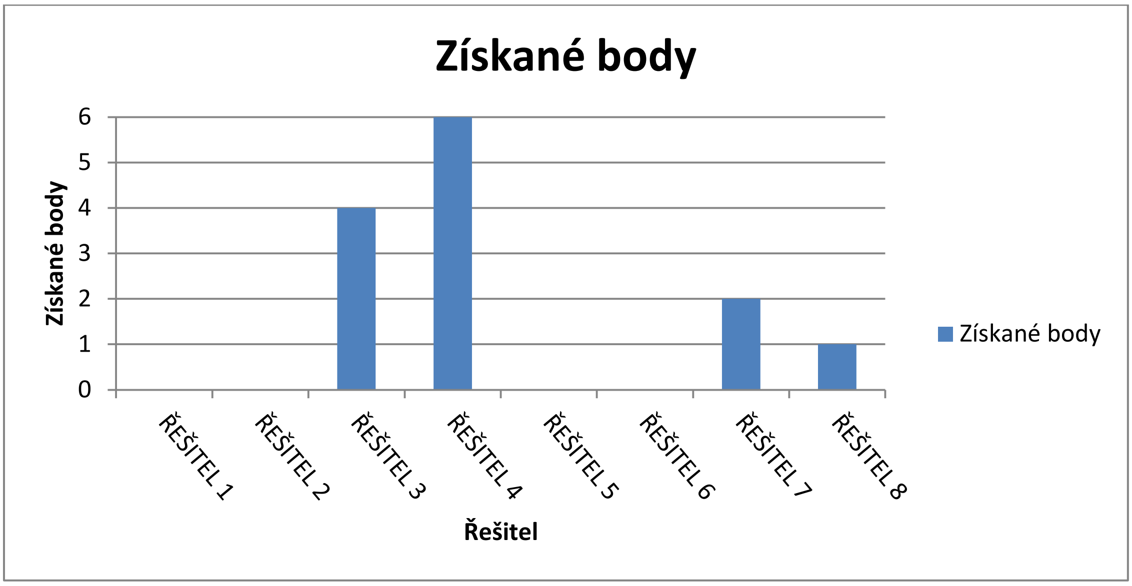
Z grafu je patrné, že plného počtu bodů dosáhl jeden student označený jako ŘEŠITEL 6. Jeho vzorové vypracování úlohy viz kapitola Zajímavá řešení. Modus, neboli nejčastěji se vyskytované bodové ohodnocení je 0 bodů.

5.3.3 Vyhodnocení příkladu číslo 3

Tento příklad se vyskytl v 59. ročníku MO, kategorie C, školního kola. Za úspěšné vyřešení příkladu bylo možno získat maximálně 6 bodů. Příklad byl ohodnocen dle zveřejněného bodování.

Statistika úspěšnosti	
	Získané body
ŘEŠITEL 1	0
ŘEŠITEL 2	0
ŘEŠITEL 3	4
ŘEŠITEL 4	6
ŘEŠITEL 5	0
ŘEŠITEL 6	0
ŘEŠITEL 7	2
ŘEŠITEL 8	1

Modus 0



Obr. 4 Získané body příklad 3

Z grafu je patrné, že plného počtu bodů dosáhl jeden student označený jako ŘEŠITEL 4. Jeho vzorové vypracování úlohy viz kapitola Zajímavá řešení. Modus, neboli nejčastěji se vyskytované bodové ohodnocení je 0 bodů.

5.3.4 Celkové vyhodnocení pracovních listů

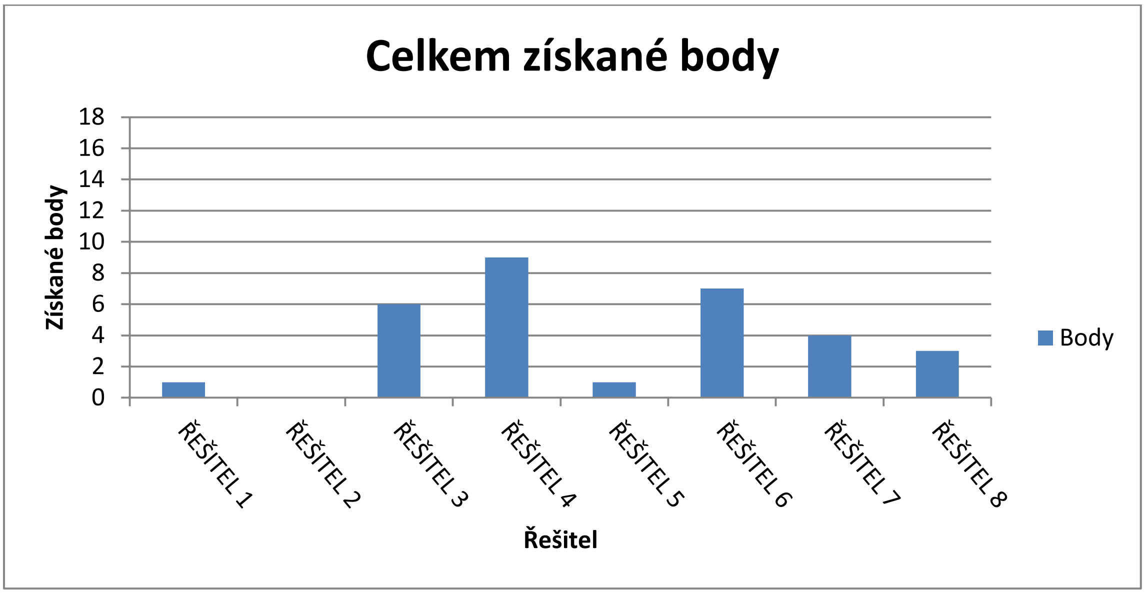
Za každou úspěšně vyřešenou úlohu mohl student získat maximálně 6 bodů. Za neřešenou úlohu se žádné body nestrhávaly. Celkem za všechny úlohy tedy mohl maximálně získat 18 bodů.

Poměr řešených příkladů			
	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3
ŘEŠITEL 1	Ano	Ano	Ano
ŘEŠITEL 2	Ano	Ano	Ano
ŘEŠITEL 3	Ano	Ano	Ano
ŘEŠITEL 4	Ano	Ano	Ano
ŘEŠITEL 5	Ano	Ano	Ne
ŘEŠITEL 6	Ano	Ano	Ne
ŘEŠITEL 7	Ano	Ne	Ano
ŘEŠITEL 8	Ano	Ano	Ano

Obr. 5 Poměr řešených příkladů

Z grafu vyplývá, že většina příkladů byla řešena. Za špatná řešení se neodčítají body, to napomohlo k tomu, že studenti se alespoň pokusili o vyřešení, i když neměli ucelenou představu o postupu řešení daného příkladu. Příklad 3 z kategorie C, tedy pro 1. ročníky středních škol a gymnázií neřešili dva respondenti. Příklad 2 z kategorie B neřešil jeden respondent.

Celkem získaných bodů				
	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3	Celkem
ŘEŠITEL 1	1	0	0	1
ŘEŠITEL 2	0	0	0	0
ŘEŠITEL 3	0	2	4	6
ŘEŠITEL 4	2	1	6	9
ŘEŠITEL 5	0	1	0	1
ŘEŠITEL 6	1	6	0	7
ŘEŠITEL 7	0	2	2	4
ŘEŠITEL 8	2	0	1	3

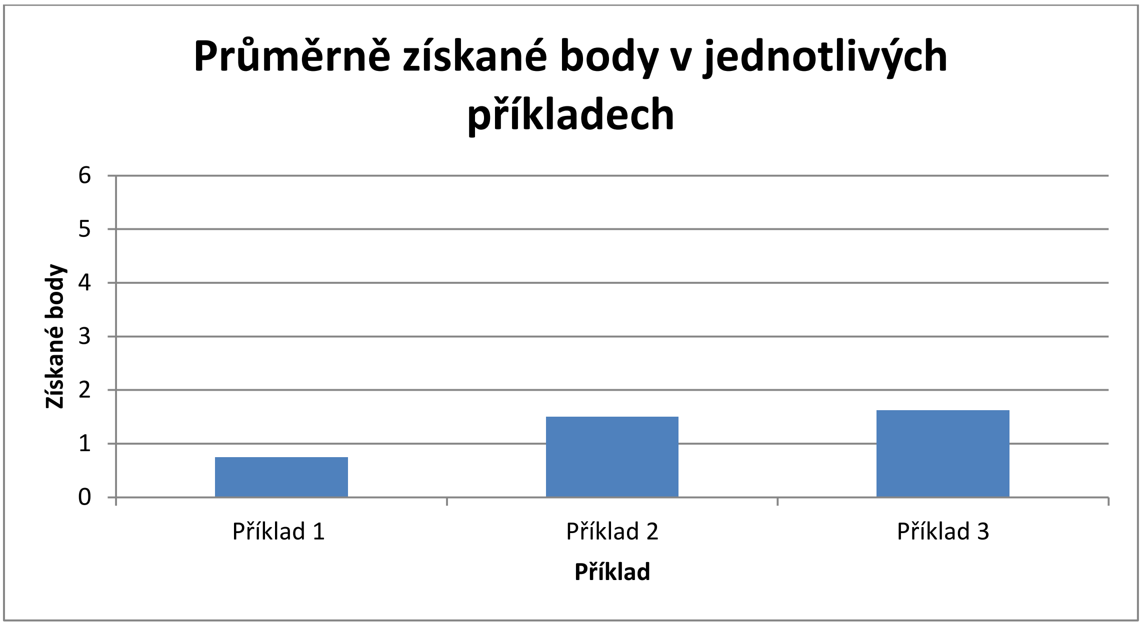


Obr. 6 Celkem získané body

Maximálních 18 bodů nedosáhl žádný řešitel. Nejvíce bodů získal student označený jako ŘEŠITEL 4, který získal 9 bodů. Je tedy patrné, že tyto příklady jsou opravdu obtížné a do běžné výuky se téměř nezařazují.

Celkem získaných bodů			
	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3
ŘEŠITEL 1	1	0	0
ŘEŠITEL 2	0	0	0
ŘEŠITEL 3	0	2	4
ŘEŠITEL 4	2	1	6
ŘEŠITEL 5	0	1	0
ŘEŠITEL 6	1	6	0
ŘEŠITEL 7	0	2	2
ŘEŠITEL 8	2	0	1

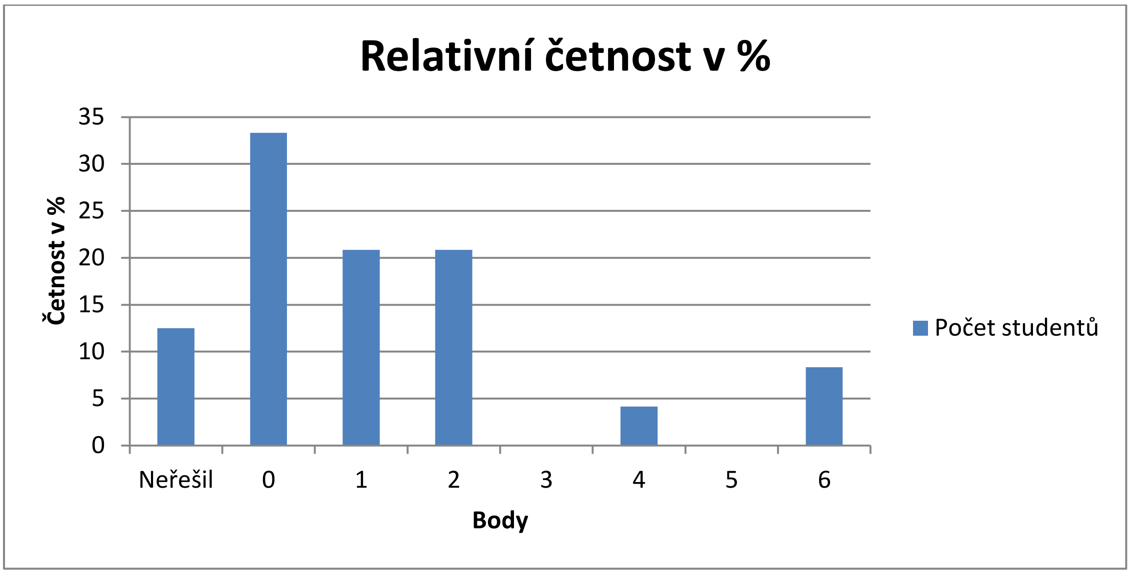
Průměr	0,75	1,5	1,625



Obr. 7 Průměrně získané body v jednotlivých příkladech

Z grafu vyplývá, že pro studenty byl Příklad 3 nejlehčím, ačkoliv byl nejméně řešený. Příklad 2, který byl z krajského kola, kategorie A, tedy pro nejstarší věkovou skupinu dopadl lépe než Příklad 1, který nevyžadoval takové znalosti.

Celkem získaných bodů					
	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3	Celkem	Relativní četnost %
Neřešil	0	1	2	3	13
0	4	2	2	8	33
1	2	2	1	5	21
2	2	2	1	5	21
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	4
5	0	0	0	0	0
6	0	1	1	2	8



Obr. 8 Relativní četnost v %

Jak je patrné, z grafu nejčastěji se v hodnocení vyskytovalo 0 bodů. A to dokonce osm krát. tři a pět bodů nezískal žádný řešitel.

Ze získaných údajů lze odvodit, že náročné a nestandartní příklady objevující se v Matematických olympiádách jsou problematické, jak pro žáky, tak pro testované studenty Pedagogické fakulty katedry Matematiky. Proto jsou zde uvedena podrobná řešení stěžejních příkladů včetně zajímavých řešení studentů. Takto vypracovaná řešení lze využít pro přípravu na další ročníky MO.

5.4 Zajímavá řešení

Při vyhodnocování jednotlivých pracovních listů se objevila i zajímavá a neobvyklá řešení. Která byla následně analyzována. Ne všechna neobvyklá řešení vedla ke správnému vyřešení příkladů podle zadání.

5.4.1

Úlohu číslo 2 zajímavě, originálním způsobem, řešil student označen jako ŘEŠITEL 6. Jeho doslovné řešení:

První rovnici přepíšeme: $(x + y)(x^2 + y^2) = n$

druhou: $(x + y)(x + y + 1) = n + 1 + 2xy$

obě sečteme $(x+y)(x^2+y^2+x+y+1)=2n+1+2xy$,

tedy $(x+y)(n+2)=2n+1+2xy$.

Je jasné, že pokud jedno z čísel není 0, musí být jedno záporné, zároveň $x+y$ *musí být kladné. Jediné řešení rovnice je tedy* $x+y=1$ *a* $2xy=-n+1$.

Dosadíme: $x^2+y^2=n$ *tato rovnice lze odvodit z předchozích dvou, nemusíme se s ní zabývat, takže řešením jsou všechna čísla lišící se v* abs. *Hodnotě o jedničku, kde jedno je záporné a druhé kladné a jejichž součin krát dvě dá čtyřmístné číslo, první čísla vyhovující této podmínce jsou -22, 23 a poslední -70 a 71. Řešením této úlohy je tedy 1013.*

5.4.2

Úlohu číslo 3 správně a zajímavě vyřešil student označen jako ŘEŠITEL 4. Jeho doslovné řešení:

$$a^2-a+2=\underbrace{b^2-b}_{x}$$

$$a^2-a-c=0$$

$$c=-2+x$$

b	*x*	*-2+x*	a_1	a_2
0	*0*	*-2*	-	-
1	*0*	*-2*	-	-
2	*2*	*0*	*0*	*1*
3	*6*	*4*	-	-
4	*12*	*10*	-	-
5	*20*	*18*	-	-
6	*30*	*28*	-	-
7	*42*	*40*	-	-
8	*56*	*54*	-	-

D = 1+4c

$$a_1, a_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

$\sqrt{1+4c}$ → *celé liché*

Mocniny	*4c*
0	*-1*
1	*0*
4	*3*
9	*8*
16	*15*
25	*24*
36	*35*
49	*48*
64	*63*
91	*90*
100	*99*

$$4c = 4x - 8$$

$$4c + 1 = 4x - 7$$

$[a,b] \in \{[0,2];[1,2]\}$

6 Závěr

Cílem práce nebylo pouze seznámit čtenáře se soutěží Matematická olympiáda, ale také zmapovat problematiku rovnic a soustav rovnic na základních a středních školách.

Pro splnění všech cílů diplomové práce je první kapitola ryze teoretická. Nejprve byl kladen důraz na historii a organizaci MO a poté je čtenář seznámen s výukou rovnic na základních resp. středních školách podle rámcově vzdělávacího programu.

V praktické části byla vytvořena sbírka řešených úloh na rovnice resp. soustavy rovnic, které se objevily v MO. Sbírka byla rozdělena na tři podkapitoly. Úlohy byly v podkapitolách řazeny dle stupně obtížnosti od nejjednodušších po ty složité. Dále praktická část obsahuje analýzu a hodnocení pracovních listů. Pracovní listy byly složeny ze tří příkladů, každý z jedné kapitoly MO pro střední školy. Pracovní listy vypracovali studenti Pedagogické fakulty, Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Listy byly následně opraveny a vyhodnoceny dle zadaných kritérií.

Práce je především určená učitelům středních škol a gymnázií, kteří mohou jednotlivé příklady využívat v běžných hodinách matematiky nebo v matematických kroužcích. Učitelé nejsou ovšem jediní, kdo může práci využívat. Může také sloužit talentovaným studentům k prohlubování jejich znalostí, či k přípravě na matematické soutěže.

7 Použitá literatura

[1] BOČEK, Leo, Karel HORÁK. *Padesát let matematické olympiády*. Praha: Matfyzpress, 2001, 124 s. ISBN 80-85863-64-2.

[2] http://mo.webcentrum.muni.cz/

[3] http://www.rovnice.kosanet.cz/kvad_rce_viet.html

[4] HULINSKÝ, Petr. Organizační řád Matematické olympiády. *Organizační řád Matematické olympiády* [online]. 2014, č. 1, s. 9 [cit. 2015-03-22]. Dostupné z: mo.webcentrum.muni.cz/media/65913/organiza_n____d_matematick__olympi_dy_2014.doc

[5] TOMANOVÁ, D.*: Procenta v úlohách matematické olympiády, korespondenčních seminářů a výzkumů PISA, TIMSS, diplomová práce.* JČU, Pedagogická fakulta, České Budějovice 2014

[6] Výzkumný ústav pedagogický (2006): *Manuál pro tvorbu školních vzdělávacích programů v základním vzdělávání.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 104 s. ISBN: 80-87000-03-X. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2010/02/Manual_SVP-ZV.pdf

[7] Výzkumný ústav pedagogický (2007): *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 126 s. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf

[8] ZHOUF, J. a kol. (2006): *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*. Praha: Prometheus, 375 s. ISBN: 80-7196-304-6.

[9] ZHOUF, J. (2001): *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice: doktorandská disertační práce.* Praha: UK Fakulta matematicko-fyzikální, 124 s.

[10] *37. Ročník matematické olympiády na středních školách: Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1987/88; 29. Mezinárodní matematická olympiáda*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISSN 80-04-24245-6. 1x ročně.

8 Přílohy

V této části jsou uvedeny pracovní listy, které vypracovali studenti Jihočeské univerzity, Pedagogické fakulty, katedry Matematiky. Vyřešené listy byly opraveny a doplněny slovním hodnocením a získaným počtem bodů.

[A] ŘEŠITEL 1

[B] ŘEŠITEL 2

[C] ŘEŠITEL 3

[D] ŘEŠITEL 4

[E] ŘEŠITEL 5

[F] ŘEŠITEL 6

[G] ŘEŠITEL 7

[H] ŘEŠITEL 8

Příloha A

ŘEŠITEL: 1

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

   $x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0,\ \ x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

   společný kořen.

(57. ročník matematické olympiády kategorie B)

$x^2+(3a+b)\cdot x+4a=0$

$x^2+(3b+a)\cdot x+4b=0$

$x^2+3ax+bx+4a=0$

$x^2+3bx+ax+4b=0$ $\ominus$

$-2ax+2bx-4a+4b=0$

$2bx+4b=2ax+4a$

$2b(2x+4)=2ax+4a$

$b=\dfrac{2ax+4a}{2x+4} \to x=-2$ 1b

$x(2a-2b)+4(a-b)=0$

$(a-b)+(2+x)$

$x=-2$

Řešitel došel pouze k možnosti $x=-2$, ale už zpět nedosadil do původní rovnice.

Za celé řešení dostává 1 bod.

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A)

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n+1 \quad / \cdot (-x) \quad \oplus$$

$$\cancel{x^3} + y^3 + \cancel{y^2x} + x^2y = n$$
$$-\cancel{x^3} - \cancel{y^2x} - x^2 - xy = -x\cdot(n+1)$$

$$y^3 + x^2y - x^2 - xy = -xn - x + n$$

$$y^3 - xy + x^2y - x^2 = -xn - x + n$$

$$y\cdot(y^2 - x) + x^2\cdot(y-1) = -x\cdot(n+1) + n$$

Řešitel za tento příklad nedostal žádný bod.
Jeho úprava rovnic nebyla úplně vhodná!

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí
$a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(59. ročník matematické olympiády kategorie C)

$$a^2 + b + 2 = a + b^2$$

$$a^2 - a + 2 = -b + b^2$$

$$a \cdot (a-1) + 2 = -b(1+b)$$

$$a \cdot (a-1) + b - b^2 = -2$$

$$a \cdot (a-1) + b \cdot (1-b) = -2$$

$$(a^2 - b^2) - (b - a) = -2$$

vzoreček $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Ředitel získává za 3. příklad 0 bodů.

Příloha B

ŘEŠITEL 2

Řešitel nedošel k vhodné úpravě rovnic, ze které by byly patrné podmínky $x=-2$, $a=b$. Posléze i jejich vyšetření. Získává 0 bodů.

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

   $x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0, \; x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

   společný kořen.

   (57. ročník matematické olympiády kategorie B)

$$x^2+(3a+b)x+4a=0$$
$$x^2+(3b+a)x+4b=0$$

$$x^2+3ax+bx+4a=0$$
$$x^2+ax+3bx+4b=0 \quad /\cdot(-3)$$

$$x^2+3ax+bx+4a=0$$
$$-3x^2-3ax-9bx-12b=0$$

$$-2x^2-8bx+4a-12b=0 \quad /:(-2)$$
$$x^2+4bx-2a+6b=0$$
$$2a=x^2+4bx+6b$$
$$a=\frac{x^2}{2}+2bx+3b$$

$$x^2+\left(\frac{x^2}{2}+2bx+3b\right)x+3bx+4b=0$$
$$x^2+\frac{x^3}{2}+2bx^2+\underline{3bx}+\underline{3bx}+4b=0$$
$$x^2+\frac{x^3}{2}+2bx^2+6bx+4b=0$$
$$2bx^2+6bx+4b=-x^2+\frac{x^3}{2} \quad /\cdot\frac{1}{2}$$
$$bx^2+3bx+2b=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}$$
$$b(x^2+3x+2)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}$$
$$b=\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}}{x^2+3x+2}$$

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A)

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n$$
$$x^2 + y^2 + x + y - 1 = n \quad / \cdot (-x)$$

$$\cancel{x^3} + y^3 + \cancel{y^2x} + x^2y = n$$
$$-\cancel{x^3} - \cancel{y^2x} - x^2 - yx + x = -nx$$

$$y^3 - x^2 + x^2y - yx + x = n - nx$$

$$y^3 + x^2y - yx - x^2 + x = n(1-x)$$

$$y^3 + yx(x-1) + x(1-x) = n(1-x) \quad / : (1-x)$$

$$\frac{y^3}{1-x} - \frac{yx(1-x)}{(1-x)} + \frac{x(1-x)}{1-x} = \frac{n(1-x)}{1-x}$$

$$\frac{y^3}{1-x} - yx + x = n$$

$$y^3\left(\frac{y^3}{\frac{1}{x} - 1} - y + 1\right) = n \qquad x \neq 1$$

Úprava soustavy není vhodná a nevede ke správnému řešení. Dostává za tento úkol 0 bodů.

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(59. ročník matematické olympiády kategorie C)

$$a^2+b+2=a+b^2$$

$$a^2-a=b^2-b-2$$

$$a(a-1)=b(b-1)-2$$

$$a(a-1)-b(b-1)+2=0$$

$a=1$ $\quad b_1=\cancel{-1}\,2$

$a_2=0$ $\quad b_2=+2$

Řešitel rovnici neupravil vhodně a tudíž nemohl najít všechny správné řešení. Dostává 0 bodů.

Příloha C

ŘEŠITEL 3

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

   $x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0, \; x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

   společný kořen.

   (57. ročník matematické olympiády kategorie B)

$$x^2 + (3a+b) \cdot x + 4a = 0$$
$$x^2 + (3b+a) \cdot x + 4b = 0$$

1) $x_{12} = \dfrac{-3a-b \pm \sqrt{9a^2+3ab+b^2-16x^2a}}{2x^2}$

2) $x_{12} = \dfrac{-3b-a \pm \sqrt{9b^2+3ba+a^2}}{2x^2}$

$$-3a-b \pm \sqrt{9a^2+3ab+b^2-16x^2a} = -3b-a \pm \sqrt{9b^2+3ba+a^2} \quad /^2$$

$$9a^2+b^2 \pm (9a^2+3ab+b^2-16x^2a) = 9b^2+a^2 \pm (9b^2+3ba+a^2)$$

Řešitel nedošel k vhodné úpravě rovnic, která by vedla k podmínkám $x=-2$, $a=b$. A následnému správnému rozebrání.

Dostává 0 bodů.

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A)

$x + y = u$
$x^2 + y^2 = t$

$(x^2+y^2)+(x+y) = n+1 \Rightarrow t+u = n+1$

$(x^2+y^2)\cdot(x+y) = n \Rightarrow t\cdot u = n$

$r^2 - (n+1)r + n = 0$

$r^2 - (n+1)r + n = (r-n)(r-1) \Rightarrow \{u,t\} = \{1,n\}$

$x+y = 1$

$x^2+y^2 = n$

$z^2 + (1-z)^2 = n$

$z^2 + (1-2z+z^2) = n$

$2z^2 - 2z + 1 = n$

$z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2n-1}}{2}$

Řešitel dostává za tento úkol 2 body. Bezchybně upravil rovnice a určil podmínky, kdy t a u jsou kořeny soustavy rovnic. Při řešení rovnic si udělal chyby z nepozornosti, proto mu nebyl udělen žádný bod.

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí
$a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(59. ročník matematické olympiády kategorie C)

$a^2 - a - b^2 + b = -2$
$-a^2 + a + b^2 - b = 2$
$b^2 - a^2 + a - b = 2$
$(b-a)(b+a) - (b-a) = 2$
$(b-a)(\cancel{8}(b+a) - 1) = 2$
$(b-a)(b+a-1) = 2$

2 - prvočíslo
$1 \cdot 2$ $(-1)(-2)$
$2 \cdot 1$ $(-2) \cdot (-1)$ } 4 možnosti

1) $b - a = 1 \Rightarrow b = 1 + a$
$a + b - 1 = 2$
$-1 + a + 1 + a = 2$
$2a = 2$
$a = 1$
$\boxed{a = 1, \; b = 2}$ ✓
Zk: $1 + 2 + 2 = 1 + 4$
$5 = 5$

2) $b - a = 2 \Rightarrow b = 2 + a$
$a + b - 1 = 1$
$a + 2 + a - 1 = 1$
$2a = 0$
$a = 0$
$\boxed{a = 0, \; b = 2}$ ✓
Zk: $0 + 2 + 2 = 0 + 4$
$4 = 4$

3) $b - a = -1 \Rightarrow b = -1 + a$
$a + b - 1 = -2$
$a - 1 + a - 1 = -2$
$2a = 0$
$a = 0$
$\boxed{a = 0, \; b = -1}$ ✓
Zk: $0 - 1 + 2 = 0 + 1$
$1 = 1$

Žádné nenulové kořeny!

4) $b - a = -2 \Rightarrow b = -2 + a$
$a + b - 1 = -1$
$a - 2 + a - 1 = -1$
$2a = 2$
$a = 1$
$\boxed{a = 1, \; b = -1}$ ✓
Zk: $1 + (-1) + 2 = 1 + 1$
$2 = 2$

Nevyhovuje 1. rovnici.

Řešení tedy 2: $a = 1, b = 2$
$a = 0, b = 2$.

Řešitel získává za tento příklad 4 body, 1 bod mu byl stržen, protože nevyloučil možnost 3) a druhý bod za to, že nevyloučil možnost 4).

Příloha D

ŘEŠITEL 4 Řešitel správně rozebral možnost a=b, ale neobjevil druhou podmínku x=-2. Proto dostává 2 body.

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

   $x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0,\ x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

   společný kořen.

   (57. ročník matematické olympiády kategorie B)

$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0$$
$$x^2 + (3b+a)x + 4b = 0$$

2b POKUD $\boxed{[a=b]}$ → PAK SE ROVNICE SHODUJÍ → MAJÍ SPOLEČNÉ KOŘENY

$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0$$
$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0$$

$$x^2 + (3a+a)x + 4a = 0$$
$$x^2 + 4ax + 4a = 0$$

$D = 16a^2 - 16a \geq 0$ ⇒ ABY ROVNICE MĚLA ŘEŠENÍ

$$a^2 - a \geq 0$$
$$a(a-1) \geq 0$$

→ 0 → 1

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

0 1

$$\boxed{a, b \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty) \quad \wedge \quad [a = b]}$$

(PRO 1 SPOLEČNÝ KOŘEN: $[a, b] = \{[0;0]; [1,1]\}$)

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A)

$$x^2(x+y) + y^2(y+x) = n$$

$$\boxed{(x+y)(x^2+y^2) = n}$$

$$\boxed{x+y + x^2 + y^2 = n+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = x+y \\ b = x^2+y^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a \cdot b = n \\ a + b = n+1 \end{array}$$

Řešitel dostává za správnou úpravu soustavy rovnic 1bod.

Řešitel za jeho originální řešení pomocí tabulky uděluji 6 bodů.

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí
$a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(59. ročník matematické olympiády kategorie C)

$$a^2 - a + 2 = \underbrace{b^2 - b}_{x} \qquad c = -2 + x$$

$$a^2 - a - c = 0$$

b	x	c $(2+x)$	a_1	a_2
0	0	−2	∅	∅
1	0	−2	∅	∅
2	2	0	0	1
3	6	+4	/	/
4	12	+10	/	/
5	20	+18	/	/
6	30	+28	/	/
7	42	+40	/	/
8	56	+54	/	/

$$D = 1 + 4c$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

$\sqrt{1+4c} \Rightarrow$ CELÉ, LICHÉ

$1+4c \rightarrow$ MOCNINY LICHÉ

MOCNINY	−1	\4
0	−1	−
1	0	
4	3	
9	8	
16	15	
25	24	
36	35	
49	48	
64	63	
81	80	
100	99	
⋮		

$$4c = 4x - 8$$

$$4c + 1 = 4x - 7$$

$$\boxed{[a, b] \in \{[0, 2]; [1, 2]; \ldots ?\}}$$

Příloha E

ŘEŠITEL J

(1) $x^2 + (3a + b)\cdot x + 4a = 0$

$x^2 + (3b + a)\cdot x + 4b = 0$ } společný kořen

$D = (3a + b)^2 + 4\cdot 1\cdot 4a$

$D = 9a^2 + 6ab + b^2 + 16a$

$D = (3b + a)^2 + 4\cdot 1\cdot 4b$

$D = 9b^2 + 6ab + a^2 + 16b$

$D = 0$ – jeden kořen

$$\boxed{\begin{aligned} 9a^2 + 6ab + b^2 + 16a &= 0 \\ 9b^2 + 6ab + a^2 + 16b &= 0 \end{aligned}}$$

$b\cdot(9b + 16) + 6ab + a^2 = 0$

$9a^2 + 6ab + 16a + b^2 =$

$a(9a + 16) + 6ab + b^2 =$

$a \in (-\infty; 0) \cup (+1; \infty)$

$a_1 = +1$; $b_1 = -1$

$a_2 = 0$; $b_2 = 0$

Řešitel za 1. příklad získává 0 bodů.

DEDUKCE

(2) $x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = m$

$x^2 + y^2 + x + y = m + 1$

$(x^2 + y^2)\cdot(x + y) = m$

$(x^2 + y^2) + (x + y) = m + 1$

$(x^2 + y^2) = (m + 1) - (x + y)$

~~$(a - (x^2 + y^2))\cdot(a - (x + y)) = m$~~

~~a^2~~

$(x^2+y^2)\cdot(x+y) = m$

$(x^2+y^2) = (m+1) - (x+y)$

$\big((m+1)-(x+y)\big)\cdot(x+y) = m$

$(x+y) = a$

~~$(m+1-x+y)\cdot(x+y) = m$~~

~~$xm + x - x^2 + xy + ym + y - xy + y^2 = m$~~

$\big((m+1)-a\big)\cdot a = m$

$am + a - a^2 = m$

$a^2 - a\cdot(m+1) + m = 0$

$D = (m+1)^2 - 4\cdot 1\cdot m$

$D = m^2 + 2m + 1 - 4m$

$D = m^2 - 2m + 1$

$D = 1 - 2 + 1$

$D = 0$

$D = 4 - 4\cdot 1\cdot 1$ $\quad m_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2} =$

$D = 4 - 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{(m+1)\pm\sqrt{0}}{2} = \frac{m+1}{2}$

Nevím

Za úpravu rovnic dostává 1 bod.

Příloha F

I RESITEL 6

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

   $x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0, \; x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

   společný kořen.

   (57. ročník matematické olympiády kategorie B)

Odečteme obě rovnice, pokud je x_2 kořenem obou rovnic, je i kořenem rozdílu: $(2a-2b)(x-2)=0$. Tato rovnice má jedno řešení pro $x=2$, tedy společný kořen je 2. Přejdeme k Viètovým vzorcům pro první rovnici:

$$x_1 + x_2 = -3a - b$$
$$x_1 - 2 = -3a - b$$
$$x_1 \cdot x_2 = 4a$$
$$x_1 = 2a$$

tedy $2 = a + b$. Obdobně z druhé rovnice dojdeme ke stejné podmínce $2 = a + b$. Nesmíme zapomenout, že $x=2$ je řešení pouze tehdy pokud jsme nedělili 0 a se nerovná b, pokud se $a=b$ jsou podmínky splněny. Řešení jsou tedy dvě $a+b=2$

$a=b$

Řešitel dostává 1 bod za rozebrání podmínky $(a-b)(x+2)$, kde udělal drobnou chybu. Podmínky dále nejsou zřetelně rozebrány.

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A)

První rovnici přepíšeme: $(x+y)(x^2+y^2) = n$

druhou: $(x+y)(x+y-1) = n+1+2xy$

obě ~~odečteme~~ sečteme $(x+y)(x^2+y^2+x+y+1) = 2n+1+2xy$

tedy: $(x+y)(n+2) = 2n+1+2xy$.

Je jasné, že pokud jedno z čísel není 0, musí být jedno záporné, zároveň $x+y$ musí být kladné. Jediné řešení rovnice je tedy $x+y=1$ a $2xy = -n+1$ dosadíme: $x^2+y^2=n$ tato rovnice lze odvodit z předchozích dvou, nemusíme se o ni starat, takže řešením jsou všechna čísla lišící se v abs. hodnotě o jedničku, kde jedno je záporné a druhé kladné a jejichž součin krát dvě dá čtyřmístné číslo, první čísla vyhovující této podmínce jsou -22, 23 a poslední -70 a 71. Řešením této úlohy je tedy 1013.

Za správné řešení příkladu dostává 6 bodů.

Příloha G

ŘEŠITEL 7

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0, \; x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

společný kořen.

(57. ročník matematické olympiády kategorie B)

$x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0 \qquad a = 1 \qquad b = 1$

$x^2 + (3 \cdot 1 + 1) \cdot x + 4 \cdot 1 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)\;(x + 2) = 0$

$\underline{\underline{x = -2}}$

Řešitel nezískal žádný bod, protože neodvodil podmínku, ze které měl rozebrat další možnosti řešení.

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí
$a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(59. ročník matematické olympiády kategorie C)

$a^2+b+2=a+b^2$ $a=1$, $b=2$

$1+2+2=1+4$

$5=5$ ✓

Řešitel nenalezl všechna řešení, proto jsou mu přiděleny 2 body. 1 bod za úpravu rovnice a 1 bod za nalezení jednoho řešení.

Příloha H

ŘEŠITEL 8

PRACOVNÍ LIST

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

   $x^2 + (3a + b) \cdot x + 4a = 0$, $x^2 + (3b + a) \cdot x + 4b = 0$

   společný kořen.

   (57. ročník matematické olympiády kategorie B)

$x^2 + (3a+b) \cdot x + 4a = 0$

$x^2 + (3b+a) \cdot x + 4b = 0 \quad / \cdot (-1)$

$x^2 + (3a+b) \cdot x + 4a = 0$

$-x^2 - (3b+a) \cdot x - 4b = 0$

$x^2 + 3ax + bx + 4a = 0$

$-x^2 - 3bx - ax - 4b = 0$

$2ax - 2bx + 4a - 4b = 0$

$2x(a-b) + 4(a-b) = 0 \quad /:2$

$x(a-b) + 2(a-b) = 0$ $\longrightarrow (a-b)(x+2) = 0$

$x(a-b) = -2(a-b) \quad /:(a-b)$

2 podmínky, $a = b$, $x = -2$

$\underline{\underline{x = -2}}$

$(-2)^2 + (3a+b) \cdot (-2) + 4a = 0$

$4 - 6a - 2b + 4a = 0$

$4 - 2a - 2b = 0 \quad /:2$

$2 - a - b = 0$

$\underline{\underline{a = 2 - b}}; \ \underline{\underline{b = 2 - a}}$

Řešiteli uděluji 2 body za správné rozebrání podmínky $x = -2$.

2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$x^3 + y^3 + y^2x + x^2y = n,$$
$$x^2 + y^2 + x + y = n + 1$$

pouze celočíselná reálná řešení.

(50. ročník matematické olympiády kategorie A)

$$x^3+y^3+y^2x+x^2y=n$$
$$x^2+y^2+x+y=n+1$$
$$x\cdot(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)=n$$
$$x(x+1)+y(y+1)=n+1$$

$$x^2(x+y)+y^2(x+y)=n$$
$$x(x+1)+y(y+1)=n+1$$
$$x(x+1)+y(y+1)=x^2(x+y)+y^2(x+y)+1 \quad /:y(y+1)$$
$$x(x+1)=\frac{x^2(x+y)+y^2(x+y)+1}{y(y+1)}$$
$$x(x+1)-x^2(x+y)-y^2(x+y)=\frac{1}{y(y+1)}$$

Řešiteli se bohužel nepodařilo vhodně upravit rovnice a tedy nedošel ke správnému řešení. Dostává 0 bodů.

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel *a*, *b*, pro něž platí
$a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(59. ročník matematické olympiády kategorie C)

$a^2 + b - a - b^2 = -2 \quad / \cdot (-1)$

$b^2 - b - a^2 + a = 2$

$\cancel{b(b-1) - a(\overset{a-1}{a+1}) = 2}$

$(b^2 - a^2) + (a - b) = 2$

$(b + a)(b - a) + (a - b) = 2$

Chybí rozbor 4 možných řešení. Řešiteli za vhodnou úpravu rovnice udělují 1 bod.

Student označený jako ŘEŠITEL 8 získal celkem 3 body.