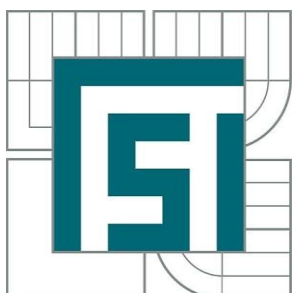


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## NÁVRH PROGRAMU PRO TVORBU A ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ Z PROSTÉHO TAHU/TLAKU PRUTŮ A JEJICH SOUSTAV

PROPOSAL OF A PROGRAM FOR SOLVING OF PROBLEMS OF SIMPLE  
TENSION/COMPRESSION OF BARS AND STRUT FRAMES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

TOMÁŠ MARTÍNEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. STANISLAV POLZER

BRNO 2011



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Tomáš Martínek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

**Návrh programu pro tvorbu a řešení příkladů z prostého tahu/tlaku prutů a jejich soustav**

v anglickém jazyce:

**Proposal of a program for solving of problems of simple tension/compression of bars and strut frames**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jedná se o napsání programu (např. v Delphi, Maple), který by byl schopen řešit úlohy z prostého tahu/tlaku prutů a prutových soustav v rozsahu předmětu PPI. Program by měl umožňovat definování prutu (soustavy) na základě jeho geometrických parametrů a vazeb, určit míru statické určitosti, v případě potřeby formulovat deformační podmínku a provést řešení příslušných rovnic.

Cíle bakalářské práce:

-sestavit funkční program ve zvoleném prostředí, který bude schopen řešit úlohy prostého tahu/tlaku prutů a prutových soustav v rozsahu předmětu PPI.

Seznam odborné literatury:

Janíček, P., Ondráček E., Vrbka, J., Burša J., Mechanika těles, pružnost pevnost I, Cerm 2004  
Gere, J.M., Timoshenko, S., Mechanics of materials, Chapman&Hall, 1995

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Stanislav Polzer

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 14.11.2010

L.S.

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

## **Abstrakt**

Hlavním cílem této práce je vypracování programu, který bude řešit úlohy z oblasti prostého tahu/tlaku prutů a prutových soustav v rozsahu bakalářského studia. Práce se sestává ze dvou programů, vypracovaných ve vývojovém prostředí Borland Delphi. Programy umožňují uživateli definovat prut (prutovou soustavu) na základě geometrických parametrů a vazeb, určí míru statické neurčitosti, provedou potřebné výpočty a v případě potřeby určí deformační podmínku (program pro řešení prutu). Písemná část práce slouží jako manuál k přiloženým programům.

## **Klíčová slova**

PRUT, TAH, TLAK, PRUTOVÁ SOUSTAVA, PROGRAM, NAPĚTÍ

## **Abstract**

The aim of this work is a program that will solve problems from the simple tension /compression bars and strut frames in the range of bachelor. The work consists of two programs developed in the Borland Delphi development environment. The programs allow the user to define a bar (strut frames) on the basis of the geometrical parameters and constraints, determine the rate of statical indetermination, make the necessary calculations and, if necessary, indicate the condition of deformation (a program for solving bars). The written part of the work serves as a manual.

## **Keywords**

BAR, TENSION, COMPRESSION, STRU FRAMES, PROGRAM, STRESS

## **Bibliografická citace**

MARTÍNEK, T. *Návrh programu pro tvorbu a řešení příkladů z prostého tahu/tlaku prutů a jejich soustav*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 54 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Stanislav Polzer.

## **Prohlášení o původnosti práce**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Návrh programu pro tvorbu a řešení příkladů z prostého tahu/tlaku prutů a jejich soustav* vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Stanislava Polzera, a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Brně dne 24.5.2011

.....

## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu práce panu Ing. Stanislavu Polzerovi za cenné rady, připomínky a trpělivost při vypracování závěrečné práce.





# Obsah

<b>1. ÚVOD</b> .....	<b>11</b>
<b>2. ZÁKLADNÍ TEORETICKÉ POZNATKY A VZTAHY</b> .....	<b>12</b>
2.1 MEZNÍ STAVY .....	12
2.1.1 MEZNÍ STAVY SOUVISEJÍCÍ S DEFORMACÍ.....	12
2.2 PRUT V PRUŽNOSTI A PEVNOSTI.....	13
2.3 VÝLEDNÉ VNITŘNÍ ÚČINKY .....	14
2.4 PROSTÝ TAH/TLAK.....	14
2.4.1 GEOMETRICKÉ VZTAHY .....	15
2.4.2 ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V PŘÍČNÉM PRŮŘEZU.....	15
2.4.3 ZÁVISLOST MEZI VVŮ A NAPĚTÍM.....	16
2.4.4 URČENÍ POSUVU .....	16
2.4.5 PROBLEMATIKA VRUBŮ .....	17
2.5 SOUSTAVY S PRUTY .....	18
2.5.1 STATICKY URČITÉ SOUSTAVY .....	18
<b>3. VLASTNÍ PROGRAMY</b> .....	<b>19</b>
3.1 PROGRAM PRO ŘEŠENÍ PROSTÉHO TAHU/TLAKU PRUTU .....	19
3.1.1 STRUČNÝ POPIS PROGRAMU .....	19
3.1.2 ŘEŠENÍ ÚLOHY PŘÍMÉ STATICKY URČITÉ.....	20
3.1.3 ŘEŠENÍ ÚLOHY PŘÍMÉ STATICKY PODMÍNĚNĚ NEURČITÉ .....	28
3.1.4 ŘEŠENÍ ÚLOHY PŘÍMÉ STATICKY NEURČITÉ.....	34
3.1.5 OMEZENÍ PROGRAMU .....	35
3.1.6 MOŽNOSTI DALŠÍCH ÚPRAV PROGRAMU.....	36
3.2 PROGRAM PRO VÝPOČET PRUTOVÝCH SOUSTAV .....	36
3.2.1 STRUČNÝ POPIS PROGRAMU .....	36
3.2.2 ŘEŠENÍ PRUTOVÉ SOUSTAVY – ÚLOHA PRVNÍ.....	37
3.2.3 ŘEŠENÍ PRUTOVÉ SOUSTAVY - ÚLOHA DRUHÁ .....	45
3.2.4 SLOŽITĚJŠÍ TYPY PRUTOVÝCH SOUSTAV.....	48
3.2.5 POUŽITÉ ALGORITMY PRO ŘEŠENÍ PRUTOVÝCH SOUSTAV.....	48
3.2.6 OMEZENÍ PROGRAMU .....	49
3.2.7 MOŽNOSTI ROZŠÍŘENÍ PROGRAMU .....	49
<b>4. ZÁVĚR</b> .....	<b>50</b>
<b>5. BIBLIOGRAFIE</b> .....	<b>51</b>
<b>6. SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ</b> .....	<b>52</b>

7.	SEZNAM OBRÁZKŮ .....	53
8.	SEZNAM TABULEK.....	54
9.	PŘÍLOHY .....	54

## 1. Úvod

Předmět Pružnost a pevnost I je obecně považován za velice obtížný a není příliš oblíben. Avšak studium tohoto předmětu nám poskytuje základní teoretické znalosti, které jsou nezbytné pro další studium v oblasti technických věd. PPI se zabývá způsoby prostého zatěžování (tahem/tlakem, ohybem, krutem). Toto zatěžování se v praxi příliš často nevyskytuje, ale pochopení jeho principu dovoluje přejít ke složitějším problémům.

Tato práce má za úkol vytvořit program, který by pomáhal s řešením problému prostého zatěžování. Cílem bylo navrhnout takový program, na který by se dalo v budoucnu navázat a rozšířit jej o nové funkce tak, aby se konečná verze programu stala jakýmsi nástrojem a pomocníkem při řešení problému týkajících se právě prostého zatěžování, konkrétně tahu a tlaku.

## 2. Základní teoretické poznatky a vztahy

Oblast pružnosti a pevnosti zahrnuje velké množství poznatků. Tato práce nemůže, a ani se nesnaží, postihnout celou oblast pružnosti a pevnosti I, ale pouze uvede základní zákonitosti a vztahy v rozsahu bakalářského studia, které byly využity pro tvorbu programu.

### 2.1 Mezní stavy

Proto, aby mohli stroje nebo jejich součásti správně pracovat, nesmí jejich deformace či porušení přesáhnout určité hranice. Tyto hranice se nazývají mezní stavy.

„Mezní stavy jsou stavy, kdy deformace nebo porušení se mění z funkčně přípustných na funkčně nepřípustné.“ [1].

Mezní stavy můžeme dělit na:

- mezní stavy související s deformací
- mezní stavy související s porušením.

V rámci této práce jsou podstatné pouze mezní stavy související s deformací.

#### 2.1.1 Mezní stavy související s deformací

##### Mezní stav deformace

„Mezní stav deformace je takový stav, ve kterém se deformace funkčně přípustné mění na deformace funkčně nepřípustné.“ [1].

Jako příklad může být použita lopatka turbíny. Pokud dojde vlivem zatížení k vymezení vůle mezi lopatkou turbíny a stěnou, nastává mezní stav deformace.

##### Mezní stav pružnosti

„Mezní stav pružnosti tělesa je takový stav, při jehož překročení vznikají plastické deformace.“ [1]. Mezní stav pružnosti tedy popisuje případ, kdy se deformace elastická mění na deformaci plastickou. Překročení mezního stavu pružnosti neznámá nutně ztrátu funkce tělesa. V některých případech je dokonce žádoucí, aby nastaly plastické deformace např. na funkční ploše kladiva.

##### Mezní stav deformační stability

„Mezní stav deformační stability tělesa je takový jeho stav, kdy geometrická konfigurace, která byla stabilní před dosažením mezního stavu, se po jeho překročení stává labilní a stabilní se stává jiná geometrická konfigurace tělesa.“ [1]. Tento mezní stav je spojen se

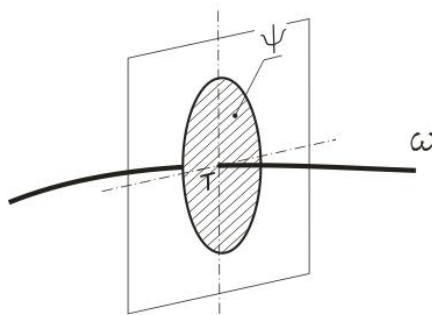
vznikem velkých deformací. V případě prutů a jejich namáhání tlakovým napětím se tento stav nazývá mezním stavem vzpěrné stability.

## 2.2 Prut v pružnosti a pevnosti

Pod pojmem ‘prut’ si jistě každý člověk vybaví dlouhé a zároveň tenké těleso. Z hlediska PP je prut nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa. Proto, aby bylo možné tento model použít, musely být zavedeny určité předpoklady o jeho geometrii, napjatosti a deformaci. Tyto předpoklady se nazývají prutové předpoklady a jsou členěny na:

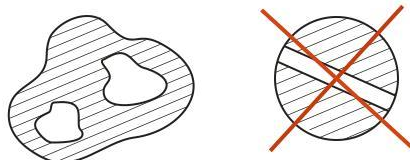
### Geometrické předpoklady

1. Prut je určen střednicí ( $\omega$ ) a příčným průřezem ( $\psi$ ). Střednice je hladká a spojitá křivka o konečné délce. Příčný průřez obsahuje všechny body střednice a leží v normálové rovině. Průsečíkem příčného průřezu a střednice je geometrické těžiště ( $T$ ) daného příčného průřezu (Obrázek 1).



Obrázek 1 Zobrazení střednice a příčného průřezu

2. Příčný průřez je spojitá jedno nebo vícenásobně souvislá oblast (Obrázek 2), ohraničená obrysem a charakterizovaná charakteristikami příčného průřezu. *Pozn. Pro potřeby řešení prostého tahu a tlaku a prutových soustav bude z těchto charakteristik potřeba pouze plocha ( $S$ ). Z tohoto důvodu nebudou dále další charakteristiky uvedeny.*



Obrázek 2 Souvislý a nesouvislý průřez

3. Délka střednice je řádově minimálně stejně velká jako velikost největšího rozměru příčného průřezu.

### Vazbové a zatěžovací předpoklady:

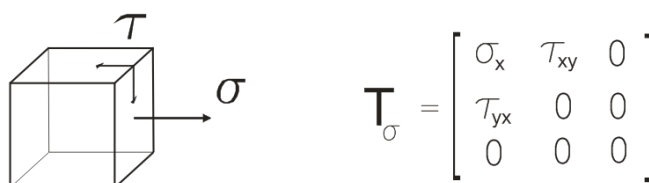
1. Vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice.
2. Zatížení je soustředěno na střednici. Z toho vyplývá, že na prutu mohou působit pouze osaměle síly, popř. liniové síly nebo silové dvojice s působišťem na střednici.

### Deformační předpoklady:

1. Střednice prutu zůstává v procesu deformace spojitá a hladká.
2. Příčné průřezy se v průběhu deformace nemění a zůstávají kolmé na deformovanou střednici. Při tahovém resp. tlakovém zatěžování se příčné průřezy vzájemně oddalují resp. přibližují.

### Napjatostní předpoklady:

1. Napjatost v prutu je určena normálním a smykovým napětím v příčném průřezu. Tato napjatost se nazývá prutovou napjatostí (Obrázek 3).



Obrázek 3 Zobrazení elementárního prvku a tenzoru napětí u prutové napjatosti

## 2.3 Výsledné vnitřní účinky

„Výsledné vnitřní účinky (dále VVÚ) jsou složky silové a momentové výslednice vnitřních sil v těžišti příčného průřezu, které spolu se soustavou vnějších silových účinků tvoří rovnovážnou silovou soustavu působící na prvek prutu. VVÚ jsou pomocné veličiny, popisující namáhání prutů a umožňující nalézt předem nebezpečná místa prutu.“ [2]. Použití a postup při stanovení VVÚ bude znázorněn v dalších kapitolách.

## 2.4 Prostý tah/tlak

### Definice prostého tahu/tlaku:

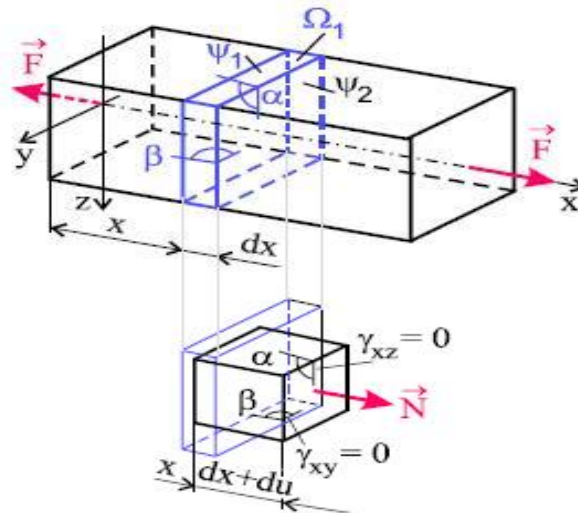
„Prostý tah (tlak) je namáhání přímého prizmatického prutu, jestliže

- jsou splněny prutové předpoklady,
- příčné průřezy se vzájemně oddalují (přibližují) a následně izotropně deformují (tj. mění velikost, ale nemění tvar),

- jedinou nenulovou složkou VVÚ je normálová síla  $N$ ,
- deformace jsou z hlediska statické rovnováhy prvku nepodstatné.“ [2].

### 2.4.1 Geometrické vztahy

Geometrické vztahy představují vztahy mezi posuvy a přetvořeními. Při tahovém (tlakovém) zatěžování se příčné průřezy ( $\psi_1, \psi_2$ ) posunou (Obrázek 4) o deformační posuv  $du$ . Úhly ( $\alpha, \beta$ ) zůstávají nezměněny. Těmto deformacím odpovídají délková ( $\epsilon_x$ ) a úhlová ( $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ ) přetvoření.



Obrázek 4 Znázornění geometrických vztahů

Vztah pro délkové přetvoření (ve směru střednice prutu):

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = konst \quad (1)$$

Skosy jsou:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \quad a$$

pro příčná přetvoření platí:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \cdot \epsilon_x$$

*Poznámka:  $\mu$  představuje součinitel příčné deformace tzv. Poissonovo číslo, které je v oblasti elastických deformací konstantní a jeho hodnota pro ocel  $\mu \doteq 0,3$ .*

### 2.4.2 Rozložení napětí v příčném průřezu

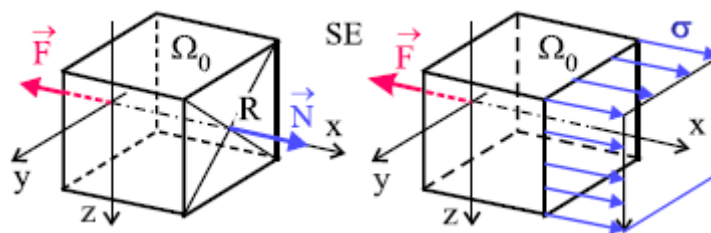
Pro homogenní, lineárně pružný materiál platí [1 str. 47]:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2)$$

Pomocí těchto vztahů a výsledků předchozí kapitoly lze konstatovat, že normální napětí jsou v příčném průřezu rozložena rovnoměrně a smyková napětí nulová. V bodě tělesa tedy vzniká jednoosá napjatost.

### 2.4.3 Závislost mezi VVÚ a napětím

Nyní, když je známo rozložení napětí v příčném průřezu, lze vyjádřit závislost mezi napětím a geometrickými charakteristikami a mezi napětím a  $N$ . Na obrázku (Obrázek 5) je znázorněn uvolněný prvek.



Obrázek 5 Uvolnění prvku

Použitím podmínek statické ekvivalence (SE) mezi soustavou elementárních plošných sil  $\sigma \cdot dS_i$  v příčném průřezu a jejich silovou výslednicí  $N_i$  získáme vztah pro napětí  $\sigma$ . K dispozici jsou tři použitelné podmínky (3D soustava rovnoběžných sil). Dvě momentové (vzhledem k tomu, že normální složka  $N$  byla zavedena v těžišti průřezu, můžeme momentové podmínky vynechat) a jedna silová.

Silová podmínka:

$$\sum F_x : \int_{\psi} \sigma \cdot dS = N \quad [3]$$

Z této podmínky získáme vztah pro napětí:

$$\sigma \cdot S = N \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S} \quad (3)$$

### 2.4.4 Určení posuvu

Abychom získali vztah pro posuv, vyjádříme si ze vztahu (1) deformační posuv  $du$ .

$$du = \varepsilon_x \cdot dx$$

Dosazením za  $\varepsilon_x$  ze vztahu (2) a poté za  $\sigma$  ze vztahu (3) získáme upraven vztah pro deformační posuv.

$$du = \frac{\sigma}{E} \cdot dx = \frac{N}{E \cdot S} \cdot dx$$



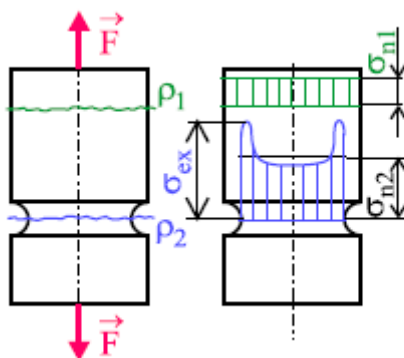
Jelikož z prutových předpokladů je známo, že deformace střednice prutu je spojitá, můžeme tento vztah integrovat, abychom získali vztah pro posuv v kterémkoliv bodě střednice.

$$u(x) = \int_0^x \frac{N}{E \cdot S} \cdot dx \quad (4)$$

### 2.4.5 Problematika vrubů

„Pojem vrub představuje souhrnné označení pro náhlou změnu příčného průřezu. Vruby se vyskytují buď záměrně (konstrukční), nebo vznikají jako důsledek výroby (defekty) a nelze se jim vyhnout. Bylo zjištěno, že:

- 1) V okolí vrubu vzniká víceosá napjatost a deformace,
- 2) V okolí vrubu dochází ke koncentraci napětí,
- 3) Čím je vyšší koncentrace napětí, tím má špička napětí menší prostorový rozsah,
- 4) Mění se tvar pracovního diagramu.“ [1]



Obrázek 6 Průběh napětí v kořeni vrubu

Pro stanovení napětí v kořeni vrubu (extrémní napětí - Obrázek 6) se využívá těchto vztahů:

$$\sigma_{ex} = \alpha \cdot \sigma_n \quad (5)$$

$\sigma_n$  je nominální napětí. Je to charakteristická hodnota (v místě vrubů nejsou splněny prutové předpoklady) napětí vypočtená ze vztahů prosté pevnosti a pružnosti. Tato hodnota je závislá na typu vrubu.

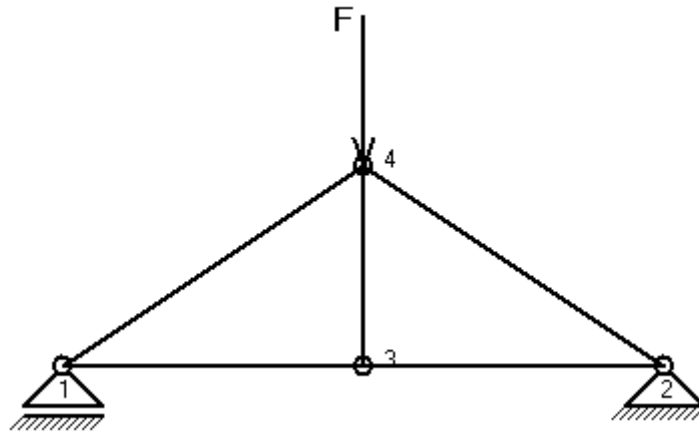
$\alpha$  je součinitel koncentrace napětí, který koriguje hodnotu  $\sigma_n$ . Některé hodnoty součinitelů koncentrace napětí jsou k dispozici v [1 str. 283].

Účinek vrubu je podstatný z hlediska napjatosti a porušování. Naopak z hlediska deformačních charakteristik nejsou vrubové účinky podstatné.

## 2.5 Soustavy s pruty

„Prutové soustavy jsou soustavy vytvořené z prutů a neprutových těles. Prakticky se mohou vyskytovat 3 základní typy soustav:

- soustavy sestavené pouze z prutů, z nichž každý je vázán k základnímu tělesu,
- soustavy tvořené pruty a neprutovými tělesy (tělesa se zanedbatelnou deformací),
- soustavy tvořené prutovým tělesem vázaným k základnímu členu (Obrázek 7).“ [1]



Obrázek 7 Soustavy tvořené prutovým tělesem vázané k základnímu členu

Tato práce se zabývá posledním z uvedených typů soustav. Proto, aby bylo možné řešit napjatost v jednotlivých prutech, zavádí se výpočtový model, který musí splňovat tyto podmínky:

- „pruty musí být přímé a štíhlé (délka minimálně o řád větší než tloušťka),
- pruty jsou zatíženy pouze silami ve styčnicích nebo na tuhém tělese,
- soustava zůstane po zavedení vazeb nepohyblivá.“ [2]

### 2.5.1 Staticky určité soustavy

Stykové síly u staticky vnitřně i vně určitých soustav se určují z rovnováhy sil na styčnicích. Stykovým silám odpovídají normální síly v prutech. Pro napětí v jednotlivých prutech se užívá vztah (3). U prutů namáhaných tlakovým napětím je nutné provést kontrolu vůči meznímu stavu vzpěrné stability.

### 3. Vlastní programy

Cílem této práce bylo vytvoření programů, které by řešily úlohy pružnosti pevnosti I z oblasti tahu a tlaku prutů a prutových soustav. Pro napsání těchto programů bylo užito vývojového prostředí Borland Delphi (verze 7), a to z důvodu snadného vytvoření uživatelského prostředí, které tento program umožňuje. Dalším důvodem pro výběr byl ten, že toto vývojové prostředí bylo v předešlých ročnících vyučováno například v předmětu Počítačová grafika, a proto se nám dostalo nezbytných základů, které mohly být v této práci využity. Nevýhodou tohoto vývojového prostředí oproti jiným programům (Matlab, Maple, Octave,...) je absence podpory (pro základní verzi) pro složitější matematické operace, např. řešení soustavy matic, derivací, apod.

#### 3.1 Program pro řešení prostého tahu/tlaku prutu

Tento program je schopen počítat základní úlohy prostého tahu/tlaku prutu. Soustředí se především na úlohy přímé, a to staticky určité, staticky podmíněně neurčité a staticky neurčité. Ačkoli uživatel má možnost zadávat i úlohy inverzní, jedná se pouze o jednoduché výpočty, které se soustředí na kontrolu prutu vůči meznímu stavu pružnosti. V případě namáhání tlakem se program nezabývá kontrolou mezního stavu vzpěrné stability. A to proto, že při obecném zadání prutu se musí brát v úvahu jak vliv proměnnosti průřezu, tak i vliv proměnnosti normálové síly  $N$ . Toto vede k řešení nelineárních rovnic, což je z numerického hlediska náročné. Program proto pouze upozorňuje uživatele, že má být kontrola na vzpěr vykonána, ale dále se tímto problémem nezabývá.

##### 3.1.1 Stručný popis programu

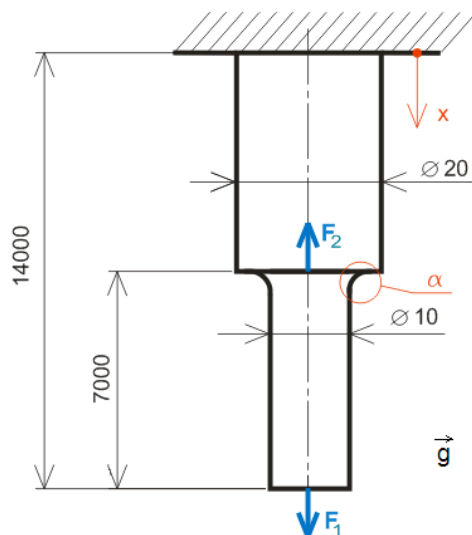
Program je rozdělen na několik oblastí. Tyto oblasti jsou určeny svým rámem a nadpisem. Každá oblast zastupuje určitý úkon (zadávání geometrie prutu, výběr materiálu, atd.), který musí uživatel vykonat, aby dospěl k výsledku. Tyto úkony mají určitý řád, jenž je nutno dodržet, z důvodu úspěšného vykonání výpočtu. Proto je program omezen jednoduchými opatřeními zabraňujícími uživateli přeskočení jednotlivých úkonů. Jednotlivé oblasti budou níže popsány. Proto, aby byl program popsán a vysvětlen, bude užito příkladů, které budou řešeny nejprve obvyklým postupem, tzn. ručně a poté zkontrolovány pomocí programu.

### 3.1.2 Řešení úlohy přímé staticky určité

Nejdříve bude řešena jednoduchá úloha, na které bude demonstrováno použití programu v případě zahrnutí tíhového zrychlení do výpočtu. Proto, abychom mohli vidět zaznamenat účinky tíhového zrychlení, budou zadány síly o malé velikosti.

#### Formulace problému:

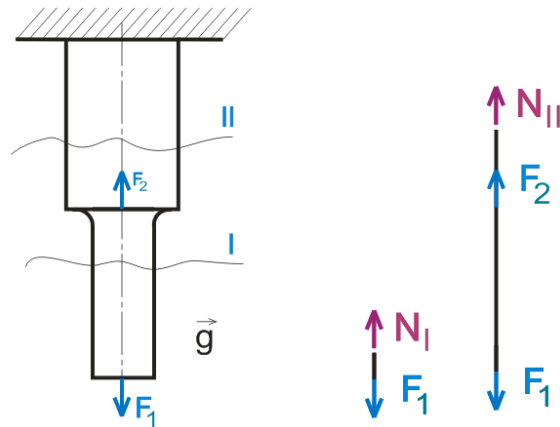
Mějme osazený prut (Obrázek 8), na který působí dvě síly:  $F_1=100\text{N}$  (působí ve směru osy  $x$ ) a  $F_2=-400\text{N}$  (působí proti směru osy  $x$ ). Prut bude mít kruhový průřez. Pro místo osazení budeme uvažovat součinitel koncentrace napětí  $\alpha = 2$ . Hustota  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Tíhové zrychlení  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Mez kluzu  $R_e=270 \text{ MPa}$ . Modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Určete bezpečnost prutu.



Obrázek 8 Zadání úlohy přímé staticky určité

#### 3.1.2.1 Řešení úlohy přímé staticky určité pomocí výpočtových vztahů

Nejprve si prut rozdělíme na intervaly. Intervaly volíme podle toho, aby výsledné vnitřní účinky (dále VVÚ) byly po celé délce střednice spojité. Ze zadaných parametrů je zřejmé, že prut bude rozdělen dvěma řezy na dva intervaly (Obrázek 9 - vlevo).



Obrázek 9 Znázornění intervalů a uvolnění prvků prutu

Uvolnění prvku a určení výsledných vnitřních účinků:

Jedinou nenulovou souřadnicí VVÚ je normální síla. V každém intervalu si uvolníme prvek a určíme velikost normální síly dle podmínky statické rovnováhy (Obrázek 9 - vpravo).

Intervaly:

$$x_I = (0, 7000) \quad N_I = F_1 + \rho \cdot S_1 \cdot x_I \cdot g$$

$$x_{II} = (7000, 14000) \quad N_{II} = N_I - F_2 + \rho \cdot S_2 \cdot (x_{II} - 7000) \cdot g$$

Nyní si vyjádříme hodnoty  $N_i$  pro mezní body intervalů:

$$N_I^1 = F_1 + \rho \cdot S_1 \cdot x_I \cdot g = 100 + 7850 \cdot (79/1000 \cdot 1000) \cdot 0 \cdot 9,81 = 100 \text{ N}$$

$$N_I^2 = F_1 + \rho \cdot S_1 \cdot x_I \cdot g = 100 + 7850 \cdot (79/1000 \cdot 1000) \cdot 7 \cdot 9,81 \doteq 142,586 \text{ N}$$

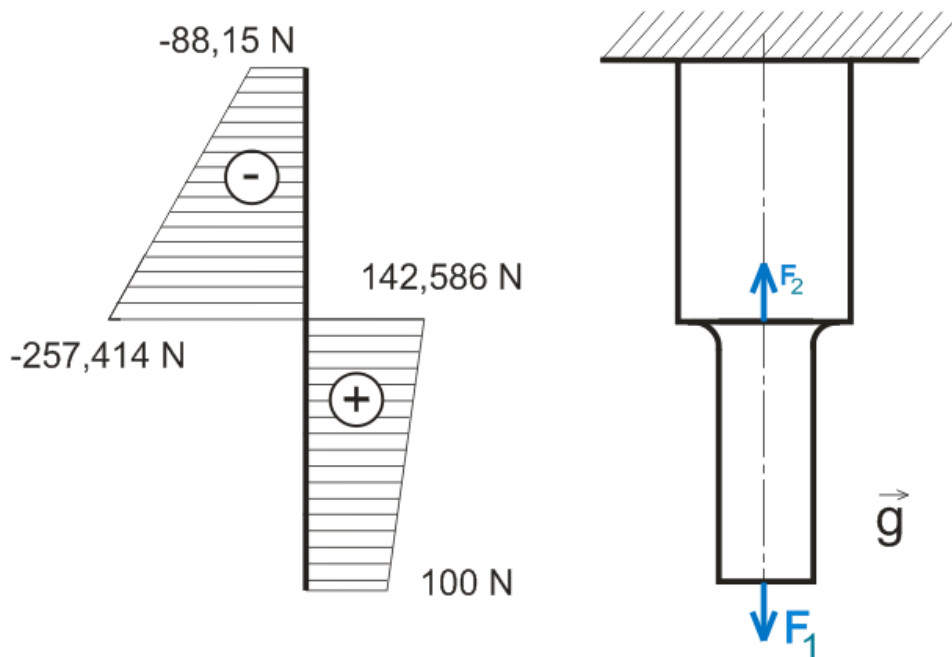
$$N_{II}^1 = N_I - F_2 + \rho \cdot S_2 \cdot (x_{II} - 7000) \cdot g = 142,586 - 400 + 7850 \cdot (314/1000 \cdot 1000) \cdot (7000 - 7000) \cdot 9,81$$

$$N_{II}^1 = -257,41 \text{ N}$$

$$N_{II}^2 = N_I - F_2 + \rho \cdot S_2 \cdot (x_{II} - 7000) \cdot g = 142,586 - 400 + 7850 \cdot (314/1000 \cdot 1000) \cdot (14000 - 7000) \cdot 9,81$$

$$N_{II}^2 = -88,15 \text{ N}$$

Grafické zobrazení VVÚ:



Obrázek 10 Grafické zobrazení výsledných vnitřních účinků

Určení maximálního napětí:

Z průběhu VVÚ je zřejmé, že nebezpečné místo leží v působišti síly  $F_2$ , v místě osazení. Napětí v tomto místě určíme dle vztahu (3):

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

kde  $F$  je zatěžující síla a  $S$  je plocha průřezu. Za  $F$  volíme největší působící sílu ve vyšetřovaném místě. A  $S$  volíme s ohledem na bezpečnost, tedy volíme plochu menšího průřezu. Pro  $F = -257,414 \text{ N}$  a  $S = 79 \text{ mm}^2$  je hodnota napětí:

$$\sigma = \frac{-257,414}{79} = -3,26 \text{ MPa}$$

Se zahrnutím součinitele koncentrace napětí získáme vztah pro maximální napětí (5) :

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \alpha$$

Hodnota maximálního napětí je:

$$\sigma_{max} = -3,26 \cdot 2 = -6,52 \text{ MPa}$$

Určení bezpečnosti:

Bezpečnost určíme ze vztahu:

$$k = \frac{R_e}{|\sigma_{max}|} \quad (6)$$

Hodnota bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti je:

$$k = \frac{R_e}{|\sigma_{\max}|} = \frac{270}{|-6,52|} = 41,4 [-]$$

Zhodnocení úlohy:

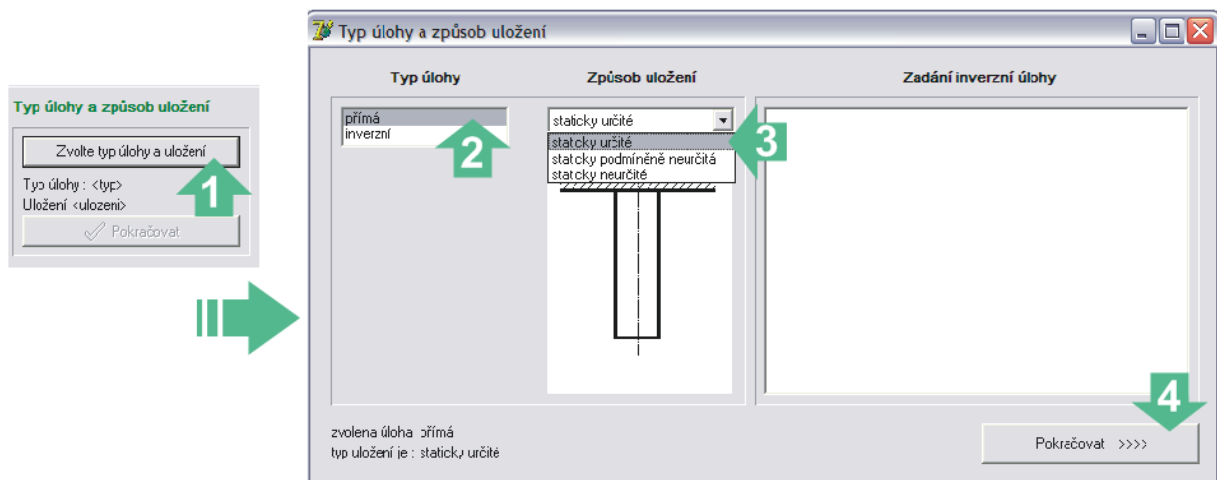
Při takto zadaných podmínkách nedojde v prutu ke vzniku plastických deformací. Vzhledem k přítomnosti tlakového namáhání je nutno provést kontrolu vůči meznímu stavu vzpěrné stability

### 3.1.2.2 Řešení úlohy přímé staticky určité pomocí programu

Tato úloha bude sloužit jako manuál pro uživatele, aby se dovedl v programu orientovat, a správně s ním pracovat.

#### Krok první – vybrání typu úlohy a uložení

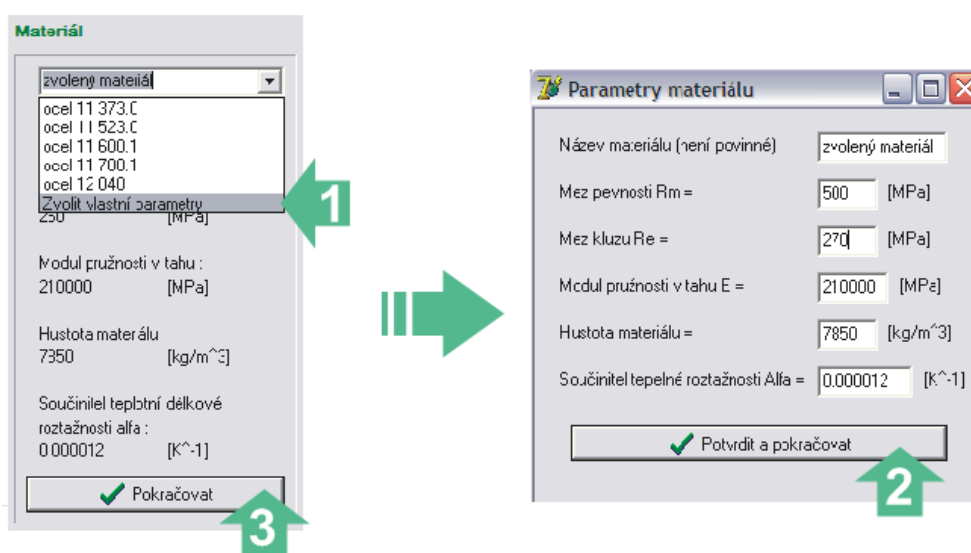
Po otevření programu se objeví na obrazovce okno, rozdělené na několik částí. Uživatel je od počátku programem směřován, aby vykonával dané operace ve správném sledu. Proto je v programu v pravé horní části umístěna nápověda, ve které se zobrazují pokyny popřípadě varovná hlášení. Program uživateli ukáže aktivní oblasti tak, že zvýrazní barvu názvu oblasti a zpřístupní tlačítka pro danou oblast. První oblastí (vpravo nahoře) je výběr typu úlohy a uložení prutu (Obrázek 11). Po stisknutí tlačítka *Zvolte typ úlohy a uložení* se objeví formulář, ve kterém uživatel zadá vhodný typ úlohy a uložení prutu. Po skončení úkonu uživatel stiskne na formuláři tlačítko *Pokračovat* a bude-li spokojen s výběrem, potvrdí svoji volbu i na hlavní části programu v dané oblasti stiskem tlačítka *Pokračovat*.



Obrázek 11 Volba typu úlohy a uložení prutu

### Krok druhý – výběr materiálu

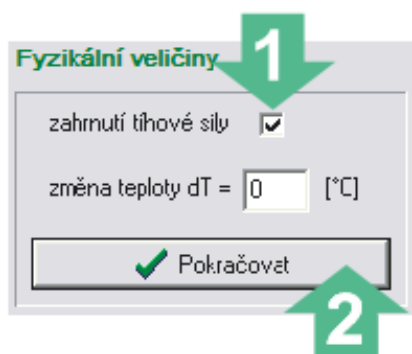
Uživatel má možnost volit z pěti přednastavených materiálů (Obrázek 12). Samozřejmě má možnost také volit materiál dle vlastního výběru kliknutím v seznamu materiálu na položku *Zvolit vlastní parametry*. Poté se uživateli zobrazí formulář, kde může zadat vlastní parametry a stiskem tlačítka *Potvrdit a pokračovat* se opět navrátí do hlavního okna.



Obrázek 12 Volba materiálu

### Krok třetí – volba fyzikálních parametrů

Zde je možné zvolit možnost zahrnutí tíhové síly a navolit změnu teploty. V tomto případě přidáme tíhové zrychlení zaškrtnutím políčka (Obrázek 13).

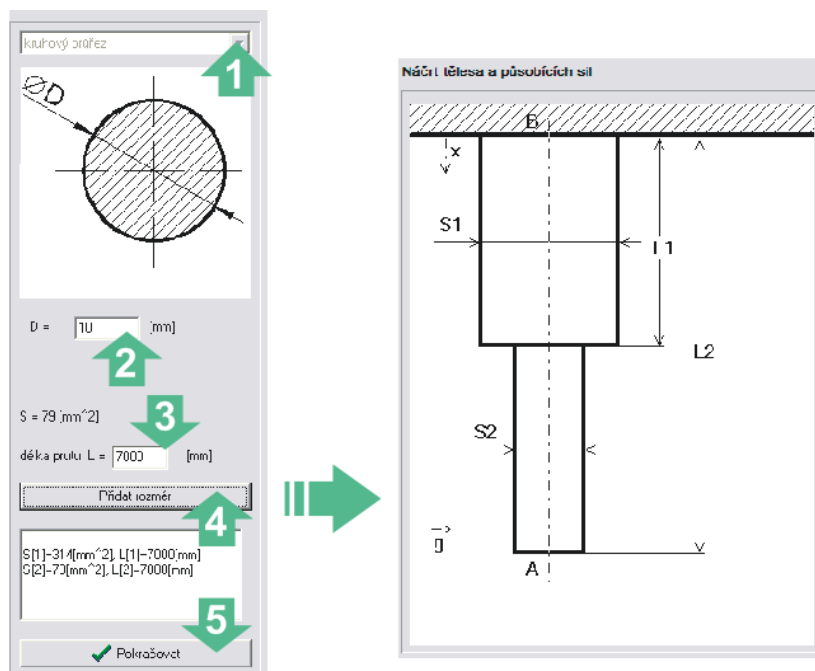


Obrázek 13 Fyzikální veličiny



### Krok čtvrtý – zadání geometrie prutu

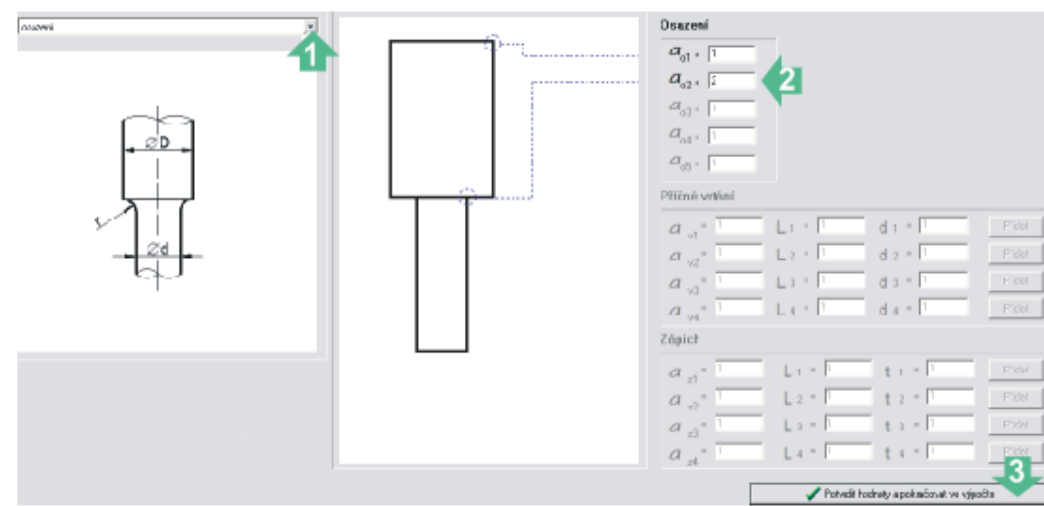
V tomto kroku uživatel volí profil prutu, základní rozměrové parametry profilu a délkové rozměry. Na výběr má osm přednastavených profilů. Po stisku tlačítka *Zadat rozměry* se začne prut vykreslovat v *Náčrtu* (Obrázek 14)



Obrázek 14 Volba geometrie prut

### Krok pátý – definice vrubů

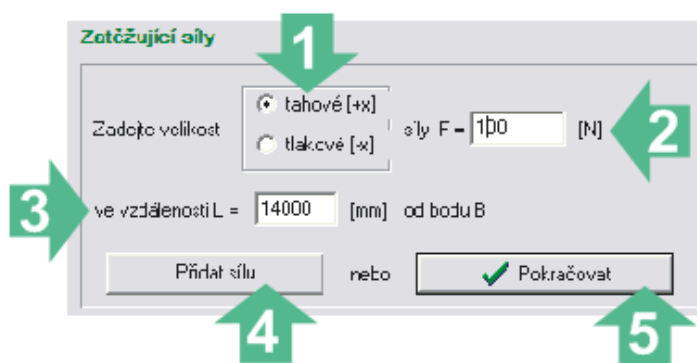
Vruby lze definovat pouze, pokud uživatel v předchozím kroku vybral obdélníkový či kruhový profil prutu. Stiskem tlačítka *Zadejte typ a geometrii vrubů* se zobrazí formulář (Obrázek 15), ve kterém uživatel může (ale nemusí) zadat potřebné parametry. Ve formuláři uživatel zvolí typ vrubu ze seznamu (v našem případě osazení) a pak dále zadává požadované hodnoty do příslušných polí. Po stisku tlačítka *Potvrdit hodnoty a pokračovat ve výpočtu* formulář zmizí a je možno dále postupovat v zadání.



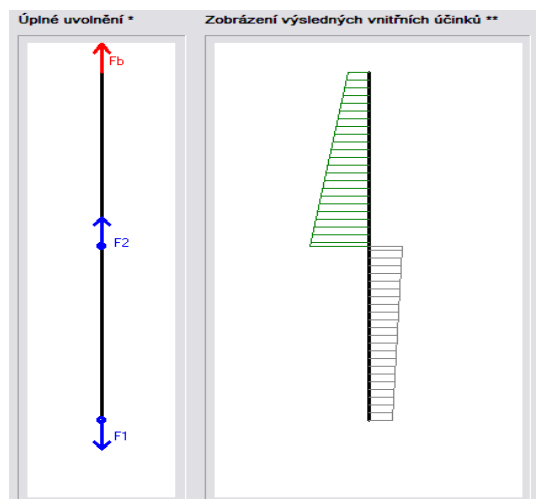
Obrázek 15 Zadání vrubů

Krok šestý – zadání síl:

Při zadání síly stačí pouze zadat vzdálenost působíště od daného bodu, její velikost a orientaci vůči ose x (tahová [+x], tlaková [-x]). Osa je zobrazena v náčrtu. Stiskem tlačítka *Zadat sílu* (Obrázek 16) se síla znázorní v náčrtu. Po stisku tlačítka *Pokračovat* program provede výpočet, zobrazí VVÚ (Obrázek 17 - zelená barva znázorňuje tlakovou oblast a šedá tahovou), úplné uvolnění a výslednou zprávu s hodnocením.



Obrázek 16 Zadání sil



Obrázek 17 Zobrazení uvolnění a VVÚ

**Slovní hodnocení úlohy**

**Rozbor úlohy**

Jedná se o úlohu přímou.

Statická určitost :  $\nu = 1$  ( jedná se o soustavu sil působících na jedné nositelce)

Neznámé parametry :  $NP = \{F_b\} = 1 \Rightarrow \mu = 1$

$\mu \cdot \nu = 0 \Rightarrow$  úloha je staticky určitá

Úloha zahrnuje účinky tíhové síly.

**Výsledné vnitřní účinky:**

Prut byl rozdělen dvěma řezy

Intervaly pro VVÚ :  
 1.  $x = \langle 0 ; 7000 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle 100 ; 142.586 \rangle$  [N]  
 2.  $x = \langle 7000 ; 14000 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -257.414 ; -88.149 \rangle$  [N]

**Napětí a bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:**

Užitý vztah pro výpočet napětí :  $\sigma = \alpha \cdot \frac{N}{S}$  a bezpečnosti  $k = \frac{\sigma_{max}}{Re}$

Maximální napětí působící v prutu je  $\sigma_{max} = 6.52$  [MPa]

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je :  $k = 41.4$

Zhodnocení: V prutu při takto zadaných hodnotách zatížení a geometrie nebudou vznikat plastické deformace  
 Je nutná kontrola na vzpěr !!!

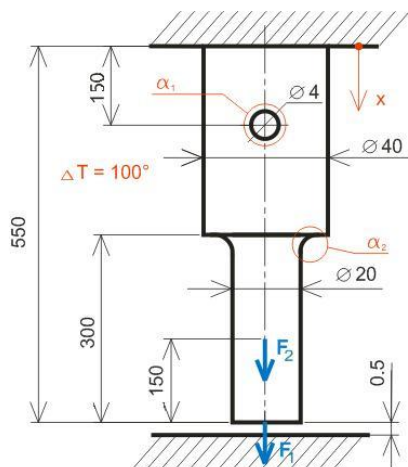
Obrázek 18 Výsledná zpráva

### Zhodnocení úlohy:

Zhodnocení úlohy je již vlastně hotové (Obrázek 18) díky výsledné zprávě. Nezbývá než porovnat hodnoty získané z programu s hodnotami vypočtenými. Tyto hodnoty se shodují. Výpočet programu můžeme považovat za úspěšný.

### 3.1.3 Řešení úlohy přímé staticky podmíněně neurčité

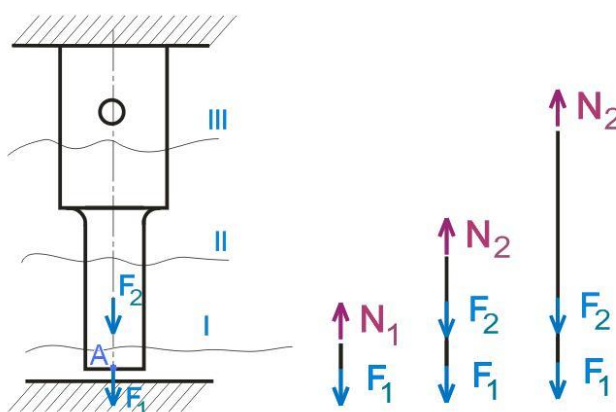
Mějme toto zadání: Prut o dané geometrii (Obrázek 19) je zatížen silami  $F_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $F_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$  a teplotou, jejíž změna je  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Zadaná vůle je  $\delta = 0.5 \text{ mm}$ . Mez kluzu  $\sigma_K = 350 \text{ MPa}$ . Součinitele koncentrace napětí  $\alpha_1 = 2.3$ ,  $\alpha_2 = 1.5$ .  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Naším úkolem bude stanovení bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti.



Obrázek 19 Grafické zadání prutu

#### 3.1.3.1 Pomocí výpočtových vztahů

Nejprve si prut rozdělíme na intervaly, ve kterých se výsledné vnitřní účinky (dále VVÚ) nemění. Ze zadaných parametrů je zřejmé, že prut bude rozdělen třemi řezy na tři intervaly (Obrázek 20- vlevo).



Obrázek 20 Rozdělení prutů na intervaly a znázornění řešení VVÚ

Jedinou nenulovou souřadnicí VVÚ je normální síla. V každém intervalu uvolníme prvek a určíme velikost normální síly dle podmínky statické rovnováhy (Obrázek 20- vpravo).

Intervaly:

$$X_I : (0,150) \dots\dots\dots N_I = F_1 = 50\,000 \text{ N}$$

$$X_{II} : (150, 300) \dots\dots\dots N_{II} = F_1 + F_2 = 100\,000 \text{ N}$$

$$X_{III} : (300, 550) \dots\dots\dots N_{III} = F_1 + F_2 = 100\,000 \text{ N}$$

Nyní je potřeba zjistit posuv bodu A působitě síly  $F_1$ , abychom zjistili, zda byla vymezena vůle. Posuv zjistíme pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty.

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_k} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E \cdot S_i} \cdot N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_k}$$

V tomto případě:

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{E \cdot S_i} \cdot N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_1}$$

Pak výsledný posuv bodu A od silového zatížení bude:

$$u_{AF} = \frac{\partial W}{\partial F_1} = \frac{150}{210000 \cdot \pi \cdot 10^2} \cdot 50\,000 \cdot 1 + \frac{150}{210000 \cdot \pi \cdot 10^2} \cdot 100\,000 \cdot 1 + \frac{150}{210000 \cdot \pi \cdot 20^2} \cdot 100\,000 \cdot 1 = 0,438 \text{ mm}$$

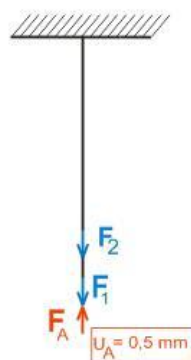
Posuv způsobený změnou teploty:

$$u_{A\Delta T} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \sum_{i=1}^n l_i = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot (150 + 150 + 250) = 0,66 \text{ mm}$$

Celkový posuv bodu A bude součtem těchto posuvů:

$$u_A = u_{AF} + u_{A\Delta T} = 0,438 + 0,66 = 1,098 \text{ mm}$$

Je patrné, že celkový posuv bodu A je větší než vůle a úloha se stává staticky neurčitou. Nyní bude prut částečně uvolněn a stanoví se deformační podmínka  $u_A = 0,5 \text{ mm}$  (Obrázek 21). Poté se opět vyjádří normální síla pro každý interval.



Obrázek 21 Částečné uvolnění prutu

### Intervaly:

$$X_I : (0,150) \dots\dots\dots N_I = -F_A + F_1 = 50\,000 \text{ N}$$

$$X_{II} : (150, 300) \dots\dots\dots N_{II} = -F_A + F_1 + F_2 = 100\,000 \text{ N}$$

$$X_{III} : (300, 550) \dots\dots\dots N_{III} = -F_A + F_1 + F_2 = 100\,000 \text{ N}$$

### Určení reakční síly $F_A$ :

Reakční síla se určí ze vztahu:

$$u_{AF} = \delta = - \frac{\partial W}{\partial F_1} + u_{\Delta T}$$

Po dosazení získáme rovnici:

$$u_{AF} = 0,5 = - \frac{\partial W}{\partial F_1} + u_{\Delta T} = - \left( \frac{150}{210000 \cdot \pi \cdot 10^2} \cdot (-F_A + 50\,000) \cdot (-1) \right) + \frac{150}{210000 \cdot \pi \cdot 10^2} \cdot (-F_A + 100\,000) \cdot (-1) + \\ + \frac{150}{210000 \cdot \pi \cdot 20^2} \cdot (-F_A + 100\,000) \cdot (-1) + u_{\Delta T}$$

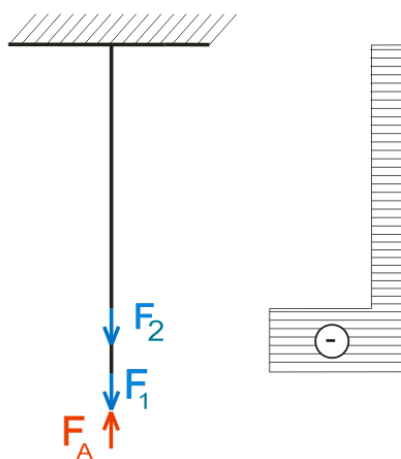
Po úpravě rovnice získáme velikost reakční síly  $F_A \doteq 108430 \text{ N}$ . Tuto sílu dosadíme do rovnic pro intervaly a získáme velikosti sil v daných intervalech působících:

$$X_I : (0,150) \dots\dots\dots N_I = -F_A + F_1 = -108430 + 50\,000 = -58\,430 \text{ N}$$

$$X_{II} : (150, 300) \dots\dots\dots N_{II} = -F_A + F_1 + F_2 = -108430 + 100\,000 = -8430 \text{ N}$$

$$X_{III} : (300, 550) \dots\dots\dots N_{III} = -F_A + F_1 + F_2 = -108430 + 100\,000 = -8430 \text{ N}$$

### Zobrazení VVÚ:



Obrázek 22 Zobrazení výsledných vnitřních účinků

### Stanovení maximálních napětí:

Nyní si stanovíme napětí v místech vrubů nominální napětí v první intervalu (z důvodu působení velké tlakové síly).

Napětí v místě vrtání:

$$\sigma_1 = \alpha_1 \cdot \frac{N_{II}}{S_{2V}} = \alpha_1 \cdot \frac{N_{II}}{[\pi - 2 \cdot \frac{d_v}{D_2} - (\sin \frac{d_v}{D_2})^2] \cdot \frac{D_2^2}{4}} = 2,3 \cdot \frac{-8430}{[\pi - 2 \cdot \frac{4}{40} - (\sin \frac{4}{40})^2] \cdot \frac{40^2}{4}}$$

$$\sigma_1 = -16,5 \text{ MPa}$$

Napětí v místě osazení:

Vezme tu nejhorší možnou variantu, která z hlediska namáhání může v místě osazení nastat.

Tedy vezmeme menší průřez a větší sílu.

$$\sigma_2 = \alpha_{12} \cdot \frac{N_I}{S_1} = \alpha_1 \cdot \frac{N_{II}}{S_1} = \alpha_1 \cdot \frac{-8430}{\pi \cdot 10^2} \doteq -40,25 \text{ MPa}$$

Napětí v prvním intervalu:

Napětí určíme ze vztahu (3).

$$\sigma_3 = \frac{N_I}{S_1} = \frac{-58430}{\pi \cdot 10^2} \doteq -186 \text{ MPa}$$

Všechna napětí působí v tlaku, proto je nutné vykonat kontrolu vůči meznímu stavu vzpěrné stability. Extrémní napětí je napětí působící v místě prvního intervalu  $\sigma_{ex} = -186 \text{ MPa}$ .

Bezpečnost je tedy dle vztahu (3):

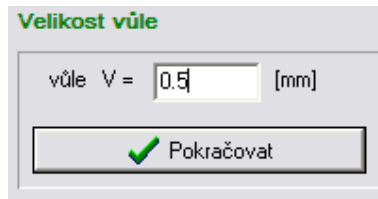
$$k = \frac{\sigma_K}{|\sigma_{ex}|} = \frac{350}{|-186|} = 1,88 [-]$$

Zhodnocení úlohy:

V prutu při zadaných parametrech nebudou vznikat plastické deformace. Kvůli přítomnosti tlakového napětí je nutné provést kontrolu vůči meznímu stavu vzpěrné stability.

### 3.1.3.2 Řešení úlohy staticky podmíněně neurčité pomocí programu

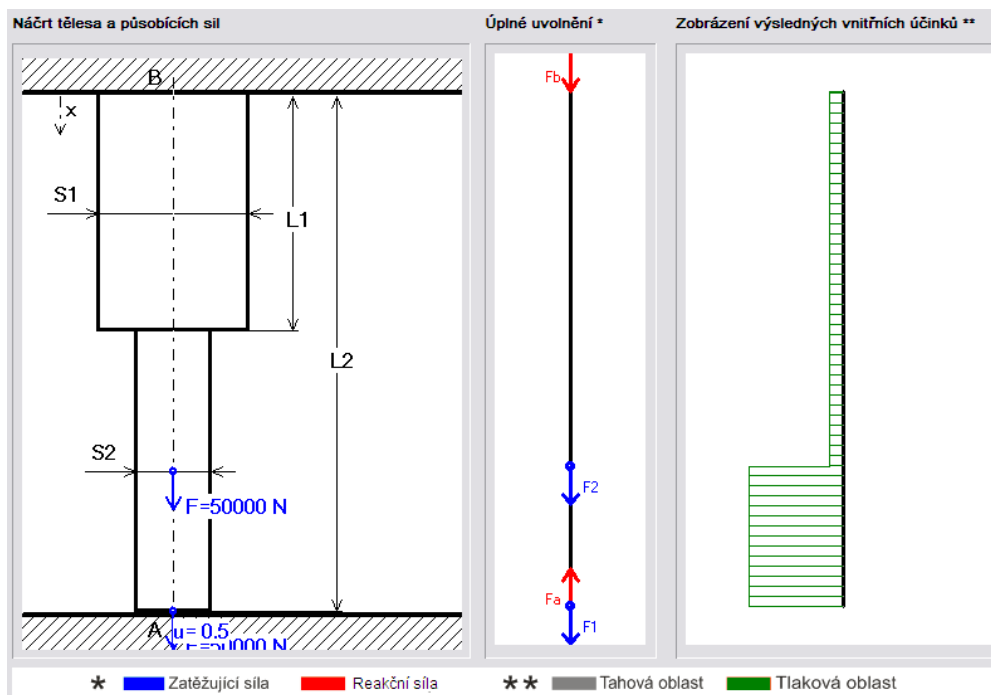
Postup při řešení je téměř totožný s příkladem 3.1.2.2. Rozdíl spočívá pouze v zadání hodnoty vůle (Obrázek 23). Hodnota vůle se zadává po zadání fyzikálních veličin (Krok třetí - úloha 3.1.2.2). A dále se postupuje stejným způsobem. Program sám zjistí, zda se jedná o úlohu určitou či neurčitou a podle toho dále pokračuje



Obrázek 23 Zadání hodnoty velikosti vůle

Náčrt, vykreslení VVÚ a uvolnění prutu:

Program provedl vykreslení úplného uvolnění a výsledných vnitřních účinků (Obrázek 24). U náčrtu vypsals deformační podmínku.



Obrázek 24 Znáznornění náčrtu, vvú a uvolnění prutu

Zhodnocení úlohy:

Zhodnocení úlohy (Obrázek 25) bylo provedeno přímo v programu. Program určil maximální napětí a danou bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti. Tyto hodnoty se shodují s hodnotami vypočítanými.



## Slovní hodnocení úlohy

### Rozbor úlohy

Jedná se o úlohu přímou. Uložení s vůlí.

Abychom mohli určit statickou určitost je nutné určit, zda při daném zatížení dojde k vymezení vůle..

Určíme výsledné vnitřní účinky

Úloha zahrnuje vliv změny teploty.

Prut byl rozdělen třemi řezy

1.  $x = \langle 0 ; 150 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle 50000 ; 50000 \rangle$  [N]
2.  $x = \langle 150 ; 300 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle 100000 ; 100000 \rangle$  [N]
3.  $x = \langle 300 ; 550 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle 100000 ; 100000 \rangle$  [N]

Určíme velikost posuvu v bodě A dle vztahu :

$$u(x) = \int_0^x \frac{N}{ES} dx + \alpha \cdot \Delta T \cdot x$$

Posuvy bodů ležících na hranicích intervalů :

$$\begin{aligned} u(0) &= 1.1 \text{ [mm]} \\ u(150) &= 0.8 \text{ [mm]} \\ u(300) &= 0.39 \text{ [mm]} \\ u(550) &= 0 \text{ [mm]} \end{aligned}$$

Posuv bodu A :  $u_A = 1.1$  [mm]

V tomto případě je  $u_A > 0.5$  , proto můžeme určit, že se jedná o úlohu staticky neurčitou, a výsledky

užité výše nejsou platné pro další výpočty.

Proto, abychom mohli dále pracovat, potřebujeme zjistit velikost reakční síly  $F_A$ .

K tomu, abychom mohli určit velikost reakční síly  $F_A$ , musíme určit deformační podmínku.

Deformační podmínka :  $u_A = 0.5$

Pak velikost reakční síly je možno stanovit ze vztahu (Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty):

$$\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E \cdot S_i} N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \sum_{i=1}^n l_i = 0$$

Z tohoto vztahu po úpravě dostaneme velikost reakční síly  $F_A = 108416$  [N]

Nyní můžeme určit výsledné vnitřní účinky

Intervaly pro VVÚ a velikosti sil po započítání reakční síly :

1.  $x = \langle 0 ; 150 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -58416 ; -58416 \rangle$  [N]
2.  $x = \langle 150 ; 300 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -8416 ; -8416 \rangle$  [N]
3.  $x = \langle 300 ; 550 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -8416 ; -8416 \rangle$  [N]

### Napětí a bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

Užitý vztah pro výpočet napětí :

$$\sigma = \alpha \cdot \frac{N}{S} \quad \text{a bezpečnosti} \quad k = \frac{\sigma_{max}}{Re}$$

Maximální napětí působící v prutu je  $\sigma_{max} = 186$  [MPa]

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je :  $k = 1.9$

Zhodnocení: V prutu při takto zadaných hodnotách zatížení a geometrie nebudou vznikat plastické deformace. Je nutná kontrola na vzpěr !!!

### Obrázek 25 Slovní hodnocení úlohy staticky podmíněně neurčitě

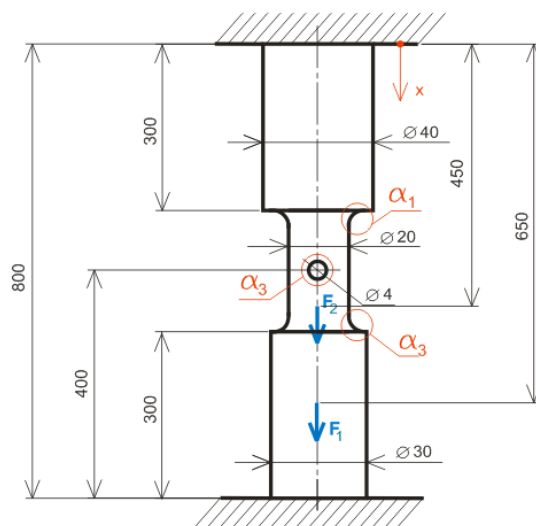
### 3.1.4 Řešení úlohy přímé staticky neurčitě

Nyní bude proveden výpočet staticky neurčitě úlohy pomocí programu.

#### Formulace problému:

Mějme prut (Obrázek 26) zatížený dvěma silami  $F_1=50 \cdot 10^3 \text{ N}$  a  $F_2=10^5 \text{ N}$ . Prut má kruhový průřez a je v něm vyvrtána díra (součinitel koncentrace napětí  $\alpha_2 = 2,3$ ). Budeme uvažovat také součinitele koncentrace napětí pro osazení, která jsou označena na obrázku ( $\alpha_1=1,7$  a  $\alpha_3=1,5$ ). Prut je z oceli 11 373.0.  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Naším úkolem bude zjistit velikost reakční síly a bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti.

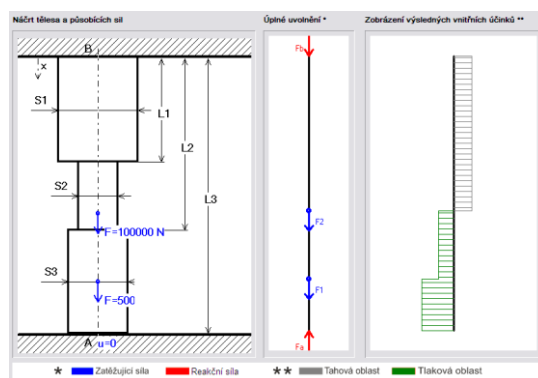
*Pozn. Při použití výpočtových vztahů byly získány tyto výsledky: reakční síla  $F_A = -96942 \text{ N}$ , bezpečnost prutu  $k = 0,52$ .*



Obrázek 26 Zadání úlohy staticky neurčitě

#### 3.1.4.1 Řešení úlohy přímé staticky neurčitě pomocí programu

Postup při zadávání hodnot se od předchozích úloh prakticky nezmění. V prvním kroku uživatel zadá v seznamu uložení položku *Staticky neurčitě*. Poté postupuje stejným způsobem.



Obrázek 27 Zobrazení náčrtu, vv a uvolnění prutu

Program vykreslí uvolnění prutu a zobrazí výsledné vnitřní účinky (Obrázek 27). A poté se zobrazí formulář s vyhodnocením úlohy (Obrázek 28)

### Slovní hodnocení úlohy

**Rozbor úlohy**

Jedná se o úlohu staticky neurčitou.  $\nu = 1$  ( jedná se o soustavu sil působících na jedné nositelce)

Neznámé parametry :  $NP=(F_A, F_B) = 2 \Rightarrow \mu = 2$

$\mu \cdot \nu = 1 \Rightarrow$  úloha je jedenkrát staticky neurčitá

Proto, abychom mohli dále pracovat, potřebujeme zjistit velikost reakční síly  $F_A$ .  
 K tomu, abychom mohli určit velikost reakční síly  $F_A$ , musíme určit deformační podmínku.  
 Deformační podmínka :  $u_A = 0$   
 Pak velikost reakční síly je možno stanovit ze vztahu (Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty):

$$\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E \cdot S_i} N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_A} = 0$$

Z tohoto vztahu po úpravě dostaneme velikost reakční síly  $F_A = 96948$  [N]  
 Nyní můžeme určit výsledné vnitřní účinky:

**Výsledné vnitřní účinky:**

Prut byl rozdělen pěti řezy

Intervaly pro VÚ :  
 1.  $x = \langle 0 ; 150 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -96948 ; -96948 \rangle$  [N]  
 2.  $x = \langle 150 ; 300 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -46948 ; -46948 \rangle$  [N]  
 3.  $x = \langle 300 ; 350 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle -46948 ; -46948 \rangle$  [N]  
 4.  $x = \langle 350 ; 500 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle 53052 ; 53052 \rangle$  [N]  
 5.  $x = \langle 500 ; 800 \rangle$  [mm] , síly v intervalu :  $F = \langle 53052 ; 53052 \rangle$  [N]

**Napětí a bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:**

Užitý vztah pro výpočet napětí :  $\sigma = \alpha \cdot \frac{N}{S}$  a bezpečnosti  $k = \frac{\sigma_{max}}{Re}$

Maximální napětí působící v prutu je  $\sigma_{max} = 452$  [MPa]  
 Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je :  $k = 0.5$

Zhodnocení: V prutu při takto zadaných hodnotách zatížení a geometrie budou vznikat plastické deformace.  
 Je nutná kontrola na vzpěr !!!

Obrázek 28 Zhodnocení úlohy staticky neurčité

### 3.1.5 Omezení programu

Ačkoli je možno v programu volit libovolné množství působících sil, program je omezen pouze pro zadání prutu, který je maximálně čtyřikrát osazen. Toto je z důvodu definování vrubů. Co se týče vrubů, uživatel musí zadávat součinitel koncentrace napětí ručně. Program nedokáže na základě geometrie vrubu příslušnou hodnotu součinitele dohledat. U úloh se zadaným působením tíhové síly je problematický výpočet posuvu u osazeného prutu. Protože tíhová síla nedosahuje velkých hodnot, pohybují se hodnoty posuvů na mezích intervalů v oblasti setin milimetrů. Vlivem zaokrouhlování během výpočtu může dojít k odchylce několika setin milimetru.

Algoritmus programu je navržen tak, aby se uživatel nemohl vrátit během zadání zpět. Proto musí uživatel důsledně své kroky kontrolovat. Po ukončení výpočtu je nutné program ukončit, aby mohl být započat další výpočet. Je jasné, že tyto věci nejsou pro uživatele příznivé, ovšem hlavní důraz při vypracování byl kladen na výpočtovou část programu.

### **3.1.6 Možnosti dalších úprav programu**

Program by v budoucnu mohl úspěšně řešit inverzní úlohy. V této verzi jsou inverzní úlohy pouze nastíněny jednoduchými výpočty. Je zde možnost rozšířit program o návrh průřezu (editor průřezů) uživatelem. Dále je také možné zlepšit práci s vruby, tedy načítat součinitele koncentrace napětí ze souboru, místo toho, aby je nemusel uživatel zadávat ručně. Dalším problémem, kterým by se mohl program zabývat, je otázka vzpěrné stability. Program v žádném případě nepokrývá celou problematiku prostého tahu a tlaku prutů, a ani se o to nesnaží. Proto je zde ještě široká škála úkonů (snazších i složitých), které by mohl tento program zpracovávat.

## **3.2 Program pro výpočet prutových soustav**

Program je určen pro řešení staticky vně i vnitřně určitých soustav tvořených prutovým tělesem vázaným k základnímu tělesu beze změny teploty jednotlivých prutů soustavy. Výstupem tohoto programu je sestavení matice pro řešení úlohy a stanovení napětí a bezpečnosti jednotlivých prutů soustavy.

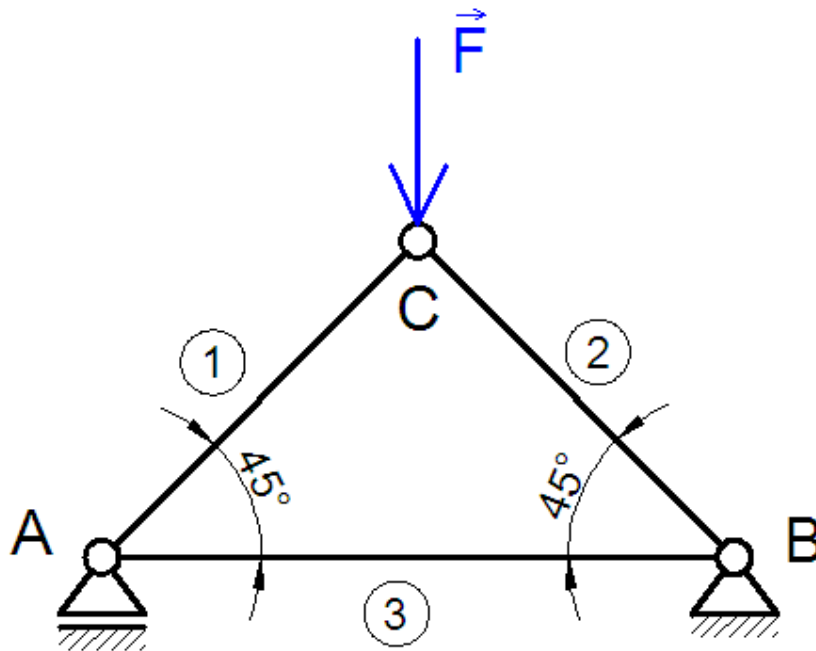
### **3.2.1 Stručný popis programu**

Stejně tak jako předchozí program je i tento rozdělen na několik částí (oblastí). Každá oblast programu slouží uživateli pro zadání geometrie soustavy, zatěžujících sil, popřípadě ke znázornění soustavy v souřadném systému, znázornění uvolnění styčnic soustavy a samozřejmě k vypsání výsledků. Funkce programu bude popsána na dvou jednoduchých příkladech, které budou nejprve řešeny pomocí výpočtových vztahů a poté pomocí programu.

### 3.2.2 Řešení prutové soustavy – úloha první

Formulace problému:

Mějme zadánu prutovou soustavu dle obrázku (Obrázek 29), u které působí síla  $F=10^4 \text{ N}$  na styčník C. Profily prutů jsou kruhového průřezu a průměry prutů jsou:  $d_1=20 \text{ mm}$ ,  $d_2=15 \text{ mm}$  a  $d_3 = 20 \text{ mm}$ . Mez kluzu  $Re = 325 \text{ MPa}$ . Naším úkolem je určit napětí v prutech a zjistit minimální bezpečnost soustavy.



Obrázek 29 Zadání prutové soustavy

#### 3.2.2.1 Řešení soustavy výpočtovými vztahy

Nejprve je nutno zjistit vnitřní a vnější statickou určitost soustavy.

Určení vnější statické určitosti:

Soustava je uložena ve dvou vazbách. Rotační (odebírání dva stupně volnosti) a obecné (odebírání jeden stupeň volnosti). Vnější statická určitost je tedy:

$$s_e = v - \mu = 3 - (2+1) = 0$$

Soustava je tedy vně staticky určitá.

### Určení vnitřní statické určitosti:

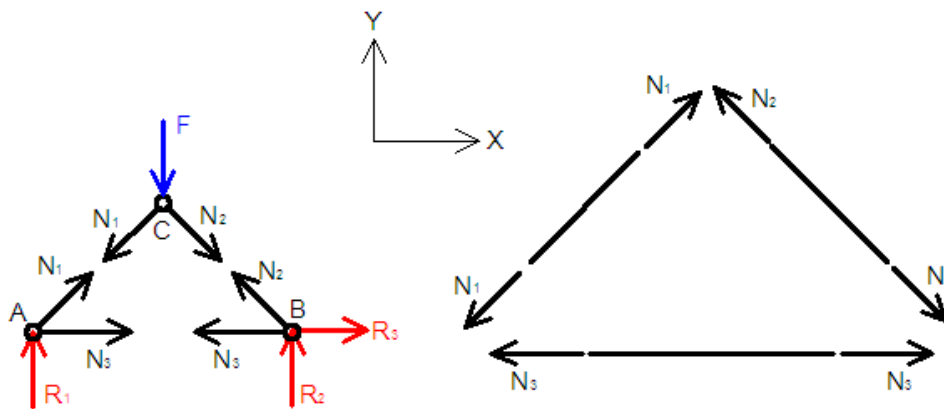
Vnitřní statická určitost se stanoví na základě vztahu:  $s_i = 2*k - p - 3$ , kde  $k$  značí počet styčníků a  $p$  počet prutů soustavy. Ze zadání je zřejmé, že soustava obsahuje 3 pruty (označeny číslem v kroužku) a 3 styčnící (A, B, C), pak platí:

$$s_i = 2*k - p - 3 = 2*3 - 3 - 3 = 0$$

Soustava je teda i vnitřně staticky určitá.

### Uvolnění styčníků a prutů:

Uvolnění styčníků a prutů je provedeno na obrázku (Obrázek 30). Pruty se uvolní na základě zákona akce a reakce.

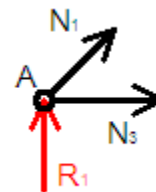


Obrázek 30 Uvolnění styčníků a prutů

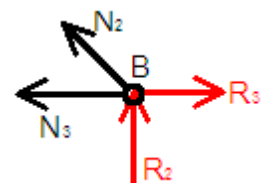
Nyní si pro jednotlivé styčnící vypíšeme soustavy rovnic tak, že si jednotlivé složky normálních sil rozložíme do směrů souřadných os a velikosti sil v prutech řešíme postupnou styčnickovou metodou.

### Rovnice pro stanovení sil ve styčnících:

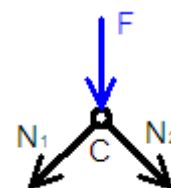
Styčnící A:  $\Sigma F_x = 0$       $N_3 + N_1 * \cos 45^\circ = 0$   
 $\Sigma F_y = 0$       $R_1 + N_1 * \sin 45^\circ = 0$



Styčnící B:  $\Sigma F_x = 0$       $- N_3 - N_2 * \cos 45^\circ + R_3 = 0$   
 $\Sigma F_y = 0$       $R_2 + N_2 * \sin 45^\circ = 0$



Styčnící C:  $\Sigma F_x = 0$       $- N_1 * \cos 45^\circ + N_2 * \cos 45^\circ = 0$   
 $\Sigma F_y = 0$       $- F - N_2 * \sin 45^\circ - N_1 * \sin 45^\circ = 0$



Neznámé parametry jsou  $NP = \{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, R_3\}$ . Získali jsme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých parametrech. Postupným řešením rovnic dostaneme velikosti sil působících na styčníky.

$$N_1 = N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10000 \doteq -7071 \text{ N}$$

$$R_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F\right) = \frac{F}{2} = 5000 \text{ N}$$

$$N_3 = -N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{2} = 5000 \text{ N}$$

$$R_3 = N_3 + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ N}$$

$$R_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot N_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F\right) = \frac{F}{2} = 5000 \text{ N}$$

Síly  $N_i$  působí na styčník. Na prut působí (podle zákona akce a reakce) síla o stejné velikosti, ale opačného znaménka. Tedy síly působící na prut jsou:

$$N_{1p} = -N_1 = 7071 \text{ N}$$

$$N_{2p} = -N_2 = 7071 \text{ N}$$

$$N_{3p} = -N_3 = -5000 \text{ N}$$

Nyní provedeme výpočet plochy průřezů pro každý prut dle vzorce

$$S_i = \frac{\pi}{4} \cdot d_i^2, \quad \text{pro } i = 1,2,3$$

poté můžeme určit plochy průřezů:  $S_1 \doteq 314 \text{ mm}^2$ ,  $S_2 \doteq 177 \text{ mm}^2$ ,  $S_3 \doteq 79 \text{ mm}^2$

Napětí v jednotlivých prutech:

$$\sigma_i = \frac{N_{pi}}{S_i}, \quad \text{pro } i = 1,2,3$$

po dosazení:  $\sigma_1 \doteq 22,5 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 \doteq 39,95 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 \doteq 63,30 \text{ MPa}$  (tlakové)

### Maximální napětí

$$\sigma_{m,ax} = \max (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 63,3 \text{ MPa}$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k = \frac{R_e}{\sigma_{max}} = \frac{325}{63,3} = 5,13$$

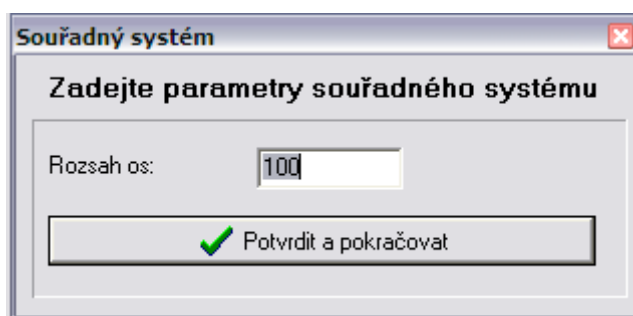
Zhodnocení úlohy:

Z výsledku je patrné, že bezpečnost celé soustavy se rovná bezpečnosti nejvíce namáhaného prutu. Hodnota bezpečnosti  $k > 1$ , tedy nenastane mezní stav pružnosti, ale vzhledem k přítomnosti tlakového namáhání u prutu číslo 3, je nutné provést kontrolu vůči meznímu vztahu vzpěrné stability.

#### **3.2.2.2 Řešení soustavy pomocí programu**

První krok – zadání rozsahu os souřadného systému:

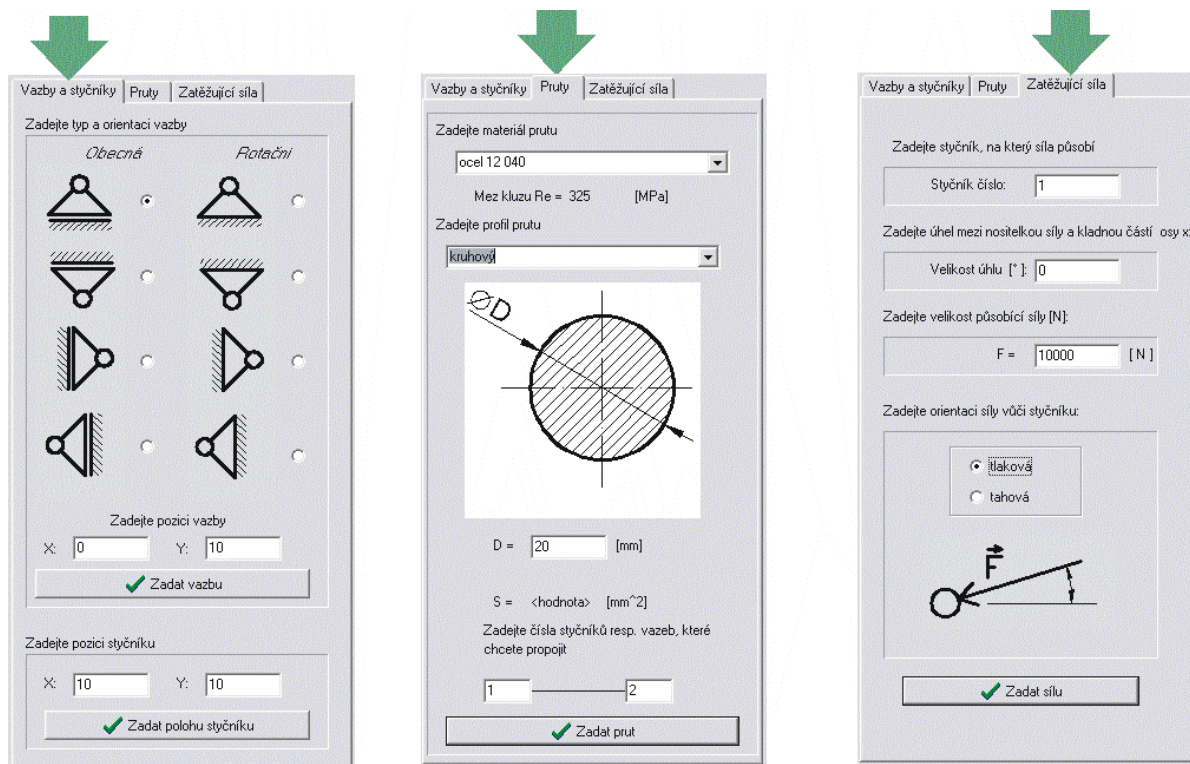
První úkon, který musí uživatel vykonat po spuštění programu je zadání rozsahu os souřadného systému (Obrázek 31). Tento krok je důležitý k tomu, aby byla vytvořena pracovní plocha, na které bude prutová soustava zobrazena.



**Obrázek 31** Zadání souřadného systému

Stiskem tlačítka *Potvrdit a pokračovat* se uživatel dostane do hlavní části programu. V hlavní části programu jsou dva panely. Levý panel (Obrázek 32) slouží k zadávání různých parametrů jako například rozměrů soustavy, zatěžovací síly, materiálu apod. Pravý panel slouží ke grafickým operacím (zobrazení soustavy, uvolnění styčnicků) a především k samotnému výpočtu. Panely jsou dále rozděleny jednotlivými záložkami. Každá záložka má svoji funkci. Tyto funkce budou dále vysvětleny při řešení příkladu.





Obrázek 32 Zobrazení levého panelu se záložkami

Druhý krok – zadání vazeb a styčnicků:

V druhém kroku uživatel zadává geometrii soustavy v záložce *Vazby a styčníky* (Obrázek 32 - vlevo). Na výběr má možnost ze dvou typů vazeb (rotační a obecné). Tyto vazby se mohou zadávat ve čtyřech pozicích. Pozici vazby zadá uživatel do příslušných políček. Po zadání vazby tlačítkem *Zadat vazbu* se v pravém panelu tato vazba objeví v záložce *Náčrt* a zároveň se provede uvolnění vazby v tomtéž panelu v záložce *Uvolnění styčnicků*. Přidáním vazby se také mění hodnota vnější statické určitosti  $s_e$  a hodnota vnitřní statické účinnosti (Obrázek 33). Tyto hodnoty může uživatel kontrolovat přímo pod levým panelem.

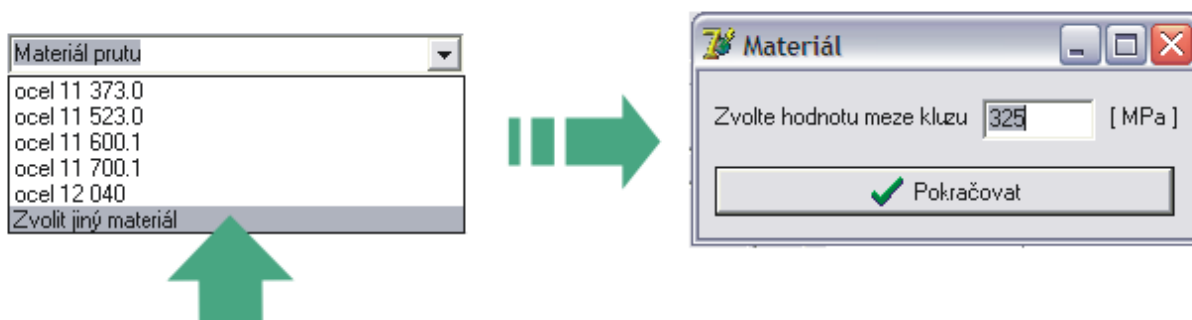
Vnitřní statická určitost		
$2k - 3 = p$	$k = 3$	$p = 0$
$S_i = 2k - 3 - p = 0$		<b><math>S_i = 3</math></b>
Vnější statická určitost		
$\mu = 3$	$\nu = 3$	
$S_e = \nu \cdot \mu = 0$		<b><math>S_e = 0</math></b>

Obrázek 33 Vnější a vnitřní statická určitost

Mimo vazeb se na této záložce definují také pozice dalších styčníků. Ty jsou zároveň také následně zobrazeny v pravém panelu v příslušných záložkách.

#### Třetí krok – zadání prutu:

Pruty uživatel zadává v záložce *Pruty* (Obrázek 32 - uprostřed). Nejprve je nutné zvolit materiál prutu. Na výběr je pět přednastavených materiálů. Pokud uživatel bude požadovat zadání jiné hodnoty, může je sám zadat tak, že v seznamu materiálů vybere položku *Zvolit jiný materiál* (Obrázek 34).



Obrázek 34 Volba materiálu

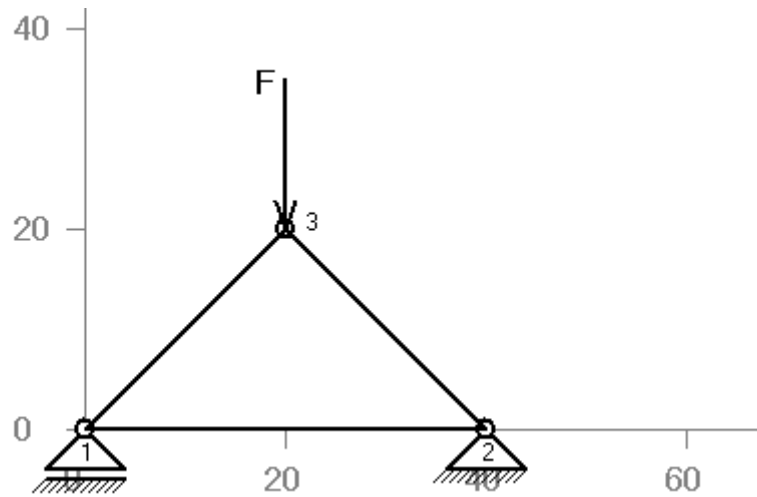
Dalším úkonem je volba průřezu. Průřez může, tak jako materiál, být u každého prutu různý. Nakonec uživatel v příslušných polích zadá čísla styčníků, které chce daným prutem propojit. Po stisknutí tlačítka *Zadat prut* se daný prut vykreslí v záložce *Náčrt* a provede se příslušné uvolnění v záložce *Uvolnění styčníků* v pravém panelu.

#### Čtvrtý krok – zadání sil:

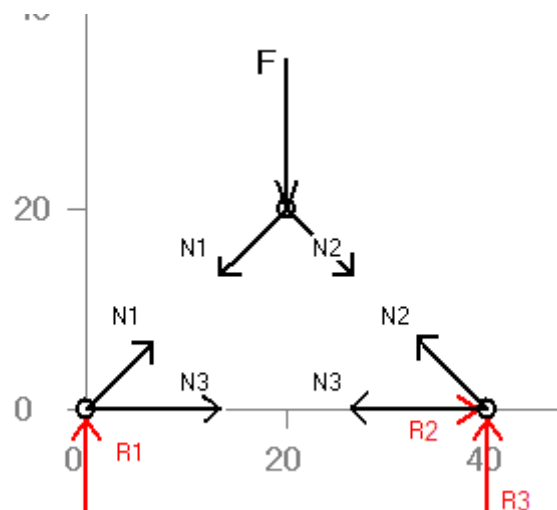
Síly se zadávají v záložce *Zatěžující síla* (Obrázek 32 - vpravo). Uživatel zadá číslo styčniku, ve kterém daná síla působí, úhel, který svírá nositelka síly s kladnou částí osy x, velikost síly a orientaci síly vzhledem ke styčniku. Stiskem tlačítka *Zadat sílu* se opět síla zobrazí na příslušných místech v pravém panelu.

#### Pátý krok – náčrt a uvolnění:

Zatímco uživatel v krocích 2-4 zadával parametry soustavy, program zobrazil náčrt (Obrázek 35) a uvolnění soustavy (Obrázek 36).



Obrázek 35 Náčrt soustavy



Obrázek 36 Uvolnění soustavy

Šestý krok – vypsání matice:

Vypsání matice (Obrázek 37) se provede po stisknutí tlačítka *Vypsat matici* v pravém panelu v záložce *Matice*. Prvky prvního sloupce matice udávají číslo styčnicku a osu, do které byly síly rozloženy. První řádek (od prvku [1,2]) udává vektor silových působení  $N_i$  a  $R_i$  (reakční síly ve vazbách) s působišti ve styčnicích.

### Matice směrových kosínů nositelek sil :

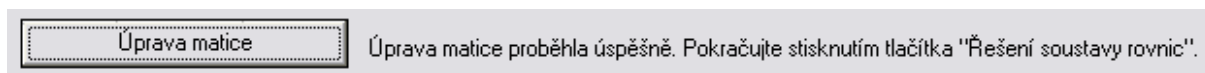
$$A =$$

	[N1]	[N2]	[N3]	[R1]	[R2]	[R3]
1 ) x:	0.707	0	1	0	0	0
1 ) y:	0.707	0	0	1	0	0
2 ) x:	0	-0.707	-1	0	1	0
2 ) y:	0	0.707	0	0	0	1
3 ) x:	-0.707	0.707	0	0	0	0
3 ) y:	-0.707	-0.707	0	0	0	0

Obrázek 37 Matice směrových kosínů nositelek sil

#### Sedmý krok – úprava matice, řešení soustavy rovnic

Stisknutím tlačítka *Úprava matice* program provede dané úkony proto, aby mohla být soustava rovnic vyřešena. Uživatel nemá možnost vidět jakékoliv změny. Ovšem po stisknutí tlačítka se objeví hlášení, zda operace proběhla úspěšně (Obrázek 38).



Obrázek 38 Úprava matice

Jakmile proběhne úspěšná úprava, program zpřístupní tlačítko *Řešení soustavy rovnic*. Po stisku tlačítka opět program vykoná zadané operace a zobrazí hlášku (Obrázek 39), zda operace proběhla úspěšně. Uživatel v tomto kroku opět nezaznamená žádné změny. Tato dvě tlačítka mají pro chod programu rozhodující vliv, proto o nich bude ještě zmíněno v kapitole 3.2.5.



Obrázek 39 Řešení soustavy rovnic

### Osmý krok – zobrazení výsledků

Výsledky budou zobrazeny po stisknutí tlačítka *Zobrazení výsledků* v záložce *Výsledky*.

Program provede následující výpis.

```
Prut číslo: 1
-----
Síla v prutu N = 7072.14 [N]
Mez kluzu Re = 325 [MPa]
Plocha prutu S = 314 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 22.52 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 14.43 [-]
-----

Prut číslo: 2
-----
Síla v prutu N = 7072.14 [N]
Mez kluzu Re = 325 [MPa]
Plocha prutu S = 177 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 39.96 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 8.13 [-]
-----

Prut číslo: 3
-----
Síla v prutu N = -5000 [N]
Mez kluzu Re = 325 [MPa]
Plocha prutu S = 79 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 63.29 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 5.14 [-]
Nutno provést kontrolu na vzpěr !!!
-----

Minimální bezpečnost k = 5.14

V žádném prutu nedojde k překročení mezního stavu pružnosti
```

Obrázek 40 Výpis programu

### Zhodnocení:

Výsledky řešení soustavy pomocí programu a pomocí výpočtových vztahů se liší v setinách, což je způsobeno zaokrouhlováním. Tento rozdíl je zanedbatelný a výsledek programu je proto přijatelný.

### **3.2.3 Řešení prutové soustavy - úloha druhá**

Tato úloha má za úkol dokázat, že program skutečně funguje a zvládne změny nastavení. Bude opět řešena pomocí výpočtových vztahů a pomocí programu, ale mnohé kroky budou

vynechány, protože byly již popsány v kapitole 3.2.2.2. Algoritmy řešení zůstávají nezměněny. Uvolnění soustavy bude uvedeno přímo v zadání.

Formulace problému:

Mějme prutovou soustavu (Obrázek 41). Na styčnick C působí síla  $F = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$  pod úhlem  $180^\circ$  vůči kladné části osy X. Pruty jsou kruhového průřezu. Jestliže pro jednotlivé pruty platí:

$$d_1 = 20 \text{ mm}, R_{e1} = 235 \text{ MPa},$$

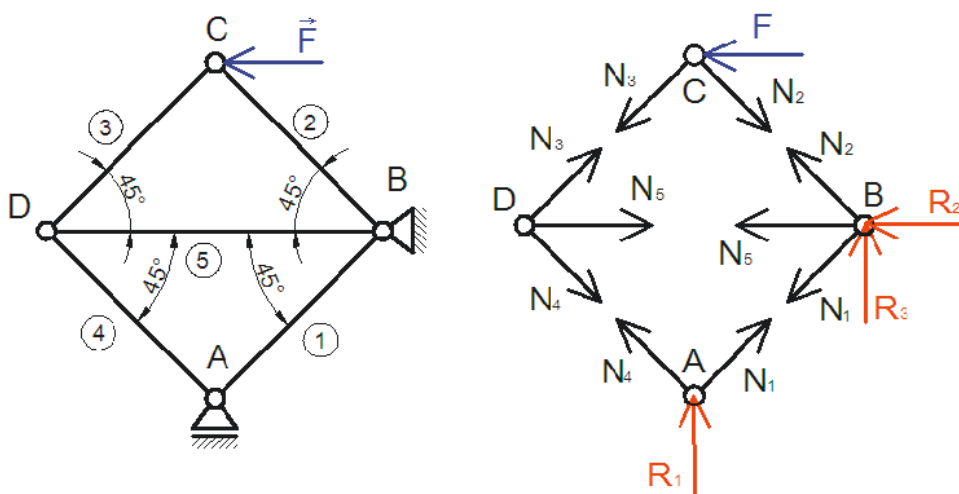
$$d_2 = 18 \text{ mm}, R_{e2} = 257 \text{ MPa},$$

$$d_3 = 20 \text{ mm}, R_{e3} = 325 \text{ MPa},$$

$$d_4 = 17 \text{ mm}, R_{e4} = 270 \text{ MPa},$$

$$d_5 = 21 \text{ mm}, R_{e5} = 345 \text{ MPa},$$

je naším úkolem zjistit napětí v prutech a minimální bezpečnost soustavy.



Obrázek 41 Zadání prutové soustavy a uvolnění styčnicků

Určení vnější statické určitosti:

$$s_e = v - \mu = 3 - (2+1) = 0$$

Soustava je vně staticky určitá.

Určení vnitřní statické určitosti:

$$s_i = 2 \cdot k - p - 3 = 2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0$$

Soustava je tedy i vnitřně staticky určitá.

### 3.2.3.1 Řešení prutové soustavy pomocí výpočtových vztahů

Protože již byla ověřena statická vnitřní i vnější určitost a bylo předeno uvolnění styčnicků, můžeme přistoupit k vypsání rovnic pro určení statické rovnováhy každého styčnicku.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Styčnick A:} & \Sigma F_x = 0 \quad -N_4 \cdot \cos 45^\circ + N_1 \cdot \cos 45^\circ = 0 \\
 & \Sigma F_y = 0 \quad N_4 \cdot \sin 45^\circ + R_1 + N_1 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\
 \text{Styčnick B:} & \Sigma F_x = 0 \quad -R_2 - N_5 - N_2 \cdot \cos 45^\circ - N_1 \cdot \cos 45^\circ = 0 \\
 & \Sigma F_y = 0 \quad R_3 + N_2 \cdot \sin 45^\circ - N_1 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\
 \text{Styčnick C:} & \Sigma F_x = 0 \quad -N_3 \cdot \cos 45^\circ + N_2 \cdot \cos 45^\circ - F = 0 \\
 & \Sigma F_y = 0 \quad -N_3 \cdot \sin 45^\circ - N_2 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\
 \text{Styčnick D:} & \Sigma F_x = 0 \quad N_5 + N_3 \cdot \cos 45^\circ + N_4 \cdot \cos 45^\circ = 0 \\
 & \Sigma F_y = 0 \quad N_3 \cdot \sin 45^\circ - N_4 \cdot \sin 45^\circ = 0
 \end{array}$$

Postupným řešením těchto rovnic obdržíme tabulku hodnot (Tabulka 1):

**Tabulka 1** Tabulka hodnot pro úlohu 3.2.3

Prut [ - ]	Síla ve styčnicku [ N ]	Síla v prutu [ N ]	Plocha průřezu prutu [ mm <sup>2</sup> ]	Mez kluzu [ MPa ]	Napětí v prutu [ MPa ]	Bezpečnost prutu [ - ]
1	-14142	14142	314	235	45,04 (tah)	5,22
2	14142	-14142	254	257	55,68 (tlak)	4,62
3	-14142	14142	314	325	45,04 (tah)	7,22
4	-14142	14142	227	270	62,30 (tah)	4,33
5	20000	-20000	346	345	57,80 (tlak)	5,97

Z tabulky (Tabulka 1) je zřejmé, že minimální bezpečnost prutové soustavy je  $k=4,33$  u prutu číslo 4 (označeno žlutou barvou). Dále je nutné provést kontrolu vůči meznímu stavu vzpěrné stability u prutů 2 a 5 (označeno červenou barvou).

### 3.2.3.2 Řešení prutové soustavy pomocí programu

Tak jako u kapitoly 3.2.3.1, tak i zde bude pouze proveden výpis výsledných hodnot, který bude sloužit k porovnání výsledků.

```

Prut číslo: 1
-----
Síla v prutu N = 14144.27 [N]
Mez kluzu Re = 235 [MPa]
Plocha prutu S = 314 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 45.05 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 5.22 [-]
-----

Prut číslo: 5
-----
Síla v prutu N = -20000 [N]
Mez kluzu Re = 345 [MPa]
Plocha prutu S = 346 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 57.8 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 5.97 [-]
Nutno provést kontrolu na vzpěr !!!
-----

Prut číslo: 2
-----
Síla v prutu N = -14144.27 [N]
Mez kluzu Re = 257 [MPa]
Plocha prutu S = 254 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 55.69 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 4.61 [-]
Nutno provést kontrolu na vzpěr !!!
-----

Prut číslo: 3
-----
Síla v prutu N = 14144.27 [N]
Mez kluzu Re = 325 [MPa]
Plocha prutu S = 314 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 45.05 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 7.21 [-]
-----

Prut číslo: 4
-----
Síla v prutu N = 14144.27 [N]
Mez kluzu Re = 270 [MPa]
Plocha prutu S = 227 [mm^2]
Napětí v prutu Sigma = 62.31 [MPa]
Bezpečnost prutu k = 4.33 [-]
-----

Minimální bezpečnost k = 4.33
V žádném prutu nedojde k překročení mezního stavu pružnosti

```

Obrázek 42 Výpis hodnot z programu

### Zhodnocení:

Porovnáním tabulky (Tabulka 1) a obrázku (Obrázek 42), který znázorňuje výsledky získané programem, zjistíme, že se hodnoty téměř shodují. Odchyłka je způsobena zaokrouhlením. Výsledek můžeme považovat za dostatečně přesný.

### **3.2.4 Složitější typy prutových soustav**

Program zvládne řešit i komplikovanější staticky vnitřně i vně určité soustavy prutů. Řešení bude demonstrováno na dvou soustavách. Tato řešení jsou k dispozici na příloženém CD ve složce *Řešené příklady*.

### **3.2.5 Použité algoritmy pro řešení prutových soustav**

Po sestavení matice směrových kosinů nositelek sil (Obrázek 37), je zřejmé, že tato matice je řídkou maticí soustavy. Protože snahou je použít pro řešení soustavy rovnic přímý chod



Gaussovy eliminační metody (dále GEM viz [4]) , musí se zajistit, aby matice směrových kosinů nositelek sil (dále jen MSK) měla na hlavní diagonále nenulové prvky, tedy matice musí být regulární. Proto byl napsán jednoduchý algoritmus, který má za úkol seřadit řádky MSK tak, aby bylo dosaženo této podmínky. Ačkoliv je tento algoritmus jednoduchý, počet operací, které musí vykonat je poměrně velký a u matic vyšších řádů může tato operace trvat i několik sekund. Také se může stát, že u složitějších typů matic bude muset být tento algoritmus aktivován několikrát. Aktivace proběhne po stisknutí tlačítka *Úprava matice* v pravém panelu v záložce *Matice*. Pokud algoritmus proběhne správně, umožní program uživateli dále postupovat zpřístupněním tlačítka *Řešení soustavy rovnic*. Na tomtéž panelu a záložce. Je ale možné, u některých typů soustav, že program MSK nedovede uspořádat resp. MSK u těchto typů příkladu nelze uspořádat podle hlavní diagonály a výpočet je přerušen, protože by v příštích operacích program mohl havarovat. V tom případě je nutné práci přerušit a modifikovat zadání úlohy. Havárie hrozí při aktivaci algoritmu pro řešení soustavy lineárních rovnic přímým chodem GEM. Podmínkou úspěšného vykonání GEM je přítomnost nenulových prvků na hlavní diagonále matice na začátku, ale i v průběhu výpočtu. V případě výskytu nulového prvku, algoritmus selže a vypíše varovné hlášení. Uživatel poté musí program přerušit a znovu modifikovat zadání.

### **3.2.6 Omezení programu**

Hlavní omezení programu spočívá v jeho podstatě, tedy řešení pouze staticky určitých prutových soustav. Další omezení je použitý algoritmus (viz kapitola 3.2.5) a nemožnost výsledky uložit do souboru (je možné jen zkopírování do schránky a následné vložení výsledků) a vracet se v zadání.

### **3.2.7 Možnosti rozšíření programu**

Program je v budoucnu možné vylepšit tak, že se bude moci optimalizovat. Jak rychlost, tak i použité algoritmy. Dále bude také rozšířit program tak, aby řešil i prutové soustavy neurčité, ačkoliv toto řešení bude značně složité. Samozřejmě je také možnost vylepšení uživatelského prostředí a odstranit například omezení (velikost náčrtu) týkající se zadávání soustav.

## 4. Závěr

Cílem této práce bylo sestavit funkční programy, které by řešily příklady z oblasti prostého tahu a tlaku a prutových soustav. Tyto programy byly podrobně popsány, v předcházejících kapitolách a zároveň byl na jednotlivých příkladech ukázán manuál, jak s programy pracovat.

Program pro řešení prostého tahu a tlaku prutu dokáže řešit dva typy úloh (přímou a inverzní) a dokáže pracovat se třemi typy uložení prutu (staticky určité, staticky podmíněně neurčité a staticky neurčité uložení). V programu je možno zadat 4x osazené pruty (což byl domluvený počet osazení), ovšem jednoduchou úpravou lze zařídit, aby uživatel mohl volit libovolný počet osazení. Počet sil, které může uživatel zadat je neomezený. Dále je možné zvolit, zda se bude do výpočtu zahrnovat tíhová síla a vliv teploty. Poté, co uživatel dokončí zadání úlohy a zvolí výpočet, program sám určí o jaký typ úlohy a uložení se jedná (popřípadě vypíše deformační podmínku), provede vlastní výpočet, celkové uvolnění prutu, vykreslení výsledných vnitřních účinků a zobrazí výslednou zprávu, kde je shrnut postup řešení úlohy a její výsledek.

Program pro řešení staticky určitých prutových soustav umožní zadávat jednoduché i složitější prutové soustavy. Uživatel má možnost volit tolik sil, kolik soustava obsahuje styčnicků. Po zadání geometrie a zatížení soustavy program provede uvolnění styčnicků a vypíše matici směrových kosinů. Poté tuto matici, která představuje soustavu lineární rovnic, řeší a zobrazí výsledky. Cílem je určit minimální bezpečnost soustavy. Poté, co program zhodnotí výsledky a určí, že daný prut je namáhán na vzpěr, zobrazí varování, které uživatele upozorní, že má být vykonána kontrola vůči meznímu stavu vzpěrné stability.

## 5. Bibliografie

1. **Janíček, Přemysl, et al.** *MECHANIKA TĚLES PRUŽNOST A PEVNOST I.* Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
2. **Horníková, Jana and Šandera, Pavel.** *PRUŽNOST A PEVNOST.* [Interaktivní opora] BRNO : s.n., 2003. ISBN: 80-7204-268-8.
3. **Janíček, Přemysl and Florian, Zdeněk.** *MECHANIKA TĚLES ÚLOHY Z PRUŽNOSTI A PEVNOSTI I.* Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2004. ISBN 80-214-2655-1.
4. **Čermák, Libor and Hlavička, Rudolf.** *NUMERICKÉ METODY.* Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2008. ISBN 978-80-214-3752-4.
5. **Kadlec, Václav.** *UČÍME SE PROGRAMOVAT V DELPHI A JAZYCE OBJECT PASCAL.* Praha : Computer Press, 2001. ISBN 80-7226-245-9.

## 6. Seznam použitých zkratek a symbolů

Zkratka	Význam	
MSK	Matice směrových kosinů	
GEM	Gaussova eliminační metoda	
SE	Statická ekvivalence	
VVÚ	Výsledné vnitřní účinky	

Symbol	Význam	Jednotka
$\alpha$	Součinitel koncentrace napětí	[-]
$\gamma_{ij}$	Skosy	[-]
$\delta$	Velikost vůle	[mm]
$\varepsilon_x$	Délkové přetvoření	[-]
$\rho$	Hustota materiálu	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Napětí	[MPa]
$\sigma_{ex}$	Extrémní napětí	[MPa]
$\psi$	Označení příčného průřezu	
$\omega$	Označení střednice prutu	
$d$	Průměr prutu	[mm]
$g$	Gravitační zrychlení	[m/s <sup>2</sup> ]
$k$	bezpečnost	[-]
$u$	Posuv bodu střednice	[mm]
$E$	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
$F$	Zatěžující síla	[N]
$N$	Normální síla	[N]
$R_e$	Mez kluzu	[MPa]
$S$	Plocha	[mm <sup>2</sup> ]
$T$	Těžiště příčného průřezu	

## 7. Seznam obrázků

Obrázek 1 Zobrazení střednice a příčného průřezu.....	13
Obrázek 2 Souvislý a nesouvislý průřez .....	13
Obrázek 3 Zobrazení elementárního prvku a tenzoru napětí u prutové napjatosti.....	14
Obrázek 4 Znázornění geometrických vztahů (převzato z [2]).....	15
Obrázek 5 Uvolnění prvku (převzato z [2]) .....	16
Obrázek 6 Průběh napětí v kořeni vrubu (převzato z [2]).....	17
Obrázek 7 Soustavy tvořené prutovým tělesem vázané k základnímu členu .....	18
Obrázek 8 Zadání úlohy přímé staticky určité .....	20
Obrázek 9 Znázornění intervalů a uvolnění prvků prutu .....	21
Obrázek 10 Grafické zobrazení výsledných vnitřních účinků .....	22
Obrázek 11 Volba typu úlohy a uložení prutu .....	23
Obrázek 12 Volba materiálu .....	24
Obrázek 13 Fyzikální veličiny .....	24
Obrázek 14 Volba geometrie prut .....	25
Obrázek 15 Zadání vrubů .....	26
Obrázek 16 Zadání sil .....	26
Obrázek 17 Zobrazení uvolnění a VVÚ .....	27
Obrázek 18 Výsledná zpráva.....	27
Obrázek 19 Grafické zadání prutu.....	28
Obrázek 20 Rozdělení prutů na intervaly a znázornění řešení VVÚ .....	28
Obrázek 21 Částečné uvolnění prutu .....	29
Obrázek 22 Zobrazení výsledných vnitřních účinků.....	30
Obrázek 23 Zadání hodnoty velikosti vůle.....	32
Obrázek 24 Znázornění náčrtu, vvú a uvolnění prutu .....	32
Obrázek 25 Slovní hodnocení úlohy staticky podmíněně neurčité .....	33
Obrázek 26 Zadání úlohy staticky neurčité .....	34
Obrázek 27 Zobrazení náčrtu, vvú a uvolnění prutu .....	34
Obrázek 28 Zhodnocení úlohy staticky neurčité.....	35
Obrázek 29 Zadání prutové soustavy .....	37
Obrázek 30 Uvolnění styčniců a prutů.....	38
Obrázek 31 Zadání souřadného systému.....	40
Obrázek 32 Zobrazení levého panelu se záložkami .....	41

Obrázek 33 Vnější a vnitřní statická určitost .....	41
Obrázek 34 Volba materiálu .....	42
Obrázek 35 Náčrt soustavy .....	43
Obrázek 36 Uvolnění soustavy .....	43
Obrázek 37 Matice směrových kosinů nositelek sil .....	44
Obrázek 38 Úprava matice .....	44
Obrázek 39 Řešení soustavy rovnic .....	44
Obrázek 40 Výpis programu .....	45
Obrázek 41 Zadání prutové soustavy a uvolnění styčnicků .....	46
Obrázek 42 Výpis hodnot z programu .....	48

## 8. Seznam tabulek

Tabulka 1 Tabulka hodnot pro úlohu 3.2.3.1 .....	47
--	----

## 9. Přílohy

K práci je přiloženo CD s elektronickou verzí práce, programy, řešenými úlohami a zdrojovými kódy programů.